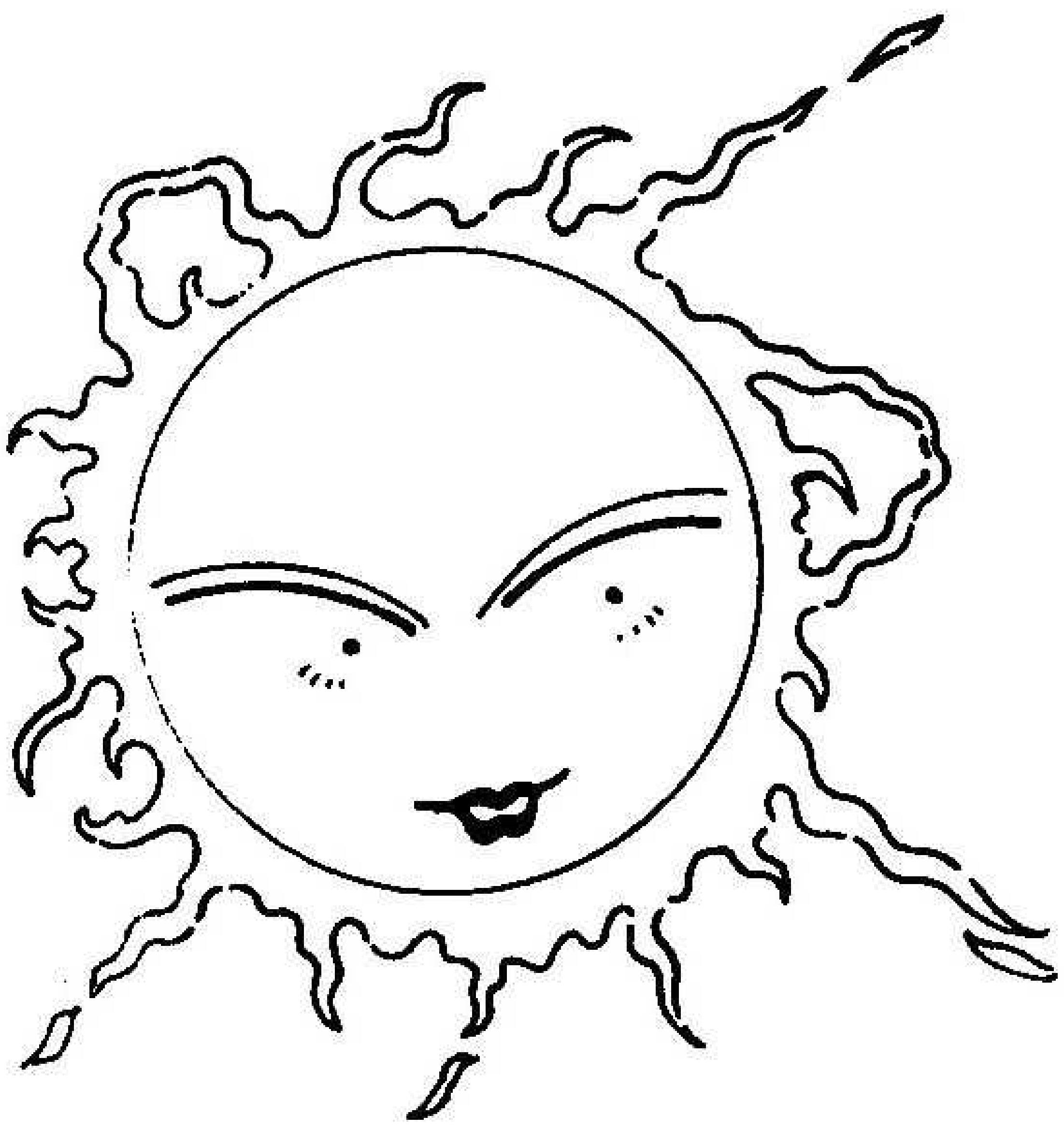
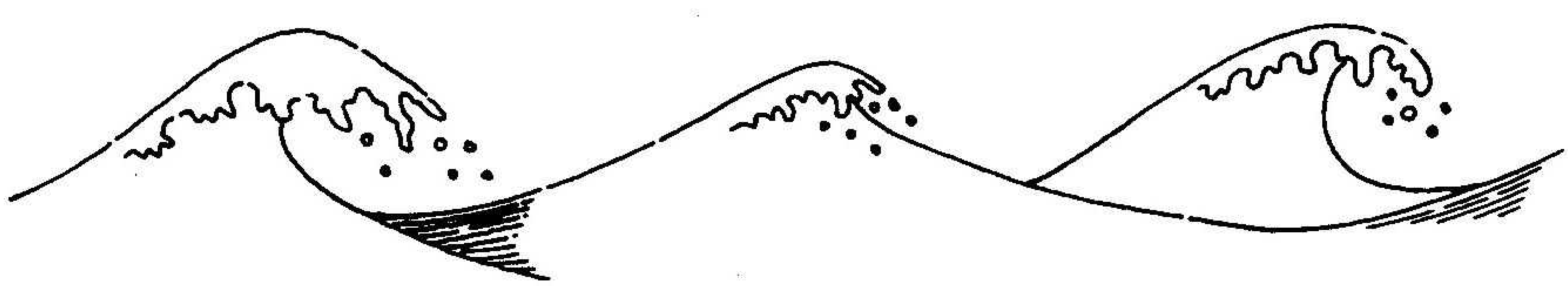
第 1 章

場 合 の 数





① 樹形図とは何か

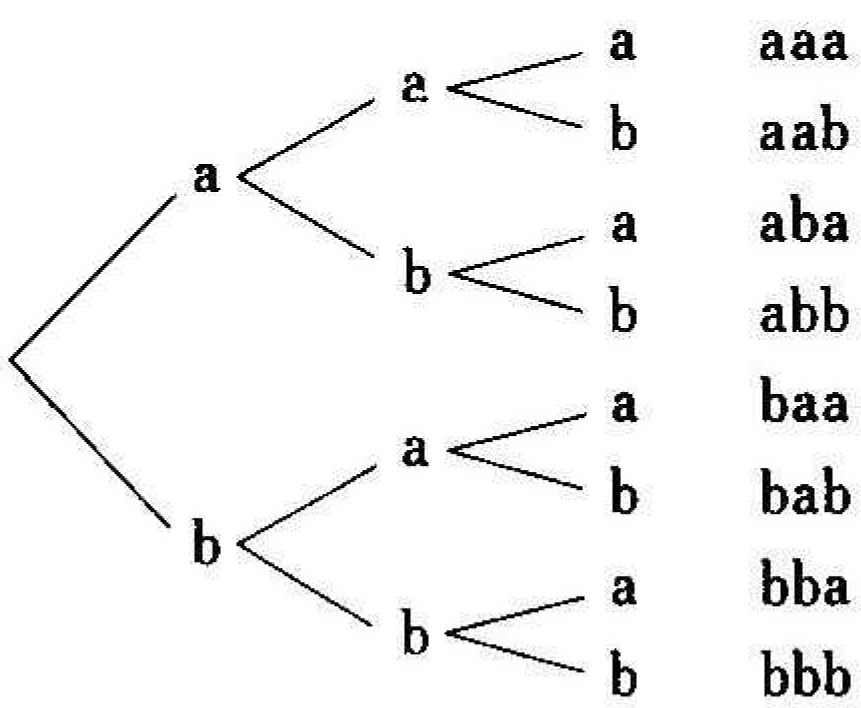
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆系図，系統樹，似たようなものはいろいろありますが，この樹形図もそのひとつ。つまり，発展生成の本質だからでしょう。

◆ いろいろ場合分けをするとき，順々に次の分岐点で枝分かれするような図を**樹形図**といいます。コトバで百万言を費すよりも１つやってみる方がよいでしょう。では，これをやってみませんか。

■練習 1. ２個の文字ａ，ｂをくり返して使うことを許して３個並べる仕方は何通りあるか。

ヒント

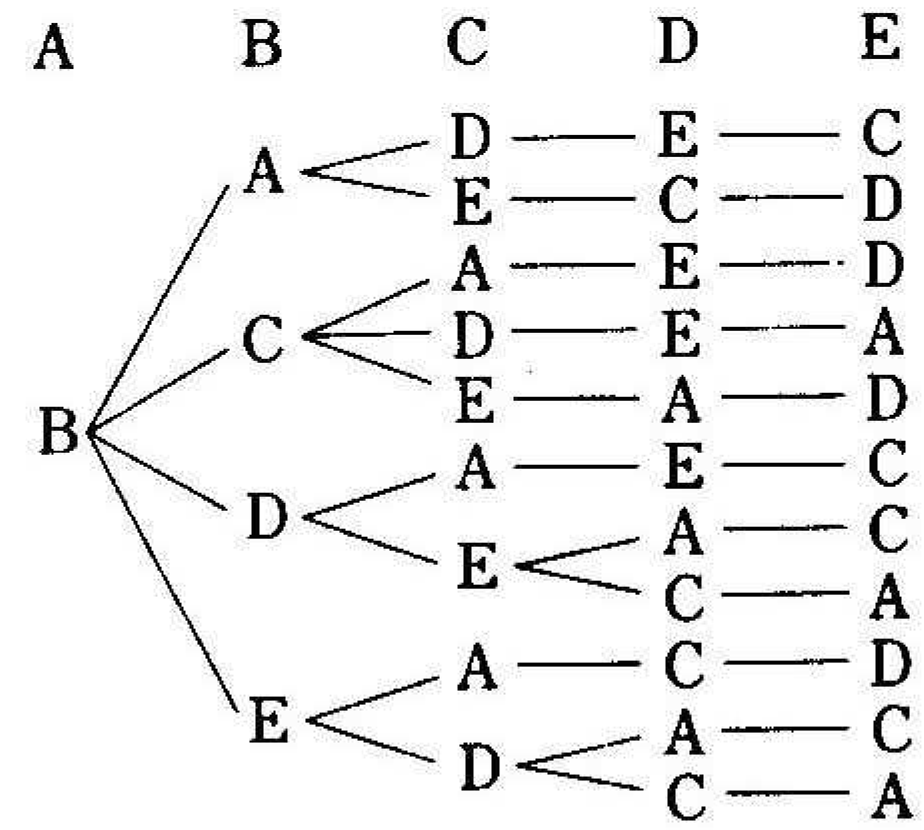


上のようにして８通りあることがわかります。

注　もちろんべつな考え方もできます。たとえば，ａを３回使うものは　ａａａ
ａを２回使うものは　ａａｂ
ａｂａ
ｂａａ
ａを１回使うものは　ａｂｂ
ｂａｂ
ｂｂａ
ａを使わないものは　ｂｂｂ
と考えることもできます。

■練習 2. ５人の名刺が１枚ずつ，５枚ある。いまこれを勝手に１枚ずつ分配するとき，５人とも他人の名刺を受け取る場合は何通りあるか。

ヒント　５人の人をＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅとしよう。ＡがＢの名刺を受け取った場合の樹形図を作ってみると下のようになります。



これでＡがＢの名刺を受け取る場合が11通りありますから，ＡがＣ，Ｄ，Ｅの名刺を受け取る場合も同じこと，結局全部で

$$11\times 4=44 \text{（通り）}$$

あることがわかります。

注　さて，べつな考え方はないだろうか。まず２人なら

ＡがＢを
ＢがＡを

受け取るしかありませんから１通りです。

３人なら下の表から２通り。

A	B	C
B	C	A
C	A	B

では，４人ならどうだろう。ＡがＢの名刺を受け取った場合を上と同じように表にしてみると４通り，かくして全部で $3\times3=9$ 通り。

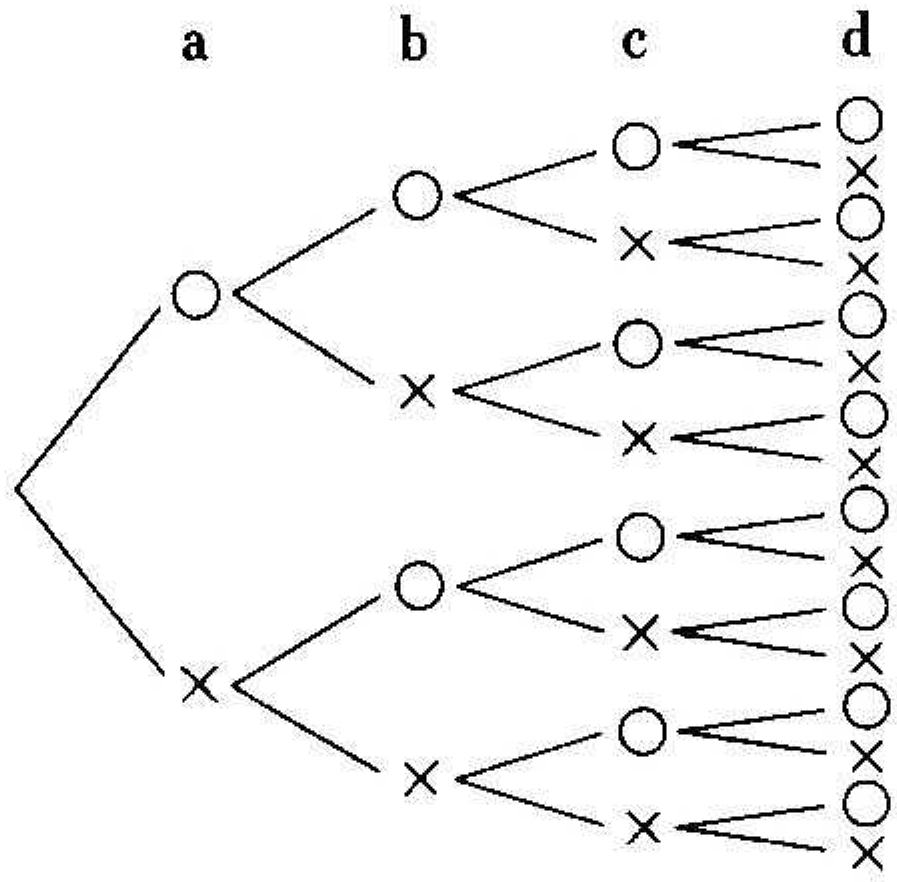
A	B	C	D
B	A	D	C
	C	D	A
	D	A	C

この流儀で５人の場合もできるハズ。

うまいやり方でやろうとおもわず，なるべく野蛮な方法でやってみるといいのです。

練習 3. 文字 a, b, c, d からなる集合の部分集合をすべて書け。

(ヒント) a, b, c, d を入れるか否かを順次考えていくといい。入れるときは○, 入れないときは×をつけて次のような樹形図ができます。



これを上の方から集合の記号で書きますと

{a, b, c, d}, {a, b, c}
{a, b, d}, {a, b}
{a, c, d}, {a, c}
{a, d}, {a}
{b, c, d}, {b, c}
{b, d}, {b}
{c, d}, {c}
{d}, ϕ

(注) さて, べつの考え方では, {a, b, c, d} の部分集合の中で, 要素の数に分けて

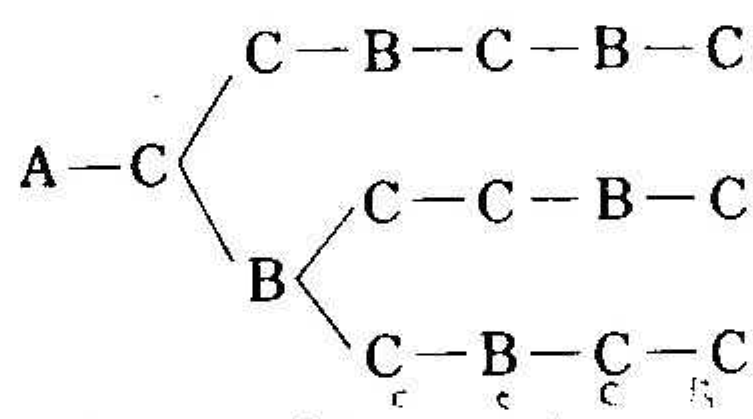
4つ　{a, b, c, d}
3つ　{a, b, c} {a, b, d} {a, c, d} {b, c, d}
2つ　{a, b} {a, c} {a, d} {b, c} {b, d} {c, d}
1つ　{a} {b} {c} {d}
なし　ϕ

とすることもできます。これなどは樹形図を使うよりも簡単です。しかし, 全体で何個あるかというのであれば, (注)の方法よりも, 樹形図の方が見易く 2×8=16 (個) とわかることにもなりましょう。

ともあれ, ムリにいろいろな考え方を自分自らに課することが大切です。そして, その考えを固執していると, いつのまにか, 解けてくるものなのです。

練習 4. ある家庭の1週間の基本献立は肉の日1日, 魚の日2日, 野菜の日4日となっている。ただし, 野菜でない日は連続しないようにする。この場合, 異なった献立の週はどれだけ計画できるか。

(ヒント) 肉の日をA, 魚の日をB, 野菜の日をCとしますと次のような樹形図ができます。ただし, Aを最初においたとします。それは,



の3通り。この樹形図は「岐分け」のとき同じものが出てきますが, 別にかまいません。

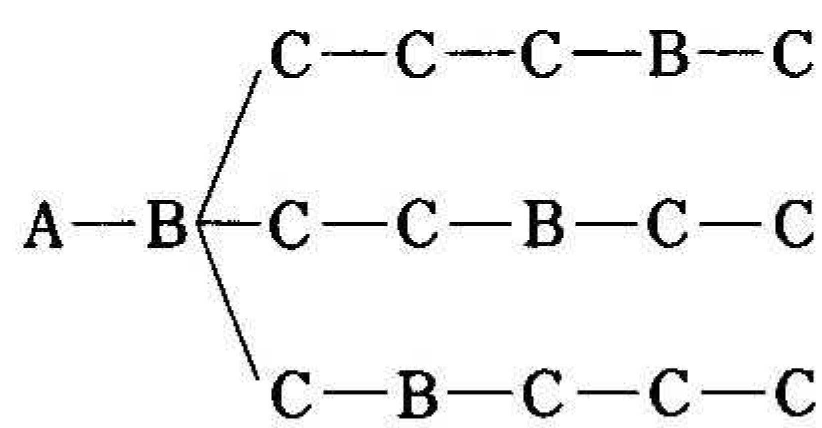
ところで, 1週7日で, どの日をAとしてもよいのですから, 求める献立表は

$$3\times7=21 \text{ (通り)}$$

できます。

(注) Aの次にBがくることはできません。というのは, AもBも野菜の日でないのだからA－Bとはできないからです。

では, AとBは続いてもいいとするとどうなるでしょうか。このときは



より

$$3\times7=21 \text{ (通り)}$$

ふえて, 結局

$$21\times2=42 \text{ (通り)}$$

となります。

そして, 完全に条件をとり去ると

A, B, B, C, C, C, Cをことごとくとって作る順列ですから1週間では

$$\frac{7!}{1!2!4!}=105$$

だけできます。このくわしいことはp.32を参照して下さい。

*　*　*

○場合の数の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆場合の数を求めるコツは，実際に数えてみることです。数えてしまおうとするとしないですむものなのです。

◆ 場合の数を求める問題で大切なことは2つあります。1つは和の原則といわれるもの，他の1つは積の原則といわれるものです。

和の原則 というのは，カンタンにいうと，

「あるいは」というときには加える

ということなのです。ともかく，これをやってみませんか。

1/10

■練習 1. 甲，乙，丙3つのサイコロを振って目の数の和が11になる場合は何通りあるか。

（ヒント） 場合を分けるのだが，さて，どう分けるか。1つのサイコロ甲の目が1か，2か，……，6かに分けてみたらどうだろう。

甲	1	2	3	4	5	6
乙と丙	6と4 5と5 4と6	6と3 5と4 4と5 3と6	6と2 5と3 4と4 3と5 2と6	6と1 5と2 4と3 3と4 2と5 1と6	5と1 4と2 3と3 2と4 1と5	4と1 3と2 2と3 1と4
場合の数	3	4	5	6	5	4

どうやらうまくいった。合計すると27通りある。

（答） 27通り

（注） こんな表を作らないでもできそうなものだ，と考えるかもしれません。実は，上の表の数をみると系統的ですから，わかってしまえば表を作らないでもすみます。

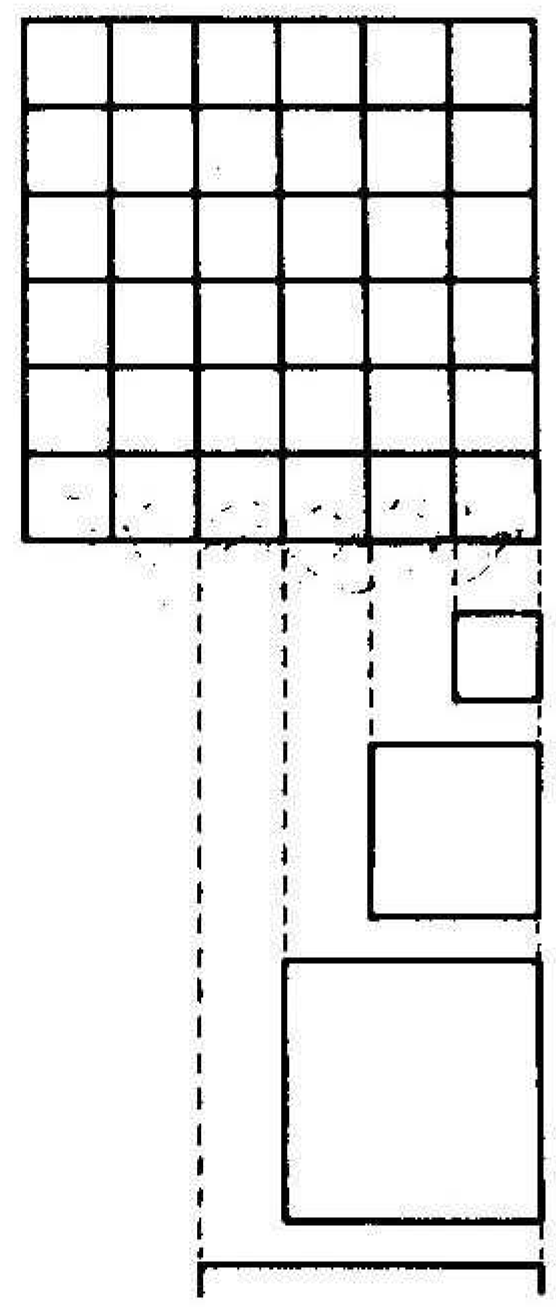
また，計算でもできます。それは

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$$

の展開式で x^{11} の係数を求めるのです。しかし，それはもはやここの範囲とはいいかねる。ともあれ，ここでは場合分けをして，その和を求めたことに注目してください。

1/10

■練習 2. 右の図形の中に正方形はいくつあるか。



（ヒント） 場合分けをしなければなりません。さて，どのように分けるか。大きさで分けたらどうでしょう。

もっとも小さいのは $6\times6=6^2$ 個あります。次に小さいのは，$5\times5=5^2$ 個，次は 4^2 個，…

もう，これでわかりました。

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+6^2$$
$$=1+4+9+16+25+36$$
$$=91$$

（答） 91個

もちろん，場合分けをするとき，重複しないよう注意が肝心です。

1/10

■練習 3. 1から1000までの整数のうち5で割りきれるが 5^2 で割りきれないものはいくつあるか。

（解） 5で割りきれるものは $1000\div5=200$ 個ある。また，5^2 で割りきれるものは $1000\div25=40$ 個ある。

したがって，求める数は

$$200-40=160 \text{（個）}$$

である。

（答） 160個

＊　＊　＊

◆ 次は，**積の原則**。カンタンにいうと，

「かつ」というときには掛ければいい

ということです。ともあれ，これを：——

■練習 4. a, b, c 3つの登山道のある山に登山するとき，帰路と往路は別の道を通るものとする。何通りの方法があるか。

（高知大）

ヒント　まず，帰路と往路で同じ道でもいいとすると何通りあるか。

上りが3通り，かつ下りが3通りありますから

$$3\times3=9\text{（通り）}$$

次に往路と帰路が同じものはいうまでもなく，3通りです。

したがって，求める数は

$$9-3=6\text{（通り）}$$

あります。　　答　6通り

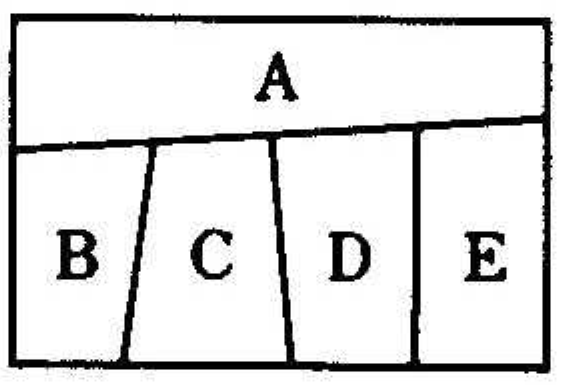
上では積の原則を使いましたが，和の原則でもできます。

往路は a あるいは b あるいは c の登山道を上るとすると，帰路は，いずれも2通りにきまってしまいます。そこで

$$2+2+2=6\text{（通り）}$$

となるわけです。

■練習 5. 右の図の A, B, C, D, E の5つの部分に赤，青，黄，茶，緑の5色のうち何色かを塗って色分けしたい。その仕方は何通りあるか。ただし，同じ色を何回用いてもよいが，相隣る部分は異なる色で塗るものとする。



（岡山大）

ヒント　この種のものは，いや，一般に場合の数を求めたり，順列・組合せの数を調べる際には自分が責任者になってやる，と考えて，その手順を順に計算する，と考えるとうまくいくものです。

さて，これは，まずAに色を塗るとしよう。塗り方は5通りあります。次にBだ。Aとちがう色を塗るのだから4通り。次はCです。これにはA, Bいずれともちがう色を塗るのだから3通りあります。

さて，Dには，A, Cとちがえばいい。3通りです。そして，最後にEにはA, Dとちがう色，またも，3通り。

かくして，求める数は

$$5\times4\times3\times3\times3=540\text{（通り）}$$

ということになります。

*　*　*

◆ 場合の数を求める問題でちょっと異質のものとして有限集合の問題があります。しかし，これについては，別に扱うことにします。（☞「数Ⅰ」p.88）

もう1つ，約数の個数の問題があります。例えば，これです。

■練習 6. $a=2^3\times5^2\times7^2$ の約数は1と a を含めて何個あるか。　　（早大）

ヒント　これは一種の暗記もの。やったことがないとなかなかできないでしょう。ところで

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)(1+7+7^2)$$

を展開すると a の約数がもれなく，しかも1個ずつ出ることは確かです。では，それは何個か？

第1因数内のどれかと，第2因数内のどれかと，第3因数内のどれかを掛けるわけですから

$$4\times3\times3=36\text{（個）}$$

と求まります。　　答　36個

■練習 7. 180の約数は何個あるか。

解　$180=2^2\cdot3^2\cdot5$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

ゆえに，180の約数は集合

$(1,\ 2,\ 2^2),\ (1,\ 3,\ 3^2),\ (1,\ 5)$

の中から1つずつとって掛けたものである。ゆえに，その個数は

$$3\times3\times2=18\text{（個）}$$

答　18個

場合の数を調べる問題は，順列・組合せの問題として数多く出ていますから，もちろん，そのほうも参照してください。

◐ 約数の個数と総和の求め方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆与えられた数の約数は何コあるか。またその総和はいくらであるか。それを求めるのがここの問題点です。

