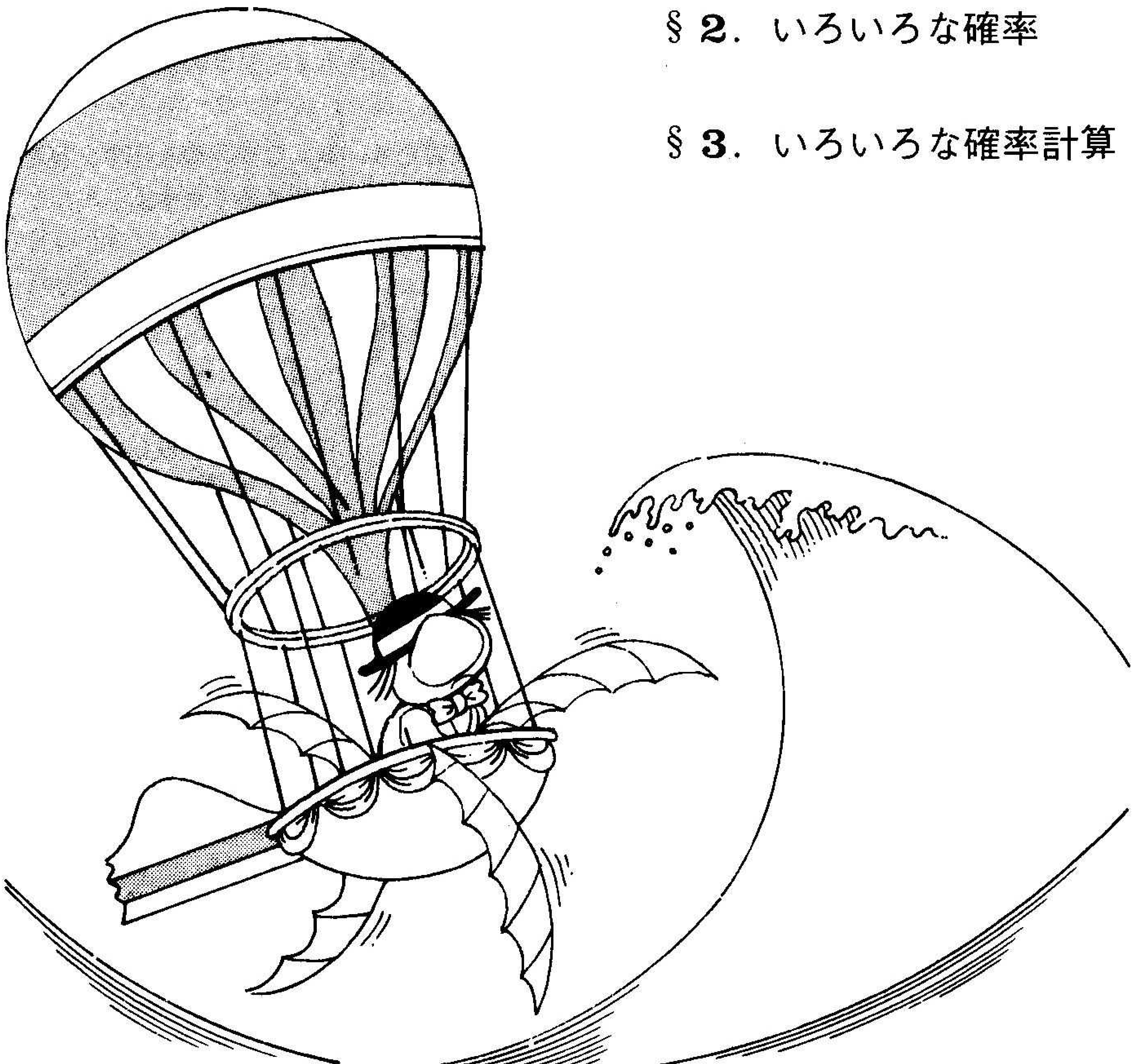
第2章

確　　　率



○根元事象とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆根元事象とは，また，なんというセンスのない用語であろう。コンゲン!! 耳で聞いただけでわかる人はあるまい。

◆ サイコロを振って目が出る，硬貨を投げて表が出たり裏が出たり，ゲームして負けたり勝ったり，……このようなことがらを**事象**といいます。そして，もっとも単純な事象を**根元**（コンゲン）**事象**といいます。なお，このように，あることを**する**，**やる**，**行う**，これを**試行**といいます。

たとえば，サイコロを振ってどの目が出るか，ということを行ったとき

≪1の目が出る≫
≪2の目が出る≫
………
≪6の目が出る≫

という事象はすべて根元事象です。

*　*　*

■**練習 1.** 硬貨を1つ投げて，表が出るか裏が出るか調べるとき，根元事象は何か。

ヒント　もちろん
≪表が出る≫　≪裏が出る≫
という事象が根元事象です。

■**練習 2.** サイコロを2つ投げて出る目の出方を調べる試行で，根元事象は何か。

ヒント　A，B 2つのサイコロを投げて出る目の出方は下の表に示すように 6×6 通りあります。これが根元事象です。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

■**練習 3.** サイコロを2つ投げて出る目の和を調べる試行で，根元事象は何か。

ヒント　目の和は 2，3，4，…，12 あるからといって，これを根元事象といってはいけません。目の和が3になるのは1と2，2と1の2通りあるからです。したがって，根元事象はやはり36通り，左下の表で示されます。

■**練習 4.** 3枚の硬貨を投げたとき，表が出たり，裏が出たりする。この試行で根元事象は何か。

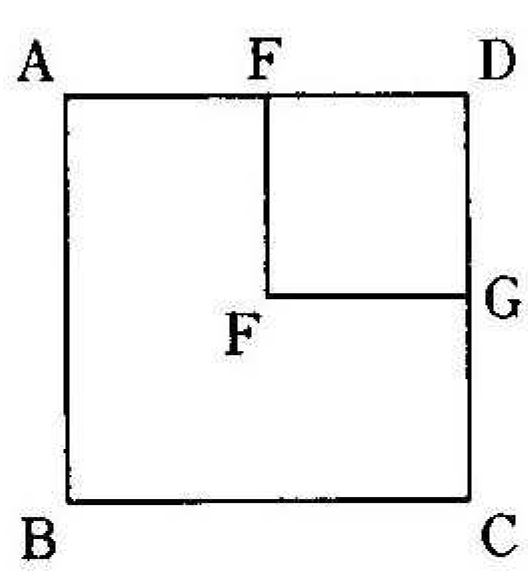
ヒント　硬貨をA，B，Cで，表を○で，裏を×で示すと，下の8通りあります。

A　○○○×○×××
B　○○×○×○××
C　○×○○××○×

*　*　*

◆ 上の場合，各根元事象はすべて同じ確率で出ました。つまり，**同じ確からしさ**で起きています。しかし，そうきまっているわけではありません。たとえば，直方体の（そして立方体でない）サイコロを作れば，各面が，したがって，各目が同じわりあいで起こるわけではありません。しかし，これとても，各面の出る力学的機構がわかってしまえば等しい確率であらわれる事象，つまり根元事象に分けることができます。ところで，次の根元事象はなんでしょうか。

■**練習 5.** 右の正方形 ABCD において EFGD の部分は赤く，他は白く塗ってある。この中から任意に1点



をとるとき，赤である事象と白である事象は根元事象か。

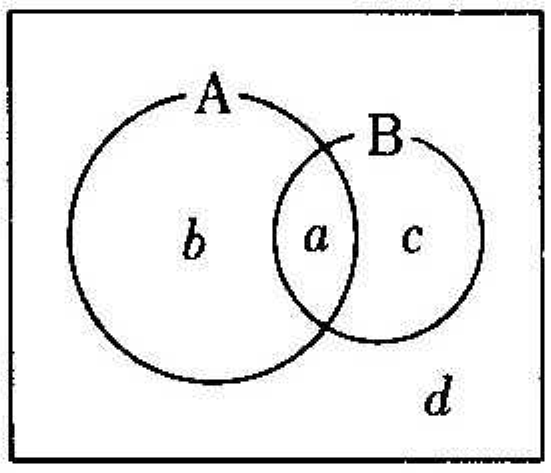
ヒント　これは，任意に1点を選ぶという事象を根元事象とみるべきです。これはみんな等しい確率で起きるでしょう。しかし，赤い点（実は赤い領域の点）をとる確率は4分の1しかありません。

＊　＊　＊

◆ では，今少し深く入った練習をやってみませんか。

■練習 6. 2つの事象A，Bに対して，事象 $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ の根元事象の数はそれぞれ a, b, c, d であるという。A，Bが互いに独立であるとき，a, b, c, d の間の関係を求めよ。

ヒント　ベン図で表してみますと右のようになります。A，Bが互いに独立というのですから



$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

（☞p.78），したがって，求める関係は

$$ad=bc$$

です。

■練習 7. 3個の赤球，2個の白球から3個とり出す試行において，少なくとも1つは白である事象Aを考える。

(1) この試行において，標本空間を適当な記号で表せ。

(2) (1)の根元事象からAに属するものを選べ。

ヒント　赤であることを r で表せば，3つありますから r_1, r_2, r_3 とすることができましょう。白であることを w で表せば，2つありますから w_1, w_2 とすることができましょう。すべての根元事象の集合，それが標本空間ですから，標本空間は

$\{\{r_1, r_2, r_3\}$, $\{r_1, r_2, w_1\}$, $\{r_1, r_2, w_2\}$, $\{r_2, r_3, w_1\}$, $\{r_2, r_3, w_2\}$, $\{r_1, r_3, w_1\}$, $\{r_1, r_3, w_2\}$, $\{r_1, w_1, w_2\}$, $\{r_2, w_1, w_2\}$, $\{r_3, w_1, w_2\}\}$

で与えられます。そして，Aに属するもの，すなわち，少なくとも1つ白の入っているのは上の集合から $\{r_1, r_2, r_3\}$ を除いたものであることがわかります。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を：──

■練習 8. 同じように確からしい根元事象 m 個よりなる全事象を，Aとその余事象 $\overline{A}$ に，またBとその余事象 $\overline{B}$ に分類したら

$n(A\cap B)=a$, $n(A\cap\overline{B})=b$,
$n(\overline{A}\cap B)=c$, $n(\overline{A}\cap\overline{B})=d$

となった。ただし，有限集合Dに属する根元事象の個数を $n(D)$ で表す。

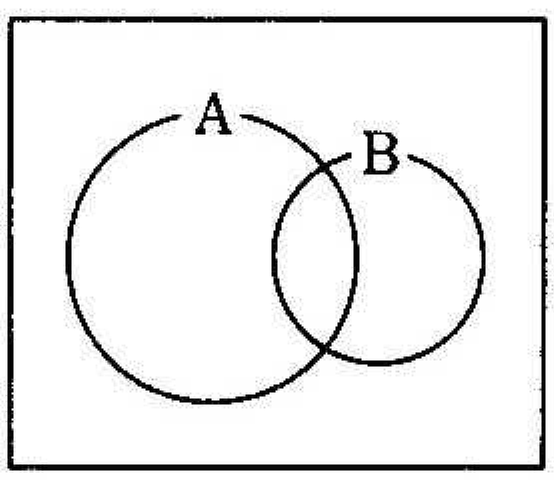
(1) $n(A)$, $n(\overline{A})$, $n(B)$, $n(\overline{B})$ を a, b, c, d を用いて表せ。

(2) 確率 $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ を a, b, c, d を用いて表せ。

(3) $P(A)\neq 0$ であるとき，条件つき確率 $P_A(B)$（☞p.82）を求めよ。

（鳥取大）

ヒント　練習6.より一段複雑になっていますが，本質的に変わりはありません。



(1) $n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap\overline{B})$

ですから　$n(A)=a+b$

です。また

$n(\overline{A})=n(\overline{A}\cap B)+n(\overline{A}\cap\overline{B})=c+d$

$n(B)$, $n(\overline{B})$　も同様です。

(2) $P(A\cap B)=\dfrac{a}{m}$, $P(A)=\dfrac{a+b}{m}$

$P(B)=\dfrac{a+c}{m}$ はいうまでもなし。

(3) $P_A(B)$ はAが起こっているときにBの起こる確率ですから $\dfrac{a}{a+b}$ です。

○確率とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率をまちがえて確立と書く人が驚くほど多い。しかし，これでは意味がまったくちがいます。漢語をやめて，確からしさとするか!!

◆ 確率にはいろいろと難しいことがあります。そのために，確率の定義そのものも，数学的確率，統計的確率，心理的確率といったものが提出されています。しかし，ここで扱うのは，その中の数学的確率だけなのです。

＊　＊　＊

起こり得る場合の数をNとし，どの場合も同様に確からしく，しかも，事象Eの起こる場合の数がkであるとき，Eの起こる確率$P(\mathrm{E})$を$\dfrac{k}{N}$で定義します。つまり，

$$\boldsymbol{P(\mathrm{E})=\frac{k}{N}}$$

このことを，ふつう簡単に「**全体の数で，アタリの数を割ったものが確率である**」といったいい方をします。

では，次の練習をやってみませんか。

練習 1. 男5人，女5人の中から2人選ぶとき，2人とも男である確率を求めよ。

ヒント　全体の場合の数は10人の中から2人選ぶのですから ${}_{10}C_2$（通り）あります。また，2人とも男というのは5人の中から2人選ぶことになりますから ${}_5C_2$（通り）あります。つまり，アタリの場合は ${}_5C_2$；したがって，求める確率は

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\dfrac{5\cdot4}{1\cdot2}}{\dfrac{10\cdot9}{1\cdot2}}=\frac{5\cdot4}{10\cdot9}=\frac{2}{9}$$

です。　　答 $\dfrac{2}{9}$

練習 2. 男5人，女5人の中から3人選ぶとき，女2人，男1人である確率を求めよ。

ヒント　男5人，女5人，合計10人の中から3人を選ぶ仕方は

$${}_{10}C_3\text{（通り）}$$

あります。

次に，女2人，男1人選ぶ仕方は

$${}_5C_2\times{}_5C_1\text{（通り）}$$

あります。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_5C_2\times{}_5C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{\dfrac{5\cdot4}{1\cdot2}\times\dfrac{5}{1}}{\dfrac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}}$$

$$=10\times5\times\frac{2\cdot3}{10\cdot9\cdot8}=\frac{5}{12}$$

となります。　　答 $\dfrac{5}{12}$

練習 3. 10人の中から4人選ぶとき，特定の2人が入っている確率を求めよ。

ヒント　全体の場合の数は10人の中から4人選ぶのですから ${}_{10}C_4$（通り）あります。

また，アタリの場合は10人の中から特定の2人を除いた8人の中から2人を選び，それにその2人をつけ加えてやればいいのですから ${}_8C_2$（通り）あります。

よって，求める確率は

$$\frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\times\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{2}{15}$$

答 $\dfrac{2}{15}$

注　こういう問題をやると，きまったように，こんな質問をする人がある。特定の2人を選ぶ仕方 ${}_{10}C_2$ を掛けなければならないのではないか，というのです。しかし，特定の2人というのは，すでに10人の中できまってしまっていると考える約束なのです。

＊　＊　＊

◆ ところで，確率を計算するとき，大切な定理が2つあります。それは，**和の法則** と **積の法則** です。これについては（☞p.80～83）を参照のこと。

ここでは，確率に関係する事象について考えておくことにしましょう。

まず，第1は独立事象と従属事象です。

事象Eが起こることが，事象Fの起こる確率に影響しないとき，つまり，事象Eと事象Fが無関係のとき，EとFは **独立事象** であるといいます。独立事象でないなら，この2つE，Fは **従属事象** であるといいます。