◆ 100の約数をすべて書いてみますと次のようになります。

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100$$

全部で9個あります。

ところで，$100=10^2=2^2\cdot5^2$ ですから，これらの約数は2または5の倍数で，しかも，0個から2個までからなるハズ。そこで

$$(1+2+2^2)(1+5+5^2) \quad \cdots\cdots(*)$$

を展開すると

$$1+2+2^2+5\cdot1+5\cdot2+5\cdot2^2$$
$$+5^2\cdot1+5^2\cdot2+5^2\cdot2^2$$

となって，そのすべての和がでてきます。

つまり，(*) の展開式の項数が約数の個数で (*) を計算したものが約数すべての和ということになります。こうして約数の個数は

$$3\times3=9\ (個)$$

で，約数の和は

$$1+2+2^2=7 \ と \ 1+5+5^2=31$$

の積217であることがわかります。では，次をやってみませんか。

1/13

■練習 1. 3087の約数の個数とその総和を求めよ。

ヒント $3087=3^2\cdot7^3$ ですから

$$(1+3+3^2)(1+7+7^2+7^3)$$

を展開したときの項数が約数の個数で，それは $3\times4=12$(個) あります。また，その総和が約数の総和で

$$1+3+3^2=13$$
$$1+7+7^2+7^3=400$$

したがって

$$13\times400=5200$$

答 個数12，総和5200

となります。

1/13

■練習 2. $N=2^{10}\cdot3^8$ の約数の個数と総和を求めよ。

ヒント $(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+3+\cdots+3^8)$ を作ってみるとわかるように，約数の個数は

$$11\times9=99\ (個)$$

あります。そして，その総和は，等比数列の和の公式を使って

$$1+2+\cdots+2^{10}=\frac{1\cdot(1-2^{11})}{1-2}=2^{11}-1$$

$$1+3+\cdots+3^8=\frac{1\cdot(1-3^9)}{1-3}=\frac{1}{2}(3^9-1)$$

より

$$\frac{1}{2}(2^{11}-1)\cdot(3^9-1)$$

となります。

(注) 上の計算をやる必要はないでしょうが念のためにやってみますと

$$\frac{1}{2}(2047)(19682)$$
$$=2047\times9841$$
$$=20144527$$

となります。

* * *

◆ 上のように数が大きくなると等比数列の和の公式を使うことになります。公式の形で書くと

Nを素因数の積で表したとき

$$N=a^lb^mc^n\cdots\cdots$$

となれば，約数の個数は

$$(l+1)(m+1)(n+1)\cdots\cdots$$

で，その総和は次のようになります。

$$\frac{1-a^{l+1}}{1-a}\cdot\frac{1-b^{m+1}}{1-b}\cdot\frac{1-c^{n+1}}{1-c}\cdots\cdots$$

* * *

ℓ

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

Y/5

練習 3. $N=2^{10}\cdot3^5\cdot5^6$ の約数で 2^3 で割りきれるが 2^5 では割りきれず，3^2 で割りきれるが 3^4 で割りきれず，5^4 で割りきれるものの個数と総和を求めよ。

ヒント $(2^3+2^4)(3^2+3^3)(5^4+5^5+5^6)$

を展開したときに得られるものが与えられた条件をみたすことは明らかです。したがって，約数の個数は

$$2\times2\times3=12\ (\text{個})$$

で，その総和は

$$(8+16)(9+27)(625+3125+15625)$$
$$=24\times36\times19375$$
$$=16740000$$

となります。

では，もう１つ：——

Y(

練習 4. $N=2^4\cdot3^6\cdot5^4$ の約数で，2^3 で割りきれるか，3^4 で割りきれるか，または 5^4 で割りきれるものは何個あるか。また，その総和を求めよ。

ヒント 2^3 で割りきれるものは

$$(2^3+2^4)(1+3+\cdots+3^6)(1+5+\cdots+5^4)$$

を展開して得られるからその個数は

$$2\times7\times5=70\ (\text{個})$$

あります。

次に，3^4 で割りきれるものは，同様にして

$$5\times3\times5=75\ (\text{個})$$

また，5^4 で割りきれるものは

$$5\times7\times1=35\ (\text{個})$$

あります。次に，$2^3\cdot3^4$ で割りきれるものは

$$2\times3\times5=30\ (\text{個})$$

$2^3\cdot5^4$ で割りきれるものは

$$2\times7\times1=14\ (\text{個})$$

$3^4\cdot5^4$ で割りきれるものは

$$5\times3\times1=15\ (\text{個})$$

あります。そして，最後 $2^3\cdot3^4\cdot5^4$ で割りきれるものは

$$2\times3\times1=6\ (\text{個})$$

あります。したがって，求める個数は

$$70+75+35$$
$$-30-14-15$$
$$+6$$

で，それは 127（個）です。

和の方も同じようにして計算すればよいでしょう。

2^3 で割りきれるものの総和は

$$(2^3+2^4)(1+3+\cdots+3^6)(1+5+\cdots+5^4)$$

を計算すればよいのですが，次のようにおくと少し楽になります。

$$A=1+2+\cdots+2^4=\frac{1-2^5}{1-2}=31$$

$$A'=2^3+2^4=24$$

$$B=1+3+\cdots+3^6=\frac{1-3^7}{1-3}=1093$$

$$B'=3^4+3^5+3^6=1053$$

$$C=1+5+\cdots+5^4=\frac{1-5^5}{1-5}=781$$

$$C'=5^4=625$$

ですから，求める総和は

$$A'BC+AB'C+ABC'$$
$$-A'B'C-A'BC'-AB'C'$$
$$+A'B'C'$$
$$=A'C(B-B')+AB'(C-C')$$
$$+BC'(A-A')+A'B'C'$$
$$=24\cdot781\cdot40+31\cdot1053\cdot156+1093\cdot625\cdot7$$
$$+24\cdot1053\cdot625$$
$$=749760+5092308+4781875+15795000$$
$$=26418943$$

ヤレヤレ，コレハスゴイコトニナッタ。

しかし，このような計算をキチンとやってみることは十分意味があることです。こんな計算をやっていると，なんとなく，数字の気持ちがわかってくるような気がするものだ。

なお，その数以外の約数の和がその数自身に等しいことがあります。たとえば

$1+2+3=6$，ギリシヤ人はこれを完全数といったのでした。

○順列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆順列とか組合せとか確率とかいった分野はとかく好かれない。というのも，暗記するより仕方のないのが多いからではあるまいか。

◆ A, B, C, Dの中から3個選んで，いろいろ並べかえてみますと，次のようになります。

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

合計24個。このように，有限個のものを並べかえたものを **順列**（じゅんれつ）といいます。ところで，順列でオボエテおくべきことは4つあります。

第1は「n個の相異なるものの中からr個とり出して作る順列の数は ${}_nP_r$ で表せる」ことです。そして公式は

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

第2は「n種類のものの中からr個とって作る順列の数は ${}_n\Pi_r$ で表せる」ことです。そして，その公式は

$${}_n\Pi_r=n^r$$

第3は「aが3個，bが4個，cが2個あるとき，これをコトゴトクとって1列にならべて得られる順列の数」で，これは記号はありませんが，公式は

$$\frac{9!}{3!4!2!}$$

といったぐあい。一般にaがn_1個，bがn_2個，……あったとき，その公式は

$$\frac{(n_1+n_2+\cdots\cdots)!}{n_1!n_2!\cdots\cdots}$$

となります。

第4は「aが3個，bが4個，cが2個あるとき，この中から4個とって作る順列の数」といったもの。これには公式はありませんので，場合分けをして目の子勘定するのがふつうです。

次に，この4つの場合を，例をあげてやってみることにしましょう。

＊　＊　＊

◆ まず ${}_nP_r$ の公式から：——

■練習1. 5人の中から3人選んで1列に並べる仕方の数を求めよ。

（解）${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$（通り）

　　　　　　　　　　　　　答　60通り

■練習2. 10人の中から3人選んで1列に並べる仕方の数を求めよ。ただし，特定の人甲を必ず入れるものとする。

（解）甲を必ず入れるというのだから，残り9人の中から2人を選んでまず1列に並べる仕方は

$${}_9P_2\text{ 通り}$$

あり，ここへ，特定の人甲を入れる仕方は3通りあるから，結局，求める仕方は

$${}_9P_2\times3=9\cdot8\times3=216\text{（通り）}$$

　　　　　　　　　　　　　答　216通り

（注）順列の問題とはいっても，組合せを使うとラクなことも多いものです。しかし，ここでは，原則として順列に限って扱うことにします。しかし，キミが順列に組合せを応用するのはかまいませんよ。例えば，上の問題なら，まず9人の中から2人選ぶ仕方は ${}_9C_2$ 通り，それに甲を入れた3人をいろいろ並べる仕方は ${}_9C_2\times3!=216$ 通り，といったぐあい。

＊　＊　＊

◆ 次は ${}_n\Pi_r$ の公式を：——

1/16

■**練習 3.** 1と2と3を用いて作られる2桁の整数はいくつあるか。ただし，重複して用いてよい。

（解） 3個の異なるものの中から重複を許して2個とって作る順列の数に等しいから

$${}_3\Pi_2=3^2=9 \text{（個）}$$

ある。 **答** 9個

（注） 全部書いてみると

11 12 13

21 22 23

31 32 33

ナルホド，9個あるわい!!

1/16

■**練習 4.** 電信符号は2種類の記号・と－とをいくつか並べて作られる。いま3個以下用いることにすると，何通りの符号を送ることができるか。

（解） 2個の異なるものの中から重複を許して3個とって作る順列の数は ${}_2\Pi_3=2^3=8$ 通り；2個とって作る順列の数は ${}_2\Pi_2=2^2=4$ 通り；1個とって作る順列の数は ${}_2\Pi_1=2^1=2$ 通り，合計して

$$8+4+2=14 \text{（通り）}$$

答 14通り

* * *

◆ 次は $\dfrac{(n_1+n_2+\cdots\cdots)!}{n_1!\,n_2!\cdots\cdots}$ の公式を使う場合です。

1/16

■**練習 5.** a, a, b, b, c, c を全部1列に並べる順列は何個できるか。

（解） 公式により

$$\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{8}=90$$

答 90個

1/16

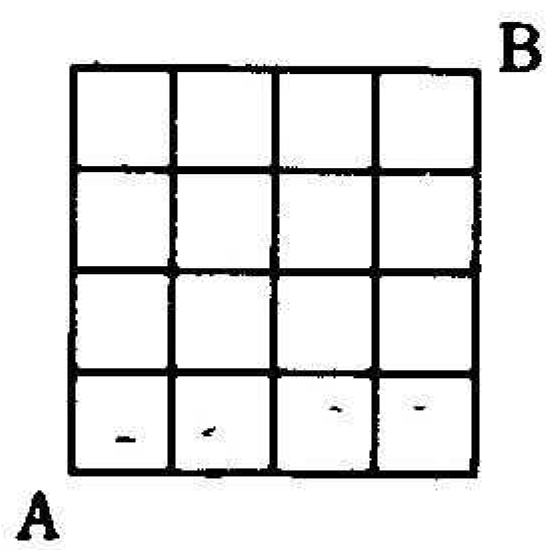
■**練習 6.** 1, 1, 1, 2, 2, 3 をすべて用いて作られる6桁の整数は何個あるか。

（解） $\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$（通り）

答 60通り

1/16

■**練習 7.** 右の図は，車道が，ごばんの目の形に造られた街を示している。点Aから，点Bまで行く道筋は何通りあるか。ただし，最短コースを行くものとする。



（解） Aから1単位右へ行くのをRで，上へ行くのをKで表すと，すべての最短道路は

KKKKRRRR

KRKKRRKR

といったぐあいに，4個のKと4個のRをすべてとって1列に並べた順列の数に等しい。したがって，求める数は

$$\frac{8!}{4!4!}=70 \text{（通り）}$$

答 70通り

* * *

◆ 一部をとる場合は公式がありませんから，目の子勘定をすることになります。

1/18

■**練習 8.** a, a, a, b, b, c の中から3個とって並べる順列の数を求めよ。

（ヒント） 場合分けをしなければなりませんが，その仕方でめんどうにもなり，簡単にもなるというもの。ここでは，同じものの個数に目をつけることにしましょう。

（i） 3個とも同じ場合

a a a 1通りだけ

（ii） 2個だけ同じ場合

a a ×， b b ×，とあって，a a ×の場合はa a b， a a cとあって，これから作る順列の数は，いずれも

$$\frac{3!}{2!1!}=3 \text{（通り）}$$ （チョットコレハ大ゲサカナ!!）

ありますから，$3\times2\times2=12$（通り）

（iii） 全部異なるのは ${}_3P_3=3!=6$（通り）

以上（i），（ii），（iii）を合計して

$$1+12+6=19 \text{（通り）}$$

答 19通り

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○ ${}_n\mathrm{P}_r$ の公式の使い方

◆順列の問題では，多くの場合 ${}_n\mathrm{P}_r$ の公式を知らなくてもすむが，その代わり，答案がダラダラ長くなる。

◆ ${}_n\mathrm{P}_r$ の公式は次のようです。

1/18

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \quad \cdots\cdots(*)$$

これを

$${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!} \quad \cdots\cdots(**)$$

として使うこともありますが，べつに便利さはありません。だから，(*) を徹底して使うほうがいいのです。つまり，(**) は忘れることにしよう。

まず，${}_n\mathrm{P}_r$ の計算から。

1/18

■練習 1. ${}_5\mathrm{P}_3$ を計算せよ。

(ヒント) 左のほうの5からはじめて，5，4，3というふうに右にある数字の数，3個並べて掛ければよい。すなわち，

$${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

1/18

■練習 2. ${}_n\mathrm{P}_3=60$ を解け。

(ヒント) ${}_n\mathrm{P}_3=60$ より

$$n(n-1)(n-2)=60 \quad \cdots\cdots(*)$$

バラバラにして整理しますと

$$n^3-3n^2+2n-60=0$$

因数定理を使って因数分解しますと

$$(n-5)(n^2+n+12)=0$$

n は自然数ですから

$n^2+n+12\neq0$

$\therefore\ n=5$

5	1	−3	2	−60
		5	10	60
	1	2	12	0

これでできましたが，5をみつけるまでの労力がソンです。それよりは (*) にもどって

$$60=2^2\cdot3\cdot5$$

つまり

$$60=5\cdot4\cdot3$$

であることから視察で $n=5$ を見つけるほうがいいのです。同じく ${}_n\mathrm{P}_2=90$ なら

$$n(n-1)=10\cdot9 \text{ から } \quad n=10$$

*　*　*

◆ 次は ${}_n\mathrm{P}_r$ についての証明問題です。

1/18

■練習 3. ${}_n\mathrm{P}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ を証明せよ。

(解)

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\\&=n\cdot\{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\}\\&=n\cdot\{(\overline{n-1})(\overline{n-1}-1)(\overline{n-1}-2)\\&\qquad\cdots\cdots(\overline{n-1}-(r-1)+1)\\&=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}\end{aligned}$$

Q. E. D.

(注) $\overline{n-1}$ は $(n-1)$ と同じものを表すのです。——を括線（かっせん）といいます。かっこが多くなってゴタゴタするとき便利です。

1/18

■練習 4. ${}_n\mathrm{P}_r=(n-r+1){}_n\mathrm{P}_{r-1}$ を証明せよ。

(解)

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\\&\qquad\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)\\&=(n-r+1)\cdot\{n(n-1)(n-2)\\&\qquad\cdots\cdots(n-\overline{r-1}+1)\}\\&=(n-r+1){}_n\mathrm{P}_{r-1}\end{aligned}$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ いよいよ，順列の計算です。

1/18

■練習 5. 1から9までの数字から，異なる5個を用いて作った5桁の自然数はいくつあるか。　（静岡大）

(解) 異なる9個のものの中から5個をとり出して並べる順列の数に等しいから

$${}_9\mathrm{P}_5=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=15120 \text{（個）}$$

答　15120個

練習 6. 0から6までの7個の数字から4個をとって4桁の整数を作るとき，何個できるか。

1/12

（ヒント）　2通りの考え方があります。1つは順順に並べてゆく方法。1つはまず全体から4つとって並べて，あとで，適しないものを捨ててゆくという考えです。つまり：——

（解）1.　まず千の位におけるものは1から6までの6個あるから，そのおき方は6通りある。次に，百位には残り6個のうちどれをおいてもよいから6通り，さらに，十位には残り5個のどれでもいいから5通り，最後に1位は残り4個のどれでもいいから4通りある。したがって，求める個数は

$$6\cdot6\cdot5\cdot4=720\ (\text{個})\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

（解）2.　7個の数字の中から4個とって並べる仕方は　${}_7P_4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$（通り）

次に，0が先頭にくるものの数は1から6までの6個の中から3個とって並べる数に等しいから　${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$（個）

したがって，求める数は

$$840-120=720\ (\text{個})\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 7. 5個の数字1，2，3，4，5を1列に並べる仕方のうち，どちらの端にも1または2のこないものは全部でいくつあるか。　（静岡大）

（ヒント）　1，2，3，4，5を順においてゆくという考え方と，まず全部を1列に並べてしまってから，ダメなものを除く仕方とある。

（解）1.　まず1のおき方は　○○○○○　の両端を除く3つのうちどれかですから3通りあります。次に2のおき方は両端と1をおいたところを除く2つの場所におけるから2通りあります。次に3は残り3つのどこでもいいから3通りで，次に4は残り2通り，5は残り1つで1通り。結局，求める数は

$$3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot1=36\ (\text{通り})$$

（解）2.　5個の数字の並べ方は ${}_5P_5=5!$ あるが，そのうち，左側に1がくる場合は ${}_4P_4=4!$ あるし，2がくるのも同じく $4!$ だけある。さらに，両側に1と2がくる場合は $3!\times2$ だけある。したがって，求める数は

$$5!-4!\times4+3!\times2=36\ (\text{個})$$

（解）3.　（上の2つの解の中間に当たる次のような解もあります）

両端に3，4，5の中から2個とって並べる仕方は ${}_3P_2$ 通り，残り3個を中央におく仕方は ${}_3P_3$ 通りあるから，求める仕方の数は

$${}_3P_2\times{}_3P_3=6\times6=36\ (\text{個})$$

ある。

＊　＊　＊

◆ 問題によっては，目の子勘定で調べる必要があるのもあります。このようなときには表を作って見やすいようにするほうがいいでしょう。

1/18

練習 8. 相異なる5つの文字a，b，c，d，eを用いてできる120個の順列を辞書式にａｂｃｄｅからｅｄｃｂａまで並べるときｂｄｃｅａは何番目か。　（学習院大）

（解）

順　列	個　数	
a××××	${}_4P_4=4!$	24
b a×××	${}_3P_3=3!$	6
b c×××	${}_3P_3=3!$	6
b d a××	${}_2P_2=2!$	2
b d c a e	${}_1P_1=1!$	1
b d c e a		1
計		40

ゆえに，ｂｄｃｅａは第40番目である。

＊　＊　＊

◆ 以上のほかに，${}_nP_r$ を使う順列には円順列とその応用として腕輪などを作る個数に関係したものがあります。これらについては（☞ p.24）を見てください。

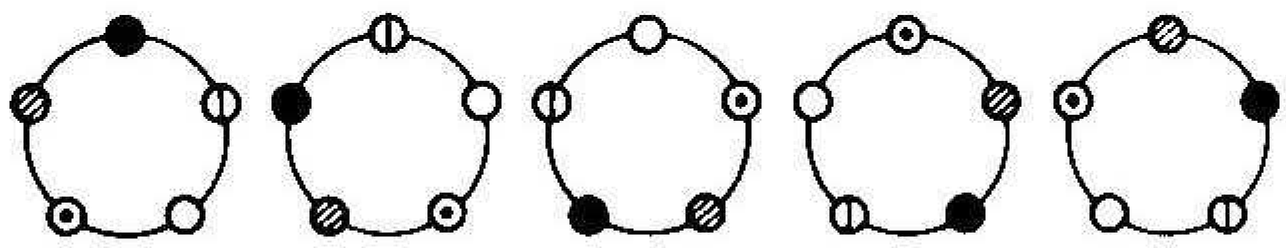
一般に順列の問題を扱うコツは自分がそのことを実際にやる手順を考えて，その順序にしたがって計算してゆくことです。

① 円順列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆円卓会議というのは親善のためではなく，会議員の対等性を主張するためであった。それはまさに円順列の性格である。

◆ 例えば，５人を１列に並べるときには ${}_5P_5=5!$ 通りの仕方があります。ところが，５人を丸く並ばせるときには，下の５つを区



別することができません。つまり，隣りとの相互関係しか問題とされないのですから，１つの場所に１人を固定して，他を自由に動かした順列だけちがうものが出てくるハズ。したがって ${}_4P_4=4!$ 通りしかできないのです。一般に，

n 個の異なるものの中から r 個とって作る

順列は　${}_nP_r$ 個

円順列は　$\dfrac{{}_nP_r}{r}$ 個

あります。

■練習 1. 父母と２人の子どもを丸いテーブルに座らせる仕方は何通りあるか。

(解) 異なる４つのものの中から４つとって作る円順列の数に等しいから

$$\frac{{}_4P_4}{4}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4}=6 \text{（通り）}$$

答　6通り

■練習 2. 父母と４人の子どもが円卓を囲むとき，父母が向かい合うような並び方は何通りあるか。（静岡大）

(ヒント) 父母が向かい合うというのですから，父親を固定すると，母親もきまってしまいます。あと残り４つの席に４人の子どもが勝手に席をとればいい。それは ${}_4P_4=4!$ 通りあるでしょう。

ゆえに，求める解は $4!=24$ 通りです。

答　24通り

■練習 3. 日本人４人，アメリカ人２人，ドイツ人１人を円形のテーブルを囲んで座る仕方は何通りあるか。ただし，同国人は区別しないものとする。

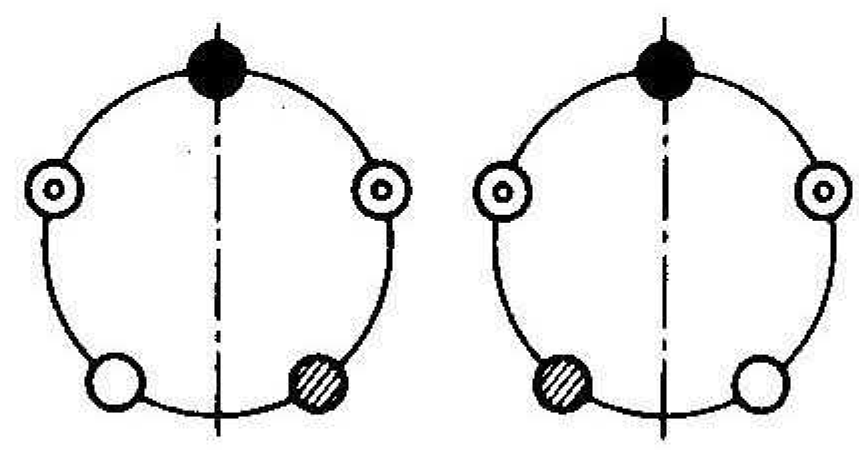
(ヒント) 要するに４つの赤球，２つの白球，１つの黒球を丸く並べる仕方は何通りか，というのと同じです。１個しかない黒球を固定してしまうと，４つの赤球，２つの白球をコトゴトクとって１列に並べる順列の数に等しくなるでしょう。それは，公式によって

$$\frac{6!}{4!2!}=15 \text{（通り）}$$

答　15通り

＊　＊　＊

◆ 円順列のいわば変形ともいうべきものに**じゅず順列**といわれるものがあります。腕輪でも，ネックレスでも同じです。これは左右対称のものは１つと数えられる点で円順列とちがいます。例えば，下の２つの順列は円



順列としてはちがうものですが，じゅずとしては同じものなのです。

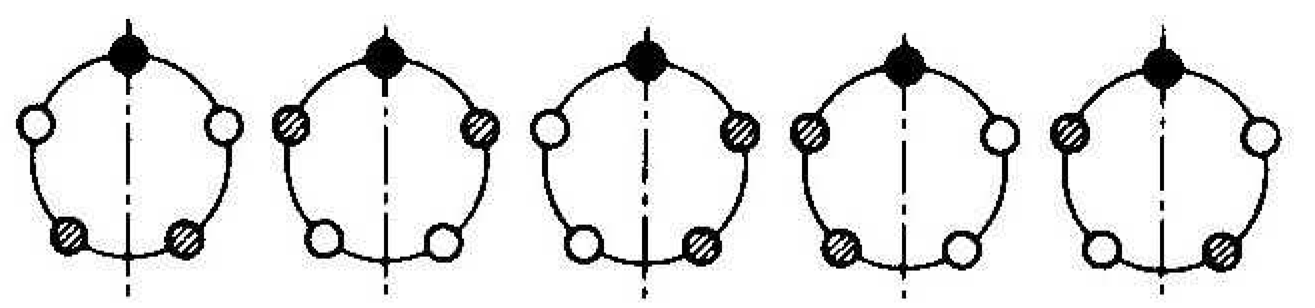
異なる n 個のものから r 個とって作るじゅず順列の数は

$\dfrac{{}_nP_r}{2r}$ 個

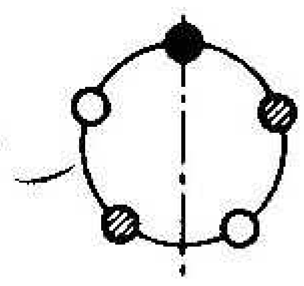
だけあります。

1/20 **■練習 4.** 赤球2個，白球2個，黒球1個で何通りのじゅずが作れるか。

（ヒント） 黒球の位置を固定すると円順列の数は $\frac{4!}{2!2!}=6$（通り）あります。全部示すと下の



通り。この中で4つは裏返すと2つずつ同じものになるので，結局4通りしかできないことがわかります。



解としては，例えば次のように書くのがいいでしょう。

（解） 黒球の位置を固定すると，円順列の数は $\frac{4!}{2!2!}=6$（通り）ある。

そのうち，左右対称のものは2つあるから，求めるじゅずの数は

$$\frac{6-2}{2}+2=2+2=4 \text{（通り）}$$

答　4通り

同じようなものを，もう1つ。

1/21 **■練習 5.** 赤球4個，白球2個，黒球1個を用いて何通りのじゅずができるか。

（解） 黒球を固定して円順列を作ると

$$\frac{6!}{4!2!}=15 \text{（通り）}$$

できるが，左右対称のものは

赤球2（$=4\div2$），白球1（$=2\div2$）

の順列に等しく

$$\frac{3!}{2!1!}=3 \text{（通り）}$$

ある。したがって求めるものは

$$\frac{15-3}{2}+3=6+3=9 \text{（通り）}$$

ある。

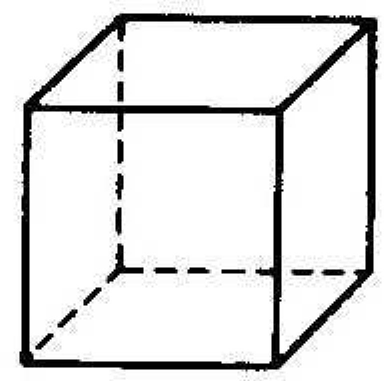
答　9通り

*　*　*

◆ では，順列の中から変わったものをやってみましょう。

■練習 6. 立方体の6つの面を6色で塗り分けるのに何通りの仕方があるか。（法政大）

（ヒント） ちょっとみると，円順列とはみえない。しかし，立方体の1つの面を上面とし，ここに特定の色を塗る仕方は1通りあります。これに対して，その対面，つまり下面に色を塗る仕方は5通り。さらに，周囲の4面に4色を塗る仕方はまさに円順列で，



$$\frac{4!}{4}=6 \text{（通り）}$$

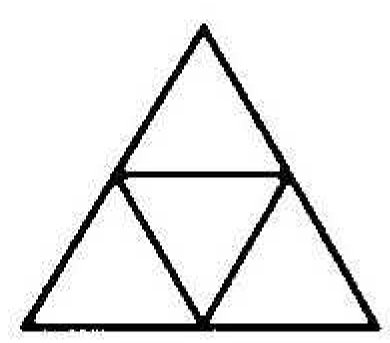
したがって

$$5\times6=30 \text{（通り）}$$

あります。

答　30通り

1/21 **■練習 7.** 右の正三角形を白青黒赤の中から3つを選んで塗り分ける仕方は何通りあるか。



（解） まず，4色の中から塗るべき3色を選ぶ仕方は ${}_4C_3=4$（通り）ある。

次に，3色の中から1つ選んで中央に塗る仕方は3通り，まわりの3つの塗り方は円順列と考えて

$$\frac{{}_3P_3}{3}=2 \text{（通り）}$$

ある。結局

$$4\times3\times2=24 \text{（通り）} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 上のように一見して円順列に見えない問題の中にも円順列は内在しています。これを見分ける能力が大切です。

もちろん，円順列のことを知らなくてもできますから，円順列を知らないから致命的だということにはなりませんよ。

○ 円順列のいろいろ

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆どんなものでも，<～らしくて>というのは簡単なことが多い。しかし<～らしくなくて>というのはめんどうです。

◆ ちょっと見ると円順列と見えない場合でも，実は円順列の応用だというものがいくつもあります。ここでは，それらを中心にいくつか練習してみましょう。

ソバ

練習 1. 自由に回転できる円板の周上に等間隔に5本の異なる旗を立てることにした。何通りの立て方があるか。

ヒント 自由に回転できるというのですから，回転して同じになるものは区別しないというわけでしょう。してみると，回転をとめて，ひとつの旗を固定して，他の旗をいろいろに並び変えてみればよいでしょう。

かくして，求める順列の数は

$$(5-1)!=4!=24\ (\text{通り})$$

です。 答 24通り

ソバ

練習 2. 4組の婚約者がいる。それぞれ婚約者が隣り合って，円卓のまわりに座るとき，その座り方は何通りあるか。（三重大）

ヒント 婚約者を1組として考えると，4組あります。そこで，この4組をいろいろに並べかえる円順列を考えてみますと，$(4-1)!=3!=6$ 通りあります。そして，その組の中の並び方は，男と女が2通りずつあるわけですから，求める数は

$$6\times2^4=96\ (\text{通り})$$

であることがわかります。

もちろん，べつな考え方もできます。円卓にまず4人の男を座らせる仕方は $(4-1)!$ 通りあります。その上で，その隣りに女が座る仕方は 2^4 通りあるから

$$3!\times2^4\ (\text{通り})$$

と考えてもよいわけです。

ソバ

* * *

練習 3. 1つの立方体の6つの面に1から6までの目を記入してさいころを作るとき，異なる記入法は何通りあるか。

（京都府医大）

ヒント まず，1を上面に固定して考えた方がよいでしょう。そうすると，下面のきめ方は残りの2，3，4，5，6のどれをおくこともできますから5通りあります。

そして，側面のきめ方は，残り4つを入れればよいのですが，ぐるぐるまわして同じものは区別できないわけですから，まさに円順列です。それは $(4-1)!=3!$ 通りあります。結局，求める数は

$$5\times3!=30\ (\text{通り})$$

です。 答 30通り

ソバ

練習 4. 10人の学生を5人ずつ，異なる2つの円卓のまわりに着席させる方法は何通りあるか。

ヒント まず，10人の学生を各円卓に配分する仕方は ${}_{10}C_5$ 通りあります。次に，5人の学生が円卓に座る仕方は円順列ですから，各円卓とも $(5-1)!=4!$ 通りあるわけです。したがって，求める数は

$${}_{10}C_5\times4!\times4!=145152\ (\text{通り})$$

です。 答 145152通り

注 ちょっと御注意。上の場合，2つの円卓はちがうものとしています。つまり，1つの円卓は，いわば赤く塗ってある，他方は白く塗ってある。だから，同じ5人が赤円卓に座るのと，白円卓に座るのとではちがった場合としてあるわけです。もし，円卓を区別しないなら半分に減るわけです。

練習 5. 円形の食卓に8人分の席がある。着席の仕方は，各人の相対的順序が異なるとき，ちがうものとする。

(1) 8人の人たちが，食卓に着席する仕方は何通りあるか。

(2) 8人のうち4人が男子で，4人が女子であるとき，男女が交互に着席する仕方は何通りあるか。

(3) 8人が4組の夫婦で，夫婦どうしは隣り合わないようにするとき，男女が交互に着席する仕方は何通りあるか。

ヒント (1) 8人のうち1人を固定して，他の7人が自由に並べばよいのですから，$(8-1)!=7!=5040$（通り）あります。

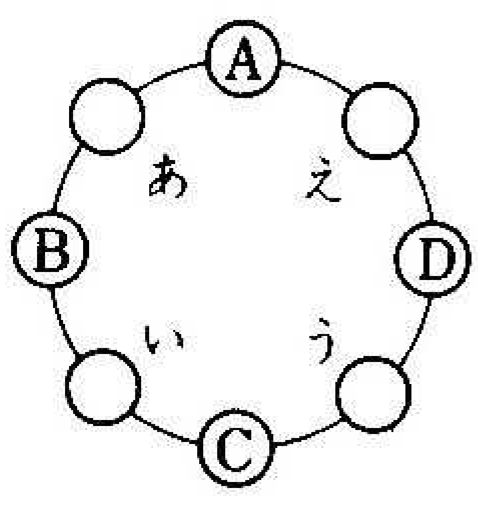
(2) まず1つおきの席に男4人を着席させる仕方は，1人を固定して考えればよいのですから $(4-1)!=3!=6$（通り），そのおのおのの仕方に対し，女子を残った席に座らせる方法は $4!=24$ 通りあります。

したがって，求める仕方は

$$6\times24=144\ (\text{通り})$$

あります。

(3) A，a；B，b；C，c；D，d がそれぞれ夫婦とし，まず，夫A，B，C，Dを食卓に着席させて右のようになったとすると，Aの妻は(あ)と(え)には入れませんから(い)または(う)に着席します。



いまAの妻が(い)に着席したとしますと，Dの妻は(い)に着席できないから(あ)にしか着席できません。したがってCの妻は(え)にだけ，Bの妻は(う)にだけとなって1通りにきまります。

同じ様にして，Aの妻が(う)に着席しますと他の妻たちはやはり1通りにきまります。

ところが夫たちを着席させる仕方は $(4-1)!=3!=6$通りあるのですから，全部で $6\times2=12$（通り）あります。

練習 6. 赤球3個，青球5個，白球7個，合計15個の球を，同じ色の球が隣り合わないように円周上に並べる仕方は何通りあるか。ただし，同じ色の球は区別できないものとする。　　（独協医大）

ヒント 白球が7個，赤球，青球合わせて8個あります。してみると，白球2個の間に赤と青が入るところが1か所，他は1個ずつ入ることになるでしょう。

そこで，まず，白球を配置します。次に，赤球，青球の2つが入る場所をきめてしまいますと，あとは残り6個の場所から赤球2個を入れるべき場所を探せばよい。つまり，

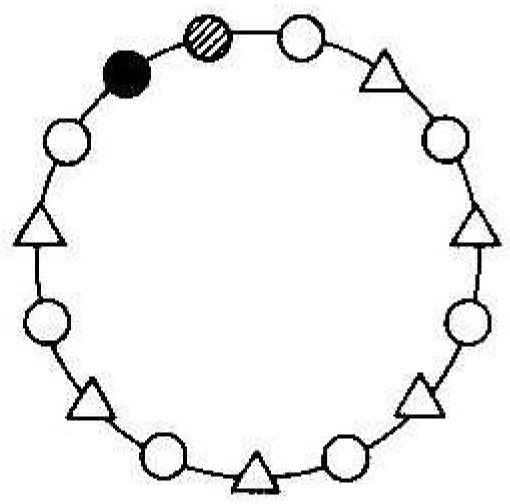
$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15\ (\text{通り})$$

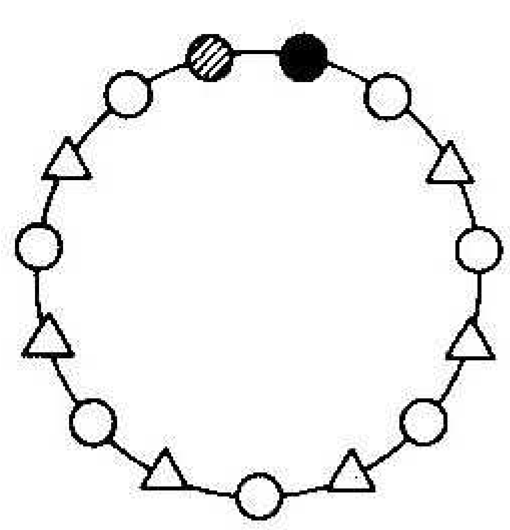
あります。ただし，はじめ赤球，青球の2つを入れるときに，いずれを右，いずれを左にするかで2通りありますので，結局求める個数は

$$15\times2=30\ (\text{通り})$$

ということになります。

つまり右の2つの図において△のところへ赤球を2つ，青球を4つ入れることになるのです。





練習 7. 立方体の6つの面に，1から6までの数字を1つずつ書いてサイコロのようなものを作る。相対する2面の数の和がすべて7になっているものは何通りあるか。

（岐阜薬大）

ヒント 相対する2面の数字の和が7というのですが，これは1と6，2と5，3と4とになります。いま上底を1とすると下底は6，あとは自由に変えられるのは2と3（あるいは5と4）だけ。結局2通りだけです。

* * *

◐ 色で塗り分ける問題

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆地図を色で塗り分ける問題は昔から多くの人の関心を呼んだものです。その中でもっとも有名なのが4色問題です。

◆ 地図や図形をいくつかの色で塗り分ける問題を考えることにしましょう。

練習1. 5種類の色を用いて4つの国に色を国別に塗る方法は何通りあるか。

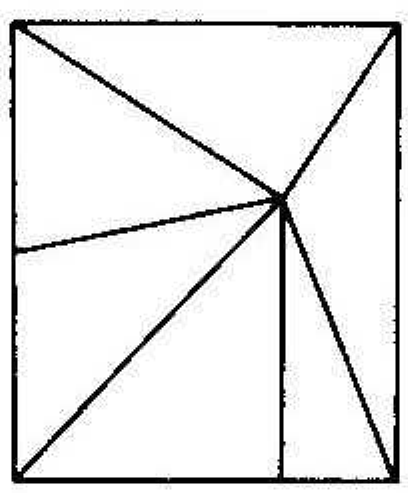
（宇都宮大）

ヒント　4つの国をA，B，C，Dとしましょう。また，5種類の色をa，b，c，d，eとしましょう。a，b，c，d，eの中から4つを選んでいろいろと並べかえ，その順にA，B，C，D4つの国に塗ればいいのですから

$$_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120 \text{（通り）}$$

あります。

練習2. 長方形を右の図のように6つの三角形にわけ，赤，青，黄の3色を使って，次の条件をすべてみたすように塗り分けたい。



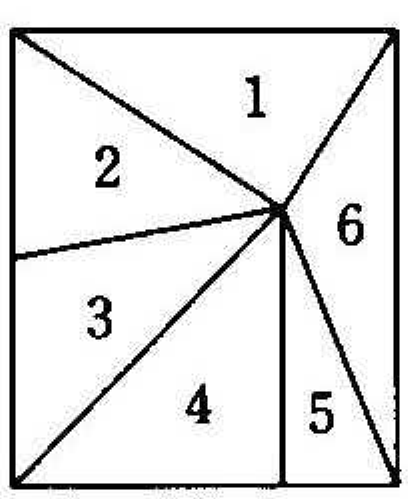
(1)　それぞれの三角形を赤，青，黄の中の1色だけで塗りつぶす。

(2)　1辺を共有する2個の三角形を異なる色で塗る。

(3)　赤，青，黄のうちで使わない色はない。このとき塗り方は何通りあるか。

（同志社大）

ヒント　三角形は6個で色は3種ですから，まず記号化しておきましょう。三角形は下のように番号をつけて区別します。また，色はA，B，Cで表すことにしましょう。



そうすると

まず，A，A，A，B，B，Cを塗る場合は

1，3，5をAで塗り，残り2，4，6の中からBを塗るべき2つを選ぶ仕方は $_3C_2$ 通り，したがって3通りあります。

また，2，4，6をAで塗った場合も同じく3通り。

結局A，A，A，B，B，Cを塗る場合は6通りあることがわかります。そして，

A，A，A，C，C，B
B，B，B，A，A，C
B，B，B，C，C，A
C，C，C，A，A，B
C，C，C，B，B，A

などいずれも6通り。結局

$$6\times6=36 \text{（通り）}$$

あることがわかります。

次に，A，A，B，B，C，Cと塗る場合は1をAで塗ったとき

1	2	3	4	5	6
A	B	A	C	B	C
A	C	A	B	C	B
A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	C	B
A	B	C	B	A	C
A	C	B	A	B	C
A	C	B	A	C	B
A	C	B	C	A	B

と8通りあります。1にB，Cを塗ったときも同じく8通りずつ。したがって，全部で

$$8\times3=24 \text{（通り）}$$

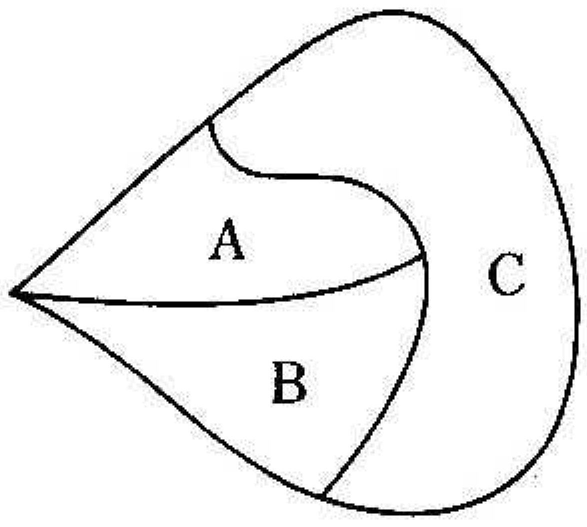
あります。結局全部で

$$36+24=60 \text{（通り）}$$

あることがわかります。

（注） もう少し手順を省いて労力を減らすこともできますが，今はこうしておきます。

練習 3. 5種の色を使って，右の地図のA, B, C 3つの国を塗り分ける方法は何通りあるか。



（解） 5つの異なるものの中から3つ選んで作る順列の数に等しいから

$$ {}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60 \text{（通り）}$$

答　60通り

練習 4. 立方体の6つの面を5つの色A，B，C，D，Eを用いて，隣り合う面の色が異なるように塗るとき，次の問いに答えよ。ただし，回転して同じになる塗り方は同一とみなす。

(1) この5色のうちの3色を用いて塗る方法は何通りあるか。

(2) この5色のうちのいくつかの色を用いて塗る方法は何通りあるか。　（佐賀大）

（ヒント） (1) 同じ色が塗れるのは向かい合った面だけです。したがって，3色の場合は5色の中から3色を選ぶ数だけあることになります。したがって ${}_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$（通り）あります。

(2) 3色では10通り。

4色では向かい合った2組の面に同じ色を塗り，他の向かい合った面にちがった色を塗ることになりますから，色さえ選択してしまえば1通りにきまります。したがって，5色の中から2回使う2色を選び，残り3色から1回だけ使う2色を選ぶ数に等しく

$$ {}_5C_2\times{}_3C_2=30 \text{（通り）}$$

あります。

5色では向かい合った2つの面に同じ色を塗り，他はちがった色を塗ることになります。向かい合う同じ色の選び方を5通りあって，選んだ色の塗り方は4つの異なるものの円順列で$(4-1)!=6$（通り）ありますが，裏返して同じものがでてきますので，結局

$$5\times6\div2=15 \text{（通り）}$$

となります。結局求める個数は

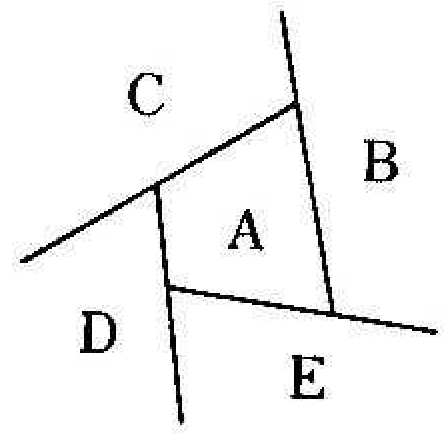
$$10+30+15=55 \text{（通り）}$$

あります。

*　*　*

◆ この種のものはいろいろありますが入試に出題されているものの中からちょっと変わったものをあげておきましょう。

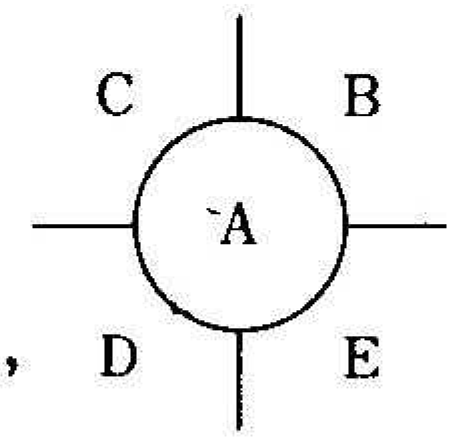
練習 5. 5色の絵の具を使って右の図のA，B，C，D，Eを塗り分けるとき，



(1) すべての色が異なる場合は何通りあるか。

(2) 同じ色を何回使ってもよいが，隣り合う部分は異なる色とする場合は何通りあるか。　（東北学院大）

（ヒント） (1) まず，与えられたような図でも，下のような図でもまったく同じであることが目のつけどころです。そして，5色をいろいろの順に並べ，その順にA，B，C，D，Eと塗っていけばよいのですから



$$ {}_5P_5=120 \text{（通り）}$$

あります。

(2) まず3色を使う場合はAには1回だけ，B，D；C，Eには，同じ色を塗ることになりますから，5つのものの中から3個選んで順列を作り，右のものは中央Aに，中のものはB，Dへ，左のものはC，Eに塗ればいいでしょう。したがって

$$ {}_5P_3=60 \text{（通り）}$$

次に4色使う場合は同じように考えて240通り，そして，5色使う場合は120通り，全部で $60+240+120=420$（通り）あることがわかります。

○ ${}_n\Pi_r$ の公式の使い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆ n 種類のものの中から r 個とって並べる順列の数といってもいいし，n 個の異なるものの中から重複を許して……といっても可。

◆ a, a, a, ……
b, b, b, ……
c, c, c, ……

と，いうように，a, b, c が無限にあるとき，この中から2個とって順列を作ると

aa　ab　ac　bc
bb　ba　ca　cb
cc

の9個できます。一般に

n 種類のものの中から，r 個をとって得られる順列の数は

$$ {}_n\Pi_r = n^r $$

で与えられます。というのも，第1番目には n 通りのおき方があり，第2，第3，……，第 n 番目にも n 通りのおき方があるのですから n^r 通りあるわけです。Π はパイと読む。

では，具体的な問題にいきましょう。

＊　＊　＊

1/26

■練習1. 1，2，3の3個の数字を用いて作られる5桁の整数はいくつあるか。

ヒント 重複を許してとるのですか，などと質問する人が必ずいるものだ。5桁の整数というのだから当たり前，と知るべし。

さて，万位に1，2，3のどれでもおけるから3通り，そのおのおののおき方に対して，千位にも3通り，百位にも3通り，……とおけるから，全部で $3^5=243$（通り）ある。

あるいは，すぐ公式を使って

$$ {}_3\Pi_5 = 3^5 = 243 \text{（通り）} $$

としてもよい。

1/26

■練習2. 1，2，3，4の4個の数字を用いて作られる5桁の偶数は何個あるか。

ヒント 第1位における数字は2と4の2組で，十位から万位までは ${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$（個）ある。結局，求める数は

$$ 256 \times 2 = 512 \text{（個）} $$

答 512個

1/26

■練習3. 1，2，3，4の4個の数字を用いて作る5桁の整数のうち4の倍数は何個あるか。

ヒント 4の倍数の条件を求めなければなりません。100は4で割りきれますから，結局一位と十位でできる数が4の倍数であることが必要かつ十分でしょう。それは

12，24，32，44

の4つしかありません。とすると，残りの百，千，万の位の数は何でもいいので，

$$ {}_4\Pi_3 = 4^3 \text{（通り）} $$

ありますから，結局求める数は

$$ 4^3 \times 4 = 256 \text{（通り）} $$

答 256通り

＊　＊　＊

◆ ${}_n\Pi_r$ の公式を使う例は，まあこんなところ。そこで，次には，いくつか形の変わった例をあげるとしましょう。

1/26

■練習4. ・と－をいくつか使って信号を送りたい。全部で30個の信号を送るためには少なくとも何個まで使う必要があるか。

ヒント

使用個数	信号の個数	累計
1	${}_2\Pi_1 = 2^1 = 2$	2
2	${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$	6
3	${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$	14
4	${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$	30

ゆえに4個まで使用すればよい。

■**練習 5.** ある大学で新入生をA，B，Cの3組に分けることになっている。ある高校から8名の入学が許された。この8名がA，B，Cの3組に分割される方法は何通りあるか。

(ヒント)　8人の人をa，b，c，d，e，f，g，hとすると，aはA，B，C 3つの組のどれにも入れられる可能性があるから3通り，そのおのおのの仕方に対して，bも3通り，……といったぐあい。さては

$$3^8\ (\text{通り})$$

あるわけだ。

ところで，これをこうも考えられる。

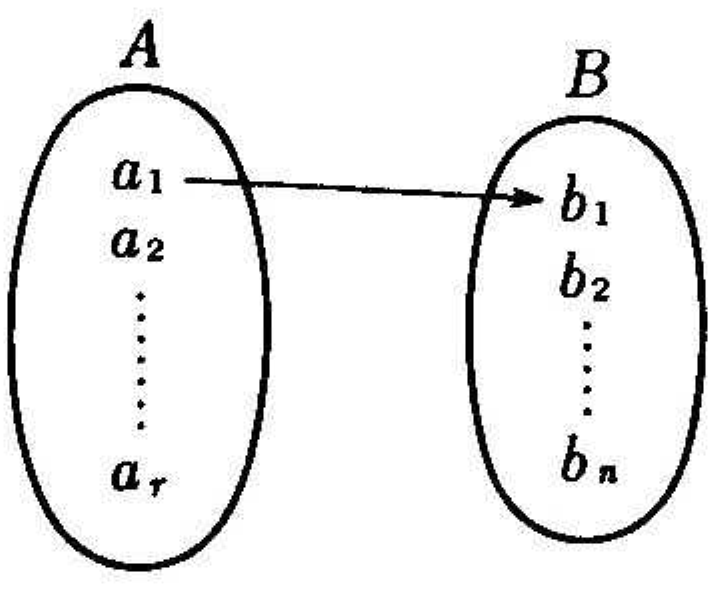
A，B，Cと書いたカードが無数にあって，これらから8つ選んで並べる。その並んだ順にa，b，c，d，……，hの組分けをきめるのです。こう考えると，3種類のものの中から8個とって作る順列の数に等しく

$$_3\Pi_8=3^8\ (\text{通り})$$

になりましょう。　　　　答　6561通り

■**練習 6.** 2つの集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_r\}$，$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$ がある。AからBへの写像は，全部で何通りあるか。

(ヒント)　a_1 は b_1, b_2, ……, b_n のどれか1つに移されるのですから n 通りの方法があります。a_2 も同じく n 通り，……したがって，n^r 通りあります。



あるいは，こう考えてもいいでしょう。b_1，b_2，……，b_n を記したカードが無数にある。その中から r 枚選んで1列に並べる。そして，a_1，a_2，……は1列に並んだカードを右のほうから順にとって，そのつかんだカードに結びつく，つまり，移される，と考えるのです。そうすると

$$_n\Pi_r=n^r$$　　……答

■**練習 7.** 1，2，3，4，5を使ってできる3桁の3の倍数は何個あるか。数字は重複してとってよい。

(ヒント)　2の倍数なら，第1位が偶数であればよい。3の倍数は数字の和が3の倍数であればよいのです。例えば

54331

なら

$$5+4+3+3+1=16$$

これは3の倍数ではないから3で割りきれない。さて

A_1：　1と4は　(3の倍数)+1

A_2：　2と5は　(3の倍数)+2

A_3：　3　　は　(3の倍数)

そこで，3個の数字の和が3の倍数となるのは次の4つの場合がある。

(i)　3個の数字がいずれも3の倍数の場合，これは333，1個しかない。

(ii)　3個とも A_1 から選ぶとき

$$_2\Pi_3=2^3=8\ (\text{個})$$

ある。

(iii)　3個とも A_2 から選ぶとき

$$_2\Pi_3=2^3=8\ (\text{個})$$

ある。

(iv)　A_1，A_2，A_3 から1個ずつ選ぶとき，選び方は

$$2\times2\times1\ (\text{通り})$$

あり，その並び方がいずれも 3!（通り）あるから

$$(2\times2\times1)\times3!=4\times6=24\ (\text{通り})$$

(i)〜(iv)から，求める数は

$$1+8+8+24=41\ (\text{通り})$$　……答

*　　*　　*

◆　以上で $_n\Pi_r$ の公式を使う場合の重要なものはやったわけです。しかし，はじめにも申しましたように，$_n\Pi_r$ は公式などと大ゲサなことをいわないでも十分間に合うのです。つまり，そのつど目の子勘定できめることなのです。

① 公式$\dfrac{(p+q+\cdots)!}{p!\,q!\cdots\cdot}$の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆順列・組合せの問題の大部分は公式をオボエナイデモすむ。しかし，これと $_nH_r$ だけはやむをえませんね。