■練習 4. 8人の中から3人を選ぶとき，A君が選ばれることと，B君が選ばれることは独立事象であるか。

ヒント　A君が選ばれることと，B君が選ばれることと無関係であるなら独立だということはわかります。しかし，Aが選ばれてしまうと，Bが選ばれる見込みは減ってくると考えると独立ではなさそうだし，3人を選ぶとき，A，Bがまったく同等で一方が他方に従属しているようには考えられない，というようなことにもなります。

こうしたことが，確率の問題をめんどうにしてしまうのです。（確率の研究がパスカルやデカルトやスピノザなどで中心に始められたとき，こうしたことは大きな難問であったらしい）

実は，

事象Aと事象Bが独立なら

$$\boldsymbol{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})}$$

なる関係が成り立つのです。そして，この関係が成り立つか否かが，独立か否かのキメテになるのです。ちょっと，この場合について当たってみましょう。

AもBも選ばれる確率は

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{6}{1}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3}{8\cdot7\cdot6}=\frac{3}{28}$$

です。また，8人の中から3人選ぶときAの選ばれる確率は $\frac{3}{8}$，Bの選ばれる確率も $\frac{3}{8}$ ですから，その積は

$$P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})=\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$$

つまり　$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$

すなわち，独立事象ではないのです。

＊　＊　＊

◆ 第2は，独立試行の確率です。1回の試行で，事象Eの起こる確率が p であるとき，この試行を n 回くり返すなら，この事象が r 回起こる確率は

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}}$$
（ただし，$q=1-p$，$r=0, 1, \cdots, n$）

となります。

この説明をするより，具体的な問題をやったほうがいいでしょう。

■練習 5. サイコロを4回振って1がちょうど3回出る確率を求めよ。

ヒント　1が出るのを○で表し，1が出ないのを×で表しますと

○○○×，○○×○，○×○○，×○○○

の4つの場合があります。つまり4回のうち1が出ない場合1つを選ぶ仕方 ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあるわけ。あるいは○が3つ，×が1つ，これをコトゴトクとって1列に並べる仕方は

$$\frac{4!}{3!1!}=4$$

で与えられるのであった。（☞ p.32）

そして，この4つがいずれも

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$$

で与えられるのですから，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{4\cdot5}{6^4}=\frac{5}{324}$$

であることがわかります。

もう1つ期待値のことがあります。これについては（☞ p.90）。

① 確率における和の法則

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率における和の法則はときにマチガイのもとになる。それは，うっかり重複して数えてしまうからです。

◆ 確率における和の法則あるいは加法定理といわれるものは，簡単にいうと,「…あるいは～」,「…または～」というときには，**加えればいい**，ということなのです。

例えば，サイコロを振って，1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ で，2の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ですから，1または2が出る確率は $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ となります。しかし，2が出る確率は $\frac{1}{6}$，偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ だからといって，2か偶数が出る確率が $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ とならないのはいうまでもありません。2が偶数の中に含まれているからです。

このようなマチガイをおこすことはまずないでしょうが，ちょっと複雑になるとうっかりやってしまいます。公式の形で書きますと，次のようになります。

事象Eの起こる確率を $P(\mathrm{E})$，事象Fの起こる確率を $P(\mathrm{F})$，EまたはFの起こる確率を $P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})$，EおよびFの起こる確率を $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})$ で表しますと，加法定理は

$$\boldsymbol{P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})=P(\mathrm{E})+P(\mathrm{F})-P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}$$

で表されます。

EとFが共には起こらないときにはEとFは **排反事象** であるといいます。そして，このとき $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=0$ ですから

$$\boldsymbol{P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})=P(\mathrm{E})+P(\mathrm{F})}$$

(排反事象の場合)

となります。

＊　＊　＊

◆ では，次に具体的な問題をやってみませんか。

■練習1. サイコロを振って，3で割りきれる数の目が出る確率を求めよ。

ヒント　3で割りきれる目は3と6ですから，3あるいは6の目の出る確率を求めればいい。それは，いずれも $\frac{1}{6}$ ですから

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

となります。　　答　$\frac{1}{3}$

注　ムリに和の法則を使ったから，上のようになりますが，全体の場合の数は6，アタリの場合の数は2，したがって，求める確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ だといってもいいわけです。

■練習2. サイコロを2個同時に振って出る目の和が4より小である確率を求めよ。

ヒント　目の和が4より小というのは3か2だということです。和が3になるのは2と1か1と2が出る場合で，その確率は $\frac{2}{6\times6}$ ですし，和が2になるのは1と1の1通り，その確率は $\frac{1}{6\times6}$ ですから，求める確率は

$$\frac{2}{6\times6}+\frac{1}{6\times6}=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}$$

です。　　答　$\frac{1}{12}$

これも，2つを加えるまでもない。アタリの場合が3つあるから $\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}$ でもいいわけです。

＊　＊　＊

◆ では，ややめんどうな問題をやってみませんか。

練習 3. AとBの2つの袋がある。Aには白球3個，赤球5個が入っており，Bには白球5個，赤球3個が入っている。いまどちらかの袋に手を入れ3個をとり出すとき，少なくとも2個が赤球である確率を求めよ。　(信州大)

ヒント　まずAに手を入れるか，Bに手を入れるか，ですが，その確率は $\dfrac{1}{2}$ です。

次に，Aに手を入れて，そして，赤球2個，白球1個とり出す確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}$$

で，次にAに手を入れ，そして赤球が3個とり出される確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}$$

です。Bに手を入れた場合も，同様にして，

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_5C_1\times{}_3C_2}{{}_8C_3}\quad と\quad \frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}$$

これらを全部加えて，求める確率は $\dfrac{1}{2}$ になります。

答　$\dfrac{1}{2}$

練習 4. 袋の中に赤3個，白4個，黒5個の同じような球が入っている。袋の中でよくかきまわして，2個の球をとり出すとき，その2個が同じ色になる確率を既約分数で書け。　(一橋大)

ヒント　3つの場合があります。

(i)　2個とも赤である確率 $=\dfrac{{}_3C_2}{{}_{12}C_2}$

(ii)　2個とも白である確率 $=\dfrac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}$

(iii)　2個とも黒である確率 $=\dfrac{{}_5C_2}{{}_{12}C_2}$

これらを全部加えて $\dfrac{19}{66}$ となります。

*　*　*

◆ 結局，確率の問題でめんどうというのは場合の数が多くて，加える個数が多いというだけのことです。では，もう1つ。

練習 5. 袋の中に白球が4個，赤球が6個入っている。これらの球をとり出すときは，どれも区別がつかないとする。いま，この中から最初にAが3個とり出し，それをもとにもどさないで，次にBが4個とり出し，白球の多いほうを勝ちとする。Aの勝つ確率を求めよ。また，引き分けになる確率を求めよ。　(高知大)

ヒント　(1)　まずAの勝つのは3つの場合があります。それは，

(i)　Aが白3個を出すとき：

その確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$$

(ii)　Aが白2，赤1で，Bが白1，赤3または赤4を出すとき：

その確率は

$$\frac{{}_4C_2\times{}_6C_1}{{}_{10}C_3}\times\frac{{}_2C_1\times{}_5C_3}{{}_7C_4}+\frac{{}_4C_2\times{}_6C_1}{{}_{10}C_3}\times\frac{{}_5C_4}{{}_7C_4}$$
$$=\frac{6}{35}+\frac{3}{70}=\frac{3}{14}$$

(iii)　Aが白1，赤2で，Bが赤4を出すとき：

その確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_2}{{}_{10}C_3}\times\frac{{}_4C_4}{{}_7C_4}=\frac{1}{70}$$

この3つの場合の和を求めればいいのですから，求める確率は $\dfrac{11}{42}$ となります。

(2)　引き分けになるのは2つの場合があります。それは

(i)　Aが白2，赤1で，Bが白2，赤2を出すとき，

(ii)　Aが白1，赤2で，Bが白1，赤3を出すとき

このときの答は $\dfrac{9}{35}$ となります。

確率における積の法則

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率を計算する際のもっとも大切な法則が2つあります。その1つが，この積の法則なのです。

◆　確率を計算するとき大切なものに **積の法則** があります。**乗法定理** といったいかめしい名前でも呼ばれています。それは，簡単にいうと，「…かつ～」とか「……して，そして～する」とかいうときには，**確率を掛ければいい**，ということなのです。しかし，それには若干条件がある。その条件を恐れるあまり，手も足もでないというのは困ります。では，ともかく，具体的な問題にとりかかるとしましょう。

事象Eが起こったとき，事象Fの起こる確率を「**条件つき確率**」といい，$\boldsymbol{P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})}$ という記号で表します。

練習 1. 袋の中に白球3個，赤球4個が入っている。第1回に白球が出ることをEで表し，第2回に赤球が出ることをFで表す。

（i）　とり出した球を元にもどすとき $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})$ を求めよ。

（ii）　とり出した球を元にもどさないとき $P_{E}(\mathrm{F})$ を求めよ。

ヒント　（i）　とり出した球を元にもどすなら，第1回が白球でも赤球でも関係ない。このとき

$$P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})=\frac{4}{7}$$

です。

（ii）　とり出した球を元にもどさないなら，第2回には全部で6個あって，そのうち赤球4個あるのですから

$$P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

となります。　答　（i）　$\frac{4}{7}$　（ii）　$\frac{2}{3}$

練習 2. 袋の中に白球3個，赤球4個入っている。1球をとり出すとき赤球であることをEで表し，白球であることを$\overline{\mathrm{E}}$で表すことにする。球を元にもどさないとして，次の確率を求めよ。

（i）　$P_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})$

（ii）　$P_{\overline{\mathrm{E}}}(\overline{\mathrm{E}})$

ヒント　（i）　$P_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})$ は第1回目に赤球が出たとき，第2回に赤球が出る確率ですから

$$P_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

（ii）　$P_{\overline{\mathrm{E}}}(\overline{\mathrm{E}})$ は第1回目に白球が出たとき，第2回目に白球が出る確率ですから

$$P_{\overline{\mathrm{E}}}(\overline{\mathrm{E}})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

答　（i）　$\frac{1}{2}$　（ii）　$\frac{1}{3}$

*　　*　　*

◆　2つの事象E，Fが共に起こる確率を $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})$ で表します。そして

$$\boldsymbol{P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=P(\mathrm{E})\cdot P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})}$$
$$\boldsymbol{P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=P(\mathrm{F})\cdot P_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})}$$

なる関係があります。これを **積の法則** または **乗法定理** というのです。

練習 3. 袋の中に白球8個，赤球2個入っている。2個続いてとり出すとき，赤球が続いて出る確率を求めよ。ただし，球は元にもどさないものとする。

ヒント　第1回目に赤球が出ることをEで表し，第2回目に赤球が出ることをFで表しますと，求める確率は $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})$ で表せて，上の乗法定理が成り立つのです。そして，

$$P(\mathrm{E})=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\ P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})=\frac{1}{9}$$

$$\therefore\ P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 4. あるテストにA，B，Cのおのおのが合格する確率はそれぞれ $\frac{2}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{3}$ である。3人とも合格する確率を求めよ。

(弘前大)

ヒント　Aが合格することを　E
Bが合格することを　F
Cが合格することを　G

で表しますと，$P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=P(\mathrm{E})\cdot P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})$ であるのはもちろんですが，Eに関係なくFがきまるのですから

$$P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})=P(\mathrm{F})$$

$$\therefore\ P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=P(\mathrm{E})\cdot P(\mathrm{F})$$

さらに

$$P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}\cap\mathrm{G})=P(\mathrm{E})\cdot P(\mathrm{F})\cdot P(\mathrm{G})$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

注　上のようなわけで，ムリに乗法定理にもってゆくことなしに，Aが合格して，そして，Bが合格して，そしてCが合格するのだから，

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

だと理解するのがいいのです。

*　*　*

◆ では，やや，めんどうな問題をやってみましょう。

■練習 5. x 軸上原点から出発し，貨幣を投げて表が出たら右へ1だけ進み，裏が出たら左へ1だけ進むことにする。これを4回くり返したとき $x=0$ にいる確率を求めよ。

(東大)

ヒント　4回のうち2回表が出て，2回裏が出ればいい。これは ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りありますから，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 6. 1つのサイコロをくり返し10回投げるとき，1の目がちょうど5回出て，残りはことごとく異なる目の出る確率を求めよ。

(金沢大)

ヒント　1つのサイコロを投げて，例えば

1 1 1 1 1 6 4 5 2 3

とでも出ればアタリの場合ですが，この確率はもちろん $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ です。しかし，順序はいろいろ変えていいわけだから，結局

$$\frac{10!}{5!1!1!1!1!1!}=\frac{10!}{5!}$$

だけあるのでしょう。さては，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\frac{10!}{5!}=\frac{140}{6^7}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 7. サイコロを50回振るとき，1の目の出る回数が r である確率は，r のどんな値のとき最大となるか。

(山梨大)

解　1の目が r 回出る確率を $f(r)$ とすれば，

$$f(r)={}_{50}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{50-r}$$

これを最大にする r を求めればよい。そのためには

$f(r+1)-f(r)$ の符号を調べるか，

$\dfrac{f(r+1)}{f(r)}$ が1より大か否かを調べて

$f(r+1)$ と $f(r)$ の大小がわかる。さて

$$f(r+1)-f(r)$$

を計算してみると途中の計算は省略するが，

$$f(r+1)-f(r)$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{49-r}\frac{50\cdot49\cdots(51-r)}{r!}\cdot\frac{(7.5-r)}{r+1}$$

ゆえに

$0\leqq r\leqq7$ のとき　$f(r+1)>f(r)$

$8\leqq r\leqq10$ のとき　$f(r+1)<f(r)$

もう少し詳しく書くと

$$f(0)<f(1)<f(2)<\cdots\cdots$$
$$<f(7)<f(8)>f(9)>f(10)$$

ゆえに $r=8$ のとき最大である。

答　8回

⑪ 独立事象と従属事象

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆独立とか従属とかいう概念はとかくきらわれます。いや，確率がイヤになるもとはまさにここにあるらしい。さは，さりながら。

◆ 事象A，Bのその一方の起こる・起こらないが，他方の起こる・起こらないに無関係であるとき，事象A，Bは独立であるといいます。

そして，このとき

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

となります。では，次の練習をやってみませんか。

練習1. 事象A，Bは互いに独立で，$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{B})=x$ とする。このとき，$P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})=\dfrac{4}{9}$となるような$x$の値を求めよ。ただし，$P(\mathrm{A})$ は事象Aの起こる確率，$\overline{\mathrm{A}}$はAの余事象を表すものとする。　(神奈川大)

ヒント　$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{B})=x$ ですから

$$P(\overline{\mathrm{A}})=P(\overline{\mathrm{B}})=1-x$$

です。したがって

$$P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{A}})P(\overline{\mathrm{B}})=(1-x)^2$$

これが $\dfrac{4}{9}$ に等しいというのですから

$$(1-x)^2=\frac{4}{9} \qquad \therefore \quad 1-x=\frac{2}{3}\ (>0)$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots 答$$

練習2. 2つの独立な事象A，Bに対し，A，Bが同時に起こる確率が $\dfrac{1}{14}$，AかBの少なくとも一方が起こる確率が $\dfrac{13}{28}$ である。このとき，Aの起こる確率 $P(\mathrm{A})$ とBの起こる確率 $P(\mathrm{B})$ とを求めよ。ただし，$P(\mathrm{A})<P(\mathrm{B})$ とする。　(城西大)