◆ a, b, c, d の中から2個とって作る順列の数，これは $_4P_2$ で与えられた。a, b, c, d が無限にあるとき2個とって順列を作るのであれば $_4\Pi_2=4^2$ だった。

ところが，a, a, b, b, b, c, d をコトゴトクとって並べる，というのは

$$\frac{7!}{2!3!1!1!}$$

で与えられるのです。(☞ p.20)

ここではこの公式を使う問題について学ぶことにしましょう。

■練習1. KUMAMOTO の8文字を1列に並べる仕方は何通りあるか。　(熊本大)

1/27　Y/B

ヒント　まず整理してみると
MMOOAKUT
といったぐあい。2個，2個，あとは1個が4つ，さては公式によって

$$\frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}=10080 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

1/27

■練習2. KAWASAKI の8文字を1列に並べる仕方は何通りあるか。

ヒント　AAAKKWSI でAが3個，Kが2個，W, S, I はおのおの1個ありますから，これらをすべてとって1列に並べる仕方は

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!}=3360 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

9

◆ これで第1段階は終わり。次は，このやや複雑なものをやってみましょう。

1/28

■練習3. 0, 8, 8, 1, 1, 1, 2, 2をことごとくとって作る8桁の整数は全部で何個あるか。

ヒント　8桁というから0が先頭にきては困る。まず，全部をとって1列に並べる仕方は

$$\frac{8!}{1!2!3!2!}$$

通りありますが，0が先頭にくるものは 8, 8, 1, 1, 1, 2, 2 をコトゴトクとって1列に並べるのと同じこと。したがって，

$$\frac{7!}{2!3!2!}$$

通りあります。ゆえに求める数は

$$\frac{8!}{1!2!3!2!}-\frac{7!}{2!3!2!}$$

$$=\frac{8!-7!}{2!3!2!}=\frac{7\times7!}{2!3!2!}=1470\ (\text{個})$$

だけあります。

■練習4. AABCDをことごとくとって1列に並べる仕方は何通りあるか。ただし，2つのAは隣り合わないものとする。

ヒント　まずこの5つを1列に並べる順列の数は

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$$

だけあります。次にAが隣り合うものは2つのAを1つのものとして扱えばいいのですから 4!＝24 通りあります。

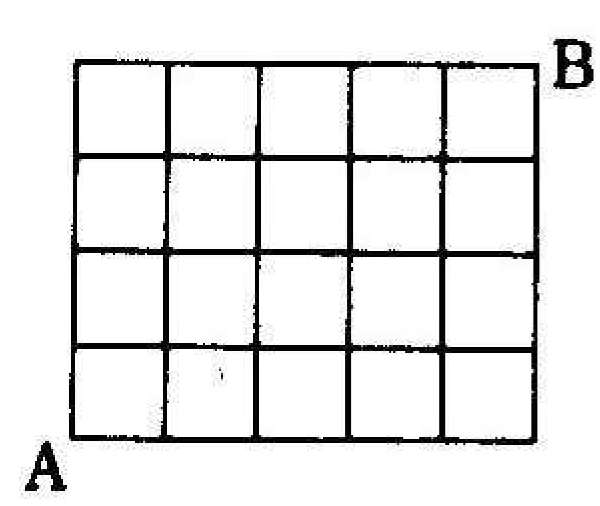
そこで，Aが隣り合わないものは
60－24＝36（通り）

＊　＊　＊

◆ これで，だいたい基本的なものは終わりましたが，次は，このややめんどうな応用例です。

1/28

■練習5. 右のような道路がある。Aから Bに行く最短通路は何通りあるか。



ヒント　東に1単位進むのをE，北に1単位進むのをNとすると，Eを5つ，Nを4つとれば必ずAからBへの最短通路を表します。順序には関係しません。そこで，

EEEEENNNN

をことごとくとって1列に並べる順列の数に等しく，公式により

$$\frac{9!}{5!4!}=126 \text{（通り）} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

この種の問題の詳しいことは（☞ p.54）。

練習 6. 10段ある階段がある。これを上がるとき，1段ずつ上がっても，2段ずつ上がってもよく，また，1段ずつと2段ずつを混ぜて上がってもよいとすれば，上がるのに何通りの方法があるか。

ヒント　こんな問題をはじめてみるとドキッとする。しかし，目の子勘定をする気になれば何でもない。まず，2段上がらないとすれば明らかに1通りしかない。次に，2段を1回上がるとすると，1段を8回，2段を1回上がるわけ，そして，その順序は関係しない。（つまり，まず2段上がってから1段ずつでもいい，1段上がってから2段，あとは1段ずつでもいい。）

その回数は

$$\frac{9!}{8!1!}=9 \text{（通り）}$$

これらを全部調べて加えればいい。解答は表にでもすれば見やすいでしょう。

解　1段上がるのをA，2段上がるのをBとすると，次のようになる。

A	B	回　数
10	0	$\frac{10!}{10!0!}=1$
8	1	$\frac{9!}{8!1!}=9$
6	2	$\frac{8!}{6!2!}=28$
4	3	$\frac{7!}{4!3!}=35$
2	4	$\frac{6!}{2!4!}=15$
0	5	$\frac{5!}{0!5!}=1$
合　計		89（通り）

答　89通り

*　*　*

◆　この公式の応用として，コトゴトクはとらない場合があります。では，具体例をやってみましょう。

練習 7. a, a, a, b, b, c, dの中から5個とって作る順列の数を求めよ。

ヒント　まず場合分けが必要です。同じものの個数で分けるのがいいでしょう。

（i）　a, a, a, b, b のとき

$$\frac{5!}{3!2!}=10$$

（ii）　a, a, a, ×, × のとき

ここに×，×にはb, c, dの中から2つ選んで入れるのです。このときは

$$\frac{5!}{3!1!1!}\times 3=60$$

この3というのはb, c ; b, d ; c, dと3個あるからです。

（iii）　a, a, b, b, × のとき

ここに×はc, dのいずれかを入れるのです。このとき

$$\frac{5!}{2!2!1!}\times 2=60$$

（iv）　a, a, ×, ×, × のとき

ここに×，×，×はb, c, dから1個ずつとる，とすれば×，×，×と書くこともなかった。a, a, b, c, d だ。このとき

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$$

（v）　b, b, ×, ×, × のとき

ここに×，×，×はa, c, dの中から1個ずつとる，これも上と同じくb, b, a, c, dでいいわけ，60個。

以上合計して，250個あります。

答　250個

○組合せとは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆組合せというといかめしいが，コンビといえば親しめる。重複を許す組合せというと近づきにくいが，ホモといえば……

◆ A, B, C, D, Eの5人の中から2人選ぶ仕方は何通りあるか。これは実際数えてみるとすぐわかる。数えるといっても，何か基準を設けてやらないと抜けたものが出たり，同じものを2度あげたりすることにもなりましょう。

まず，Aを含むものは

AB, AC, AD, AE

の4つだけ。次はAを含まずBを含むものは

BC, BD, BE

の3つ。次はA, Bを含まずCを含むものは

CD, CE

そして，最後はいわずと知れたこと

DE

です。合計してみると

$$4+3+2+1=10 \text{（通り）}$$

というわけ。しかし，考え方を変えて次のようにすることもできます。

A, B, C, D, Eの5人の中から2人を選んで並べる仕方は，順列といわれるもので ${}_5P_2$ 通りあります。ところが，組合せの場合には並ぶ順序については問題にしないから，AB も BA も同じもの，そこで ${}_5P_2$ を2つ並べかえる数 2! で割って

$$\frac{{}_5P_2}{2!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10 \text{（通り）}$$

となります。

一般に n 個の異なるものの中から r 個とり出す組合せの数は ${}_nC_r$ なる記号で表し，

$$\boldsymbol{{}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$
$$\boldsymbol{=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

で与えられます。しかし，実際の計算には

$\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ よりも

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots r}$$

としたほうが安全でもあるし，計算のメドがつくという点で便利です。

*　*　*

◆ A, B, Cの3個の活字がそれぞれ無数にあったとしましょう。3個といわず，3種類の，というほうが妥当かもしれません。この中から2個選んで組合せを作れば

AA　BB　CC　AB　AC　BC

の6通りできます。これを「3個のものの中から重複を許して2個とり出す組合せ」といいます。「3種類のものの中から2個とり出す」といったほうがわかりいいかもしれません。記号では ${}_3H_2$ と書きます。一般に，

n 個のものの中から重複を許して r 個とり出す組合せの数は

$$\boldsymbol{{}_nH_r={}_{n+r-1}C_r}$$

で与えられます。証明は（☞ p.40）を参照。

上の場合について，この公式を使えば

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2$$
$$=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6 \text{（通り）}$$

なるほど，ピッタリです。

この ${}_nH_r$ の公式を使う典型的な場合は果物の詰合せの問題と，$x+y+z=10$ の正の整数は何組あるか，といった問題です。これをよくマスターしておくのが，この公式になれるコツというものです。一般に順列・組合せの問題はいくつかの典型的な問題をものにすることにあるようだ。

1/29

練習 1. リンゴとバナナとナシの合計4個の詰合せを作りたい。何組できるか。

(ヒント)　3種類のものの中から4個とる組合せの数に等しいから

$$ {}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 $$

$$ = {}_6C_2 = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15 \qquad \cdots\cdots \boxed{答} $$

(注)　${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ なる関係があります。${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2$，${}_{20}C_{15} = {}_{20}C_5$ といったぐあい。計算にはしばしば役に立ちます。証明は

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

$$ {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} $$

$$ = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

から明らかでしょう。

1/29

練習 2. $x+y+z=9$ をみたす負でない整数の組はいく通りあるか。

(ヒント)　バナナを x 個，リンゴを y 個，ナシを z 個，合計9個の詰合せを作るのと同じですから

$$ {}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 $$

$$ = \frac{11\cdot10}{1\cdot2} = 55 $$

$\boxed{答}$　55組

*　*　*

◆　次はコトゴトクが異なるわけでもなし，さればといって，おのおのが無限にはない場合があります。例えば，

1/29

練習 3. a, a, a, b, b, b, c, d の中から3個とって作る組合せはいくつあるか。

(ヒント)　これは公式がありません。場合分けをして目の子勘定するより仕方がない。

さて：——

(i)　同じもの3個のとき

a a a ; b b b の2通りだけ

(ii)　同じもの2個のとき

a a × ; b b ×

で，これは　$3\times2=6$（通り）

(iii)　全部異なるとき　${}_4C_3=4$（通り）

結局，全部で

$$ 2+6+4=12 \text{（通り）} \qquad \cdots\cdots \boxed{答} $$

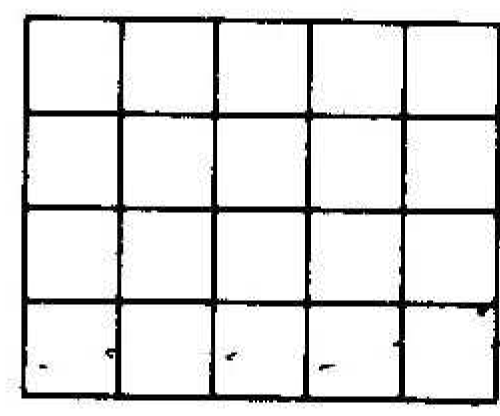
あります。

*　*　*

◆　以上で組合せの大切なことは全部終わりです。次にはいくらか複雑な問題をあげておくことにしましょう。

1/29

練習 4. 右の図の中に長方形はいくつあるか。



(注)　正方形はもちろん，長方形の一種なんですよ。

(ヒント)　縦線6本の中から2本を選び，横線5本の中から2本を選ぶと必ず1つの長方形が得られます。

だから，求める数は

$$ {}_6C_2 \times {}_5C_2 = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} \times \frac{5\cdot4}{1\cdot2} $$

$$ = 150 \text{（個）} \qquad \cdots\cdots \boxed{答} $$

ある。

1/29

練習 5. 凸 n 角形の対角線の数は何個あるか。ただし，$n \geqq 4$ とする。

(ヒント)　2つの頂点を結ぶ直線の数は ${}_nC_2$ 個あります。しかし，この中には辺の数 n 個も含まれていますから，求める対角線の数は

$$ {}_nC_2 - n = \frac{n(n-1)}{1\cdot2} - n $$

$$ = \frac{1}{2}n\{(n-1)-2\} $$

$$ = \frac{1}{2}n(n-3) \text{（個）} \qquad \cdots\cdots \boxed{答} $$

ある。

*　*　*

◆　なお，組合せの数を求めるのに，しばしば **和の法則，積の法則** が役に立ちます。これについては，場合の数の項（☞ p.16）を参照してください。また，やや高度の問題については，それぞれの項（☞ p.36, 40）を参照してください。

① 公式 $_nC_r$ の使い方

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆組合せと順列とどちらが難しいか？ 聞いてみると，きまったように組合せだという。これはどうしたわけであろう。

◆ n 個の異なるものの中から r 個とって作る組合せの数は $_nC_r$ だけあります。

ところで，

$$_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}={}_nC_{n-r}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

まず，何はともあれ，$_nC_r$ の計算からいきましょう。

■練習 1. $_8C_6$ の値を求めよ。

ヒント $_8C_6=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\dfrac{8\cdot7}{1\cdot2}=28$

としてさしつかえないが，それよりは次が簡単です。

$$_8C_6={}_8C_{8-6}={}_8C_2=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}=28$$

■練習 2. $_9C_3$ の値を求めよ。　　(埼玉大)

■練習 3. $_nC_4=126$ を満足する n を求めよ。

ヒント $_nC_4=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

ところが　　$126=2\cdot3^2\cdot7$

$\therefore\ n(n-1)(n-2)(n-3)$
$=2^4\cdot3^3\cdot7=9\cdot8\cdot7\cdot6$

$\therefore\ n=9$

注 上の n を求めるのにバラバラにして因数定理を使おうなどと思ったら大変です。連続4整数の積に変形するのがコツです。

■練習 4. $2{}_nC_2+9{}_nC_3+12{}_nC_4+5{}_nC_5$
$$=\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}$$

を証明せよ。　　(一橋大)

ヒント 公式を使って $_nC_2$，$_nC_3$，$_nC_4$，$_nC_5$ を計算し，左辺に代入して，ただただていねいに計算するとよいのです。

*　*　*

◆ 組合せの公式を使う際のコツは，自分がそのことがらを行う当事者と考えて，やるべき手順を正しく踏む。その手順の通り計算していく，ということなんです。

■練習 5. 15人のうちから4人の委員を選ぶ仕方は何通りあるか。　　(埼玉大)

ヒント $_{15}C_4$ 通りあることは確か。さて，その数は

$$\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1365\ (通り)\ \cdots\cdots\ 答$$

9

■練習 6. YOKOHAMA の8文字を1列に並べるのに，OとAが必ず偶数番目にくるような並べ方は何通りあるか。　　(一橋大)

ヒント さあ，キミがこのような操作をする当事者だとしたらどうしますか。まず，偶数番目にOとAをおいてしまうでしょう。そして その仕方は偶数番目は4つあるから，その中からOをおくべき2つの場所を選ぶ仕方となりましょう。つまり

$_4C_2$ (通り)

次に，奇数番目4か所にY，K，H，Mをおく仕方は $_4P_4=4!$ 通り

さては

$_4C_2\times4!=6\times4!=144$ (通り)

ということになります。

答 144 通り

■練習 7. 10人の生徒の中から7人を選ぶとき，特定の2人を共に含むような選び方は何通りあるか。　　(一橋大)

ヒント キミが当事者であるなら，その特定の2人をまずとってしまう。そして残り8人の

中から5人選んで，合計7人にするにちがいありません。さて，その方法は

$${}_{8}C_{5}=56\ (\text{通り})\qquad\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

あります。

＊　＊　＊

◆ ${}_{n}C_{r}$ の公式を使って組合せの数を調べるとき，複合されている問題が多いのです。そして，このようなときには，

≪あるいは≫とあれば，加える

≪そして≫とあれば，掛ける

のがふつう。これをそれぞれ **和の公式**，および **積の公式** といいます。例えば，次の練習にいきましょう。

練習 8. 平面上に縦に8本の平行線が並び，横に m 本 ($m>4$) の平行線が並んでいる。長方形はいくつあるか。　（神戸大）

ヒント　8本の平行線の中から2本選んで，そして，m 本の中から2本選べば必ず1つの長方形が得られるのですから，

$${}_{8}C_{2}\times{}_{m}C_{2}=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}\times\frac{m(m-1)}{2\cdot1}$$

$$=14m(m-1)\ (\text{個})\qquad\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

練習 9. A, a, B, b, C, c, D, d, E, e から3個選ぶ方法は何通りあるか。ただし，A, a または D, d のような同じ字母の大小2字を含むもの，例えば B b E などは除く。　（一橋大）

ヒント　合計10個ありますね。この中から3個選ぶ仕方の数は

$${}_{10}C_{3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=120$$

このうち，同じ字母の大小2つを含むものは A, a；B, b；C, c；D, d；E, e の中から1組選んで，そして，残り8個の中から1個選ぶ数だけあるはずです。それは

$${}_{5}C_{1}\times{}_{8}C_{1}=5\times8=40$$

したがって，求める数は

$$120-40=80\ (\text{通り})\qquad\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

練習 10. ある試験において，20点満点の問題が5題出題されている。各問題とも0点，5点，10点，15点，20点のいずれかで全部を採点するものとする。次の問いに答えよ。

(1) 起こり得る採点の仕方はいく通りあるか。

(2) 少なくとも3問が正解(満点)である場合はいく通りあるか。

(3) 総得点が80点以上である場合はいく通りあるか。　（鳥取大）

解　(1) 各問とも5通りの採点の仕方があるから　$5^5=3125$ (通り)　……$\boxed{\text{答}}$

(2) (i) 3問正解のとき，正解すべき3問の選び方は ${}_{5}C_{3}$ 通りあって，そのおのおのについて，残り2問の採点の仕方は正解を除くから 4^2 通りある。結局 ${}_{5}C_{3}\times4^2$ 通り，

(ii) 4問正解のとき，上と同じようにして ${}_{5}C_{4}\times4^1$ 通り，

(iii) 5問正解のとき，${}_{5}C_{5}=1$ 通り，

(i)～(iii)から，結局求める場合の数は

$${}_{5}C_{3}\times4^2+{}_{5}C_{4}\times4^1+{}_{5}C_{5}$$

$$=181\ (\text{通り})\qquad\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

(3) (i) 5問とも正解のとき，1通り

(ii) 4問正解のときには

$${}_{5}C_{4}\times4\ (\text{通り})$$

(iii) 3問正解のときは ${}_{5}C_{3}$ 通り，あって残り2問については

2問とも15点のとき，

1問15点，他は10点のとき，

1問15点，他は5点のとき，

2問とも10点のとき，

で，結局 ${}_{5}C_{3}\times(1+{}_{2}C_{1}\times2+1)$ (通り)

(iv) 2問正解のとき，上と同じようにして ${}_{5}C_{2}\times(1+{}_{3}C_{2})$ 通り，

(v) 1問正解のとき，${}_{5}C_{1}$ 通り，

(i)～(v)から，求める数は

$${}_{5}C_{5}+{}_{5}C_{4}\times4+{}_{5}C_{3}\times6+{}_{5}C_{2}\times4+{}_{5}C_{1}$$

$$=126\ (\text{通り})\qquad\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

① 対角線の個数など

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆多角形の対角線を求める問題や対角線の交点を求める問題も少なくありません。それにしても，なぜ対角線が問題となるのか？

◆ ここで扱うのは，とくに断らないでも，すべて凸多角形にかぎることにしましょう。ではまず，公式から：——

■練習 1. 凸n多角形の対角線の個数を求めよ。

(解) 1. 凸n多角形はn個の頂点をもち，そのいずれの3点も同一直線上にないから，2つずつ結んで得られる直線の個数は

$${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}\ (\text{個})$$

である。しかし，この中に辺の個数nが含まれているから，求める対角線の個数は

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}\ (\text{個})\ \cdots \text{答}$$

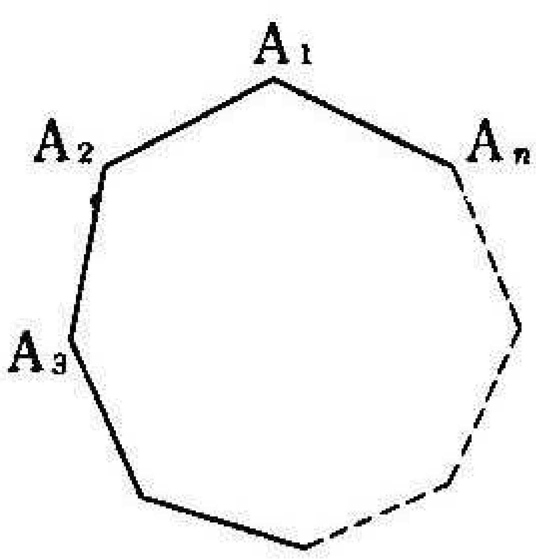
である。

(解) 2. 1つの頂点A_1から出る対角線の個数は

$$(n-3)\ (\text{個})$$

あるから，各頂点から出る対角線の総数は

$$(n-3)n\ (\text{個})$$



あるが，このとき，1つの対角線は2度ずつ数えられている。

ゆえに，求める個数は

$$\frac{n(n-3)}{2}\ (\text{個})$$

である。

■練習 2. n角形の対角線の個数が100より大，200より小ならば，nはどんな値か。

(ヒント) n角形の対角線の個数は $\dfrac{n(n-3)}{2}$ で与えられるのですから，次の不等式を満足する自然数nを求めればよいでしょう。

$$100<\frac{n(n-3)}{2}<200$$

さて，左半分より

$$n^2-3n-200>0$$

$$\therefore\quad n>\frac{3+\sqrt{809}}{2}=15.7\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 16\leqq n \qquad \cdots\cdots①$$

次に，右半分より

$$n^2-3n-400<0$$

$$\therefore\quad n<\frac{3+\sqrt{1609}}{2}=21.5\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad n\leqq 21 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より　　$16\leqq n\leqq 21$

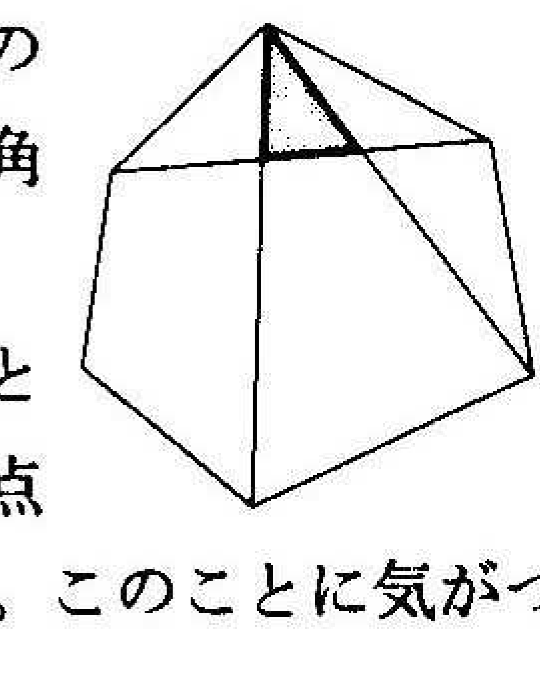
答　16～21

*　*　*

◆ n角形の対角線の数はこれでわかりましたが，次は対角線に関連した問題をやってみましょう。では，これを：——

■練習 3. 凸n角形において，すべて対角線を引くとき，対角線だけを3辺とする三角形の総数を求めよ。　（明治大）

(ヒント) まず，注意しなければならないことは，対角線で作られる三角形ではないということです。たとえば，右の図で太い実線で示した三角形は考えないのです。



対角線を3辺とする，というのですから，その頂点は多角形の頂点なのです。このことに気がつけば求める個数は

（頂点を3つずつとってできる三角形の数）

－（1辺を共有する三角形の数）

－（2辺を共有する三角形の数）

ということになりましょう。

ところが，凸n角形の頂点から3つ選んで作る三角形の個数は

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

で，1辺を共有する三角形の個数は1つの辺について$(n-4)$個ずつありますから，全部で

$$n(n-4)\ (\text{個})$$

です。また，2辺を共有するものは，各頂点について1つずつですから

$$n\ (\text{個})$$

あります。結局求める個数は

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-n(n-4)-n$$
$$=\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)\ (\text{個})$$

です。

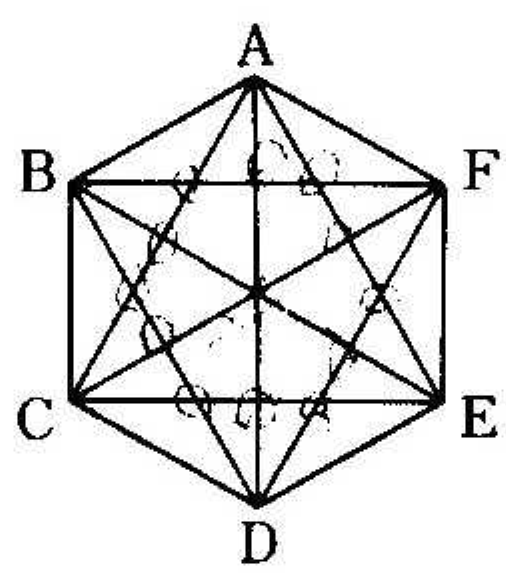
7/3

■練習 4． 1つの正六角形の辺と対角線とは合計 (1)□ 本ある。これらの線分全体から異なる2本の線を選ぶ組合せは (2)□ 通りである。これらのうち，

(i) 選んだ2本の線分が平行である場合は (3)□ 通りである。

(ii) 選んだ2本の線分が頂点以外で交わる場合は (4)□ 通りである。　　(共通1次)

ヒント (1) 6個の頂点から2個を選ぶのですから，いうまでもなし。



$${}_6C_2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15\ (\text{本})$$

あります。

(2) 上の15本の中から2本選ぶのですから

$${}_{15}C_2=\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}=105\ (\text{本})$$

あります。

(3) 平行なものは，辺と辺が3組，対角線どうしが3組，辺と対角線が6組，合計して

$$3+3+6=12\ (\text{組})$$

あります。最後に：——

(4) 正六角形の中心を除いて1つの交点に対して2本の線分の組1組が対応している。このような点が12個ありますから，まず12（通り）あります。また，正六角形の中心については，対角線の組が3組ありますから，合計して

$$12+3=15\ (\text{通り})$$

あります。　　　答 15, 105, 12, 15

7/4

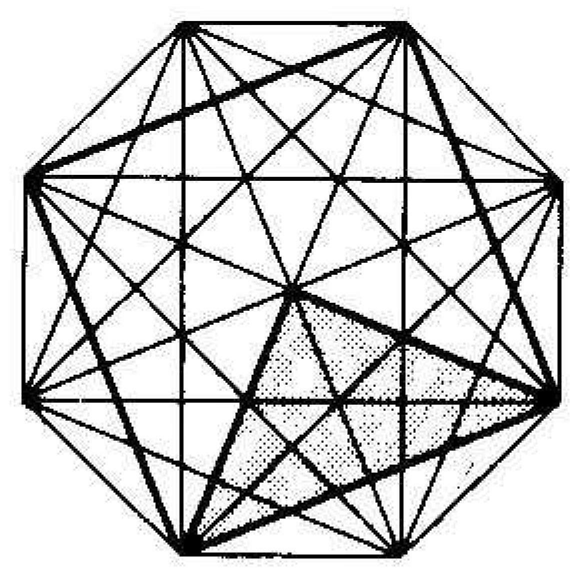
■練習 5． 正八角形Aの辺と，対角線（ないしその一部分）とで作られる多角形について，次のものの個数を求めよ。

(1) 3つの頂点がすべてAの頂点である三角形

(2) 4つの頂点がすべてAの頂点である四角形

(3) 少なくとも2つの頂点がAの頂点である三角形　　(東北大)

ヒント 図をかくほどのこともありませんがやはりかくことによって得られるものがあるハズ。かいてみると，右の通り。さて：——



(1) Aの頂点8つの中から3つ選べばよいのですから

$${}_8C_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56\ (\text{個})$$

(2) 上と同じく8つの中から4つ選べばよいのですから

$${}_8C_4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70\ (\text{個})$$

(3) 3つとも頂点のものは(1)で求めてあります。そこで，2つだけがAの頂点で，もう1つが対角線の交点となっている三角形は，この2つの対角線をもつ(2)の四角形に含まれている。このような三角形は，上の図のように同じ四角形のなかに4つできる。1つの対角線の交点を決めれば，(2)の四角形は1つ決まるから，${}_8C_4\times 4=280$（個），かくて

$$56+280=336\ (\text{個})$$

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

⑪ 公式 $_nH_r$ の使い方

◆Hは Homogeneous の頭文字。これは同次式から出ている。というのも n 種の文字を r 個使ってできる同次式の数になるからだ。

◆ a, b, c, d の中から3個とって作る組合せの数は $_4C_3$ でした。

一般に n 個の異なるものの中から r 個とって作る組合せの数は $_nC_r$ で与えられ，これを計算するには

$$_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}$$

または

$$_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

を使います。そして，例えば

a a a……
b b b……
c c c……

といったぐあいにaもbもcも無限にあるとき，この中から r 個とって作る組合せを $_nH_r$ で表します。そして

$$_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

なる関係があるのです。n 種類のものの中から r 個とって作る組合せ，といってもよいし，n 個のものの中から重複を許して r 個とって作る組合せ，といってもよいのです。

では，まず計算練習から：——

練習 1. $_3H_2$ を求めよ。

(解) $_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{1\cdot2}=6$

練習 2. $_nH_2=6$ となる n を求めよ。

(解) $_nH_2={}_{n+2-1}C_2={}_{n+1}C_2$

$$=\frac{(n+1)n}{1\cdot2}=6$$

$$\therefore\quad n^2+n-12=0$$

$$\therefore\quad (n-3)(n+4)=0$$

$$\therefore\quad n=3 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

$_nH_r$ の意味はわかったでしょう。そこで，具体的な問題にいきます。

練習 3. 4つの学級から7人の委員を選出する方法はいく通りあるか。 （慶大）

(ヒント) 4つの学級をA，B，C，Dとすると

ＡＡＡＡＡＡＡはＡクラスから7人を，
ＡＡＡＢＢＣＤはＡクラスから3人，Ｂから2人，……を，
ＡＡＢＣＣＣＤはＡクラスから2人，…

といったぐあいに表せます。してみると，A，B，C，D から7つとる重複組合せになりましょう。だから，求める数は

$_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7=120$（通り）

練習 4. 互いに異なる素数 a，b，c から，くり返しを許して10個とり，それらを掛け合わせてできる整数はいくつあるか。 （九州工大）

(解) a，b，c から重複を許して10個とる組合せの数に等しいから

$$_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2$$

$$=\frac{12\cdot11}{1\cdot2}=66 \qquad \text{答}\ 66\ 個$$

(注) 一般に $_nC_r={}_nC_{n-r}$ なる関係がありますから，$_{12}C_{10}={}_{12}C_2$ で，右辺のほうが計算がラクです。

練習 5. x，y，z，u の4個の文字から作られる3次の項は何通りできるか。 （明治大）

(解) x，y，z，u から重複を許して3個とって積を作ればすべてを求められるから，

$$_4H_3={}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20\ （通り）$$

(注) このような問題が $_nH_r$ なる記号Hの起こ

りなのです。

2/5 **練習 6.** カキとリンゴとミカンの合計12個入りの果物かごを作るには，その盛り合わせ方は何通りあるか。ただし，1つも入らないものがあってもよい。

(ヒント) カキをK，ミカンをM，リンゴをRで表すと

KKKKKKKKKKKK
KKRRRRMMMMMM
KRRRRRRRRMMM

など，すべて，盛り合わせを表していますから，結局求める数は3種類のものの中から12個とる組合せの数で，

$$ {}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14\cdot 13}{1\cdot 2} = 91 $$

(答) 91通り

2/5 **練習 7.** $x+y+z+u=10$ を満足する x，y，z，u の負でない整数解は何組あるか。（横浜市大）

(ヒント) カキを x 個，リンゴを y 個，ミカンを z 個，ナシを u 個，合計10個の盛り合わせを作るのとまったく同じこと。してみると，

$$ {}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 $$
$$ = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3} = 286 \text{（組）} $$

1/5 **練習 8.** $x+y+z=99$ をみたす正の奇数の組はいく通りあるか。ただし，例えば $x=1$，$y=1$，$z=97$ と $x=1$，$y=97$，$z=1$ とは異なる組とみなす。（東京外語大）

(解) x，y，z は正の奇数であるから

$$ x=2l+1,\quad y=2m+1,\quad z=2n+1 $$

とおける。ここに l，m，n は負でない整数である。これらを $x+y+z=99$ に代入し，変形すると

$$ l+m+n=48 $$

これを満足する負でない整数解の組は，l，m，n の3文字から重複を許して48個とる組合せの数に等しいから

$$ {}_3H_{48} = {}_{50}C_2 = \frac{50\cdot 49}{1\cdot 2} = 1225 \text{（通り）} $$

◆ 最後に，この公式の証明を2通りやることにしましょう。

証明(1) 1, 2, 3, ……, n から重複を許して r 個とって作る組合せの数が ${}_{n+r-1}C_r$ に等しいことを示せばよい。下の表において，

1 1 …… 1 1	1 2 3 …… r
1 1 …… 1 2	1 2 3 …… $r+1$
1 1 …… 1 3	1 2 3 …… $r+2$
…………	…………
1 1 …… 1 n	1 2 3 …… $n+r-1$
…………	…………
1 2 …… 2 2	1 3 4 …… $r+1$
1 2 …… 2 3	1 3 4 …… $r+2$
…………	…………
$\underbrace{n\ n \cdots\cdots n\ n}_{r\text{個}}$	n $n+1$ $n+2$ … $n+r-1$

左はあらゆる組合せを示し，この r 個の数に順次0，1，2，…，$r-1$ を加えたものを右に示してあるが，両者は1対1に対応している。そして，右のほうは相異なる $n+r-1$ 個のものの中から r 個とって作る組合せの数に等しい。よって証明された。

証明(2) 1, 2, 3, ……, n から重複を許して r 個とって作る組合せのすべては

1 1 1 ………… 1 * * …… *
1 1 1 ……… 1 * 2 * …… *
1 1 1 …… 1 * 2 2 * …… *
…………
1 1 1 * 2 2 2 * * * n … n
…………

のように1と2と3……n の間に * を入れることにすると，結局数字が r 個，* が $(n-1)$ 個，合計 $n+r-1$ 個の場所の中から * を入れるべき $(n-1)$ 個の場所を選ぶ数に等しく，したがって

$$ {}_{n+r-1}C_{n-1} = {}_{n+r-1}C_{(n+r-1)-(n-1)} $$
$$ = {}_{n+r-1}C_r $$

で与えられる。　Q. E. D.

⑩ $x+y+z+u=10$ の整数解の個数

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この問題は，ふしぎと扱い方の知らない人が多いのです。整数解というコトバに幻惑されるからであろうか。

◆ ≪$x+y=10$ の負でない整数解は何組あるか≫という問題はすぐできます。

x	0 1 2 3 ………… 10
y	10 9 8 7 ………… 0

つまり11組です。これがわかれば

≪$x+y+z=10$ の負でない整数解は何組あるか≫というのであれば

$z=0$ のとき11組
$z=1$ のとき10組
$z=2$ のとき9組
………
$z=10$ のとき1組

ありますから，全部で

$$1+2+3+\cdots+11=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12=66\ (組)$$

ということになりましょう。しかし，実は，次のように考えると，もっと楽にいきます。

バナナとりんごとキャラメルの10個の詰合せを作る個数を求めるのと同じではありませんか。それなら，3つの異なるものの中から重複を許して10個とる組合せの数に他ならない。かくして，

$$_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}$$
$$={}_{12}C_2=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66$$

となって，上と同じ結果になります。以上のことがわかれば，次にいきましょう。

1/6

練習 1. $x+y+z=n$ を満足する負でない整数解の個数を求めよ。ただし，n は自然数である。

(ヒント) 3つの異なるものの中から重複を許して n 個とり出す組合せの数に等しいのですから

$$_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n$$
$$={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}$$
$$=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)\quad \cdots\cdots 答$$

9

2/6

練習 2. $x+y+z+u=10$ の自然数解の個数を求めよ。

(ヒント) 自然数とは正の整数のことですから0を含まない。そこで，次のようにおきかえるとうまくいきます。

$x-1=X,\ y-1=Y,\ z-1=Z,\ u-1=U$

とおくと

$x=X+1,\ y=Y+1,\ z=Z+1,\ u=U+1$

したがって，与えられた方程式は

$$X+Y+Z+U=6$$

そして，　$X,\ Y,\ Z,\ U\geqq 0$

ですから，求める個数は

$$_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6$$
$$={}_9C_3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84\ (個)$$

あります。これがわかれば次は問題なし。

7/6

練習 3. $x+y+z+u=10$ の整数解の個数を求めよ。ただし，$x\geqq 2,\ y\geqq 1,\ z\geqq 0,\ u\geqq -3$ である。

(解) $x-2=X,\ y-1=Y,\ u+3=U$

とおくと与えられた方程式は

$$X+Y+z+U=10$$

で，$X,\ Y,\ z,\ U\geqq 0$ であるから，求める解の個数は4つの異なるものの中から重複を許して10個とる組合せの数に等しく

$$_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}$$
$$={}_{13}C_3=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3}=286\ (個)\ \cdots 答$$

9

* * *

◆ しかし，次の問題になると公式からスグ求めるというわけにはいきません。

2/11

■練習 4. $x+y+z+u^2=10$ の負でない整数解の個数を求めよ。

ヒント u^2が困る，これは分けてやるより仕方がありません。

$u=0$ のとき $x+y+z=10$ の解の個数は

$${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}=66$$

$u=1$ のとき $x+y+z=9$ の解の個数は

$${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9=55$$

$u=2$ のとき $x+y+z=6$ の解の個数は

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6=28$$

$u=3$ のとき $x+y+z=1$ の解の個数は

$${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$$

ですから，求める個数は

$$66+55+28+3=152 \text{（個）}$$

あります。

2/11

■練習 5. $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{10})^5$ の展開式における x^{10} の係数を求めよ。

ヒント $(1+x+x^2+\cdots+x^{10})$ の5個の積を考えるとき，第1，第2，…，第5因数から1項ずつとって作った積が x^{10} になればよいのですから，結局

$$x^a\cdot x^b\cdot x^c\cdot x^d\cdot x^e=x^{10}$$

つまり

$$a+b+c+d+e=10$$

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e\geqq 0$$

を満足する整数解の個数を求める問題と同じことになります。だから求める係数は

$${}_5H_{10}={}_{5+10-1}C_{10}={}_{14}C_{10}$$

$$={}_{14}C_4=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=1001$$

となります。 答 1001

* * *

上の方法は次のような問題にも応用されます。

≪サイコロを3個投げるとき，目の和が5となる場合の個数を求めよ≫

サイコロの目は1から6までありますので

$$(x+x^2+\cdots\cdots+x^6)^3$$

の展開式においてx^5の係数を求めればよいのです。そしてそれは $a+b+c=5$ の自然数解の個数ですから

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6 \text{（個）}$$

となります。ついでながら全部をメノコ勘定で調べてみると3つのサイコロをA，B，Cとして，下の表のようになりましょう。

A	1	2	3	合計
BC	1 3 2 2 3 1	1 2 2 1	1 1	6

2/11

■練習 6. $x+y+z=99$ をみたす正の奇数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか。

ヒント $x=2x'+1,\ y=2y'+1,\ z=2z'+1$ とおきますと

$$(2x'+1)+(2y'+1)+(2z'+1)=99$$

$$\therefore\quad 2x'+2y'+2z'=96$$

$$\therefore\quad x'+y'+z'=48$$

$$x'\geqq 0,\ y'\geqq 0,\ z'\geqq 0$$

もうここまでくれば問題はないでしょう。

$${}_3H_{48}={}_{3+48-1}C_{48}={}_{50}C_{48}$$

$$={}_{50}C_2=\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}=1225 \text{（通り）}$$

あることがわかります。同じ流儀でゆくと次のような問題も解けるわけです。

≪$x+y+z=1009$ をみたす自然数で，5で割れば3余るようなものの組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか≫

もはや，いうこともありますまい。

* * *

ところで，蛇足を：——

こんなのもあります。

≪$x+y+z^2=50$ の自然数解に何個あるか≫これは $z=1,2,\cdots 5,6$ で分けてやればよいのです。

○二項定理とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆二項定理はたいへん有用です。しかし，本領を発揮するのは指数が分数や負の数のときで，残念ながら高校の範囲ではありません。

◆ $(a+b)^n$ を展開すると次のようになります。すなわち

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_nC_nb^n$$

これを **二項定理** といい，${}_nC_ra^{n-r}b^r$ を **一般項**（いっぱんこう）といいます。

ところで，二項定理に関して大切なことがらが3つあります。第1は，条件に適する項を求めること。第2は最大係数の項を求めること。そして，第3は二項係数 ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, …… の間の関係式を導いたり，証明したりするものです。そして第1については（☞ p.44）に，第2については（☞ p.46）に，そして，第3については（☞ p.48）に詳しく書いてありますから，そのほうを参照してください。また，多項定理については（☞ p.52）を参照してください。

＊　＊　＊

◆ では，具体的な練習にとりかかるとしようではないか。

■練習 1. 二項定理を使って $(a+b)^2$ を展開せよ。

（解） $(a+b)^2={}_2C_0a^2+{}_2C_1ab+{}_2C_2b^2$
$=a^2+2ab+b^2$　……答

■練習 2. 二項定理を使って $(a+b)^4$ を展開せよ。

（解） $(a+b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+{}_4C_4b^4$
$=a^4+\dfrac{4}{1}a^3b+\dfrac{4\cdot3}{1\cdot2}a^2b^2+\dfrac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}ab^3+b^4$
$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$　……答

＊　＊　＊

◆ 二項係数をオボエルひとつの方法として **パスカルの三角形** というのがあります。場合によってはこれも便利です。それは：――

$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

といったぐあいに，$(a+b)^n$ の係数から，$(a+b)^{n+1}$ の係数をすぐ求められるというのです。ではひとつ，これを：――

■練習 3. $(a+b)^6$ の展開式における係数をパスカルの三角形から求めよ。

（ヒント） 上の結果からすぐ出ますね。それは

1　6　15　20　15　6　1

です。つまり

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

となります。

＊　＊　＊

◆ では，もとに戻って，二項係数を求めることからはじめましょう。

■練習 4. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$ の展開式における定数項を求めよ。

（ヒント） 一般項は

$${}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_9C_rx^{18-2r}\cdot\frac{1}{x^r}={}_9C_rx^{18-3r}$$

ですから，これが定数項を表すためには，つまり，x を含まないためには

$$18-3r=0\qquad\therefore\quad r=6$$

したがって，求める項は

$${}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=84 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習をしませんか。

2/11

練習 5. $\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$ を展開した式に x を含まない項が現れる正の整数 n の最小値を求め，かつ，そのときの x を含まない項を求めよ。　(三重大)

(解) 与式の展開式の一般項は

$${}_nC_r(2x^3)^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r=2^{n-r}{}_nC_rx^{3n-5r}$$

であるから，x を含まない項が現れるのは $3n-5r=0$ のとき，したがって $3n=5r$ のときである。これを満足する最小の n は 5 で，r は 3 であるから，求める項は

$$2^{5-3}{}_5C_3=2^2\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=40$$

$\boxed{答}$　$n=5$；40

練習 6. $(0.99)^{10}$ の小数第 1 位，第 2 位，第 3 位，第 4 位の数字を求めよ。　(東大)

(解) $0.99^{10}=(1-0.01)^{10}$

$$=1-\frac{10}{1}(0.01)+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}(0.01)^2$$

$$-\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}(0.01)^3+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(0.01)^4$$

$$-\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}(0.01)^5+\cdots\cdots$$

$$=1-0.1+0.0045-0.00012+0.0000021$$

$$-\cdots\cdots\quad=0.90438\cdots\cdots$$

$\boxed{答}$　9，0，4，3

＊　＊　＊

◆ ${}_nC_r$ を計算することはときに必要となりますが，数が大きくなるとかなりめんどうです。下には ${}_nC_r$ の表をあげてあります。例えば，${}_{14}C_5$ は $n=14$，$r=5$ のところの交叉するところにある 2002 がそれです。

なお，この表には n については 1 から 20 まで書いてあるのに r は 1 から 10 までしか書いてありませんが，r が 11 以上では

$${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

を使えばよいのです。例えば，

$${}_{18}C_{16}={}_{18}C_2=153$$

といった具合に，です。

◆二項係数 ${}_nC_r$ の表◆

n \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	1								
3	3	3	1							
4	4	6	4	1						
5	5	10	10	5	1					
6	6	15	20	15	6	1				
7	7	21	35	35	21	7	1			
8	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	13	78	286	715	1 287	1 716	1 716	1 287	715	286
14	14	91	364	1 001	2 002	3 003	3 432	3 003	2 002	1 001
15	15	105	455	1 365	3 003	5 005	6 435	6 435	5 005	3 003
16	16	120	560	1 820	4 368	8 008	11 440	12 870	11 440	8 008
17	17	136	680	2 380	6 188	12 376	19 448	24 310	24 310	19 448
18	18	153	816	3 060	8 568	18 564	31 824	43 758	48 620	43 758
19	19	171	969	3 876	11 628	27 132	50 388	75 582	92 378	92 378
20	20	190	1 140	4 845	15 504	38 760	77 520	125 970	167 960	184 756

二項係数の最大値

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆二項定理関係の問題の中で，もっとも難しいのが，この最大値を求めることなんですよ。いわば，二項定理の終着点。

◆ 二項係数の問題の中でもっともめんどうなのは，なんといっても最大係数を求める問題でありましょう。例えば，こんなものです。

1/12

練習 1. $(1+2x)^{10}$ の展開式における最大係数の項を求めよ。

ヒント $(1+2x)^{10}$ の展開式における一般項は

$$ {}_{10}C_r 1^{10-r}(2x)^r = 2^r {}_{10}C_r x^r $$

で与えられます。

この係数を $f(r)$ としますと

$$
\begin{aligned}
&f(r+1)-f(r)\\
&=2^{r+1}{}_{10}C_{r+1}-2^r{}_{10}C_r\\
&=2^r\left\{2\frac{10\cdot9\cdot8\cdots\cdots(11-r)(10-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r(r+1)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{10\cdot9\cdots\cdots(11-r)}{1\cdot2\cdots\cdots r}\right\}\\
&=2^r\cdot\frac{10\cdot9\cdots\cdots(11-r)}{1\cdot2\cdots\cdots r}\cdot\left(2\cdot\frac{10-r}{r+1}-1\right)\\
&=2^r\cdot\frac{10\cdot9\cdots\cdots(11-r)}{1\cdot2\cdots\cdots r}\cdot\frac{19-3r}{r+1}
\end{aligned}
$$

ゆえに　$r\leqq6$ のとき　$f(r+1)-f(r)>0$

　　　　$7\leqq r$ のとき　$f(r+1)-f(r)<0$

$$\therefore\ f(0)<f(1)<\cdots\cdots<f(6)<f(7)>f(8)>\cdots\cdots>f(10)$$

ゆえに $f(7)$ が最大係数であることがわかります。そして，

$$f(7)=2^7{}_{10}C_7=15360$$

ですから，求める項は $15360x^7$ です。

（注） $f(r+1)$ と $f(r)$ の大小を比べるのに $f(r+1)-f(r)$ の符号を調べる代わりに，$\dfrac{f(r+1)}{f(r)}$ が1より大きいか小さいかと考えることもできます。次はそれでやってみましょう。

9

練習 2. $(2+3x)^{10}$ の展開式における最大係数の項を求めよ。

7/13

ヒント 一般項は

$$ {}_{10}C_r 2^{10-r}(3x)^r = {}_{10}C_r 2^{10-r}3^r x^r $$

で与えられますから，この係数を $f(r)$ としますと，

$$
\begin{aligned}
\frac{f(r+1)}{f(r)}&=\frac{{}_{10}C_{r+1}2^{9-r}3^{r+1}}{{}_{10}C_r 2^{10-r}3^r}\\
&=\frac{10\cdot9\cdot8\cdots\cdots(11-r)(10-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r(r+1)}\\
&\quad\times\frac{1\cdot2\cdots\cdots r}{10\cdot9\cdots\cdots(11-r)}\cdot\frac{3}{2}\\
&=\frac{10-r}{r+1}\cdot\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore$　$r\leqq5$ のとき　$\dfrac{f(r+1)}{f(r)}>1$

　　$6\leqq r$ のとき　$\dfrac{f(r+1)}{f(r)}<1$

$$\therefore\ f(0)<f(1)<f(2)<\cdots\cdots<f(5)<f(6)>f(7)>\cdots\cdots>f(10)$$

ゆえに，$f(6)$ が最大であることがわかります。そして，それは，……

（注） $\dfrac{10-r}{r+1}\cdot\dfrac{3}{2}$ と1との大小を調べるには，やはり1を引いて符号を調べてみるのがよいでしょう。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. n を一定の正の整数とする。

7/13 (1) $x>0,\ y>0,\ x+y=1$ のとき，$(n+1)yx^n$ の最大値を n を用いて表せ。

(2) 二項定理を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geqq2$ を証明せよ。

(3) (1)の条件のもとに $(n+1)yx^n\leqq\dfrac{1}{2}$

を証明せよ。　(九大)

(解) (1) $x+y=1$ であるから，$y=1-x$,

$\therefore\ (n+1)yx^n=(n+1)(1-x)x^n$

であるから

$$f(x)=(n+1)(x^n-x^{n+1})$$

とおくと，

$$f'(x)=(n+1)\{nx^{n-1}-(n+1)x^n\}$$
$$=(n+1)x^{n-1}\{n-(n+1)x\}$$

ゆえに

$x<\dfrac{n}{n+1}$ のとき　$f'(x)>0$

$x=0$　のとき　$f'(x)=0$

$x>\dfrac{n}{n+1}$ のとき　$f'(x)<0$

となり，$x=\dfrac{n}{n+1}$ で $f(x)$ は極大値（かつ最大値）をとる。ゆえに，求める最大値は

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1+{}_nC_1\dfrac{1}{n}+{}_nC_2\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$

$$+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ところが

$${}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{n}\right)^n\geqq 0$$

であるから

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqq 1+{}_nC_1\frac{1}{n}=1+1=2$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqq 2$$

等号は $n=1$ のときである。

(3) (2)より

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\geqq 2$$

$$\therefore\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\leqq\frac{1}{2}$$

ところが(1)により

$$(n+1)yx^n\leqq\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\therefore\ (n+1)yx^n\leqq\frac{1}{2}$$

等号は $n=1$ のときである。　Q. E. D.

D練習 4. n を任意の正の整数とするとき

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

を証明せよ。　(山口大)

(ヒント)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots1}{1\cdot2\cdots\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+1+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$<1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Q. E. D.

D練習 5. $a_n=\sqrt[n]{n}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) なる数列がある。次の問に答えよ。

(1) $n\geqq3$ のとき $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ であることを示せ。

(2) この数列のうちで，その値が最大なもの，および最小なものを求めよ。

(山形大)

(ヒント) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ を変形すると $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<n$

これは数学的帰納法で証明できます。

(2) (1)によって

$$a_3>a_4>a_5>\cdots\cdots$$

で $a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}$，$a_3=\sqrt[3]{3}$ のうち $\sqrt[3]{3}$ が最大であることから $\sqrt[3]{3}$ が最大であることがわかります。

また，$a_1=1$，$a_n>1$ ($n\geqq2$) であることから，最小項は $a_1=1$ です。

◐ 二項係数に関する問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆二項係数の間のいくつかの恒等式を証明する問題は，いうなれば，暗記もの。オボエルより仕方がない。

◈ 二項係数に関するこのセクションは，いわば暗記物です。何度もやって，オボエルより仕方がありません。さて：——

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_nC_nb^n$$

ですが，左辺の ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ……, ${}_nC_n$ を二項係数といいます。また，$a=1$, $b=x$ とおくと

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$$

となります。ただし，ここでは ${}_nC_0$, ${}_nC_1$ などの代わりに c_0, c_1, …… と書いてあります。このように二項係数を c_0, c_1, …… で表すときにはふつう小文字で書きます。(以下この項目では，この表記法で書きます。)

*　*　*

◈ では，次の練習をやってみませんか。

2/14

■練習 1. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$ とするとき

$$c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n=2^n$$

なる関係のあることを証明せよ。

(ヒント) $(1+x)^n=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_nx^n$ は恒等式ですから，x に任意の数を代入しても成り立つのです。そこで，$x=1$ を代入してみますと

$$2^n=c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n$$

となります。　Q. E. D.