ヒント　$P(\mathrm{A})=x$，$P(\mathrm{B})=y$ としますと，A，Bは独立ですから

$$F(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})=P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})=xy$$

$$\therefore \quad xy=\frac{1}{14} \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$$=x+y-\frac{1}{14}=\frac{13}{28}$$

$$\therefore \quad x+y=\frac{15}{28} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②を満足するx，yにはtついての次の2次方程式の2つの解が対応する。

$$t^2-\frac{15}{28}t+\frac{1}{14}=0$$

したがって

$$28t^2-15t+2=0$$

の解で，$x<y$ を考慮して解くと

$$x=\frac{1}{4}, \quad y=\frac{2}{7}$$

答　$P(\mathrm{A})=\dfrac{1}{4}$，$P(\mathrm{B})=\dfrac{2}{7}$

練習3. 事象Aの起こる確率が $\dfrac{5}{12}$，事象Bの起こる確率が $\dfrac{3}{8}$，事象A，Bがともに起こる確率が $\dfrac{1}{12}$ であるとする。

(1)　Aは起こるがBは起らない確率 $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ を求めよ。

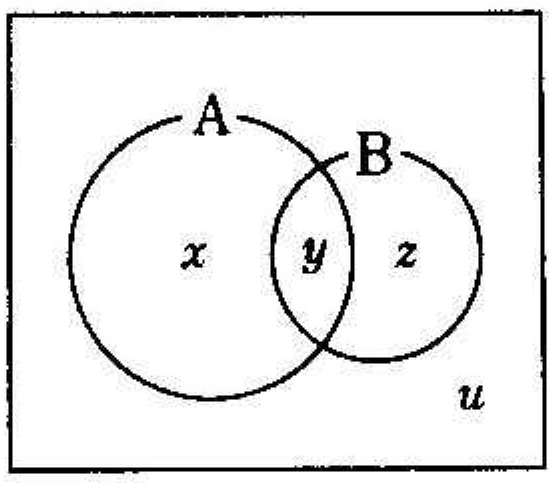
(2)　A，Bの少なくとも一方が起こる確率 $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ を求めよ。

(3)　Aが起こった場合のBの起こる確率 $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ を求めよ。

(4)　A，Bは互いに独立な事象でないことを示せ。

ヒント　この問題ひとつで基本的なことはすべて含まれています。さて：——

ベン図で扱ってみましょう。



右の図でAの起こる確率が $\frac{5}{12}$ ですから

$$x+y=\frac{5}{12} \quad \cdots\cdots①$$

また　$$y+z=\frac{3}{8} \quad \cdots\cdots②$$

さらに　$$y=\frac{1}{12} \quad \cdots\cdots③$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3},\ z=\frac{7}{24}$$

したがって，

(1)　Aは起こるがBは起こらない確率は x ですから $\frac{1}{3}$ です。

(2)　A，Bの少なくとも一方が起こる確率は $x+y+z=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$ です。

(3)　Aが起こった場合のBの起こる確率は

$\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{5}$ です。

(4)　A，Bが独立であるならば

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}) \quad \cdots\cdots(*)$$

とならなければなりません。ところが

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=y=\frac{1}{12}$$

$$P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})=(x+y)\cdot(y+z)=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{8}=\frac{5}{32}$$

で $(*)$ が成り立たないので，A，Bは独立ではありません。

あるいは，独立なら

$P(\mathrm{A})=P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ あるいは $P(\mathrm{B})=P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ でなければなりません。しかし，これも

$$P(\mathrm{B})=\frac{3}{8},\ P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{5}$$

でやはり等しくない，つまり，A，Bは独立ではないことがわかります。

*　*　*

◆　ところで，独立試行には次の定理が成り立ちます。すなわち

1回の試行で事象Aの起こる確率を p とすると，この試行を n 回くり返したとき，これらの試行が互いに独立ならば，事象Aがちょうど r 回起こる確率は

$$_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}q^{n-r} \quad (q=1-p)$$

である

これを**独立試行の定理**ということがあります。当然のことですから，ムリに暗記するほどのことでもありませんが，心にとめておいてよいでしょう。では，これを：──

練習 4. くり返し行われるある種の実験で，その実験が成功する確率は毎回0.7であるとする。この実験を独立に4回くり返して行うとき，次の確率を求めよ。

(1)　4回の実験のうち，3回以上実験が成功する確率

(2)　4回目の実験で，はじめて成功する確率

(3)　4回目の実験が，成功する実験のちょうど3回目となる確率

(福井大)

ヒント　(1)　ちょうど3回成功する確率は $_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{3}\left(\frac{3}{10}\right)$ で，ちょうど4回成功する確率は $_{4}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{7}{10}\right)^{4}$ ですから，求める確率はそれらの和で 0.6517 となります。

(2)　はじめの3回が不成功で，4回目に成功するというのですから

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{3}\left(\frac{7}{10}\right)=0.0189$$

(3)　成功を○，失敗を×で表すと

○○×○，○×○○，×○○○の3通りあって，その確率は $_{3}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^{3}=0.3087$

となります。

ここまでくると，4回の代わりに n 回くり返す場合だってできるでしょう。

条件つき確率では

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆条件つき証明問題，条件つき最大最小，条件つき不等式，条件つき確率，どうして，こうも条件つきがはびこるのであろうか。

◆ 事象Aが起こったうえでBの起こる事象を $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ あるいは $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ で表して，条件つきの確率といいます。そして

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$$
$$=P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

という関係が成り立ちます。ではこれを：—

練習 1. 1，2，3，4 の番号をつけたカードが1枚ずつ合計4枚ある。これらのカードから無作為に3枚のカードをとり出して横に1列に並べる。このとき

(1) 左端のカードが1でないという条件のもとに「中央のカードが1である」条件つき確率を求めよ。

(2) 左端のカードが1でなく，右端のカードは4でないという条件のもとに「中央のカードが1である」条件つき確率を求めよ。　(東京薬大)

ヒント 1，2，3，4 のカードの中から3枚選んで1列に並べる仕方は次のように24通りあります。

123　124　134　234
132　142　143　243
213　214　314　324
231　241　341　342
312　412　413　423
321　421　431　432

ところで，≪左端のカードが1でないという条件つきのもとに≫というのは，左端に1のあるものをオミットして考えようというのですから

234　243　213　214　314　324
231　241　341　342　312　412
413　423　321　421　431　432

の18個のうち213，214，314，312，412，413の6個が「中央のカードが1である」場合です。結局求める確率は

$$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

となります。もちろん，実際は全部を書くまでもなく

$$\frac{3\cdot1\cdot2}{3\cdot3\cdot2}=\frac{1}{3}$$

として得られます。

(2) (1)と同様に，全体は

243　213　231　241　341
342　312　412　413　423
321　421　431　432

の14個で，「中央のカードが1であるもの」は4個ですから，求める確率は

$$\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$$

です。計算でやれば

$$\frac{2\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot2}{4\cdot3\cdot2-1\cdot3\cdot2-2\cdot3\cdot1+1\cdot2\cdot1\cdot1}=\frac{2}{7}$$

となるわけです。(ハテ，なぜだろう)

練習 2. $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=x$ $(x\neq0)$，$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=x'$ $(x'\neq0)$，$\dfrac{P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}=y$ とするとき，

(1) yをx，x'を用いて表せ。

(2) $xx'=\dfrac{1}{3}$ のとき，yを最小にするx，x'の値とyの最小値を求めよ。

(3) A，Bが互いに独立で，x，x'が(2)で求めたyを最小にする値をとるとき，$P(\mathrm{A})$，$P(\mathrm{B})$，$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ の値を求めよ。ただし，$P_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ はXのもとで

のYの条件つき確率を表すものとする。

(同志社大)

ヒント (1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$

また $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

ですから,

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{x},\ P(B)=\frac{P(A\cap B)}{x'}$$

です。また

$$P(A\cup B)=y\cdot P(A\cap B)$$

ですから，これらを

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\cdots(*)$

に代入して

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}-1 \qquad \cdots\cdots①$$

となります。

(2) $xx'=\dfrac{1}{3}$ と①より

$$y=\frac{x+x'}{xx'}-1=3(x+x')-1$$
$$\geqq 6\sqrt{xx'}-1=2\sqrt{3}-1$$

ここで相加平均・相乗平均の関係を使いました。そして，これから $x=x'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $2\sqrt{3}-1$ をとることがわかります。

(3) A，Bは互いに独立ですから,

$$P(A)=P_B(A)=x'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$P(B)=P_A(B)=x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

で，また,

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}$$

ですから (*) より

$$P(A\cup B)=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$$

となります。

注 どうも，この種の問題はピンとこなくていやな人も多いことでしょう。しかし，ここでは条件つきの確率の問題の大切なことがすべて含まれているといってもいい。

そういう意味で，この問題はくり返しよくやっておくことがのぞましいのです。

*　*　*

◆ では，1つ総合的な問題を：――

練習 3. 正しく作られたさいころがある。このさいころの1の目が刻んである面から，kの目の刻んである面までを赤く塗り，$k+1$ の目が刻んである面から6の目が刻んである面までを青く塗る。ただし，$1\leqq k\leqq 5$ とする。

このさいころを振るとき，「偶数の目が出る」という事象をA，「赤い面が出る」という事象をBとすると

(1) 事象Bの起こる確率 $P(B)$ は，kの値によって変化するが，$k=3$ のときは $P(B)=\dfrac{1}{\square}$ であり，事象Aが起きたときに事象Bの起こる条件つき確率 $P(B|A)$ は $\dfrac{1}{\square}$ となる。

(2) また，$k=\square$ のとき，事象Aと事象Bは独立である。 (慶大)

ヒント 目の出方が6通りあって，偶数の目の出る確率はいうまでもなく

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

です。さて：――

(1) $k=3$ のとき「赤い面が出る」確率は

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

です。そして，$P(B|A)$ は，事象 $A\cap B$（目が偶数の赤い面が出る）は2の目が出る場合だけですから

$$P(B|A)=\frac{1}{3}$$

(2) $P(A|B)$ は赤い面に含まれる偶数の目の割合に等しく，これが $P(A)=\dfrac{1}{2}$ に等しいのは，赤い面の目が偶数と奇数と半分ずつのときですから $k=2$ または $k=4$ のときです。

結局答は(1)順に2と3 (2)は2，4となります。

⑪ 余事象の確率を使うとき

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率の計算で，もっとも後味がわるいのはサンザン場合分けをしてやったのに，余事象を使ったらすぐできた，というときデス。

◆ 全体の中で，ある事象Aに目をつけるとき，この事象を除いた事象を **余事象** といいます。例えば，サイコロを振って出る目を考えるとき，偶数の目が出る事象の余事象は奇数の目が出る事象です。一般的には，

事象Aに対してAが起こらない事象をAの余事象といい，これを$\overline{A}$で表すと

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

では，次をやってみませんか。

練習1. 硬貨をn回投げるとき，少なくとも1回表が出る確率を求めよ。

ヒント　n回とも裏が出る確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ですから少なくとも1回表が出る確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2^n}$$

で与えられます。

練習2. 袋の中に白球が4個，赤球が6個入っている。この中から任意に5個の球をとり出すとき，少なくとも1つは白球の出る確率を求めよ。

ヒント　「**少なくとも**」とあれば，反射的に余事象を思い出してよい。白球の1つも出ない確率は

$$\frac{{}_6C_5}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{42}$$

ですから，求める確率は

$$1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$$ ……答

練習3. A，Bがパズルの問題を解く確率はそれぞれ$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$である。2人が同一のパズルの問題を解くとき，少なくとも1人が解き得る確率を求めよ。

ヒント　2人とも解けない確率は

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

ですから，少なくとも1人が解く確率は

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$ ……答

です。

練習4. 4題のうち2題を解き得た者を合格にするという試験で，5題のうち平均3題を解き得る学生が合格する確率を求めよ。　（小樽商大）

ヒント　問題の解ける確率が$\frac{3}{5}$，解けない確率が$\frac{2}{5}$ですから，4題のうちちょうど2題を解ける確率は

$${}_4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

です。同じく，ちょうど，3題解ける確率は

$${}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)$$

で，さらに，ちょうど4題解く確率は

$${}_4C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^0$$

です。$\left(\frac{2}{5}\right)^0$をづけるのは，チョット，オーバーだな。${}_4C_4$も不要か!!　つまり

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

でいい。かくて，求める確率は

$$\frac{1}{5^4}({}_4C_2\cdot3^2\cdot2^2+{}_4C_3\cdot3^3\cdot2+3^4)=\frac{513}{625}$$

です。余事象を使うなら，少し簡単です。

$$1-\left\{{}_4C_0\left(\frac{2}{5}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\}$$
$$=1-\left(\frac{2}{5}\right)^4-4\cdot\frac{3\cdot2^3}{5^4}$$

$=\frac{513}{625}$ ($\fallingdotseq 0.82$)

*　*　*

◆ では，次には，やや総合的な問題にいくとしましょう。

練習 5. 1654 年フランスで技能の等しい甲，乙 2 人が 3 回先に勝ったほうが賭金 64ピストル（ピストルは金貨の名）をとる約束で勝負を始め，甲が 1 回勝ったところで用事により勝負を中止したので賭金の分配に困り，当時の有名な数学者パスカルに相談した。これが確率の端緒となったといわれる。この賭金はいかに分配したらよいか。ただし，勝負に引き分けはないものとする。　（北大）

ヒント 勝負を続行したとき，甲が賭金をもらう確率はいくらか，乙が賭金をもらう確率はいくらか，と考えてみるのがいいでしょう。

さて，甲が賭金をもらう場合は，第 2 回以下の勝負で

(1)	○○	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
(2)	○×○	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
(3)	○××○	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
(4)	×○○	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
(5)	×○×○	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
(6)	××○○	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

の 6 通りあります。ここに○は勝ちを，×は負けを示しています。そして，その確率は右のほうに書いてあります。

したがって，甲が賭金をもらう確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 3=\frac{11}{16}$$

です。乙が賭金をもらう確率は甲の勝つ場合の余事象ですから

$$1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$$

です。したがって，

甲には　$64\times\frac{11}{16}=44$（ピストル）

乙には　$64\times\frac{5}{16}=20$（ピストル）

分配すればいいでしょう。

練習 6. n 個のサイコロのおのおのを m 回続けて振るとき

(1) 少なくとも 1 個は m 回続けて 1 の目の出る確率を求めよ。

(2) n 個のおのおのに少なくとも 1 回 1 の目の出る確率を求めよ。　（九大）

ヒント (1) 1 個のサイコロで m 回続けて 1 の目の出る確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^m$ ですから，1 個のサイコロで少なくとも 1 回は 1 の目の出ない確率は

$$1-\left(\frac{1}{6}\right)^m$$

です。したがって，n 個のサイコロで，そのいずれについても少なくとも 1 回は 1 の目の出ない確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^m\right\}^n$$

ということなります。そこで，少なくとも 1 個は m 回続けて 1 の目の出る確率は

$$1-\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^m\right\}^n \quad \cdots\cdots \text{答}$$

です。（こんなに余事象を使う問題も珍しい）

(2) 1 個のサイコロで m 回とも 1 の目の出ない確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^m$ ですから，少なくとも 1 回 1 の目の出る確率は $1-\left(\frac{5}{6}\right)^m$ ということがわかります。そこで，n 個のサイコロに少なくとも 1 回 1 の目の出る確率は

$$\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^m\right\}^n \quad \cdots\cdots \text{答}$$

で表せます。

これなどは余事象が便利というよりは，使わないではできない問題なのです。

⑩ 期待値とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆期待値とは期待する値かな。それとも期待される値かな。はたまた，期待してよい値なのかな……。

◆ 硬貨を投げて表が出たら1万円，裏が出たら3万円受け取ることにしたとしよう。1回や2回やったのでは1回についていくら受け取れるかわからないが，数多くやると，1回について1万円と3万円の平均である2万円に近づくことが期待される。このことを数学的には，次のように定義するのです。

ある事柄が生起する確率を p，その事柄が起こったときに A 円受け取ることにしたとき，期待金額は Ap 円であるという。

もっと一般的にいうと，次のようです。

変量 X が n 個の値 x_1，x_2，……，x_n を，それぞれ確率 p_1，p_2，……，p_n でとるとき，$(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1)$