(注) $x=0$ としてみますと

$$1=c_0$$

となるだけでべつにおもしろい結果は得られません。$x=2$ としますと

$$c_0+2c_1+4c_2+\cdots\cdots+2^nc_n=3^n$$

となるといったぐあい。しかし，あまりおもしろい結果とはいえません。$x=-1$ を代入すると，次のようです。

2/14

■練習 2. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$ とするとき

$$c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots=c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots=2^{n-1}$$

であることを示せ。

(解) $(1+x)^n$

$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n \quad \cdots(*)$$

において，$x=-1$ とおくと

$$0=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad c_0+c_2+\cdots\cdots=c_1+c_3+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots①$$

次に (*) において $x=1$ とおくと，

$$c_0+c_1+\cdots\cdots=2^n \quad \cdots\cdots②$$

①，②により

$$c_0+c_2+\cdots\cdots=c_1+c_3+\cdots\cdots=2^{n-1}$$

Q. E. D.

*　*　*

◈ 次には，やや，めんどうなものをやってみましょう。

2/15

■練習 3. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$ とするとき

$$1\cdot c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n=n\cdot 2^{n-1}$$

を導け。　(岩手医大)

(ヒント) 両辺を x で微分しますと

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$$

これも恒等式ですから $x=1$ とおいても成り立つハズ。かくて：——

$$1\cdot c_1+2c_2+3c_2+\cdots\cdots+nc_n=n\cdot 2^{n-1}$$

が得られます。

微分しないでもできます。

$c_r = {}_nC_r$ なのですから

$$1\cdot c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n$$
$$=1\cdot{}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n$$
$$=1\cdot\frac{n}{1}+2\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+\cdots\cdots+n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 1}{1\cdot 2\cdots\cdots n}$$
$$=n+\frac{n(n-1)}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots 1}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-1)}$$
$$=n\left\{1+\frac{n-1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)\cdots\cdots 1}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-1)}\right\}$$
$$=n(1+1)^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}$$

練習 4. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$

2/15 $+c_nx^n$ とするとき，次式を導け。

$$c_0+2c_1+3c_2+\cdots\cdots+(n+1)c_n$$
$$=2^{n-1}(n+2)$$

ヒント　これは上の練習 3. と似ていますが，微分したのでは c_0 が消えてしまう。オヤ，これは困ったことになったわい。

これは，両辺に x を掛けてから微分するとうまくいきます。つまり

$$c_0x+c_1x^2+c_2x^3+\cdots\cdots+c_nx^{n+1}$$
$$=x(1+x)^n$$

両辺を x で微分して

$$c_0+2c_1x+3c_2x^2+\cdots\cdots+(n+1)c_nx^n$$
$$=1\cdot(1+x)^n+x\cdot n(1+x)^{n-1}$$

これは恒等式ですから，$x=1$ を代入して

$$\therefore\ c_0+2c_1+3c_2+\cdots\cdots+(n+1)c_n$$
$$=1\cdot 2^n+1\cdot n\cdot 2^{n-1}=(n+2)2^{n-1}$$

なるほどできた。微分しないでやるなら，

$$c_0+2c_1+3c_2+\cdots\cdots+(n+1)c_n$$
$$=(c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n)$$
$$+(c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n)$$
$$=2^n+n\cdot 2^{n-1}\quad(\text{練習 1. と練習 3. による})$$
$$=(n+2)\cdot 2^{n-1}$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ 微分する代わりに積分したらどうなるでしょうか。

練習 5. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$

1/15 $+c_nx^n$ とするとき，次式を導け。

$$c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ヒント

$$\int_0^1(1+x)^ndx=\int_0^1(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)dx$$
$$\therefore\ \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$=\left[c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$\therefore\ \frac{2^{n+1}-1}{n+1}=c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ こんなものもあります。

練習 6. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$
$+c_nx^n$ とするとき，次式を証明せよ。

$$c_0{}^2+c_1{}^2+\cdots\cdots+c_n{}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ヒント　二項定理によって

$$(1+x)^n$$
$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n\quad\cdots\cdots①$$

ところが $c_n=c_0,\ c_{n-1}=c_1,\ \cdots\cdots$ ですから

$$(1+x)^n$$
$$=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots+c_0x^n\quad\cdots②$$

そこで①×②を作ると左辺は $(1+x)^{2n}$ で左辺の x^n の係数は

$${}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

右辺の x^n の係数は

$$c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+\cdots\cdots+c_n{}^2$$

ですから

$$c_0{}^2+c_1{}^2+\cdots\cdots+c_n{}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

となります。しかし，こんなのは，やったことがなければ，ちょっと手のつかない人が多いにちがいありません。

⑪ 二項係数を求めること

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆二項係数に関して大切なことは3つ。その中でも，特に大切なのが，この二項係数を求めることなんですよ。

◆ 二項係数を求めることについてはすでに二項定理のところで説明してありますが，ここでは，もう少し，立ち入った問題を扱うことにしましょう。では，まず，これです。

2/18

練習 1. $\left(x^2+\dfrac{1}{3x}\right)^{12}$ の定数項を求めよ。

(解) 一般項は

$${}_{12}C_r(x^2)^{12-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r=\frac{1}{3^r}{}_{12}C_r\cdot x^{24-3r}$$

ですから，定数項については

$$24-3r=0 \qquad \therefore \quad r=8$$

ゆえに，求める項は

$$\frac{1}{3^8}\cdot{}_{12}C_8=\frac{1}{3^8}\cdot{}_{12}C_4$$

$$=\frac{1}{3^8}\cdot\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{55}{729} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

2/18

練習 2. $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ の展開式において x^2 の係数を求めよ。

(ヒント) $(1+x)^r={}_rC_0+{}_rC_1x+{}_rC_2x^2+\cdots\cdots$

ですから，x^2 の係数は ${}_rC_2=\dfrac{r(r-1)}{1\cdot2}$

$(r\geqq2)$ です。ゆえに，求める係数は

$$\frac{1}{2}\{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)n\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$$

$$=\frac{1}{12}(n-1)n\{(2n-1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 二項定理は3項以上のときにも使えます。多項定理などを使うよりはかえって便利で安全といってよいでしょう。では，やってみませんか。

2/18

練習 3. $(1+x+x^2)^{10}$ の展開式における x^3 の係数を求めよ。

(ヒント) $(1+a)^{10}$

$$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1a+{}_{10}C_2a^2+{}_{10}C_3a^3+{}_{10}C_4a^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{10}{1}a+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}a^2+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}a^3+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^4+\cdots\cdots$$

ですから

$$(1+x+x^2)^{10}$$

$$=\{1+(x+x^2)\}^{10}$$

$$=1+\frac{10}{1}(x+x^2)+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}(x+x^2)^2+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}(x+x^2)^3+\{x^4 \text{ 以上の項}\}$$

ゆえに x^3 の係数は

$$\frac{10\cdot9}{1\cdot2}\cdot2+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\cdot1$$

$$=90+120=210 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

2/18

練習 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+x+x^2)^k$ の展開式における x^2 の係数を求めよ。　(東京水産大)

(ヒント) $(1+x+x^2)^k=\{1+(x+x^2)\}^k$

$$=1+k(x+x^2)+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}(x+x^2)^2+\cdots\cdots$$

よって x^2 の係数は

$$k+\frac{1}{2}\{k(k-1)\}=\frac{1}{2}(k^2+k)$$

ですから，求める値は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(k^2+k)=\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. $(\sqrt{2}x+\sqrt[4]{3})^{100}$ の展開式で係数が有理数の項はいくつあるか。（東京理大）

ヒント 一般項は

$${}_{100}C_r(\sqrt{2}x)^{100-r}\cdot(\sqrt[4]{3})^r$$

$$=2^{50-\frac{r}{2}}\cdot 3^{\frac{r}{4}}\cdot{}_{100}C_r x^{100-r} \quad (0\leqq r\leqq 100)$$

ですから，係数が有理数になるためには r が 4 の倍数でなければならない。ゆえに，

0，4，8，……，100 で，26個ある。

$\boxed{答}$ 26個

練習 6. $(a+b)^n$ における展開式の引き続いたある 4 項が，それぞれ 1344，6048，15120，22680 になるとき，a，b，n の値を求む。（神奈川歯大）

解 引き続いた 4 つの項は

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r$$
$$=1344 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r(r+1)}$$
$$\times a^{n-(r+1)}b^{r+1}=6048 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r(r+1)(r+2)}$$
$$\times a^{n-(r+2)}b^{r+2}=15120 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{1\cdot 2\cdots\cdots r(r+1)(r+2)(r+3)}$$
$$\times a^{n-(r+3)}b^{r+3}=22680 \quad \cdots\cdots ④$$

とおくことができる。

②÷①：

$$\frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{b}{a}=\frac{9}{2} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③÷②：

$$\frac{n-r-1}{r+2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

④÷③：

$$\frac{n-r-2}{r+3}\cdot\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑥÷⑤：

$$\frac{n-r-1}{r+2}\cdot\frac{r+1}{n-r}=\frac{5}{9} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦÷⑥：

$$\frac{n-r-2}{r+3}\cdot\frac{r+2}{n-r-1}=\frac{3}{5} \qquad \cdots\cdots ⑨$$

次に⑧×⑨を作ると

$$\frac{(n-r-2)(r+1)}{(r+3)(n-r)}=\frac{1}{3}$$

分母をはらい n について解くと

$$n=r+3+\frac{3}{r}$$

$\therefore$ $r=1$ あるいは $r=3$

$r=1$ のとき $n=7$ で，このとき⑤，⑥，⑦より

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \qquad \therefore \quad b=\frac{3a}{2}$$

$r=3$ のとき $n=7$ で，このとき⑤，⑥，⑦より $\dfrac{b}{a}$ はそれぞれ $\dfrac{9}{2}$，$\dfrac{25}{6}$，$\dfrac{9}{2}$ となって不合理である。

さて，$r=1$，$n=7$，$b=\dfrac{3a}{2}$ のとき①より，

$$\frac{7}{1}a^6\left(\frac{3a}{2}\right)^1=1344$$

$$\therefore \quad a=2$$

$$\therefore \quad b=3$$

$\boxed{答}$ $a=2$，$b=3$，$n=7$

注 上の解で①，②，③，④のところをいちいち，

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r} \qquad \cdots\cdots(*)$$

といったぐあいに書いてありますが，これを $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ と書いたのではわからなくなります。つまらないことですが，心にとめておいてください。答案としてはもちろん，$\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ と書いたほうがわかりよいが，考えるときにはゼッタイ(*)のように書くべきだということです。

ともあれ，不精しないで，ていねいに書いてゆけば，めんどうではないハズです。

多項定理とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆実は，高校では多項定理を知っていなければならない，ということはありません。私も使ったことはない。ムリにやることなし。

◆ 多項定理というのは次のようなものです。すなわち，

$(a+b+c)^n$ の展開式で
$a^pb^qc^r$ の係数は $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

である。

では，さっそくながら，具体例を：——

7/8

練習 1. $(a+b+c)^5$ の展開式で abc^3 の係数を求めよ。

ヒント 上の公式で $p=1$，$q=1$，$r=3$ ですから，求める係数は

$$\frac{5!}{1!1!3!}=20$$

ということになります。

注 二項定理（☞ p.44）でやるなら

$$(a+b+c)^5=\{a+(b+c)\}^5$$

の展開式で，$a(b+c)^4$ の係数は 5 です。そして，$(b+c)^4$ の展開式で bc^3 の係数は 4 ですから，求める係数は $5\times4=20$ となりましょう。

7/10

練習 2. $(a+b+c+d)^6$ の展開式で，a^2b^3c の係数を求めよ。

ヒント $a^2b^3c=a^2b^3c^1d^0$ ですから，求める係数は上の公式から（正確にいうと，上の公式から一般の場合を考えて，だ）

$$\frac{6!}{2!3!1!0!}=60$$

となります。

注 二項定理でやるなら

$$(a+b+c+d)^6=\{(a+b+c)+d\}^6$$

の展開式で，dを含まないのは $(a+b+c)^6$ で，この展開式で c^1 を含む項は $6(a+b)^5c$ で，$(a+b)^5$ の展開式で a^2b^3 の係数は10ですから，求める係数は $6\times10=60$ です。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや，総合的な問題をやってみませんか。

2/v

練習 3. $(1+2x+3x^2)^{10}$ の展開式で x^3 の係数を求めよ。

ヒント $(1+2x+3x^2)^{10}$ の展開して得られる項 $1^a(2x)^b(3x^2)^c$ の係数は

$$\frac{10!}{a!b!c!}$$

ところで，上の項は $2^b3^cx^{b+2c}$ と書けますから，x^3 の係数を求めるには

$$b+2c=3$$

を満足する b，c を求めればよいことになります。そして，それは

$$c=0,\ b=3\ ;\ c=1,\ b=1$$

の 2 つの場合があります。したがって，求める係数は，それらの和

$$2^3\cdot3^0\cdot\frac{10!}{7!3!0!}+2^1\cdot3^1\cdot\frac{10!}{8!1!1!}=1500$$

ということになります。

答 1500

注 二項定理でやるなら

$$(1+2x+3x^2)^{10}$$
$$=\{1+(2x+3x^2)\}^{10}$$
$$=1+\frac{10}{1}(2x+3x^2)+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}(2x+3x^2)^2$$
$$+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}(2x+3x^2)^3+\cdots\cdots$$

ですから，x^3 の係数は

$$\frac{10\cdot9}{1\cdot2}(2\cdot2\cdot3)+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}(2^3)$$
$$=540+960=1500$$

こうしてみると，多項定理よりは二項定理のほうが簡単らしい，と気がつく。少なくともマチガイが少なくなるという利点があります。

＊　＊　＊

◆ 次には多項係数に関する練習をしておきましょう。

2/20

練習 4. $(1+x+x^2)^n$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

とするとき，次の和を求めよ。

$$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2n}$$

(解) 与えられた恒等式において $x=1$ とおくと，

$$3^n=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2n}$$

ゆえに，求める和は 3^n である。

(注) 恒等式だから，xに何を入れても成り立つのです。例えば $x=-1$ を代入すると，

$$a_0-a_1+a_2-\cdots\cdots+a_{2n}=(1-1+1)^n=1$$

となりましょう。1の虚数立方根ω（ωについては☞「数Ⅰ」p.122参照）を代入すると $1+\omega+\omega^2=0$ であることから

$$a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots\cdots+a_{2n}\omega^{2n}=0$$

となる，といったぐあい，です。

*　*　*

◆ 次には多項係数の応用面を当たっておきましょう。

2/20

練習 5. 2つのサイコロを振るとき，目の和が5になる場合の数を求めよ。

(ヒント) $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^1+\cdots\cdots+x^6)$ を展開すると x^2 から x^{12} までですが，x^5 の係数は，x^5 が

$$x^1\cdot x^4,\ x^2\cdot x^3,\ x^3\cdot x^2,\ x^4\cdot x^1$$

から出るので，4です。つまり，目の和が5になるのは4通りあります。

ところで，このやり方は，繁雑で，かえって損のようにみえますが，サイコロの数が増えてくると，著しく有用になってきます。

練習 6. 3つのサイコロを振るとき，目の和が5になる場合の数を求めよ。

(ヒント) $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$ の展開式で x^5 の係数を求めればよいでしょう。ところが，

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$$

$$=x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$$

となりますから，$(1+x+\cdots\cdots+x^5)^3$ の展開式で x^2 の係数を求めればいいでしょう。それなら x^3 以上の項は関係なくなって，結局，$(1+x+x^2)^3$ の展開式で x^2 の係数を求めればいいハズ。

さて，それは

$$\{1+(x+x^2)\}^3$$

$$=1+3(x+x^2)+3(x+x^2)^2+(x+x^2)^3$$

からわかるように

$$3+3=6 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

となるわけです。

*　*　*

◆ 多項定理を直接必要とすることは少ないのですが，多項定理に関係した問題は数多くあります。例えばこれです。

2/21

練習 7. $\sum_{k=1}^{n}(1+x+x^2)^k$ の展開式における x^3 の係数を求めよ。

(解) $(1+x+x^2)^k$

$$=\{1+(x+x^2)\}^k$$

$$=1+\frac{k}{1}(x+x^2)+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}(x+x^2)^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(x+x^2)^3+\cdots\cdots$$

であるから，x^3 の係数は

$$\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1$$

である。ゆえに，求める係数は

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k-1)+\frac{1}{6}k(k-1)(k-2)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2-4k)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{n}{2}(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+6)$$

答 $\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+6)$

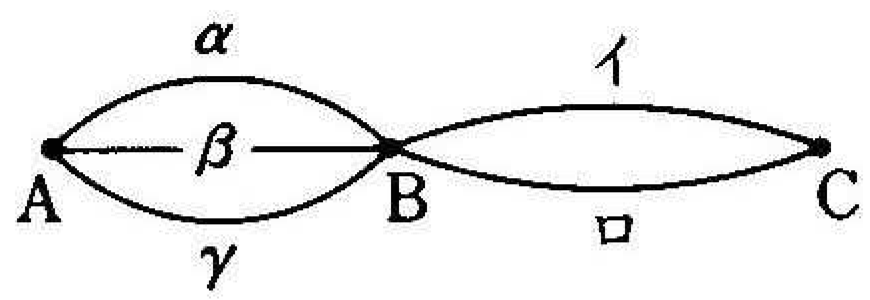
○最短通路の数の問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆順列・組合せ・確率といった分野はいくつかの重要な問題をマスターすると驚くほどラクになるもの。その1つがコレだ。

◆ こんな問題があります。

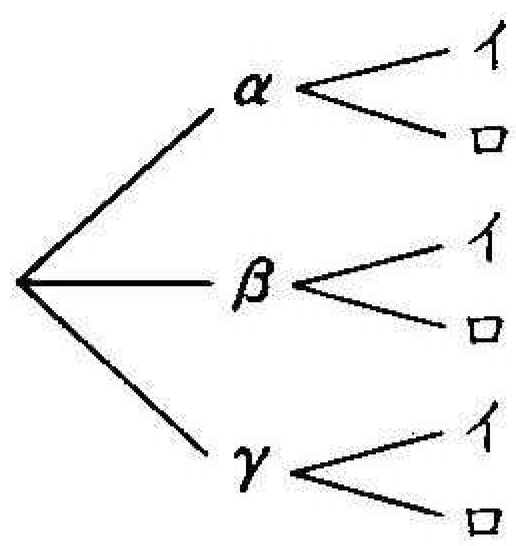
A市とB市の間に道路が3本，B市とC市の間に2本ある。A市からB市を経てC市に行く方法は何通りあるか，というのです。これについて考えてみましょう。



A市からB市に行く道路をα，β，γ；B市からC市に行く道路をイ，ロとしますと，あらゆる場合をあげてみると，下のようになって一目瞭然，全部で

$3\times2=6$

通りあります。このようにあらゆる場合を書くのをtree（トゥリー）とか直訳して　樹枝型（じゅしがた），樹形図などといいます。



◆ 長方形の地域に図のように道路がある。AからBを経てCに行く場合の最短通路の数は何通りあるか，といった問題も同じことで，

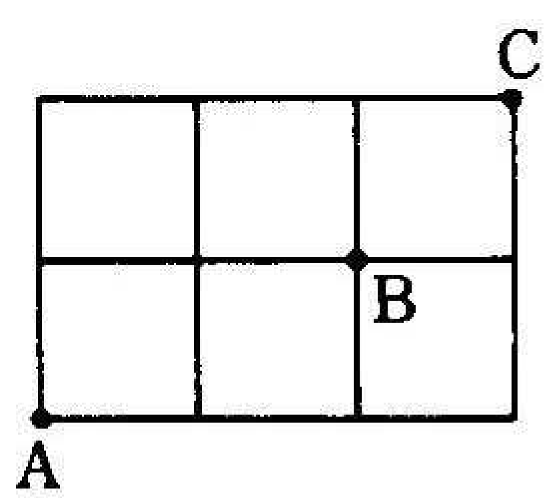
A→B　3通り，

B→C　2通り，

ありますから，結局

A→B→C　は　$3\times2=6$（通り）

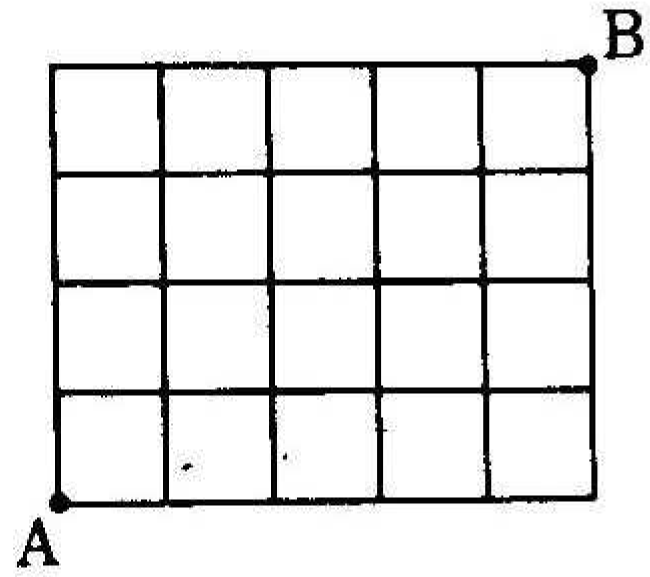
あることがわかります。



では，次の練習1. にいきましょう。

2/22

■**練習1.** 次の図に示すような通路がある。西南端Aから東北端Bに行く最短通路は何通りあるか。



ヒント　大きく分けて2通りの考え方があります。

1つは，東へ1単位だけ進むことをR，北へ1単位だけ進むことをKで表してみますと，結局5つのR，4つのKをとれば必ずBに到達するのです。

例えば，

RRRRRKKKK

RRKKRRKKR

といったぐあい。つまり，同じものが5コと4コあったとき，ことごとくとり出して1列に並べる順列の数に同じです。つまり

$$\frac{9!}{4!5!}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=126\ (\text{通り})$$

あります。

もう1つの考えは全部で 5+4 単位の道を進むわけですが，その中から，4つだけ北進を選ぶ，というのと同じこと。例えば

●○●●○○○●○

○●●●●○○○○

といったぐあい。ここに○は東進，●は北進を示しています。このときは同じく

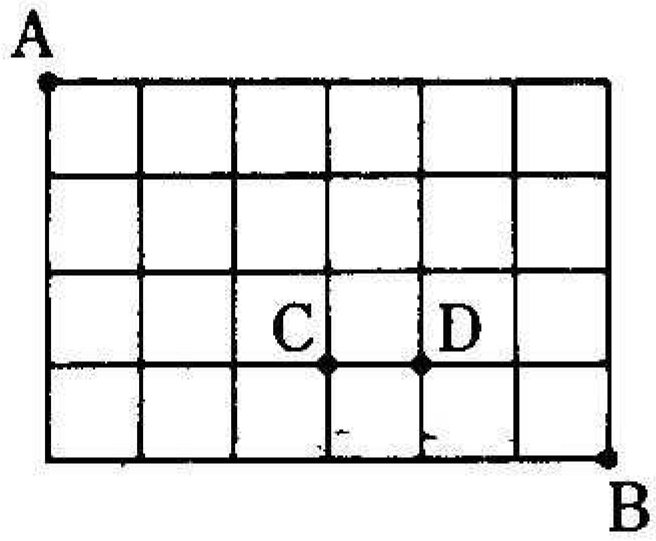
$$_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=126\ (\text{通り})$$

となります。

◆ これがわかれば，あとは，これをいくつか複合させてやるだけのことです。例えば，ある地点を通るものはいくつか，とか，ある部分は工事中で通れないとか，です。

■**練習2.** 東西7条，南北5条の道路の市街

図が右のようであるとする。いま，西北端Aから出発して，東進または南進して，東南端Bに行くものとする。



(1)　Cを必ず通る最短通路は何通りあるか。

(2)　CD 間は通らない最短通路は何通りあるか。

解　(1)　1区画東進することをR，1区画南進することをKで表すと，AからCまで行く最短通路の数は3個のRと3個のKを1列に並べる順列の数に等しいから

$$\frac{6!}{3!3!}\text{（通り）}$$

ある。

次に，CからBに至る最短通路の数は同様にして

$$\frac{4!}{3!1!}\text{（通り）}$$

結局，求める数は

$$\frac{6!}{3!3!}\times\frac{4!}{3!1!}=20\times4=80\text{（通り）}$$

ある。

(2)　まず，AからBに至る最短通路の数は

$$\frac{10!}{4!6!}=210\text{（通り）}$$

あり，そのうち，CD を通るものは

$$\text{A}\to\text{C が }\frac{6!}{3!3!}\text{（通り）}$$

$$\text{D}\to\text{B が }\frac{3!}{2!1!}\text{（通り）}$$

あるから，

$$\text{A}\to\text{C}\to\text{D}\to\text{B}$$

の最短通路の数は

$$\frac{6!}{3!3!}\times\frac{3!}{2!1!}=60\text{（通り）}$$

ある。よって，CD を通らない数は

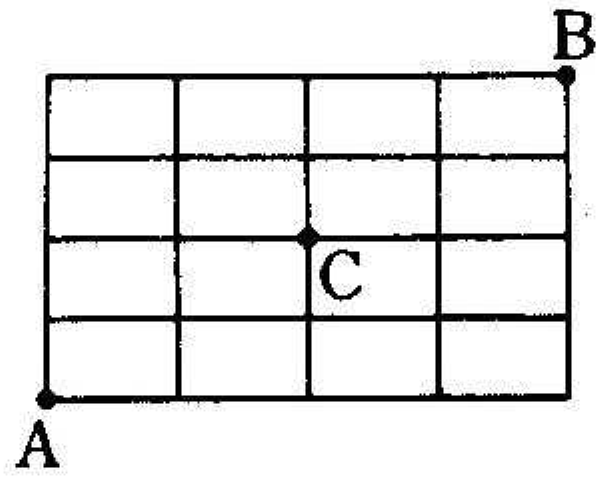
$$210-60=150\text{（通り）}$$

ある。

答　(1)　80　(2)　150

2/25

練習 3. 右図は，車道が碁盤(ごばん)の目の形に造られた街を示している。図で，点Cの交差点は右折禁止になっている。



点Aから点Cに行く道筋は何通りあるか。また，点Aから点Bに行く道筋は何通りあるか。ただし，まわり道をしないで最短コースを行くものとする。　　（埼玉大）

ヒント　前半はいまや，いうまでもなく，

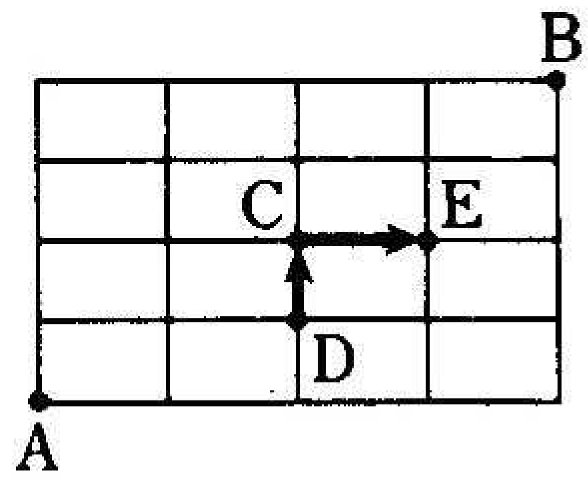
$$\frac{4!}{2!2!}=6\text{（通り）}$$

でしょう。

後半は，AからBに行くすべての最短コースの数は

$$\frac{8!}{4!4!}=70\text{（通り）}$$

その中で，点Cで右折するものは，下の図で DCE を通るものですから



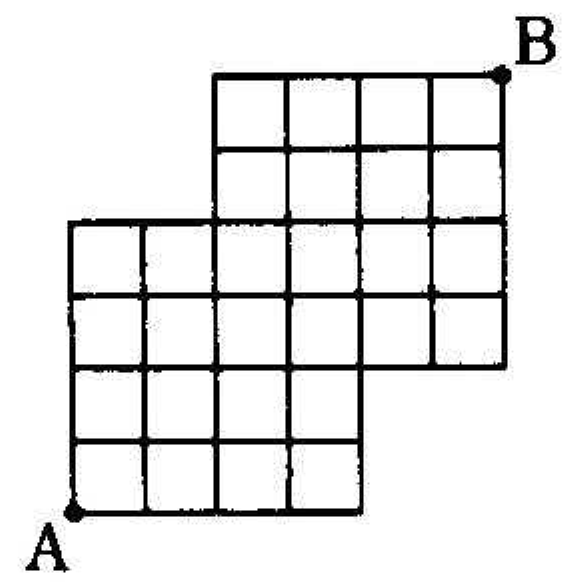
$$\frac{3!}{2!1!}\times\frac{3!}{2!1!}=9\text{（通り）}$$