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

を X の期待値（または平均値）という。

＊　＊　＊

◆ では，さっそく，具体的な問題にいきましょう。

練習1. サイコロを振って，1の目が出たら1万円，2の目が出たら2万円，……，6の目が出たら6万円受け取ることにした人の期待値を求めよ。

ヒント　各事象の起こる確率はいずれも $\frac{1}{6}$ であるから，求める期待値は

$$\left(1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+\cdots\cdots+6\times\frac{1}{6}\right)$$

$$=(1+2+\cdots\cdots+6)\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$$

$$=3.5\ （万円）$$ ……答

練習2. サイコロを振り，出た目の数に等しい個数の100円硬貨を受け取ることを定めたゲームがあり，参加料は1回400円であるという。このゲームに参加することは損か得か。

ヒント　期待値は350円であるから，損であることがわかります。

練習3. 4枚の硬貨を投げて表が1枚出れば400円，2枚だと200円，3枚だと400円，表だけ，または裏だけ出れば1000円もらうことを約束した人の期待金額を求めよ。

ヒント　5つの場合の生起する確率と金額は下の表のようになります。

表	裏	確　率	期待金額
0	4	${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$1000\times{}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4$
1	3	${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$400\times{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$
2	2	${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$200\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4$
3	1	${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$400\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4$
4	0	${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$1000\times{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4$

ゆえに求める期待金額は

$$(1000\times2+400\times4\times2+200\times6)\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=400\ （円）$$

答　400円

練習4. 大小2つのサイコロを同時に1回振るとき，出る目の数の和の期待値を求めよ。

ヒント　あらゆる場合を表にしてみよう。

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
場合の数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

ゆえに求める期待値は

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\cdots\cdots+12\times\frac{1}{36}=7$$

(注) これは1個のサイコロの場合の期待値 3.5 の2倍となっている。

＊　＊　＊

◆ 大切なことは以上でつきるのですが，次にはややめんどうな問題をとりあげることにしましょう。

練習 5. 同形同大のカードが100枚あって，その中の20枚には数字0，他の50枚には1，残り30枚には2を記入してある。手当たりしだいに，これから1枚をとり出して，その数字を記録してから元にもどす。この操作を2回くり返すとき，その数の合計の期待値を求めよ。 (横浜市大)

(解) 2数の合計は0, 1, 2, 3, 4の5通りあって，その場合と確率は下の表に示すようである。

和	0	1	2	3	4
場合	0 0	0 1 1 0	0 2 1 1 2 0	1 2 2 1	2 2
確率	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$ $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$ $\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$

ゆえに求める期待値は

$$0\times\frac{1}{25}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{37}{100}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{9}{100}$$

$$=\frac{11}{5}$$

答 $\frac{11}{5}$

練習 6. 1つのサイコロを3回投げて，偶数の目の出た回数が奇数の目の出た回数より多いときは，すべての目の数の和を得点し，奇数の目の出た回数が偶数のそれより多いときは，すべての目の数の和を減点する。同じ目が2回以上出たときは，その目が偶数であっても，奇数であっても，またその目の数の和がいくらであっても得点は0とする。得点の期待値を求めよ。(群馬大)

(解) 3つの場合が起こる。すなわち，

(i) 得点0の場合

3回とも異なる目の出る確率は

$$\frac{6\times5\times4}{6^3}=\frac{5}{9}$$

であるから，2回以上同じ目の出る確率は

$$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(ii) 減点になる場合を表示すると次のように10通りあって，確率はいずれも $\frac{3!}{6^3}=\frac{1}{36}$

場合	1 3 5	1 3 2	1 3 4	1 3 6	1 5 2	1 5 4	1 5 6	3 5 2	3 5 4	3 5 6	計
計	9	6	8	10	8	10	12	10	12	14	99

(iii) 得点になる場合を表示すると次のように10通りあって，確率はいずれも $\frac{3!}{6^3}=\frac{1}{36}$

場合	2 4 6	2 4 1	2 4 3	2 4 5	2 6 1	2 6 3	2 6 5	4 6 1	4 6 3	4 6 5	計
計	12	7	9	11	9	11	13	11	13	15	111

ゆえに得点の期待値は

$$(111-99)\times\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

答 $\frac{1}{3}$

(注) まともに計算すれば上のようになりますが，実は2つの表の下の欄は似た数が多いので，適当に相殺して計算すればすぐできます。あるいはこの合計も求める必要はなく，表中にある数からすぐ求めることができます。

つまり，(ii)の表では

1, 3, 5 が7個；2, 4, 6 が3個

ありますし，(iii)の表では

2, 4, 6 が7個；1, 3, 5 が3個

あることに気がつけば，その合計や差はすぐ求められるでしょう。

期待値とは何か(つづき)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆期待値は期望値という人もあります。しかし，これがとかくマチガイのもと。うっかり希望値と書いてしまうからだ。

◆ 期待値ともいい，平均値ともいいます。その定義はp.90にあげてありますが，くどいけれども，もういちど：——

変数Xがn個の値x_1, x_2, ……, x_nのいずれかをとり，その値をとる確率がそれぞれp_1, p_2, ……, p_nであるとき，

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$$

つまり

$$\sum_{k=1}^{n}x_kp_k \quad \left(\sum_{k=1}^{n}p_k=1\right)$$

をXの期待値または平均値という。

では，さっそく具体的な問題にいくとしましょう。

練習1. 袋の中に，0から5まで番号をつけた6個の球が入っている。この袋から無作為に3個をとり出し，その中で最大の番号をXとする。このとき，確率変数Xの期待値を求めよ。　（東海大）

ヒント　0から5までの番号の中から3個とり出せば，Xの最小値は2でしょう。Xの最大値はいうまでもなく5です。

ところで，$X=2$となる確率をp_2としますと，

$$p_2=\frac{{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

同じく$X=3$となる確率p_3は0, 1, 3；0, 2, 3；1, 2, 3のいずれか3つが出ればよいのですから，そしてこれは0, 1, 2から2つ選ぶ組合せの数に等しいのですから

$$p_3=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$$

同じようにp_4, p_5が求められますから，求める期待値は

$$2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4+5\times p_5$$
$$=2\times\frac{1}{20}+3\times\frac{3}{20}+4\times\frac{6}{20}+5\times\frac{10}{20}$$
$$=4.25$$

答　4.25

練習2. 手作りのさいころがある。このさいころでは，1の目が出る確率p_1と6の目が出る確率p_6，2の目が出る確率p_2と5の目が出る確率p_5，3の目が出る確率p_3と4の目が出る確率p_4はそれぞれ等しいという。いま，このさいころを投げたとき出る目をxとする。xの期待値$E(x)$を求めよ。　（慶大）

解　$E(x)=1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4+5\times p_5+6\times p_6$

ところが

$$p_1=p_6,\quad p_2=p_5,\quad p_3=p_4$$

であるから

$$E(x)=\frac{7}{2}(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)$$

さらに

$$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_6=1$$

$$\therefore\quad E(x)=\frac{7}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習3. 1個のさいころを5回投げるとき，1の目がx回出る確率をP_xとする。このとき，xの期待値$\sum_{x=0}^{5}xP_x$を求めよ。

ヒント　$P_0=\left(\frac{5}{6}\right)^5$, $P_1={}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4$, ……

これらを用いて計算すると，求める期待値は$\frac{5}{6}$となります。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 袋の中に入れてある n 枚（n は 2 より大きい偶数）のカードにそれぞれ

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots\cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}$$

なる数字が記入されている。これらのカードはいずれも等しい確率で抽出されるものとする。最初に抽出した 1 枚の数値を X_1 とし，次にこの残りから抽出した 1 枚の数値を X_2 とする。

(1) $X_1>\frac{1}{2}$ なる事象と，$X_2>\frac{1}{2}$ なる事象とは独立か否かを記してその理由を述べよ。

(2) X_1 の期待値を求めよ。

（横浜市大）

ヒント (1)は $X_1>\frac{1}{2}$ かつ $X_2>\frac{1}{2}$ となる確率と $P\left(X_1>\frac{1}{2}\right)\cdot P\left(X_2>\frac{1}{2}\right)$ が等しいか否かを調べればよいでしょう。

解 (1) $X_1>\frac{1}{2}$ である確率は $\frac{1}{2}$ である。

$X_2>\frac{1}{2}$ となるのは，次の 2 つの和である。

$X_1\leqq\frac{1}{2}$ かつ $X_2>\frac{1}{2}$ となる確率 $\frac{1}{2}\times\frac{\frac{n}{2}}{n-1}$

$X_1>\frac{1}{2}$ かつ $X_2>\frac{1}{2}$ となる確率 $\frac{1}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}$

すなわち

$$\frac{1}{2}\times\frac{n}{2(n-1)}+\frac{1}{2}\times\frac{n-2}{2(n-1)}$$
$$=\frac{2(n-1)}{4(n-1)}=\frac{1}{2}$$

であるから，

$X_1>\frac{1}{2}$ かつ $X_2>\frac{1}{2}$ となる確率 $\frac{n-2}{4(n-1)}$

と $P\left(X_1>\frac{1}{2}\right)\cdot P\left(X_2>\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ とは等しくない。ゆえに独立ではない。

(2) X_1 の期待値を $E(X_1)$ とすると

$$E(X_1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

……答

練習 5. 60人の生徒について，数学の成績を x，英語の成績を y とするとき，$(x,\ y)$ の組は次の 4 組だけに分類されて

(80, 90)，(60, 50) が共に a 人

(60, 80)，(80, 60) が共に b 人

であるとする。この60人の生徒のうちから無作為に 1 人を抽出するとき，数学の成績を X，英語の成績を Y とする。

(1) $E(X)\cdot E(Y)=E(XY)$ となるような a，b を求めよ。ただし，$E(Z)$ は確率変数 Z の平均（期待値）を表す。

(2) 上の(1)の場合，X，Y は独立であるかどうか調べよ。ただし，確率変数 X，Y が独立であるとは

X のとる値が $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$

Y のとる値が $y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_m$

であるとき，任意の i，j ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$; $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$) に対して

事象 $X=x_i$ と事象 $Y=y_j$

とが独立である

ことである。

（東京理大）

ヒント よく読めば，めんどうはないハズ。

(1)は a，b の関係式をたてて解けばよいでしょう。すなわち

$$a+b=30$$
$$E(X)=E(Y)=70$$
$$E(XY)=170a+160b$$
$$\therefore\ a=10,\ b=20$$

(2)については

$$P_{X=80}(Y=90)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=90)=\frac{1}{6}$$

から独立でないことがわかります。

① 確率と硬貨の問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆硬貨を投げると表か裏が出る。サイコロとちがって２面である。だから確率の問題の中でも基本的な練習に適するということになる。

◆ 確率というのは，**全体の場合の数でアタリの場合の数を割ったもの** をいいます。例えば１枚の硬貨を１回投げたとき表の出る確率は$\frac{1}{2}$です。というのも，全体の場合の数は表と裏と２通りあるし，アタリは表の出る場合で１通りだからです。

また，１枚の硬貨を２回投げたとき１回裏の出る確率はどうなるでしょうか。

全体の場合の数は

表表，表裏，裏表，裏裏

の４通りで，そのうち，１回だけ裏の出る場合，つまりアタリの場合は

表裏，裏表

の２通りあります。そこで，求める確率は$\frac{2}{4}$，つまり$\frac{1}{2}$ということになります。

＊　＊　＊

◆ 硬貨について確率の問題をやることにしましょう。

練習 1. ３枚の硬貨を投げるとき，少なくとも１枚が表の出る確率を求めよ。

（弘前大）

ヒント　全体の場合を表にしますと次のようになります。表を○で，裏を●で表すことにしますと，３枚の硬貨を甲，乙，丙として全体

甲	○	○	○	○	●	●	●	●
乙	○	○	●	●	○	○	●	●
丙	○	●	○	●	○	●	○	●

の場合の数は８，そのうちで，アタリの場合は最後を除く７通りありますから，求める確率は $\frac{7}{8}$ ということになります。

しかし，このように表を作るのは限界があります。硬貨の枚数が多くなってはお手上げです。そこで，計算でやることにすると，次のようにできます。

硬貨３枚とも裏が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ですから，少なくとも１枚表が出る確率は，この **余事象** で，

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

これなら，硬貨が何枚あっても同じにできましょう。

練習 2. １個の硬貨を６回投げたとき，１回だけ表が出る確率を求めよ。（室蘭工大）

ヒント　アタリの場合を全部示すと下のようになります。ただし，表は○で，裏は●で表しました。

○	●	●	●	●	●
●	○	●	●	●	●
●	●	○	●	●	●
●	●	●	○	●	●
●	●	●	●	○	●
●	●	●	●	●	○

そして，それらが起こる確率はいずれも$\left(\frac{1}{2}\right)^6$ですから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 6=\frac{3}{32}$$

です。上のように表に示すのはめんどうですが，次のようにすると表をかくことも要りますまい。

硬貨を１回投げたとき表の出る確率は$\frac{1}{2}$，裏が出る確率も$\frac{1}{2}$であるから，１回だけ表の出る確率は

$${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{32} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(注) この解で ${}_6C_1$ を掛ける意味，おわかり？機械的に，こんな問題は ${}_6C_1$ を掛けるのだ，と，ムード的にオボエテイル人のいかに多きことよ!!

これはその前にアタリの場合をすべて書いて6つあった，あの6なんです。つまり，6つのうち○をおくべき1回を選ぶ仕方が ${}_6C_1$ 通りある，ということなんです。

では，次へ。

練習 3. 硬貨を投げるとき表の出る確率を p とする。3回投げて少なくとも2回表の出る確率を求めよ。（同志社大）

(解) 3回投げて少なくとも2回表が出る確率というのは，ちょうど2回とちょうど3回表が出る確率の和であるから，

$$
\begin{aligned}
&{}_3C_2p^2(1-p)+{}_3C_3p^3\\
&=3p^2(1-p)+p^3\\
&=p^2(3-2p)
\end{aligned}
$$

である。

答　$p^2(3-2p)$

練習 4. 1つの貨幣を10回投げるとき，6回以上引き続いて表が出る確率を求めなさい。（慶大）

(解) 6回以上引き続いて出るということは，6回続いて表が出れば，あとは何が出てもいい，ということである。

また，表が6回以上続いて出始める直前の1回が裏であれば，それ以前は何が出てもかまわない。したがって，表を○で，裏を×で表し，いずれでもいいのを空欄にしておく。

しかるに表が出る確率も裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ に等しいから下のような表を得る。ここに $p=\frac{1}{2}$ である。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	確率
(1)	○	○	○	○	○	○					p^6
(2)	×	○	○	○	○	○	○				p^7
(3)		×	○	○	○	○	○	○			p^7
(4)			×	○	○	○	○	○	○		p^7
(5)				×	○	○	○	○	○	○	p^7

ゆえに，求める確率は

$$p^6+p^7\times 4=\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{64}$$

答　$\frac{3}{64}$

練習 5. 硬貨を投げるという試行を続けて何回も行う。このとき，3度目の表が第6回の試行で出る確率を求めよ。（一橋大）

(解) 表が出る確率も裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ に等しいから，1，2，3，4，5回のうちどこか2回だけ表が出て，第6回目に表の出る確率を求めればよい。ゆえに，求める確率は

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{64}=\frac{5}{32}\qquad\cdots\cdots 答$$

*　*　*

◆ 確率の計算には対数計算の入ってくることがあります。その1例を練習しておきましょう。では，これを：——

練習 6. 貨幣を続けて投げるとき，表ばかりが出る確率が百万分の一より小さくなるためには，少なくとも何回投げなければならないか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。（鹿児島大）