結局，求める数は

$$70-9=61\text{（通り）}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

2/25

練習 4. 図のように東西に走る道路と南北に走る道路とがある。西南隅Aから東北隅Bに至る最短通路はいく通りあるか。（学習院大）



ヒント　AからBに行く途中のくびれたところに関所を設けて，そこを通る個数を調べて加えればいいでしょう。くびれの両端を通るものはいずれも $\frac{6!}{2!4!}\times\frac{6!}{2!4!}$ だけ，中央を通るものは $\frac{6!}{3!3!}\times\frac{6!}{3!3!}$ で，結局

$$2\left(\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\right)^2+\left(\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\right)^2=850\text{（通り）}$$

数字を並べる問題

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆数字を並べる仕方を調べる問題は大きく分けて2つ。ひとつは大小から，ひとつは倍数から，くるのです。

◆ 数字を並べる問題の扱い方を考えてみましょう。さっそくながら，これから：——

2/17

練習 1. 1，2，3，4，5，6 の中から3個選んで作る3けたの整数は何個できるか。

ヒント 6個の相異なるものの中から3個とって作る順列の数は

$${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$$

ですから，求める個数は120個です。

あるいは公式など使わずに，百位の数字の選び方は6通り，そして，そのおのおのの仕方について，十位の数字の選び方は5通り，そして，それらの選び方のおのおのに対し一位の数字の選び方は4通りありますから，求める個数は

$$6\times5\times4=120\ (個)$$

といってもよいのです。

2/17

練習 2. 0，1，2，3，4，5，6 の中から3個選んで作る3けたの整数は，何個できるか。

解 1. 7個の異なるものの中から3個とって作る順列の数は

$${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=210\ (個)$$

あります。その中で，百位に0のあるものは

$${}_6P_2=6\cdot5=30\ (個)$$

あります。

したがって，求める個数は

$$210-30=180\ (個)$$

ります。 答 180個

解 2. 百位における数字は6通りあって，そのおのおのに対し十位におく数字の選び方は0も使えるから6通りある。そして，それらの選び方に対し，一位の選び方は5通りあって，結局求める個数は

$$6\times6\times5=180\ (個)$$

あります。 答 180個

2/17

練習 3. 1，2，3，4，5，6，7 の中から4個とって作る4けたの整数の中で，下位ほど数字の小さいものはいくつあるか。

ヒント つまり，4321とか，7432とかがいくつあるか，というのです。もはや，めんどうはありますまい。つまり，異なる4つの数を選ぶと並び方は1通りにきまってしまうではありませんか。かくて，求める個数は

$${}_7C_4=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=35\ (個)$$

あることがわかります。 答 35(個)

2/1

練習 4. 1，2，3，4，5，6 の中から4個とって作る4けたの整数のうち4326より小さいものは何個あるか。

ヒント 3□□□，2□□□，1□□□ のものはいずれも ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ (個) ずつあります。次に 4□□□ はどうか。

432□のものは 2 (個)

431□のものは 3 (個)

42□□のものは ${}_4P_2=4\cdot3=12$ (個)

41□□のものは ${}_4P_2=4\cdot3=12$ (個)

以上をまとめて

$$\begin{aligned}&60\times3+12\times2+3+2\\&=180+24+3+2\\&=209\end{aligned}$$

答 209(個)

注 このように，ある数より大とか小とかいうのは場合を分けて勘定して加えるより仕方がありません。

2

練習 5. (1)　4けたの電話番号のうち，数字が増す順に並んでいるものは全部で何通りあるか。

(2)　(1)の条件をゆるめて，同じ数字が2つまで並んでもよい（しかし，異なる数字どうしは小さいものから大きいものへの順に並んでいる）とすると，そのような電話番号は全部で何通りあるか。　（中央大）

ヒント　ふつう4けたの数といえば0123は入れませんが，電話番号なら，これも4けたの中に入れるでしょう。さて，

(1)　0から9までの10個の数字の中から4個選ぶと，あとは配列の順は1通りにきまってしまうでしょう。

したがって，その個数は

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=210\ (\text{通り})$$

あります。

(2)　10個の数字の中から3個選んで，たとえば

1，2，3

を選んだとしますと

1123，1223，1233

の3通りできるハズ。そこで求める個数は

$${}_{10}C_3\times3=120\times3=360\ (\text{通り})$$

ふえます。

したがって，求める個数は

$$210+360=570\ (\text{通り})$$

あります。

注　このように，数字を配列する問題なのに本質的には組合せの問題だというのもあります。しかし，純粋に順列の問題と考えることができないわけでもありません。たとえば(1)なら，10個の数字の中から4個とって一列に並べる仕方は

$${}_{10}P_4=10\cdot9\cdot8\cdot7$$

通り，ところが，4つの数字からなる順列は ${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1$ あって，これだけ重複がおこるわけですから

$${}_{10}P_4\div{}_4P_4=210\ (\text{通り})$$

とすることができるわけです。

*　*　*

◆　ちょっと変わった問題ではこんなのもあります。

練習 6.　4種の数字 1，2，3，4 をそれぞれ4個ずつ用いた16個の数字を4行4列に並べる。ただし，その際どの行にも，またどの列にも異なる数字が並ぶようにする。このとき，16個の数字を4行4列に並べる並べ方は全部で何通りあるかを調べよ。

（日本大）

ヒント　いうなれば行列の個数を求める問題です。たとえば

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\ \text{や}\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&2&1\\4&3&1&2\end{pmatrix}$$

はいいが

$$\begin{pmatrix}1&2&4&3\\2&1&3&4\\3&4&1&2\\4&3&1&2\end{pmatrix}$$

はいけない，と，いうわけです。

さて，第1行の配列の仕方は ${}_4P_4=4!=24$ 通りあります。そのおのおのに対し，第2行では12通りずつあります。これは，ピンとこなかったら全部書いてみるといいでしょう。最初における数のおのおのについて3通りずつあることからすぐわかります。

そして，第1行，第2行の1組について第3行は2通りずつありますから，結局全部で

$$24\times12\times2=576\ (\text{通り})$$

あることがわかります。

答　576（通り）

*　*　*

◆　以上数字を並べる問題を考えて来ましたが，この他に倍数の個数を求める問題があります。これについては p.60〜65 を参照のこと。なお，数字を並べるのも文字を並べるのも本質的なちがいはありませんが，一方は大小があるのがちがう点といえましょう。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

偶数と奇数の個数

◆2の倍数が偶数で，2で割りきれない整数を奇数ということは誰でも知っているが，なぜ偶といい，なぜ奇というのであろうか。

◆ ここでは，偶数や奇数に関係する順列や組合せの問題を考えてみるのが目的です。

練習1. 6個の数字0，1，2，3，4，5のうち異なる4個の数字を並べて4けたの整数はいくつできるか。また4けたの偶数はいくつできるか。

ヒント (1) まず0，1，2，3，4，5の中から4個とって作る順列の数は

$${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$$

その中で0が最初にきているものは

$${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$$

あります。結局求める個数は

$$360-60=300$$

です。

(2) 千位が奇数のとき：

千位は3通り，一位も3通り，百，十位は ${}_4P_2$ 通りありますから

$$3\times3\times{}_4P_2=108\ (\text{通り})$$

あります。次に，

千位が偶数のとき：

千位は2通り，一位は2通り，百，十位は ${}_4P_2$ 通りありますから

$$2\times2\times{}_4P_2=48\ (\text{通り})$$

あります。結局求める個数は

$$108+48=156\ (\text{通り})$$

です。　　　　答 156通り

練習2. 同じ数字をくり返し使うことを許す場合，1，2，3，4，5，6を使ってできる3けたの偶数は何通りあるか。

解 一位の数は2,4,6の3通りあって，そのおのおのの選び方に対して，百位，十位の数の順列は6^2通りある。ゆえに求める仕方は

$$3\times6^2=108\ (\text{通り})$$

ある。

練習3. 1，1，1，2，2，3をすべて用いる6けたの整数の中で偶数および奇数はそれぞれ何個あるか。

ヒント 偶数は一位が2でなければならない。そこで，他の1，1，1，2，3をすべてとって一列に並べる場合の数だけあって，それは

$$\frac{5!}{3!1!1!}=20\ (\text{個})$$

ある。次に奇数は一位が1または3であり，1のときは

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30\ (\text{個})$$

また，一位が3のときは

$$\frac{5!}{3!2!}=10\ (\text{個})$$

結局，30+10=40 (個) あります。

答 偶数20 (個)，奇数40 (個)

注 1，1，1，2，2，3をすべて一列に並べる仕方は

$$\frac{6!}{3!2!1!}=60\ (\text{個})$$

ありますから，偶数の個数20を引いて奇数の個数は40 (個) として，もちろんよいのです。

練習4. 6個の数字1，2，3，4，5，6のうちから相異なるもの4個をとって4けたの正の奇数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1) 一位の数字が1のものはいくつあるか。

(2) 全部でいくつあるか。

(3) 全部の和を求めよ。

ヒント (1) 一位に1をおくと，残り5個から3個選んで並べて得られる順列の数だけある

のですから

$${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60\ (個)$$

あります。

(2) 一位が1, 3, 5のものがいずれも60個ずつあるわけですから，全部で

$$60\times3=180\ (個)$$

あります。

(3) 上の180個の奇数の和を求めよ，というのですが：——

一位の数の和$=(1+3+5)\times60=540$

十位の数の和は十位が 1, 3, 5 のものが ${}_4P_2\times2=24$ (個) ずつ，十位が 2, 4, 6 のものが ${}_4P_2\times3=36$ (個) ずつありますから，その和は

$$(10+30+50)\times24+(20+40+60)\times36=6480$$

となります。

同じようにして百位の数の和は 64800 で，千位の数の和は648000となりますから，これらを合計して求める総和は次の通り。

$$540+(1+10+100)\times6480$$
$$=719820$$

■練習 5. 1から10までの整数を1つずつ書いた10枚のカードから同時に6枚とり出す。とり出したカードに書かれた数の和が偶数となるのは何通りあるか。（横浜市大）

ヒント 偶数の和はもちろん偶数ですが，奇数も偶数個加えれば偶数になることが大切な点です。さて：——

偶数 $M_0=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

奇数 $M_1=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

ですから偶数を4枚，奇数を2枚選ぶ仕方は

$${}_5C_4\times{}_5C_2\ (通り)$$

あり，偶数を2枚，奇数を4枚選ぶ仕方は

$${}_5C_2\times{}_5C_4\ (通り)$$

あります。

したがって求める数は

$${}_5C_4\cdot{}_5C_2+{}_5C_2\cdot{}_5C_4=100\ (通り)$$

あります。

注 これがわかれば偶数の代りに奇数としてもできるハズ。つまり，奇数を奇数個加えれば奇数となるのですから

$${}_5C_1\times{}_5C_5+{}_5C_3\times{}_5C_3+{}_5C_5\times{}_5C_1$$
$$=5+100+5=110\ (通り)$$

あります。

■練習 6. nが奇数ならば $a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_n$ を 1, 2, 3, ……, n のどんな順列としても $(a_1-1)(a_2-1)\cdots\cdots(a_n-n)$ は常に偶数であることを示せ。（九州工大）

ヒント まずこれを一読して意味のわかる人は少ない。$n=5$ の場合を考えてみましょう。

1, 2, 3, 4, 5 の順列として

3, 1, 2, 5, 4

をとったとしますとこの場合

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots\cdots(a_5-5)$$
$$=(3-1)(1-2)(2-3)(5-4)(4-5)$$
$$=-2$$

で偶数になります。さて，証明ですが：——

nは奇数であるから，1, 2, 3, ……, n は奇数個の数字で奇数からはじまって奇数で終わっていますから，奇数の個数が偶数の個数より1個多いわけです。そこで，これをどのように並べかえようとも，奇数の方が1個多いわけです。

今，$a_1-1,\ a_2-2,\ \cdots\cdots,\ a_n-n$ がすべて奇数としますとa_1は偶数，a_2は奇数，a_3は偶数，……，a_n は偶数となり，偶数ではじまり偶数で終わるから，偶数の方が奇数より1個多いことになり，不合理です。つまり，$a_1-1,\ a_2-2,\ a_3-3,\ \cdots\cdots,\ a_n-n$ の中に少くとも1個は偶数がなければならないことになります。よって，その積は偶数である。

Q.E.D.

* * *

◆ 偶数か奇数かは，要するにで2割りきれるかどうかが問題ですが，それは次にやる3の倍数や4の倍数や5の倍数といったものの，いわば序曲なのです。これになれることが，第1歩というわけなのです。

3の倍数の個数

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆9とか3はスゴク神秘的な数と考えられたらしい。ある民族学者は3が，1，2に次いで莫大という意味だったろうという。

◆ **ある整数が3の倍数であるための条件は，その数字の和が3で割りきれること**です。4けたの整数について証明しますと：—

4けたの整数を $abcd$ で表すと，これは

$$1000a+100b+10c+d$$
$$=(999+1)a+(99+1)b+(9+1)c+d$$
$$=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$$

したがって $a+b+c+d$ が3で割りきれるならばこの整数は3で割りきれるのです。では，次をやってみませんか。

練習1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9を1回だけ用いて作られる3けたの整数のうちで3の倍数はいくつあるか。

ヒント まず 1, 2, 3, ……, 9 を次のように分類します。

(K_0) 3 6 9
(K_1) 1 4 7
(K_2) 2 5 8

ここで K_0 は3で割りきれるもの，K_1 は3で割って1余るもの，K_2 は3で割って2余るものです。そして，加えて3で割りきれるのは数字の組合せが下の左のようです。

$K_0\ K_0\ K_0$ これは ${}_3P_3=6$ 通り
$K_1\ K_1\ K_1$ これも ${}_3P_3=6$ 通り
$K_2\ K_2\ K_2$ これも ${}_3P_3=6$ 通り
$K_0\ K_1\ K_2$ これは，まず K_0, K_1, K_2 1個ずつ選ぶ仕方が $3\times3\times3=27$(通り)，さらに，その選んだ3個をいろいろ並べかえる仕方が ${}_3P_3=6$ 通りありますから，結局

$$27\times6=162\ (\text{通り})$$

あります。よって，求める個数は

$$6\times3+162=180\ (\text{通り})$$

あります。

練習2. 1, 2, 3, 4, 5, 6 の中から重複を許して3個とり3けたの3の倍数を作りたい。何個できるか。

ヒント (K_0): 3 6
(K_1): 1 4
(K_2): 2 5

です。まず，

$K_0\ K_0\ K_0$ これは $2^3=8$ 通り
$K_1\ K_1\ K_1$ これも $2^3=8$ 通り
$K_2\ K_2\ K_2$ これも $2^3=8$ 通り

あります。そして

$K_0\ K_1\ K_2$ これは，まず K_0 の選び方が2通り，そのおのおのに対し，K_1 の選び方も2通り，K_2も同じ，結局

$$2\times2\times2=8\ (\text{通り})$$

あります。選んだ3個をいろいろ並べかえる仕方は

$${}_3P_3=6\ (\text{通り})$$

ありますから，結局

$$6\times8=48\ (\text{通り})$$

かくして，求める個数は

$$8\times3+48=72\ (\text{通り})$$

となります。

答 72 (通り)

練習3. 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5 の中から4個とって4けたの3の倍数を作りたい。いくつできるか。

ヒント まず：——

(K_0) 3
(K_1) 1, 1, 1, 4
(K_2) 2, 2, 5, 5

です。そして，4けたの整数で3の倍数とな

るのは，数字の組合せが次のようになるときです。

$K_0K_0K_0K_0$ のときなし

$K_0K_0K_1K_2$ のときなし

$K_0K_1K_1K_1$ のとき16通り

$K_0K_2K_2K_2$ のとき24通り

$K_1K_1K_2K_2$ のとき72通り

合計すると112通り。

答 112（通り）

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題を考えてみませんか。まず，これです。

■練習 4. x は100より大きい正の整数で3の倍数とする。100から x までの間にある7の倍数の総和が17157であるという。x を求めよ。ただし，100から x までの間にある数とは，両端をふくめて考えるものとする。

ヒント まず100より大で7の倍数といえば

105, 112, 119, ……　……(*)

です。つまり初項105，公差7の等差数列ですから n 個の和が17157とすると

$$\frac{n}{2}\{2\times105+(n-1)\cdot7\}=17157$$

$$\therefore\quad n^2+29n-4902=0$$

これを解いて

$$n=57$$

そこで，(*) の第57項を求めてみますと497です。しかし，これは3の倍数ではありません。そこで調べてみると

497, 498, 499, ……

498がまさに3の倍数です。

さては $x=498$ だったのです。

注 これはべつに3の倍数の条件を直接使っているわけではありません。しかし，ともあれ，3の倍数という条件がとりあげられているのでここにあげました。

とかく，人は，ある条件にこだわって本質を見のがすことが多い。つまり，条件にふりまわされないことが大切です。次も同じです。

■練習 5. 1000個の正の整数 a_1, a_2, ……, a_{1000} があり，$a_1=a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n=3, 4, \cdots\cdots, 1000)$ であるとき，この中に3の倍数は何個あるか。　(横浜市大)

ヒント ちょっとはじめの方を書いてみましょうか。

1, 1, 2, **3**, 5, 8, 13, **21**, 34, 55, 89, **144**, …… これをみると，どうやら

3, 21, 144, ……

が3の倍数であり，それは a_{4k} らしい。どうやら手がかりがついた。

今ひとつ，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ の特性方程式（☞「基解」p.160）を求めるために $a_n=x^n$ とおくと

$$x^n=x^{n-1}+x^{n-2}\quad(x\neq0)$$

これを解いて

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\quad a_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$a_1=a_2=1$ から定数 A, B を求めて

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

となります。これを用いて3の倍数がどうあらわれるか調べることもできます。

しかし，次のようにやるともっとカンタン!! a_1, a_2, …… を3を法とする剰余系で表してみますと（☞「数Ⅰ」p.164）

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, ……

となって a_{4k} が3の倍数であることは明白です。このようにして，求める個数は

$$1000\div4=250\ (\text{個})$$

となります。　答 250

注 このように，立場を変えるといろいろな考えが出てくるものです。ではついでに，上の数列について，偶数が何個あらわれるか，7の倍数が何個あるか，など考えてみませんか。

このように問題を拡張して考えたり，特殊化して扱うのはスゴク勉強になるものです。しかし，深入りしてはいけませんよ。

*　*　*

⑪ 4の倍数の個数

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆今は昔，ピタゴラス学派では，毎日神殿に集って，テトラックスの神に祈りをささげたものである。これはじつは4の神なのです。

◆ **ある整数が4の倍数であるための条件は下2けたが4の倍数となること**です。なぜなら100は4の倍数だからです。

そして，下2けたが4の倍数となるのは

00 04 08 12 16 20 24 28 32 36
40 44 48 52 56 60 64 68 72 76
80 84 88 92 96

だけあります。そこで次のような問題になります。

■練習 1. 1，2，3，4 で作られる4けたの整数で4の倍数はいくつあるか。ただし，各数値は1回しか使わないものとする。

ヒント　下2けたが12か 24 か 32 しかありえない。そのおのおのについて他の2数の並べ方は ${}_2P_2=2$ 通りずつあるから，求める個数は

$$2\times3=6\ (個)$$

あるわけです。

■練習 2. 0，1，2，3，4，5 を重複しないで使ってできる5けたの整数のうち，4の倍数はいくつあるか。

ヒント　下2けたが 04，12，20，24，32，40，52 のものでなければなりません。そして，04，20，40のものは，他の4個の数字から3つを選んで順列を作り，上3けたにおけばよいのですから ${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$（通り）ずつできます。

次に，下2けたが12，24，32，52のものは万位に0をおくことができませんから

$${}_4P_3-{}_3P_2=18\ (通り)$$

ずつできます。

結局求める個数は次のようになります。

$$24\times3+18\times4=144\ (個)$$

■練習 3. 4けたの整数のうち，4で割りきれるが5で割りきれないものはいくつあるか。

ヒント1.　4で割りきれるが5で割りきれないものは下2けたが

04 08 12 16 24 28 32 36 44 48
52 56 64 68 72 76 84 88 92 96

のもので，

1000～1099
1100～1199
………
9900～9999

の間にそれぞれ20個ずつあるわけです。

したがって求める個数は

$$20\times90=1800\ (個)$$

となります。

ヒント2.　次のように考えてもいいのです。

4けたの数で4の倍数は

1000，1004，……，9996

で，2250個あります。

次に4の倍数でかつ5の倍数は20の倍数で，

1000，1020，……，9980

で，450個あります。

したがって求める個数は

$$2250-450=1800\ (個)$$

です。

■練習 4. 1から1000までの整数の中に4で割りきれ，5で割れば2余るようなものはいくつあるか。

ヒント1.　5で割れば2余る整数というのは一位の数字が2または7のものですから，4で

割りきれ，5で割れば2余るものの下2けたは12, 32, 52, 72, 92のものしかありません。

そして，

1から99

100から199

200から299

……

900から999

の間に5個ずつあるわけです。もちろん1000は不適。したがって求める個数は

$$5\times 10=50\ (\text{個})$$

あります。

ヒント2. 次のように扱うこともできます。4の倍数で5で割れば2余る数Nは

$$N=4x=5y+2\quad (x,\ y\ \text{は整数})$$

と表すことができます。

これから

$$x=\frac{5y+2}{4}=\frac{4y+(y+2)}{4}$$

$$=y+\frac{y+2}{4}$$

$\dfrac{y+2}{4}=K$（整数）とおきますと

$$y=4K-2$$

$$\therefore\quad N=20K-8$$

そこで

$$1\leqq 20K-8\leqq 1000$$

を解くと

$$1\leqq K\leqq 50$$

ゆえに，50個あることがわかります。

*　*　*

◆ では，やや，総合的な問題をやってみませんか。

練習5. 4個のサイコロを振って出る目の和が4の倍数となる場合の数は何通りあるか。

ヒント　サイコロをA，B，C，Dとしましょう。その目の数をそれぞれx，y，z，uとしますとnを自然数として

$$x+y+z+u=4n$$

$$1\leqq x,\ y,\ z,\ u\leqq 6,\ 1\leqq n\leqq 6$$

の解の個数を求めることになります。

$n=1$のとき$x+y+z+u=4$，このとき解は$x=1$，$y=1$，$z=1$，$u=1$の1通りしかありません。

$n=2$のとき$x+y+z+u=8$，これを満足するx，y，z，uは表を作ってみると

1	1	1	5	4個
1	1	2	4	12個
1	1	3	3	6個
1	2	2	3	12個
2	2	2	2	1個

となってずいぶん出てきます。次は$n=3$，$n=4$，$n=5$，$n=6$と順にやってできますがちょっと大変です。

そこでうまい方法があります。

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4\quad\cdots(*)$$

を展開したときx^4の係数は1ですが，これはちょうど上の$n=1$の場合に対応します。他も同様です。そこで上の(*)を展開したときのx^4，x^8，x^{12}，x^{16}，x^{20}，x^{24}の係数の和を求めればよいことになります。そして，それは$(1+x+x^2+\cdots+x^5)^4$の展開式でx^0，x^4，x^8，x^{12}，x^{16}，x^{20}の係数の和を求めることと同じです。ところが

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^5)^4$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$$

とおくと

$$4(a_0+a_4+\cdots\cdots+a_{20})$$
$$=f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i)$$
$$=6^4+0^4+(1+i)^5+(1-i)^5$$
$$=1296+0+(-4-4i)+(-4+4i)$$
$$=1288$$

となります。つまり，個々のa_4，a_8などは求めないで和だけが求められるところが，ミソ。こうして求める個数は 322（個）…答

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

5の倍数の個数

◆5という数字はいろんなところに出てくる。五刃といい，五土といい，五山といい，五方という。入試に出るも宜(むべ)なるかな。

◆ **5の倍数となるための条件は一位の数字が0か5の場合です**。つまり，カンタン，そしてカンタンなればこそ，いろいろひねった問題が出題されているのです。

練習1. 0，1，2，3，4，5 で作る3けたの5の倍数はいくつあるか。

ヒント　5の倍数であるためには一位が0または5でなければならない。

一位が0のとき，百位，十位は 1，2，3，4，5 の中から2つとって順列を作ればよいから

$${}_5P_2=5\cdot4=20 \text{（通り）}$$

一位が5のときには百位に0をおけないから，百位は4通り，そのおのおのに対して十位の選び方は0も入れられるから4通りあります。結局

$$4\times4=16 \text{（通り）}$$

結局求める個数は

$$20+16=36$$ ……答

練習2. 1から1000までの正の整数のうち，5または7の倍数はいくつあるか。

ヒント　5の倍数は

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots\cdots,\ 1000$$

つまり

$$5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot200$$

ありますから200個です。

次に7の倍数は同じく

$$7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot142$$

で142個あります。

そして，5と7の公倍数は

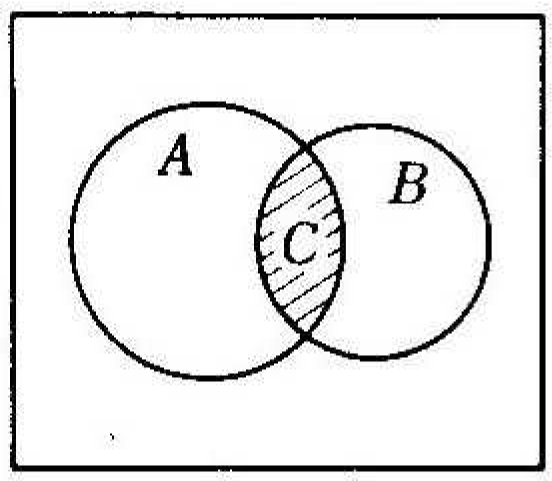
$$35\cdot1,\ 35\cdot2,\ 35\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 35\cdot28$$

で28個あります。

だから，求める個数は

$$200+142-28=314 \text{（個）}$$ です。

注　このような場合は，いわゆるベン図で表してみると見やすくなります。



右の図でAが5の倍数の集合，Bが7の倍数の集合，Cが35の倍数の集合としますと求める個数は

$$n(A)+n(B)-n(C)$$

と表せます。ここで $n(A)$ はAの集合の個数，$n(B)$ はBの集合の個数，$n(C)$ はCの集合の個数という意味です。

練習3. 1，2，3，4，5 の5つを用いてできる5けたの整数のうち 21345 のように左から右へ1，3，5が並びかつ，5の倍数であるものはいくつあるか。

ヒント1.　5の倍数というのですから，一位は5でなければなりません。とすると，あとの4つは，1，3 がこの順に並んでいればよいわけ。

そこで 1，3 は同じものと考え，2, 4, a, a の順列を考えてみると，その個数は

$$\frac{4!}{1!1!2!}=12 \text{（個）}$$

で，その順列 2a4a などの左のaには1を，右のaには3を入れることにすればよいのです。結局12個になります。

ヒント2.　あるいは次のように考えてもいいでしょう。1，3 をこの順におくと

□□1□□3□□

あとの2つは上の3つの場所から 2 つを選び，あとは 2，4 または 4，2 と入れればよいのです。だから ${}_3H_2\times2={}_4C_2\times2=12$（個）となります。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 4. 1から1000までに5で割りきれ，25で割りきれないものはいくつあるか。