(ヒント) n 回とも表が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\right)^n<\left(\frac{1}{10}\right)^6\\
&\therefore\quad n\log\frac{1}{2}<6\log\frac{1}{10}\\
&\therefore\quad -n\log 2<-6\\
&\therefore\quad n>\frac{6}{\log 2}=\frac{6}{0.3010}=19.9\cdots\cdots\\
&\therefore\quad n\geqq 20
\end{aligned}
$$

ゆえに，少なくとも20回投げなければならない。

答　20回

(注) $\log 2=0.3010$ とする，と書いてありますから上のように計算しましたが，$\log 2=0.3010\cdots\cdots$ とあれば

$$0.3010\leqq\log 2<0.3011$$
$$\therefore\quad 19.93\cdots\cdots\geqq n>19.92\cdots\cdots$$

これから同じ結果が得られます。

① 確率とサイコロ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率というと，サイコロを連想するくらいサイコロの問題は多い。というのも，デタラメに6つの場合が起こるのが手頃だから。

◆ サイコロの特徴は6つの面があるということ。そして，それがいずれも $\frac{1}{6}$ の確率で起こるということです。しかし，問題によっては各面に1が3個，2が2個，3が1個しるしてある，といった特殊なものもあるから注意すること。

では，次の問題をやってみませんか。

■練習 1. 1つのサイコロを振るとき，偶数の目が出る確率を求めよ。

(解) 全体で6つの目があり，そのうち偶数の目は3つあるから，求める確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

である。　　　　答 $\frac{1}{2}$

■練習 2. 1つのサイコロを2回振るとき，2回とも偶数の目の出る確率を求めよ。

(解) 第1回目に偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ で，第2回目も $\frac{1}{2}$ であるから，2回とも偶数の目が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ に等しい。

■練習 3. 2つのサイコロを同時に投げて，出る目の数の和が6になる確率を求めよ。

(解) 2つのサイコロの目の出方は

$$6\times6=36\ (\text{通り})$$

ある。そして，そのうち目の数の和が6になるのは (1, 5)，(2, 4)，(3, 3)，(4, 2)，(5, 1) の5通りあるから，求める確率は $\frac{5}{36}$ である。　　　　答 $\frac{5}{36}$

■練習 4. 3つのサイコロを同時に振って，目の和が10になる確率を求めよ。

(解) 3つのサイコロを振って出る目の出方は

$$6\times6\times6=216\ (\text{通り})$$

ある。

甲，乙，丙3つのサイコロを振って目の和が10になる場合は下の表のように全部で27通りある。

甲	6	5	4	3	2	1
乙と丙	3と1 2と2 1と3	4と1 3と2 2と3 1と4	5と1 4と2 3と3 2と4 1と5	6と1 5と2 4と3 3と4 2と5 1と6	6と2 5と3 4と4 3と5 2と6	6と3 5と4 4と5 3と6
場合の数	3	4	5	6	5	4

ゆえに求める確率は

$$\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$$

である。　　　　答 $\frac{1}{8}$

■練習 5. サイコロを振って得られる目の数を a として，2次方程式

$$x^2-ax+1=0$$

が実数解をもつ確率を求めよ。

(ヒント) 判別式を D とすると $a>0$ であるから

$$D=a^2-4\geqq0$$

となるのは $a\geqq2$ のときである。

ゆえに求める確率は

$$\frac{5}{6}$$

に等しい。　　　　答 $\frac{5}{6}$

＊　＊　＊

◆ これで確率とサイコロに関係した代表的なものはすみましたが，次には，そのめんどうな問題をとりあげてみましょう。

練習 6. 3つのサイコロを同時に投げるとき，サイコロの目の積が奇数となる事象を奇数事象と名づけ，3つの目が連続した自然数となる事象を連続事象と名づける。

連続事象が起こればAを勝ちとし，奇数事象が起こればBを勝ちとする。はじめにAがサイコロを投げAが勝てば勝負は終わる。もし，Aが勝たなければ次にBがサイコロを投げ，Bが勝てば勝負は終わる。もし，Bが勝たなければ次にAがサイコロを投げる。このようにして勝負が終わるまで，A，B交互にサイコロを投げるとき，Aの勝つ確率を求めよ。　(北大)

ヒント　奇数事象の起こる確率はいうまでもなく　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

また，3つの目が連続した数となるのは

1，2，3；2，3，4；3，4，5；4，5，6

の4通り，したがって，連続事象の確率は

$$\frac{1}{36}\times 4=\frac{1}{9}$$

です。

さて，Aの勝つ確率をp，Bの勝つ確率をqとしますと

$$p+q=1 \qquad \cdots\cdots①$$

そして，Aの勝つ確率は第1回に勝つ確率と，第1回目ダメ，第2回目Bダメで，Aの勝つ確率にもどるのですから

$$p=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot p$$

$$\therefore\ 9p=1+7p$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{2}$$

したがって　$q=\frac{1}{2}$

答　$\frac{1}{2}$

練習 7. 甲，乙2個のサイコロを投げて，甲の目の出る数をx，乙の目の出る数をyとする。このとき，$|x-y|>1$ なる確率をP_1，$xy\leqq x^2+1$ なる確率をP_2とすれば，P_1，P_2のいずれがどれだけ大きいか。　(信州大)

ヒント　$|x-y|>1$ というのは，余事象を考えると，　$|x-y|=0,\ 1$

ところで，$|x-y|=0$ となるのは6通り，その確率は　$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

次に，$|x-y|=1$ となるのは $x-y=\pm 1$ で，これは10通りあります。したがって $|x-y|=1$ となる確率は

$$\frac{10}{36}$$

かくて，

$$P_1=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{10}{36}\right)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

次に，$xy\leqq x^2+1$ のとき

$$x>0 \text{ から } y\leqq x+\frac{1}{x}$$

また，目の子勘定をしますと

$x=1$：yは1，2の2通り

$x=2\sim 6$：yはそれぞれ2～6通り

かくして

$$P_2=\frac{2+2+3+4+5+6}{36}=\frac{11}{18}$$

$$\therefore\ P_2>P_1$$

かつ　$P_2-P_1=\frac{1}{18}$

答　P_2のほうがP_1より$\frac{1}{18}$大きい。

＊　＊　＊

◆ このようにして，やってみると確率固有のめんどうさが出ているわけではなく，場合を分けるとか，まとめて，ひとつのものにしようとか，そうした点がめんどうなのだ，ということがわかるでしょう。だから確率がイヤだ，などといってはいけない!!

①確率とくじ

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆くじを引く人は当てることばかり考えているが，くじを引かせるほうは確率を考えているのである。

◆　くじを引いてアタリ，ハズレの確率の問題は大きく分けて，2つになります。1つは引いたくじを元にもどすとき，他はもどさないとき，です。まず，元にもどすときからはじめるとしましょう。

練習 1. 10本中3本の当たりくじのあるくじを1本引いた人の当たる確率を求めよ。

(解)　10本の中から1本を引く仕方は ${}_{10}C_1=10$ 通りあって，そのうち，当たりくじを1本引く仕方は ${}_3C_1$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_3C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{3}{10}$$

である。　　　　答　$\frac{3}{10}$

練習 2. 10本中3本の当たりくじがある。同時に2本引くとき，2本とも当たりくじである確率を求めよ。

(解)　10本の中から2本引く仕方の数は

${}_{10}C_2$（通り）

あって，2本とも当たりくじであるのは

${}_3C_2$（通り）

あるから，求める確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}}{\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}}=\frac{3\cdot 2}{10\cdot 9}=\frac{1}{15}$$

答　$\frac{1}{15}$

練習 3. 10本中3本の当たりくじがある。1本引いて元にもどし，もう1回引くものとする。2本とも当たりである確率を求めよ。

(解)　1本引いて当たる確率は $\frac{3}{10}$ であるから，2度とも当たる確率は

$$\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$

……答

*　*　*

◆　次は元にもどさないとき，だ。

練習 4. 10本中3本の当たりくじの入ったくじがある。まず，甲が引いて，次に乙が引く。どちらが得か。ただし，引いたくじは元にもどさないとする。

(解)　甲の当たる確率は $\frac{3}{10}$ である。

次に乙の当たる場合は2通りある。1つは甲が当たったとき，もう1つは甲のはずれたとき，である。

まず，甲が当たり，乙も当たる確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$$

次に，甲がはずれて乙が当たる確率は

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$$

ゆえに乙の当たる確率は

$$\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{2+7}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$

ゆえに，甲，乙は損得なし。

練習 5. 10本中3本の当たりくじがある。1本引いてはずれなら，もう1回だけ引くことができる。当たる確率を求めよ。ただし，引いたくじはもどさないものとする。

(解)　当たるのは2つの場合がある。

1回で当たる確率は　$\frac{3}{10}$

1回目ははずれで，2回目に当たる確率は

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$$

ゆえに求める確率は

$$\frac{3}{10}+\frac{7}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$ 答 $\frac{8}{15}$

* * *

◆ 以上で大切なことは終わりです。次にはやや複合された問題をやってみませんか。

練習 6. 50 人の団体が甲，乙，丙 3 軒の旅館に分かれて，甲に 20 人，乙に 15 人，丙に 15 人泊まることになったので，誰がどこに泊まるかをくじ引きで決めることにした。この 50 人中の特定の 2 人を A，B として，次の問いに答えよ。

(1) A，B がいっしょに甲旅館に泊まることになる確率はいくらか。

(2) A，B が同じ旅館に泊まることになる確率はいくらか。ただし，答は(1)，(2)とも小数点以下 4 けたまで求めよ。

(奈良女大)

ヒント (1) Aが甲旅館に泊まる確率は $\frac{20}{50}$ で，そのとき，B も甲旅館に泊まる確率は $\frac{19}{49}$ ですから，求める確率はその積，すなわち

$$\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}=\frac{38}{245}\fallingdotseq 0.1551$$ ……答

(2) A，B がいっしょに乙旅館に泊まる確率は同様にして

$$\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}=\frac{3}{35}$$

A，B がいっしょに丙旅館に泊まる確率も同じく $\frac{3}{35}$ ですから，求める確率は

$$\frac{38}{245}+2\times\frac{3}{35}=\frac{16}{49}\fallingdotseq 0.3265$$ ……答

注 A，B が甲旅館に泊まる確率は次のようにしても求められます。全体の場合の数は

$${}_{50}C_{20}\cdot{}_{30}C_{15}\cdot{}_{15}C_{15}\ (\text{通り})$$

で，そのうち，アタリの場合，つまり，A，B が同じ旅館に泊まる場合は

$${}_{48}C_{18}\cdot{}_{30}C_{15}\cdot{}_{15}C_{15}\ (\text{通り})$$

ですから，アタリの場合を全体の場合で割ればよいのです。

練習 7. 10本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。このくじを同時に 2 本ずつ引き，引いたくじは元に返さないものとする。

(1) 最初に引いた 2 本のくじの中に当たりくじが少なくとも 1 本ある確率を求めよ。

(2) 最初に引いたくじが 2 本とも当たりくじである確率を求めよ。

(3) 最初に引いたくじの中に当たりくじが少なくとも 1 本あるときには続いて 2 本引き，当たりくじが 1 本もないときは中止するものとする。2 回目以後も同様である。このようにして，ちょうど 4 回目に当たりくじを全部引いてしまう確率を求めよ。

(広島大)

ヒント (1) 2 本引いて 1 本も当たりくじのない確率は

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$$

ですから，少なくとも 1 本当たりくじのある確率は

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

です。

(2) いうまでもなく

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$$

(3) 2 本ずつ引いて，毎回少なくとも 1 本の当たりくじを引き，ちょうど 4 回目に当たりくじを全部引いてしまうということは，毎回ちょうど 1 本ずつ当たりくじを引かなければなりません。したがって，求める確率は

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}\times\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_4C_2}$$

$$=\frac{8}{15}\times\frac{15}{28}\times\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{8}{105}$$ ……答

となります。

これは結局，ムリに問題文をまわりくどくいったようなもので，難しくはありませんね。

ゲームを中止する場合

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ゲームの最中，何かが起こって，中止することになった。さあ，その処理をどうしようか，という問題はしばしば起こったハズ。

◆ ゲームを途中で中止する場合の処理の仕方を問題にしましょう。では，まず，これをやってみませんか。

練習 1. ある勝負をするのに，A，B 両人の技能が等しく，A，Bが勝つ確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとする。勝負をくり返して，先に3勝した者を優勝と定めるとき，Aがまず1勝した場合のAの優勝する確率を求めよ。

ヒント　Aが勝った場合を○で，負けたときを×で表すことにしますと，まず1勝したAが優勝する場合は次のようになります。

○○○　$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

○○×○, ○×○○　$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

○○××○, ○×○×○, ○××○○　$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

そして，そのおのおのの起こる確率はそれぞれ右の方に書いてあります。したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$$

です。

注　だから，1回Aが勝ったところで，勝負を中止すればAの勝つ確率 $\frac{11}{16}$，負ける確率 $\frac{5}{16}$ というわけ。したがって，もし，優勝したときの賞金が16万円なら，11万円と5万円に分けた方がいいと，いうことになるわけです。

練習 2. 1枚の硬貨を投げて，表が出ればAの勝ち，裏が出ればBの勝ちとする。そして，先に4回勝った者が賞金の10000円をもらうことになった。いま，Aが2回，Bが1回勝ったところで，勝負を中止した。賞金をどのように分けたらよいか。

ヒント　Aが勝つ場合は，第3回以後のみ書いてみますと，Aの勝ちを○で表して

○○　$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

○×○, ×○○　$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

○××○, ×○×○, ××○○　$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

ですから，Aの期待金額は

$$10000\text{円}\times\frac{11}{16}=6875\text{円}$$

したがって，Bの期待金額は

$$10000\text{円}-6875\text{円}=3125\text{円}$$

となります。

答　Aは6875円，Bは3125円

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. 甲乙がこの順にサイコロを振り，さきに1の目を出した方が11万円受け取るゲームをした。しかし，甲乙甲と3回やって1の目が出ないままで，ゲームを中止した。1万円をどのように分けたらよいか。

ヒント　このままゲームを続ければ

乙甲乙甲乙甲……

とやるハズであった。この時点で乙の勝つ確率は，次のような無限級数の和で与えられることはいうまでもない。

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}$$

で，甲の勝つ確率は

$$1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$$

です。したがって，甲，乙の期待金額はそれぞれ5万円および6万円となります。

答 甲5万円，乙6万円

練習 4. ある試行を行うとき，事象Aの起こる確率を $p\,(0<p<1)$ とし，事象Aの余事象を $\overline{A}$ とする。

(1) この試行を続けて行い，事象 $\overline{A}$ が2度起こったところで試行を止めることとし，それまでに事象Aの起こる回数を x とすると，$x=a$ となる確率 $P(x=a)$ を求めよ。

(2) この試行を続けて行い，事象Aの起こる回数を x，事象 $\overline{A}$ の起こる回数を y とするとき，x および y がともに3以上になったところで試行を止めることにする。$x=a$ かつ $y=b$ になる確率 $P(x=a,\ y=b)$ を求めよ。 （大阪市大）

ヒント 事象Aの起こる確率は p ですから，事象 $\overline{A}$ の起こる確率は $1-p$ です。

(1) そこで，この試行を $x+2$ 回行い，$(x+1)$ 回までにAが x 回，$\overline{A}$ が1回起こり，そして第 $(x+2)$ 回目にちょうど $\overline{A}$ が起これぱいいのですから，$x=a$ となる確率は

$$P(x=a)={}_{a+1}C_a p^a(1-p)^2$$
$$=(a+1)p^a(1-p)^2$$

となります。

(2) $(x+y)$ 回の試行して，ちょうどこの試行が終わりとなるのは，$(x+y)$ 回目に $\overline{A}$ の3回目が起こるときと，$(x+y)$ 回目にAの3回目が起こるときとなるわけです。

さて：——

（ア） $(x+y)$ 回目に $\overline{A}$ の3回目が起こる確率は

$${}_{x+2}C_x p^x(1-p)^3 \quad (x\geqq 3)$$

で，

（イ） $(x+y)$ 回目にAの3回目が起こる確率は

$${}_{y+2}C_y p^3(1-p)^y \quad (y\geqq 3)$$

で与えられます。

a と b の少なくも一方は3ですから

$a\geqq 3,\ b=3$ のときには

$$P(x=a,\ y=b)={}_{a+2}C_a p^a(1-p)^3$$
$$=\frac{(a+2)(a+1)}{2}p^a(1-p)^3$$

となりますし，

$a=3,\ b\geqq 3$ のときには

$$P(x=a,\ y=b)={}_{b+2}C_b p^3(1-p)^b$$
$$=\frac{(b+2)(b+1)}{2}p^3(1-p)^b$$

となります。

練習 5. 袋の中に等質，等大の3個の黒い球と7個の白い球とが入っている。「この袋の中から無作為に1球ずつとり出していって，はじめて黒球が出たらこの抽出を中止する」という実験において，とり出される白球の個数の期待値を求めよ。ただし，とり出した球はもとの袋に戻さないものとする。 （神戸商船大）

ヒント 2回目で中止となる確率は

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$$

で，3回目で中止となる確率は

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{40}$$

といったぐあい。だから，求める期待値は

$$1\times\frac{7}{30}+2\times\frac{7}{40}+\cdots\cdots+7\times\frac{1}{120}$$
$$=\frac{7}{4}=1.75$$

となります。したがって求める期待値は1.75個です。

⑪ 原因の確率

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆何かが起こったあとで，その原因がどれであったかを考えるのが原因の確率です。では，どう扱うのか？

◆ ともあれ，具体的な問題からいくとしましょう。それは，これです。

練習 1. 袋がA，B 2つある。Aの袋には赤球1個，白球3個入っており，Bの袋には赤球，白球とも2個ずつ入っている。どちらかの袋に手を入れ1個とり出したら赤球であった。Aの袋に手を入れた確率を求めよ。

ヒント まず，袋に手を入れる前に，Aの袋に手を入れて赤球を出す確率はどうなるでしょう。

Aに手を入れる確率は $\frac{1}{2}$ です。そして，赤球が出る確率は $\frac{1}{4}$ ですから，≪Aに手を入れて赤球を出す確率≫は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ となります。同じように，≪Bの袋に手を入れて赤球を出す確率≫は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ となります。だから，このような試行を数多くやれば赤球の出ることもあり，出ないこともあるのですが，今，白球の出た場合はオミットし，赤球の出た場合だけとり出してみると

$$\frac{1}{8}:\frac{1}{4}=1:2$$

の割合に起こるハズです。ところが，今赤球が出たのですから，Aの袋に手を入れた確率は

$$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

で，Bの袋に手を入れた確率は

$$\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

で与えられます。

練習 2. ある人が訪問先に帽子を忘れてくる確率は $\frac{1}{5}$ とする。ある日，A，B，C 3軒をこの順にまわって帰宅して，帽子を忘れて来たことに気がついた。Bの家に忘れて来た確率を求めよ。　（早大）

ヒント 家を出かける前にAに忘れる確率はいうまでもなく，$\frac{1}{5}$ です。しかし，Bに忘れる確率は $\frac{1}{5}$ ではありません。なぜなら，Aに忘れないときのみBに忘れることが可能だからです。かくして，Bに忘れる確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

です。まったく同様にして，Cに忘れる確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

となります。つまり，長いこと，このようなことを行うと，忘れることもあり，忘れないこともありますが，忘れた場合だけとり出してみると，A，B，Cに忘れるという事象は

$$\frac{1}{5}:\frac{4}{25}:\frac{16}{125}$$

の比で起こることになります。してみると，Bに忘れた確率は

$$\frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}}=\frac{20}{25+20+16}$$

$$=\frac{20}{61}$$

で与えられます。

練習 3. 広島修道大学の名物先生，木場教授は，同僚の研究室を訪問したとき，しばし

ば自室の「かぎ」をおき忘れる。ある日，彼は自室にかぎをかけて，山元教授，味村教授，そして兼田助教授の各研究室をこの順に訪問した。

そして，自室の前まで帰って，どこかにかぎを忘れたことに気づいた。1つの研究室に忘れる確率を $\frac{1}{4}$ として，山元教授の研究室に忘れた確率，味村教授の研究室に忘れた確率，そして，兼田助教授の研究室に忘れた確率の3つを求めよ。

(解) 訪問前に山元教授，味村教授，兼田助教授の研究室に忘れる確率はそれぞれ

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

であるから，忘れた時点で，各研究室に忘れた確率の比は

$$\frac{1}{4}:\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}:\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$$
$$=16:12:9$$

に等しい。そして，その和は1に等しいから求める確率はそれぞれ

$$\frac{16}{37},\ \frac{12}{37},\ \frac{9}{37}$$

に等しい。

(注) このように，あることが起こる前の確率を**事前確率**といい，事が起こった後の確率を**事後確率**といいます。上の場合，事前確率は

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{16},\ \frac{9}{64}$$

で，事後確率は

$$\frac{16}{37},\ \frac{12}{37},\ \frac{9}{37}$$

なのです。そして，事前確率から事後確率を求める定理を**ベーズの定理**といいますが，そこまでオボエルことはありません。

◆ では，やや，総合的な問題をやってみませんか。

■練習 4. 友人に返信用はがきで手紙を出したところ返事がこなかった。はがきが途中で紛失する確率は0.2％，友人が返事を書かない確率は5％として，

(1) 手紙が友人の所へ届いたのに返事がこない確率を求めよ。

(2) 手紙が友人の所へ届かなかった確率を求めよ。　(名古屋女大)

(ヒント) 手紙が友人の所に届き，友人が返事を書かない事前確率，書いた返事が紛失する事前確率は，それぞれ

$$0.998\times0.05=0.0499$$
$$0.998\times0.95\times0.002=0.0018962$$

で，手紙が友人の所に届かない事前確率は

$$0.002$$

ですから，求める事後確率は

$$\frac{0.0517962}{0.0537962}\doteqdot96.3\%$$

および　$$\frac{0.002}{0.0537962}\doteqdot3.7\%$$

答 (1) 96.3％，(2) 3.7％

■練習 5. ある事件Kにおいて，証人AとBは，その事件Kが起こったといい，証人Cは起こらないと述べた。

いま証人A，B，Cが真実を語る確率がそれぞれ $\frac{4}{5}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{8}{9}$ であるならば，事件Kが実際に起こっている確率は□である。ただし，事件Kの起こる確率と，起こらない確率は等しいものとする。　(早大)

(ヒント) まず事前確率です。

この事件が起こったときに，3人が問題にあるような証言をする確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{9}$$

です。また，この事件が起こらないときに，3人が問題にあるような証言をする確率は

$$\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{8}{9}$$

そこで，事後確率は次のようになります。

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{8}{9}}=\frac{5}{9}$$

です。

① 幾何学的確率とは

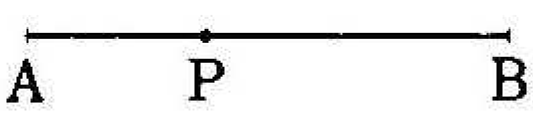
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この幾何学的確率というコトバにとらわれることはありません。この種の問題はこのように扱うものだということなのです。

◆ ともあれ，具体的な問題にいくとしましょう。

練習 1. 長さ1の線分 AB 上に任意に1点Pをとるとき，$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}$ が $\frac{1}{8}$ 以上である確率を求めよ。

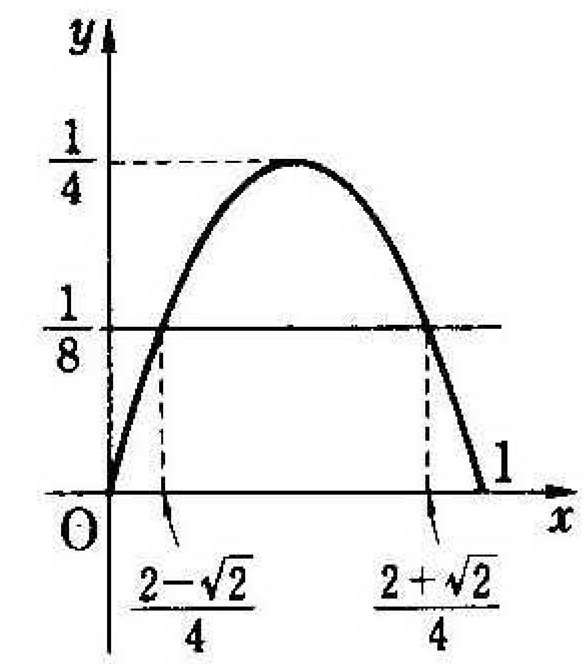
ヒント　上のことをまず数式化してみましょう。



A(0)，B(1)，P(x)

としますと，もちろん $0\leqq x\leqq 1$ です。そして

$$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}=x(1-x)$$
$$=-x^2+x$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



このグラフをかいてみますと，右のようです。つまり $\frac{2-\sqrt{2}}{4}\leqq x\leqq\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ のとき，

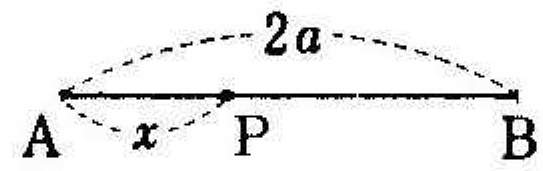
$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}\geqq\frac{1}{8}$ となります。ところが点Pを AB 上にとるとき，任意というのですから，求める確率は

$$\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となりましょう。このように，確率が線分の長さの比や面積の比などで表せる場合を**幾何学的確率**ということがあります。

練習 2. 長さ $2a$ の線分をその上の任意の点で2分する。得られた2線分を2辺とする長方形の面積が $\frac{a^2}{2}$ より小さい確率を求めよ。　　　　(電通大)

ヒント　長さ $2a$ の線分 AB をPで2分し，$\overline{\mathrm{AP}}=x$ としますと，$\overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{BP}}$ を2辺とする長方形の面積 S は



$$S=x(2a-x)$$

です。そこで，

$$x(2a-x)<\frac{a^2}{2}$$

とおきますと

$$2x^2-4ax+a^2>0$$

$$\therefore\quad 0<x<\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

あるいは

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}a<x<2a$$

したがって，求める確率は

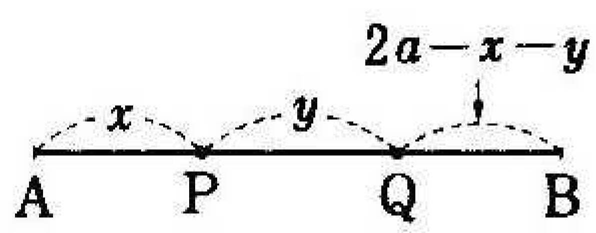
$$\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}a+\left(2a-\frac{2+\sqrt{2}}{2}a\right)}{2a}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

となります。

練習 3. 長さ $2a$ の線分をその上の任意の2点で3分する。得られた3線分を3辺とする三角形ができる確率を求めよ。

ヒント　右の図に示すように，3分する点をAに近い方からP，Qとし，$\overline{\mathrm{AP}}=x$，$\overline{\mathrm{PQ}}=y$，$\overline{\mathrm{QB}}=2a-x-y$ としましょう。この3つの線分で三角形ができるための条件は



$$x+y>2a-x-y>|x-y|$$

です。そして，左半分から

$$x+y>a$$

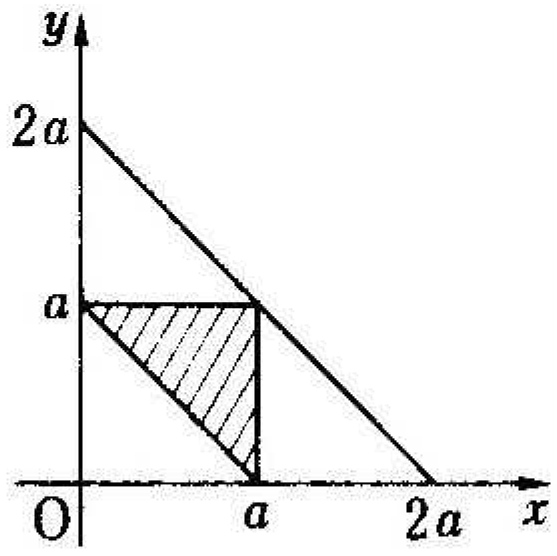
右半分から

$$x<a \text{ かつ } y<a$$

がでます。そこで，3線分の存在できる範囲を調べてみると，

$$x>0,\ y>0$$
$$2a-x-y>0$$

で，右のようになります。そして，点 $(x,\ y)$ の存在範囲の面積を調べて，求める確率は



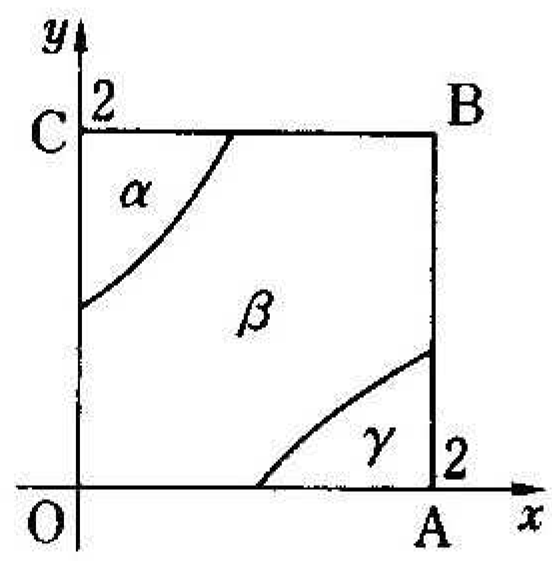
$$\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{(2a)^2}{2}}=\frac{1}{4}$$

であることがわかります。

＊　＊　＊

◆ では少し変わった例をやってみましょうか。

練習 4. 座標平面上に，右の図のように正方形OABCがあり，それが2つの曲線 $y=e^x$, $y=\log x$ によって3つの領域 α, β, γ に分割されている。いま正方形内に無作為に点をとるとき，それが α または γ に含まれれば1点，β に含まれれば -1 点を与えるものとする（ただし境界線上は0点とする)。各領域に点がとられる確率は，その面積に比例するものとして，得点の平均を求めよ。　　　（奈良教育大）



ヒント　$y=e^x$ と $y=\log x$ は $y=x$ について対称です，というのも互いに他の逆関数になっているからです。

さて，$y=\log x$ と x 軸との交点は $(1,\ 0)$ ですから，β の面積は

$$4-2\int_1^2 \log x\,dx$$

で与えられます。ところが：――

$$\int_1^2 \log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=2\log 2-\Big[x\Big]_1^2=2\log 2-1$$

ですから，β の面積は

$$4-2(2\log x-1)=2(3-2\log 2)$$

となります。

ゆえに得点が -1 となる確率は

$$\frac{2(3-2\log 2)}{4}$$

で，得点1の確率は

$$\frac{2(2\log 2-1)}{4}=\log 2-\frac{1}{2}$$

ですから，求める平均は

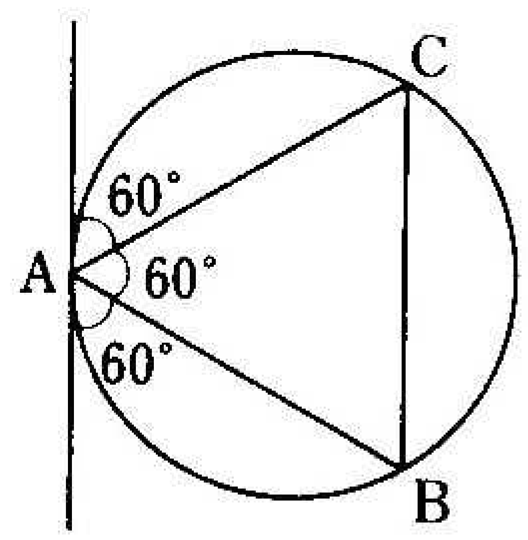
$$(-1)\times\frac{2(3-2\log 2)}{4}+1\times\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\log 2-2$$

となります。

＊　＊　＊

◆ ちょっと変わった例をあげましょう。それは

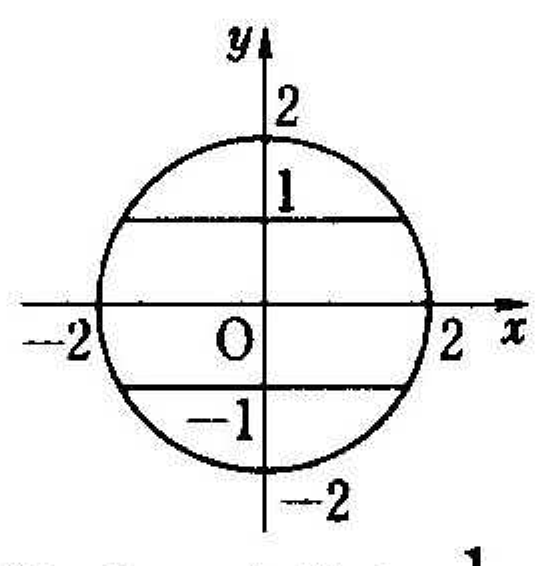
≪半径2の円の弦を無作為に引いて，その長さが内接正三角形の1辺の長さより大きい確率を求めよ≫



というのです。今，図のように，円周上の一点Aを通り無作為に弦を引くとしましょう。そうすると，Aから引いた弦が内接正三角形の1辺より大きいのは ∠BAC に入ったときです。してみると，求める確率は

$$\frac{60°}{180°}=\frac{1}{3}$$

としてよさそうです。ところが右の図のように x 軸に平行に引くと



$-1\leqq y\leqq 1$ の間に入ればよく，確率は $\frac{1}{2}$ になってしまいます。これをベルトランのパラドックスといいます。キミがどう思うからといって，これに深入りしてはいけないのだ。

○確率を求めるのに方程式を使う場合

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率を求めるのに，連立方程式をたててやるとうまくゆくことが少なくない。これがここの主題なのです。

◆ ともあれ，実例から始めるとしましょうか。

練習 1. 甲，乙，甲，乙，…… の順にサイコロを振り，はじめて 1 または 2 を出した方を勝ちとする。甲の勝つ確率を求めよ。

ヒント　甲乙甲乙甲乙……

の順にサイコロを振るのですが，甲の勝つ確率を x としますと，甲が勝つ場合は，

第 1 回で勝つ場合　確率 $\frac{1}{3}$

第 1 回だめ，第 2 回乙だめ，そして，第 3 回目以後に勝つ場合　確率 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x$

の 2 つあります。

$$\therefore\quad x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{5}$$

そこで乙の勝つ確率は $\frac{2}{5}$ となります。

注　あるいは次のようにしてもよいのです。甲の勝つ確率を x，乙の勝つ確率を y としますと，もちろん

$$x+y=1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，甲が第 1 回目に 1 または 2 を出さないとき，乙は甲と同じ立場にたつのですから

$$y=\frac{2}{3}\cdot x \qquad \cdots\cdots②$$

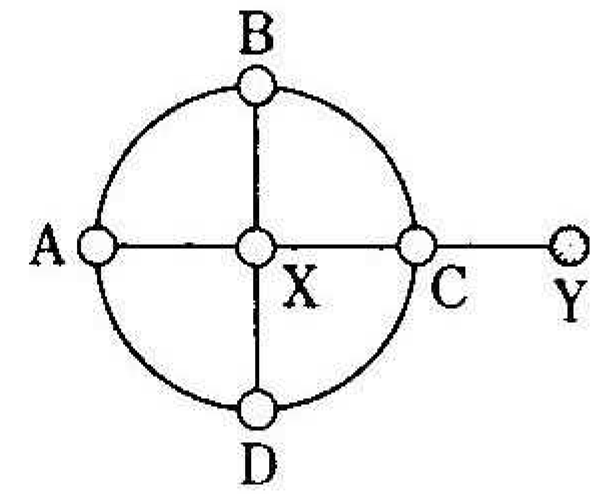
という関係があります。そこで，①，②を連立させて解いてもいいのです。

だから方程式といっても，いろいろな扱い方ができるわけです。

* * *

◆ こんな例もあります。

練習 2. 右の図に示すような通路がある。ある地点にあるとき，進路のいずれにも等しい確率で進むものとする。そして，X または Y に到達すれば，そこにとどまるものとする。A にいる人が Y にいたる確率を求めよ。



ヒント　等しい確率で進むというのですから A→B→A→B を 800 万回くり返してから X に行く，ということだってあるわけです。

さて，どうするか。

A，B，C，D にいる人が，Y に行く確率をそれぞれ x，y，z，u としましょう。

そうすると，A にいるとき $\frac{1}{3}$ の確率で B に行く，そして，やがて Y に行く確率は y であるというのですから

$$x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}u \qquad \cdots\cdots①$$

という関係が成り立ちます。同じように，

$$y=\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}x \qquad \cdots\cdots②$$

$$z=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}u \qquad \cdots\cdots③$$

$$u=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z \qquad \cdots\cdots④$$

という関係が成り立つのです。この連立方程式を解いて

$$x=\frac{1}{11},\ y=\frac{3}{22},\ z=\frac{7}{22},\ u=\frac{3}{22}$$

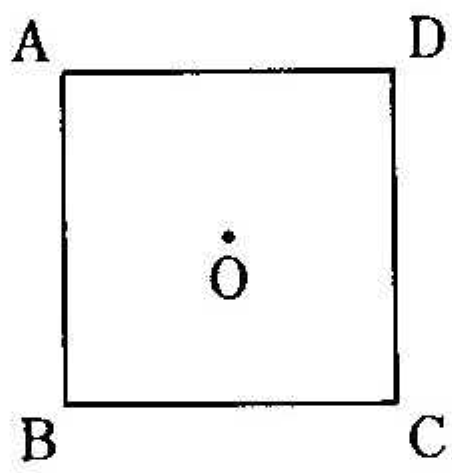
が得られます。実は，x だけ求めればよいのですがついでに全部を求めてみました。また①，②，③，④をつくるまでもなく，B と D は同じ確率になるハズですから，はじめから $y=u$ とおいてやれば，今少しカンタンにも

なるのです。

＊　＊　＊

◆ 方程式を立てて，確率を求める問題のやや総合的な場合をやってみましょう。

練習 3. 正方形 ABCD の中心を O とする。Pはこの正方形の頂点にある1点で，1つのサイコロを振って出た目が k ($k=1, 2, \cdots\cdots, 6$) であれば，Pを k 直角だけOのまわりに回転させる。ただし，回転の方向は無作為に（回転方向が正，負である確率が $\frac{1}{2}$ であるように）定める。Pをはじめに A に置き，この操作をくり返す。甲，乙，甲，乙，……の順にこの試行を続けて行い，先にCにきた方を勝ちとする。甲の勝つ確率を求めよ。



ヒント　サイコロを1回振ったとき l 直角（l は，正，負）だけ回転して，Aから移動する確率は

A→A　$l=\pm4$ のとき　$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

A→B　$l=1, 5, -3$ のとき　$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

A→C　$l=\pm2, \pm6$ のとき　$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

A→D　$l=3, -1, -5$ のとき　$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

したがって，

A→C　$\frac{1}{3}$

B→C　$\frac{1}{4}$

D→C　$\frac{1}{4}$

となります。

さて，甲がAから出発して勝つ確率を x，BまたはDから出発して勝つ確率を y としますと，甲が第2回目もAから出発するのは

$$A \xrightarrow{\text{甲}} A \xrightarrow{\text{乙}} A \qquad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$A \xrightarrow{\text{甲}} B \xrightarrow{\text{乙}} A \qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$$A \longrightarrow D \longrightarrow A \qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

より

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{72}$$

ですから甲が2度目もAから出発して勝つ確率は

$$\frac{11}{72}x$$

です。まったく同様にして，第1回はA，第2回はBにきて，やがて勝つ確率は

$$\frac{1}{6}y$$

第1回はA，第2回はDにきて，やがて勝つ確率は $\frac{1}{6}y$ です。

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}+\frac{11}{72}x+\frac{1}{3}y \quad \cdots\cdots①$$

同様にして

$$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}x+\frac{29}{72}y \quad \cdots\cdots②$$

①，②を解いて

$$x=\frac{1464}{2287}(\fallingdotseq 0.64)$$

$$y=\frac{1434}{2287}(\fallingdotseq 0.63)$$

y を求める必要はなかったのですが，ついでに求めてみたのです。

ともあれ，こうして最初にやった甲の方がかなり有利であることがわかったわけです。乙の勝つ確率はもちろん

$$1-\frac{1464}{2287}=\frac{823}{2287}(\fallingdotseq 0.36)$$

となります。

＊　＊　＊

◆ 確率を求めるのに方程式が使えるなら，方程式を解くのに確率を使えないだろうか，と思いませんか。実はめんどうな微分方程式は，確率を用いて，（つまり実験的方法で）求めることができるものがあります。これをモンテカルロ法といいます。

⑪ 確率を求めるのに極限を使う場合

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率は確統の範囲ですが，極限を使うとなると微積に入りこんでくる。しかし，本質的なちがいはないのです。

◆ 確率の定義はp.78でやってありますが，次のようにもなります。

標本空間がn個の根元事象からなっていて，どの2つも重複して起こらず，どの根元事象も同様に確からしいとします。ある事象Aがa個の根元事象から成り立つとき，事象Aの起こる確率$P(\mathrm{A})$は

$$P(\mathrm{A})=\frac{a}{n}$$

であるというのです。これをふつう

全体の場合の個数でアタリの場合の個数を割ったもの

というのです。なお，確率の求め方については（☞p.78）を参照してください。ここでは，極限を使って確率を求める問題を練習するのが目的です。

では：——

＊　＊　＊

練習 1. A，B 2人が，A，Bの順で交互にさいころを振り，最初に1の目を出した人が勝ちとする。A，Bの勝つ確率を求めよ。

ヒント　Aの勝つ場合を調べてみますと，次のようになります。ここに○は1の目が出たことを示し，×は1の目が出なかったことを示しています。

ABABABABA……	確率
○	p
××○	$(1-p)^2p$
××××○	$(1-p)^4p$
××××××○	$(1-p)^6p$
……………	

ここに $p=\frac{1}{6}$ です。

ゆえに求める確率は，これらを加えて，

$$p+(1-p)^2p+(1-p)^4p+\cdots\cdots$$

これは初項p，公比$(1-p)^2(<1)$の無限等比数列の和ですから，その値は

$$\frac{p}{1-(1-p)^2}=\frac{1}{2-p}=\frac{1}{2-\frac{1}{6}}=\frac{6}{11}$$

したがって，Bの勝つ確率は

$$1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$$

ということになります。

注　この問題は，次のようにもできます。つまり，

甲の勝つ確率をxとしますと，乙の勝つ確率は$(1-x)$です。ところで，甲が第1回に1を出さない確率は$\frac{5}{6}$で，このとき，乙の勝つ確率は甲の勝つ確率に等しくなるのですから

$$1-x=\frac{5}{6}\cdot x$$

$$\therefore\quad x=\frac{6}{11}$$

というわけ。この問題ではこのほうがラクですね。では，もう1つ：——

練習 2. A，B 2人がA，Bの順で交互にさいころを振り，直前の人が出した目と同じ目を出した人を勝ちとする。A，Bが勝つ確率を求めよ。

ヒント　上のように2つのやり方でできますから，両方やってみませんか。なお，第1回にAが振るのは，その前がないから，ムダ振り。してみると，Bの有利なことははじめから見当がつくハズ。

答　Aは$\frac{5}{11}$，Bは$\frac{6}{11}$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 3. ある土地で雨の降る確率が p であるとする。雨天連続日数の期待値を求めよ。

ヒント　一読しただけでは問題の意味がつかめないかもしれません。雨天を●で，晴天を○で表すとしましょう。例えば

○●●○○○●○○●●●○●○●○

となったとすると，雨天は

2日，1日，3日，1日，1日

となっていますから，その平均値は

$$\frac{1}{5}(2+1+3+1+1)=\frac{8}{5}=1.6\ (\text{日})$$

というわけ。そして，この数が無限に多くなったとき，この平均値は期待値となるのでした。具体的には雨天1日だけの確率，2日の確率，……を求めて加えるのでした，ね。

では，解答です。

解　雨天が n 日続くというのは

$$\bigcirc\underbrace{\bullet\bullet\bullet\cdots\cdots\bullet}_{n\text{日}}\bigcirc$$

となることであるから，その確率は

$$(1-p)p^n(1-p)=p^n(1-p)^2$$

で与えられる。

したがって，N日からなる期間中に，n 日連続するという事象は $N\cdot(1-p)^2p^n$ 回起こる。したがって，雨天日数の和は

$$1\cdot N(1-p)^2p^1+2\cdot N(1-p)^2p^2+\cdots\cdots$$
$$+n\cdot N(1-p)^2p^n$$

で，雨天のグループの回数は

$$N(1-p)^2p^1+N(1-p)^2p^2+\cdots\cdots$$
$$+N(1-p)^2p^n$$

だけある。ゆえに，雨天継続日数の平均は

$$\frac{1\cdot N(1-p)^2p^1+2\cdot N(1-p)^2p^2+\cdots\cdots+n\cdot N(1-p)^2p^n}{N(1-p)^2p^1+N(1-p)^2p^2+\cdots\cdots+N(1-p)^2p^n}$$

$$=\frac{1+2p+3p^2+\cdots\cdots+np^{n-1}}{1+p+p^2+\cdots\cdots+p^{n-1}}$$

で与えられる。したがって $n\longrightarrow\infty$ として

$$\frac{1}{(1-p)^2}\bigg/\frac{1}{1-p}=\frac{1}{1-p}$$

（コノ極限ヲ求メルトキ　$0<p<1$
　$\therefore$　$p^n\longrightarrow0$　$(n\longrightarrow\infty)$
　$\therefore$　$np^n\longrightarrow0$　$(n\longrightarrow\infty)$
ナドトヤッテハイケマセンヨ。10人中9人ハコウヤルノダ!!　シカシ，$n\longrightarrow\infty$ ノトキ
　$n\longrightarrow\infty$，$p^n\longrightarrow0$
カラ $np^n\longrightarrow0$ トハ結論デキナイノダ!!）

$0<p<1$ であるから

$$p=\frac{1}{1+a}\quad(a>0)$$

とおくことができる。

$$\therefore\quad np^n=\frac{n}{(1+a)^n}=\frac{n}{1+na+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2+\cdots}$$

$$<\frac{n}{\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2}=\frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\therefore\quad 0\leqq\lim_{n\to\infty}np^n\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}np^n=0$$

としなければなりません。

答　$\dfrac{1}{1-p}$

練習 4. 何回もくり返す試行において，ある回に事象Eが起こったとき，次の回にもEが起こる確率は $\alpha(0<\alpha<1)$ であり，ある回にEが起こらなかったとき，次の回にもEが起こらない確率は $\beta(0<\beta<1)$ であるという。

(1) 第n回にEの起こる確率を p_n と書くとき，p_{n+1} を p_n で表せ。

(2) $n\longrightarrow\infty$ のとき，数列 $\{p_n\}$ の極限値を求めよ。　（東京工大）

ヒント　ちょっとみるとめんどうそうですがさにあらず，文句に書いてあることをそのまま式で表すと，

$$p_{n+1}=\alpha p_n+(1-\beta)(1-p_n)$$
$$p_{n+1}=(a+\beta-1)p_n+1-\beta$$

これは1次の漸化式（☞「基礎解析」p.148) p.148）で，極限は $\dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$ となります。

確率と数列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率の問題で数列と結びつくものは多いのです。場合によっては，無限にくり返す可能性がある，そこに数列が顔を出す。

◆ まず，典型的な問題からやってみましょうか。

練習 1. 甲，乙がこの順にくり返し，硬貨を振って，さきに表を出した方が勝ちとする。甲の勝つ確率を求めよ。

ヒント　甲，乙，甲，乙，……とくり返すのですから，甲の勝つ場合は（表○，裏×）

○
××○
××××○
××××××○
……

となります。その確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^5,\ \cdots\cdots$$

ですから，甲の勝つ確率はその和で

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

となります。よって，乙の勝つ確率は

$$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

です。

練習 2. 次のようなゲームを考える。さいころを投げて偶数の目が出れば続けて投げ，奇数の目が出ればそこでやめる。k回続けて偶数の目が出て，$(k+1)$回目に奇数の目が出た場合にk点与えられるものとする。

(1) 偶数の目の続くことがn回以下と仮定したときの得点の期待値 E_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} E_n$ を求めよ。　（大阪市大）

ヒント　偶数の目がk回続けて出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ で，このときk点与えられるのですから，求める期待値 E_n は

$$E_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots①$$

です。これは，いわゆる循環級数といわれるもので扱い方はきまっています。

$$\frac{1}{2}E_n=\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \cdots\cdots②$$

①−②をつくると

$$\frac{1}{2}E_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\therefore\quad E_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots\text{答}$$

(2) $2^n=(1+1)^n>1+n+\frac{n(n-1)}{2}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} E_n=1 \quad \cdots\cdots\text{答}$$

練習 3. n個のつぼがあって，中に色以外はまったく同様な玉が入っている。k番目のつぼには赤い玉k個と白い玉 $n-k$ 個入っている。$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

(1) でたらめに1つのつぼをとり，そのつぼの中から，でたらめに1つの玉をとり出してその色を調べ，もとのつぼに戻す。同じつぼから，1つの玉をとり出してその色を調べる。2回とも赤い玉が出てくる確

率 p_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。　(京都府医大)

ヒント (1) n 個のつぼの中から1つをとり出したとき，それが k 番目のつぼである確率は $\dfrac{1}{n}$ です。次にそのつぼからでたらめに1つの玉をとり出し赤い玉である確率は $\dfrac{k}{n}$ ですから，結局，k 番目のつぼから赤い玉を2度続けてとり出す確率は

$$\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{k^2}{n^3}$$

です。そこで，

$$p_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

となります。

(2) $\therefore\ \lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$
$$=\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

*　*　*

◆ 数列を使って確率を求める問題はいろいろあります。そして，大きく分けて，**数列の和に帰着するもの**と，**漸化式に帰着するもの**とになります。上のものはすべて前者になりましょう。そこで次には漸化式で与えられるものをあげておきましょう。

練習 4. サイコロが1の目を上面にして置いてある。向かいあった一組の面の中心を通る直線のまわりに90°回転する操作をくり返すことにより，サイコロの置き方を変えていく。ただし，各回ごとに回転軸および回転する向きの選び方は，それぞれ同様に確からしいとする。n 回目の操作のあとに，1の目が上面にある確率を p_n，側面のどこかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする。

(1) p_1, q_1, r_1 を求めよ。

(2) p_n, q_n, r_n を p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1} で表せ。

(3) $p=\lim_{n\to\infty} p_n$, $q=\lim_{n\to\infty} q_n$, $r=\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ。　(東大)

ヒント 回転軸が3つ，回転する向きは2通りあります。さて：——

(1) 回転軸が上面に垂直のときだけ1の目が動かないし，上面に平行なとき1の目は側面に移ります。だから

$$p_1=\frac{1}{3},\ q_1=\frac{2}{3},\ r_1=0$$

(2) 1の目が側面にあるとき，次の1回転で上面，下面に移る確率はおのおの

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

で，側面にある確率は

$$1-\frac{1}{6}\times 2=\frac{2}{3}$$

ですから

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}$$
$$q_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1}$$
$$r_n=\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1}$$

また，$p_n+q_n+r_n=1$ ですから

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{9},\ q_n=\frac{2}{3},\ r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}+\frac{1}{9}$$

(3)
$$p_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{6}\right),$$
$$r_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(r_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$$
$$\therefore\ p_n-\frac{1}{6}=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$r_n-\frac{1}{6}=\left(r_1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{6},\ \lim_{n\to\infty} q_n=\frac{2}{3},\ \lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{6}$$

*　*　*

◆ このように漸化式で与えられる場合は行列で表されることが多く，また行列でやった方が楽なことも多いのです。この機会に行列の使い方もやっておいてもらいたいものです。それについては112ページをみて下さい。

◎確率と行列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆確率の問題には行列を使うと便利なものが数多くあります。そのいくつかの例をやっておくとしましょう。

◆ 何はともあれ，具体的な練習からはじめるとしましょう。まず，これです。

■練習 1. ある土地で晴の翌日が晴である確率をp，雨の翌日が雨である確率をqとするとき，1日おいて晴→晴，晴→雨，雨→晴，雨→雨と天気持続または変化する確率を求めよ。

ヒント
$$\begin{array}{c|cc} & ○ & ● \\ \hline ○ & p & 1-p \\ ● & 1-q & q \end{array}$$
ハレを○，アメを●で表して左のような行列Aを考えてみましょう。そうすると

$$A^2=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \\ ○ \\ ● \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad ○ \qquad & \qquad\qquad ● \end{array} \\ \begin{pmatrix} p^2+(1-p)(1-q) & p(1-p)+(1-p)q \\ (1-q)p+q(1-q) & (1-q)(1-p)+q^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

となります。そして

$$p^2+(1-p)(1-q)$$

は ○→○→○ および ○→●→○ となる確率の和，つまり○から1日おいてまた○になる確率を表していることがわかります。

同じようにして，A^2 は1日おいて天気が変わる確率を表していることがわかるのです。

上と同様に考えて

A^3 は2日おいて天気の変化する確率

A^4 は3日おいて天気の変化する確率

………

A^n は $(n-1)$ 日おいて天気の変化する確率

を示しています。こうしてみると，確率の計算に行列の便利なことがよくわかるでしょう。では，もっと具体的な問題へ：——

■練習 2. アーチェリーの選手A君の，矢を30m離れた的の中心のところに命中させる確率は，前回命中していれば $\dfrac{5}{6}$ であり，前回命中していなければ $\dfrac{4}{5}$ であるという。A君があるとき矢を命中させた。これを1回目とする。

(1) n回目に矢が命中する確率 p_n を求めよ。

(2) 2回目に命中し，n回目に命中する確率を求めよ。　(三重大)

ヒント 命中したという事象を○，命中しないという事象を×で表し，上の関係を下の行列で表して右のようにしましょう。この行列をAとしますと，A^{n-1} は第n回目にそれぞれが起こる確率を示すのです。このことは，天気の場合と同じです。

$$\begin{array}{c|cc} & ○ & × \\ \hline ○ & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ × & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

(1) そこで A^{n-1} を求めてみましょう。ケーリー・ハミルトンの定理によると

$$A^2-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{5}\right)A+\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\right)E=O$$

すなわち

$$A^2-\frac{31}{30}A+\frac{1}{30}E=O$$

となります。

そこで，

$$A^{n-1}=\left(A^2-\frac{31}{30}A+\frac{1}{30}E\right)Q(A)+pA+qE$$

とおいてp，qを求めてみますと，次のようになります。

$$p=\frac{30}{29}\left(1-\frac{1}{30^{n-1}}\right),\ q=\frac{1}{29}\left(-1+\frac{1}{30^{n-2}}\right)$$

$$\therefore \quad A^{n-1}=\frac{30}{29}\left(1-\frac{1}{30^{n-1}}\right)A+\frac{1}{29}\left(-1+\frac{1}{30^{n-2}}\right)E$$

そこで，A^{n-1} の1−1成分を求めてみますと

$$\frac{30}{29}\left(1-\frac{1}{30^{n-1}}\right)\frac{5}{6}+\frac{1}{29}\left(-1+\frac{1}{30^{n-2}}\right)\cdot 1$$

$$=\frac{1}{174}\left(\frac{1}{30}\right)^{n-2}+\frac{24}{29} \quad (n\geqq 2)$$

となります。これが求める確率です。

(2) 第2回目に命中する確率は $\frac{5}{6}$ で，それ以後は上と同じですから求める確率は

$$\frac{5}{6}\left\{\frac{1}{174}\left(\frac{1}{30}\right)^{n-3}+\frac{24}{29}\right\}$$

$$=\frac{5}{1044}\left(\frac{1}{30}\right)^{n-3}+\frac{20}{29}$$

です。

*　　*　　*

◆ では，もう1つ：——

練習 3. うわさが人から人に伝っていくとき，真Tと偽Fの2つの状態で人から人に伝わり，しかも，$(n-1)$ 人目の人がTの状態で受けとったとすると，n 人目の人がうわさをT，Fの状態で受け取る確率がそれぞれ0.7，0.3であり，また $(n-1)$ 人目の人がうわさをFの状態で受けとったとき，n 人目の人が，うわさをT，Fの状態で受け取る確率が，それぞれ0.5，0.5であるとき，次の問いに答えよ。

(1) はじめTであったうわさが2人目の人にやはりTで伝わる確率を求めよ。

(2) はじめFであったうわさが2人目の人にTで伝わる確率を求めよ。

ヒント このうわさの伝わり方は右上のような行列で表すことができます。そして，この行列をAとしますと，A^2 は2人目の人にどんな状態でうわさが伝えられたかを示すことになります。

つまり，はじめTであったうわさが2人目の人にTとして伝わる確率が0.64，Fとして

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}\mathrm{T} & \mathrm{F}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathrm{T}\\ \mathrm{F}\end{array} & \begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}\end{array}$$

$$A^2=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}\mathrm{T} & \mathrm{F}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathrm{T}\\ \mathrm{F}\end{array} & \begin{pmatrix}0.64 & 0.36\\ 0.60 & 0.40\end{pmatrix}\end{array}$$

伝わる確率0.36であること，また，はじめFであったうわさが2人目の人にTとして伝わる確率が0.60，Fであったうわさが2人目にFとして伝わる確率が0.40であることを示しています。

答 (1) 0.64 (2) 0.60

*　　*　　*

◆ 行列は期待値を計算するにも使えます。たとえば：——

練習 4. 硬貨を投げて表が出れば1万円，裏が出れば2万円受け取る人の期待金額を求めよ。

ヒント 表が出る確率は $\frac{1}{2}$，裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ ですが，これを行列 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ で表すとしましょう。また，それぞれに対応して受け取る金額を行列 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ で表しますと，その積

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}$$

$$=1.5(\text{万円})$$

は，この人の期待金額になるのです。

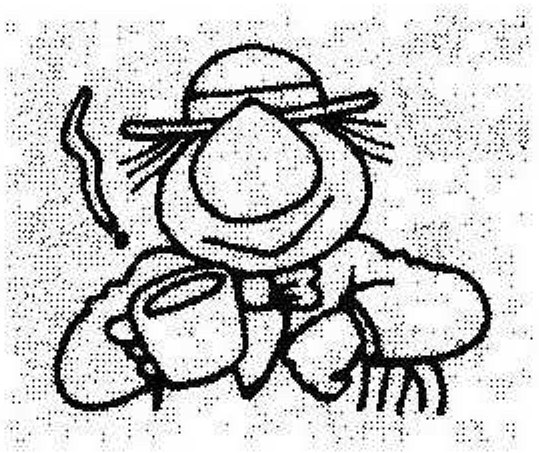
上のような扱い方は，もっと複雑な問題にはスゴク役に立つのです。こうして，行列は経済学や経営学の上に大きく利用されているわけです。

*　　*　　*

あるいはまた，災害の度数を行ベクトル$\vec{x}$で，災害を受ける社会構造をA，その災害の評価を列ベクトル$\vec{y}$で表して，災害高を

$$\vec{x}\,A\,\vec{y}$$

で表すこともできる，といったぐあいです。



天気の確率と蛇足

◆天気の確率の問題は最近少なからずよく出ています。というのも，その複合性とくり返しのよい例だからでしょう。

◆ ここでは天気の確率を3次の正方行列を使って扱ってみましょう。

練習1. ある都市のある日の天気が晴れ，曇り，雨となるそれぞれの確率は右の表のようであるという。

翌日＼ある日	晴れ	曇り	雨
晴れ	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$
曇り	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
雨	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

たとえば，晴れた日の翌日が晴れ，曇り，雨となるそれぞれの確率は，$\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$ である。

(1) 晴れた日の翌々日が晴れる確率を求めよ。

(2) 雨の日の翌々日が晴れ，または曇りである確率を求めよ。　(八戸工大)

ヒント 晴れ(○)，曇り(◎)，雨(●)とし上の表を右のような行列で表します。ただし，行と列を入れかえてありますから，ゴ注意下サイ!!

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \bigcirc & \circledcirc & \bullet \end{matrix} \\ A= \begin{matrix} \bigcirc \\ \circledcirc \\ \bullet \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

この行列Aの平方をつくると

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \bigcirc & \circledcirc & \bullet \end{matrix} \\ A^2= \begin{matrix} \bigcirc \\ \circledcirc \\ \bullet \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{49}{100} & \frac{29}{100} & \frac{11}{50} \\ \frac{9}{25} & \frac{9}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{3}{10} & \frac{33}{100} & \frac{37}{100} \end{pmatrix} \end{array}$$

となります。つまり，○の翌々日が○の確率は $\frac{49}{100}$ です。また●の翌々日が○の確率は $\frac{3}{10}$ で，●の翌々日が◎である確率は $\frac{33}{100}$ ですから，●の翌々日が○または◎である確率は $\frac{3}{10}+\frac{33}{100}=\frac{63}{100}$ となりましょう。

*　*　*

◆ ところで，上の八戸工大の問題を解くだけなら，行列の平方を計算しても，不要なものもあるのですからとくに便利ということはありませんが，A^3, A^4, …… を計算するといろいろなことがわかります。たとえば

$$\lim_{n\to\infty} A^n$$

を求めると，たての成分はみんな同じ値に収束します。つまり，ある日が○であろうと◎であろうと，●であろうと，十分日数が立つとある日の天気の影響がなくなるということを示すわけです。では：——

練習2. 天気の変化する確率（これを遷移確率（センイカクリツ）といいます）が右のようであるとき，$\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ。

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \bigcirc & \bullet \end{matrix} \\ A= \begin{matrix} \bigcirc \\ \bullet \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ヒント ケーリー・ハミルトンの定理により

$$A^2-1.1A+0.1E=O$$

さて，$A^n=(A^2-1.1A+0.1E)Q(A)$

$$+\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)A+\frac{1}{9}\left(-1+\frac{1}{10^{n-1}}\right)E$$

$$=\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)A+\frac{1}{9}\left(-1+\frac{1}{10^{n-1}}\right)E$$

ですから

$$\lim_{n\to\infty} A^n=\frac{10}{9}A-\frac{1}{9}E=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

となります。

注 つまりこの土地の天気が○である確率が $\frac{7}{9}$, ●である確率が $\frac{2}{9}$ なのです。