ヒント　5の倍数は

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots\cdots,\ 1000$$

つまり

$$5\cdot 1,\ 5\cdot 2,\ 5\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot 200 \quad \cdots(*)$$

の200個あります。

次に25の倍数は

$$25,\ 50,\ 75,\ 100,\ \cdots\cdots,\ 1000$$

つまり

$$25\cdot 1,\ 25\cdot 2,\ 25\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 25\cdot 40 \quad (**)$$

の40個あります。だから，求める個数は

$$200-40=160\ (\text{個})$$

です。

注　≪この160個の和を求めよ≫というのであれば，もちろん (*) の和から (**) の和を引けばよいハズ。そして，それは等差数列の和の公式を使って

$$\frac{200}{2}(5+1000)-\frac{40}{2}(25+1000)$$
$$=100\times 1005-20\times 1025$$
$$=80000$$

となります。

練習 5. 5けたの正の整数のうちで，5の倍数で，かつ54321より大であるものはいくつあるか。ただし，各位の数字はすべて異るものとする。

ヒント　5の倍数ですからその末位の数字は0または5です。

ところで

$5432x$ にあてはまるものはありません。

$543x0$ にあてはまるものは x に入れられるものが 6, 7, 8, 9 の4つだけですから4個あります。

$54xy0$ にあてはまるものは x には 6, 7, 8, 9 の中から1つ，y には残り6個から1つ選んでおけばいいのですから

$$4\times 6=24\ (\text{個})$$

あります。最後に

$5xyz0$ にあてはまるものは同じように考えて

$$4\times {}_7P_2=168\ (\text{個})$$

あります。それから，万位の数字が 6, 7, 8, 9 のものは同じように考えて

$$4\times {}_8P_3\times 2=2688\ (\text{個})$$

ありますから，結局求めるものは

$$4+24+168+2688$$
$$=2884\ (\text{個})$$

あることがわかります。

練習 6. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字を1回ずつ用いてできる4けたの5の倍数の総和を求めよ。

ヒント　一位が0のものは ${}_6P_3=120$ (個) あります。千位，百位，十位の数字は 1, 2, 3, 4, 5, 6 が同じ回数ずつ（つまり $120\div 6=20$ 回ずつ）あらわれますから，その総和はそれぞれ

$$(1+2+3+4+5+6)\times 1000\times 20$$
$$(1+2+3+4+5+6)\times 100\times 20$$
$$(1+2+3+4+5+6)\times 10\times 20$$

となります。

したがって，その和は

$$(1+2+3+4+5+6)\times(1000+100+10)\times 20$$
$$=466200 \qquad \cdots\cdots(*)$$

となります。

一位が5のときは千位は0がおけないことに注意して同じように考えますと

$$(1+2+3+4+6)\times 1000\times 20$$
$$(1+2+3+4+6)\times 100\times 16$$
$$(1+2+3+4+6)\times 10\times 16$$

となって，一位は 5×100

その総和は

$$348660 \qquad \cdots\cdots(**)$$

です。そして，求める答は (*) と (**) の合計で，814860 となります。

直線と交点の個数

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆交点といってもいろいろあります。直線と直線との交点，円と円との交点，といったぐあい，これらの個数を求めるのがこれです。

◆ さっそくですが，そのものズバリ。次の練習にいきましょう。

練習 1. いずれの2つも平行でなく，いずれの3つも同一点を通らない10個の直線がある。その交点の個数を求めよ。

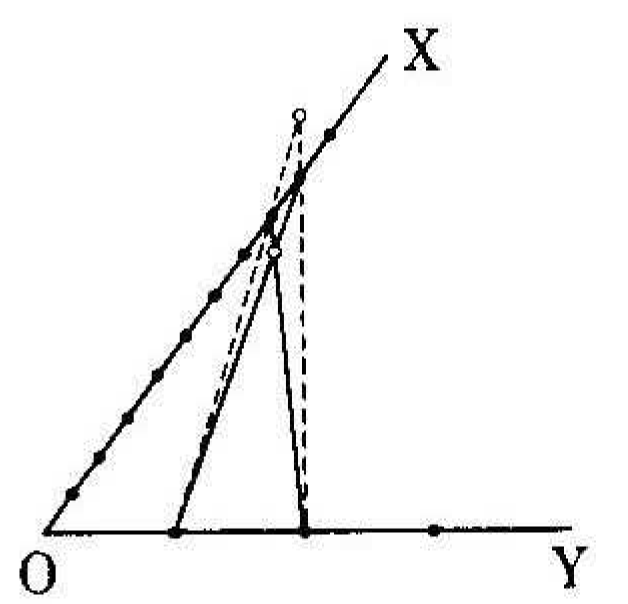
ヒント いずれの2つをとっても必ず1つの交点があるわけですから，求める個数は

$$ {}_{10}C_2=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45 \text{ (個)}$$

あります。

練習 2. 角 XOY の辺 OX 上にある相異なる10個の点と，辺 OY 上にある相異なる3個の点とを結ぶ線分全体のうち，どの3つをとっても1点で交わることがないときは，これら線分の交点は角 XOY 内に何個得られるか。 （東京商船大）

ヒント OX 上の2点と OY 上の2点を結ぶ直線が交わるのは2通りありますが∠XOY 内にあるものは1個だけです。したがって求める個数は $ {}_{10}C_2\times {}_3C_2=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\times\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=135$ (個) です。



練習 3. 平面上に，どの3本も同一点で交わらない n 本の直線がある。n 本中 m 本だけが平行であるとき，それら n 本の直線によってできる交点の個数を求めよ。

解 n 本の中から2本選んでできる交点の個数は ${}_nC_2$ であるが，m 本は平行であるから ${}_mC_2$ だけ交わらない。よって，求める個数は ${}_nC_2-{}_mC_2$ で，それは

$$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=\frac{(n-m)(n+m-1)}{2}$$

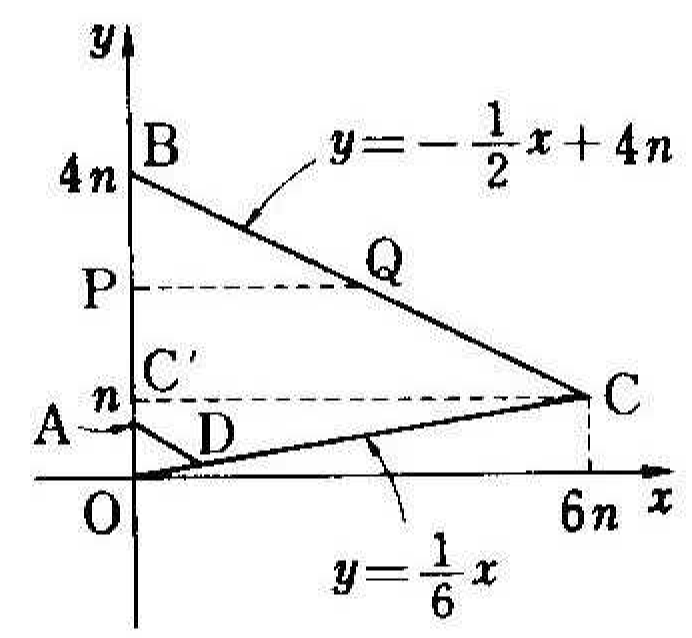
である。

* * *

◆ では，やや，総合的な問題にいきましょう。それは，これです。

練習 4. n を2以上の整数とする。xy 平面上の4点 A(0, 4), B(0, $4n$), C($6n$, n), D(6, 1) を頂点とする四角形 ABCD に含まれる格子点（x，y 座標がともに整数である点）の個数を求めよ。ただし，四角形 ABCD の周上の格子点を含めて数えるものとする。 （新潟大）

ヒント 右の図において，辺 BC′ 上の点 P(0, $4n-k$) を通り，x 軸に平行な直線と BC との交点Qの x 座標は $2k$ ですから，線分 PQ 上の格子点の数は $(2k+1)$ 個あります。



そこで，△BC′C に含まれる格子点の数は

$$\sum_{k=0}^{3n}(2k+1)=9n^2+6n+1$$

また，△OCC′ に含まれる格子点の数は CC′ はのぞいて

$$\sum_{k=0}^{n-1}(6k+1)=3n^2-2n$$

ゆえに，△OBC 内では格子点の数 $f(n)$ は

$$f(n)=(9n^2+6n+1)+(3n^2-2n)$$
$$=12n^2+4n+1$$

そして，△OAD 内の個数は $f(1)=17$ です

から，求める個数は $f(n)-f(1)+$(線分AD上の格子点の数)$=12n^2+4n-12$ となります。

◆ 直線の数を求めるのもまったく同じように扱うことができます。

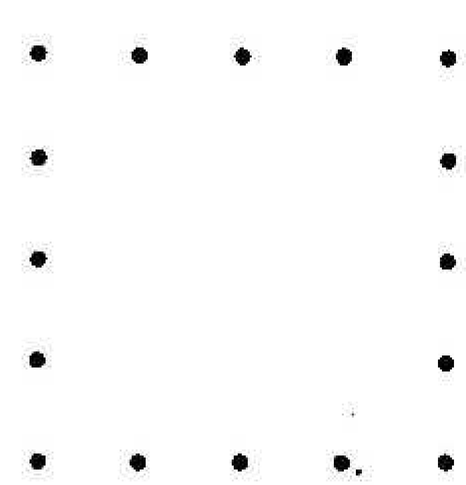
■練習 5. 7個の点があって，いずれの3つも同一直線上にないとき，この中の2点を通る直線の個数を求めよ。

ヒント 7個の中から任意に2個選べば直線が1つずつ定まるのですから，求める個数は

$${}_7C_2=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}=21 \text{（個）}$$

あります。

■練習 6. 図のように，正方形の周上に等間隔に並べられた16個の点がある。



(1) その少なくとも2点を通る直線の数を求めよ。

(2) それらの直線のうちたがいに平行でないものは何本あるか。 （広島大）

ヒント (1) 16個の点から2点ずつ組み合わせて直線を引きますと

$${}_{16}C_2=\frac{16\cdot15}{1\cdot2}=120 \text{（個）}$$

できます。しかし，同一辺上にある5点の中から2つ選んで作った直線はすべて同じものですから，この余分なものをのぞいて求めるものの個数は

$$120-{}_5C_2\times4+4=84 \text{（個）}$$

となります。上の最後の $+4$ というのは4つの辺を作る直線です。

(2) 2点を通る直線の傾きのちがうものの個数を調べればよいでしょう。それは図からみて

$$0,\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{3}{4},$$

$$\pm1,\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4$$

と，今1つ鉛直なもの，いわば傾き∞のものがあります。結局24（個）となります。

■練習 7. ある凸12角形でどの3つの対角線も同一の点を通ることはないものとする。

(1) 対角線は全部で何本引けるか。

(2) それらの対角線は，対角線の交点によっていくつかの線分に分割される。それらの線分は全部でいくつあるか。

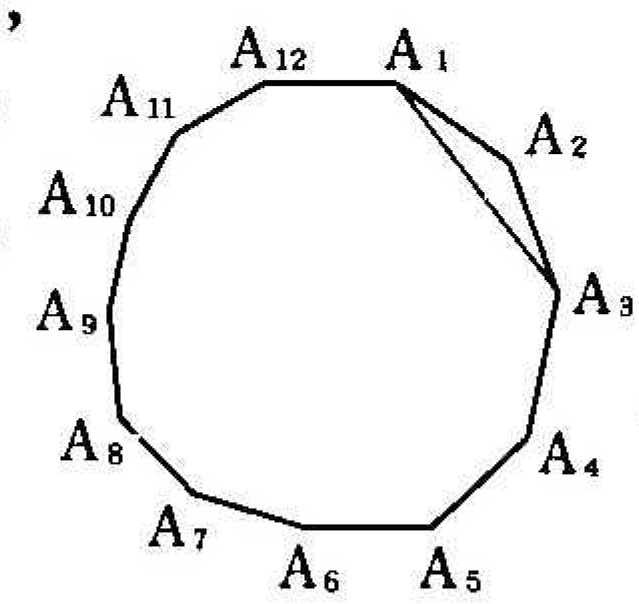
（奈良県医大）

ヒント (1) 対角線の個数については

$${}_{12}C_2-12=\frac{12\cdot11}{1\cdot2}-12=54 \text{（個）}$$

です。（これについては☞p.38）

(2) 右の凸12角形で，



対角線 A_1A_3 は，その一方側にある A_2 と他方側にある A_4，A_5，……，A_{12} と結んで得られる対角線が 1×9 個あるから，$9+1=10$ 個に分けられます。

同様に A_1A_4 は 2×8 個の対角線によって $(2\times8+1)$ 個に分けられます。

これらを表にしてみると

A_1A_3	$1\times9+1$
A_1A_4	$2\times8+1$
A_1A_5	$3\times7+1$
A_1A_6	$4\times6+1$
…………	
A_1A_{11}	$9\times1+1$
合計	174

となります。

ところが A_2，A_3，…… から出る対角線も同数個ずつありますから，全部で

$$(174\times12) \text{ 個}$$

しかし，実は，同一の対角線が2度ずつ数えられているのですから，実はその半分です。つまり

$$(174\times12)\div2=1044 \text{（個）}$$

あることがわかります。

三角形の個数

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角形の個数を求める問題は大きく分けて2つあります。1つは点が与えられたとき，そして，もう1つは直線が……。

◆ まず直線が与えられて，できる三角形の個数を求める問題を考えてみましょう。

練習 1. いずれの2つも平行でなく，いずれの3つも同一点を通らない20個の直線があるとき，できる三角形の個数を求めよ。

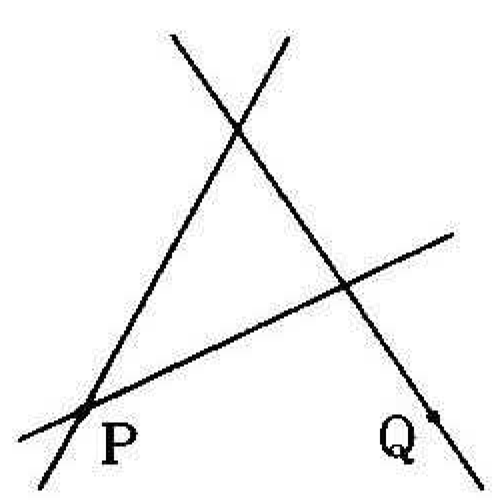
ヒント　20個の直線の中から任意に3つ選ぶと必ず1つの三角形ができますから，求める個数は

$${}_{20}C_3=\frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}=1140\ (\text{個})$$

となります。

練習 2. 一平面上に2点P，Qと20本の直線があり，そのうち12本は点Pを通り，8本は点Qを通っているとき，これらの直線からできる三角形の数は最も多くていくつか。

ヒント　Pを通る2直線とQを通る1直線，あるいはPを通る1直線とQを通る2直線をとれば，1つの三角形ができるわけですから，

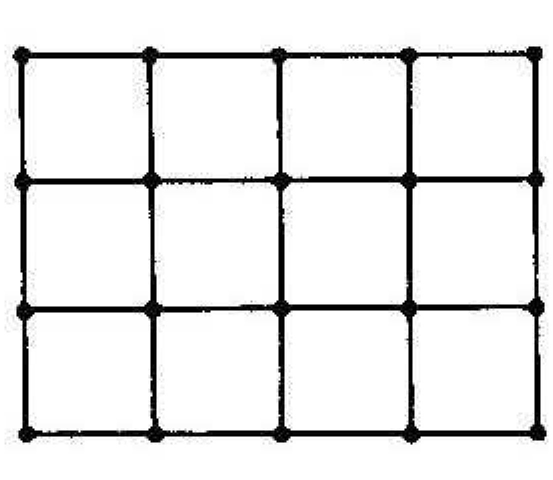


最も多いのは，どの2つの直線も重ならず，かつ平行でないときで，その個数は

$$\begin{aligned}&{}_{12}C_2\times{}_8C_1+{}_{12}C_1\times{}_8C_2\\&=\frac{12\cdot11}{1\cdot2}\times\frac{8}{1}+\frac{12}{1}\times\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\\&=528+336=864\ (\text{個})\end{aligned}$$

となります。

練習 3. 右の図のように，碁盤の目の形に並んでいる20個から，同一直線上にない3個の点を選んでそれらを頂点とする三角形を作ると，全部でいくつできるか。　(東大)



ヒント　まず，20個の点の中から3個とる仕方は

$${}_{20}C_3=\frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}=1140\ (\text{通り})$$

あります。しかし，この中に三角形を作らないものがあるので除かなければなりません。

1直線上にあるものは，

(i) 傾き0のものが ${}_5C_3\times4=40$

(ii) 傾き $\pm\frac{1}{2}$ のものが 4

(iii) 傾き ±1 のものが
$2(2\times{}_4C_3+2)=20$

(iv) 鉛直にならぶもの ${}_4C_3\times5=20$

ありますから，求める個数は

$$1140-(40+4+20+20)=1056\ (\text{個})$$

です。

練習 4. 円に内接する十角形の3つの頂点を結んでできる三角形のうち，十角形と

(1) 2辺を共有するもの

(2) 1辺だけ共有するもの

(3) 1辺をも共有しないもの

の個数を求めよ。

ヒント　(1) 2辺を共有するものは，各頂点に対して1個ずつあるのですから，いうまでもなく10個あります。

(2) 1辺だけ共有するものは1つの辺について6(＝10－4)個ずつありますから，全体で $6\times10=60$ 個あります。

(3) 10個の点を頂点とする三角形の個数は ${}_{10}C_3$ 個ありますから，これから，上の(1)，(2)の場合の個数を引いて

$${}_{10}C_3-10-60=50 \text{（個）}$$

あります。

（参考） 上の問題はそのまま円に内接する n 角形に拡張することができます。ただし $n \geqq 4$ です。つまり，

(i) 2辺を共有するものは n 個

(ii) 1辺だけ共有するものは

$$(n-4)\cdot n \text{（個）}$$

(iii) 1辺をも共有しないものは

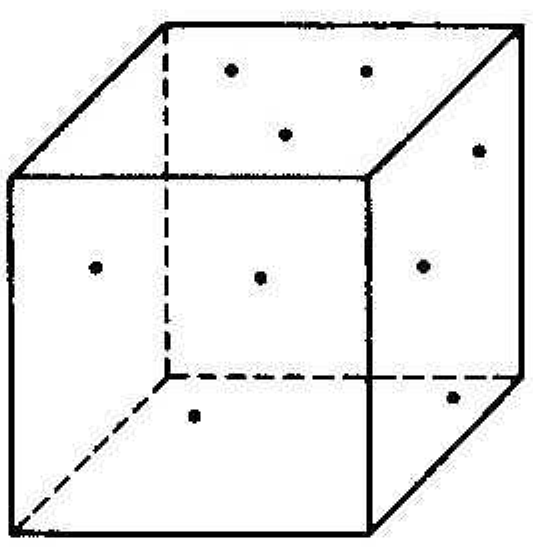
$$\begin{aligned}&{}_nC_3-n-(n-4)n\\&=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-n-n^2+4n\\&=\frac{1}{6}n(n-4)(n-5) \text{（個）}\end{aligned}$$

あります。

■練習 5. 立方体の各面上（辺ではないとする）に，それぞれ3点をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) これら18個の点の中から 2 点をとり，それらを結んでできる直線のうち，立方体の面上にないものは何本できるか。

(2) これら18個の点の中から 3 点をとり，それらを結んでできる三角形のうち，立方体の面に含まれないものは何個あるか。 （東京薬大）



ヒント (1) 6つの平面を2つずつ組み合わせて，その2面から1点ずつ選べばよいのですから

${}_6C_2\times(3\times3)=135$（本）

あります。

(2) 3つの点を選べば三角形が

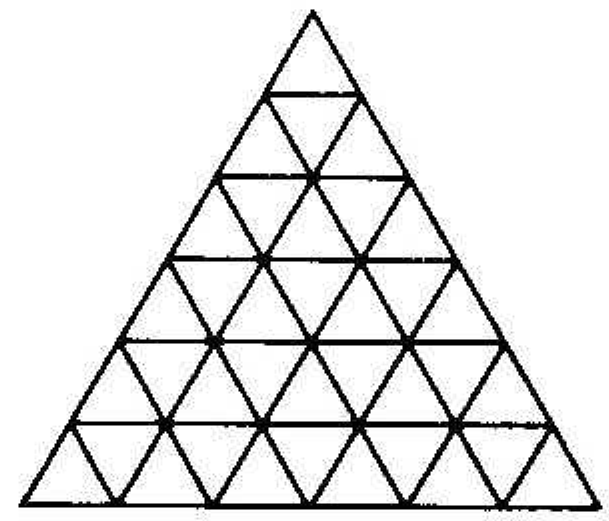
$${}_{18}C_3=\frac{18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3}=816 \text{（個）}$$

できます。この中で，立方体の面上にあるのは6個ですから求めるものは810個。

*　*　*

◆ では，やや，総合的な問題をやってみませんか。

■練習 6. 1辺の長さ $2n$ の正三角形の各辺を $2n$ 等分し，右の図のような三角形の網を作る。このとき，図形中にあるすべての三角形の個数の総和を求めよ。



ヒント △の三角形を仮に正立，▽の三角形を倒立ということにしましょう。

さて，正立の三角形は小さい方から数えてみますと

$$1+2+3+\cdots+2n=\frac{1}{2}(2n)(2n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}(2n-1)(2n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1+2 \qquad =\frac{1}{2}\cdot2\cdot3$$

$$1 \qquad =\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$

したがって，その総和は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(2n)(2n+1))\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(2n)(2n+1)(2n+2)\\&=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

次に倒立の三角形は小さい方から数えてみますと

$$1+2+3+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}(2n-1)2n$$

$$1+2+3+\cdots+(2n-3)=\frac{1}{2}(2n-3)(2n-2)$$

$$1+2+3+\cdots+(2n-5)=\frac{1}{2}(2n-5)(2n-4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 \qquad =\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$

でその和は $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ で，結局全体では

$$\frac{1}{2}n(n+1)(4n+1)$$

となります。

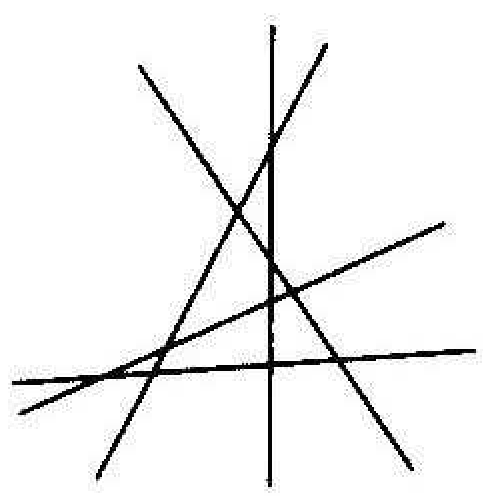
平面の分割

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆直線や円で平面を分割するといくつの部分に分かれるか。これは，順列・組合せの問題というよりは数列の問題というべきか。

◆ 平面上にn個の直線があって，いずれの2つも平行でなく，いずれの3つも同一点を通らないとき，平面はいくつの部分に分割されるだろうか？ これが，まず問題です。では次の練習1からはじめようではないか。

練習 1. いずれの2つも平行でなく，いずれの3つも同一点を通らない5つの直線は平面をいくつの部分に分けるか。



ヒント 実際にかいてみると右のようになります。数えてみると16あります。

練習 2. いずれの2つも平行でなく，いずれの3つも同一点を通らないn本の直線が平面を分割する個数をa_nとするとき，a_nとa_{n+1}の関係を求め，それを用いてa_nを求めよ。

ヒント 今n個の直線で空間をa_n（個）に分割しているとします。そして，さらに1本を引くと，最初に直線と出合うところで1個ふえます。次々と直線と出合うたびに1個ずつふえ，最後の直線からはなれるときにまた1個ふえます。したがって，

$$a_{n+1}=a_n+(n+1)$$

となります。また，明らかに$a_1=2$ですから，下のようになります。

$$\underbrace{a_1\ a_2}_{2}\ \underbrace{\ a_3}_{3}\ \underbrace{\ a_4}_{4}\cdots\cdots \underbrace{a_{n-1}\ a_n}_{n}$$

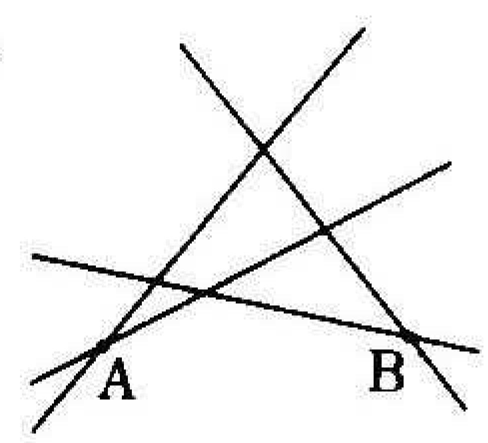
したがって

$$a_n=a_1+(2+3+4+\cdots\cdots+n)$$
$$=2+(2+3+4+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)+1=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$$

注 ここで$n=5$とおいてみると，16となり，練習1.の結果と一致します。

練習 3. 1つの平面上の1点を通過するm個の直線と，他の1点を通過するm個の直線とがいずれの2つも平行ではなく，また相重ならないとき，この平面はこれら$2m$個の直線によっていくつの部分に分けられるか。

ヒント たとえば$m=2$のときなら下の図のようになって11個の部分に分けられます。



m個ならどうなるだろうか。

さて，2点をA，Bとしてみます。Aを通る直線は，Bを通るm個の直線とm点で交わり，さらに，Aによって$(m+2)$個の部分に分けられます。そして，この$(m+2)$個の部分はいずれもみな平面を分割した部分の境界となっていますから，さらに1個の直線をふやすと平面を分ける部分の数は$(m+2)$個ふえます。（この部分がよくわからなかったら，$m=2$，$m=3$の場合を図をかいて1つ1つ当ってみるいとよいでしょう）さらに，Bを通る直線を1個ふやすと，$(m+3)$個ふえます。

したがって，m本の直線を引くときに分割された部分の数を$f(m)$で表しますと

$$f(m+1)=f(m)+(m+2)+(m+3)$$
$$\therefore\ f(m+1)=f(m)+2m+5\ (m\geqq 1)$$

ところが$f(1)=4$ですから

$$f(m)=f(1)+\{7+9+11+\cdots+(m-1)\text{項}\}$$

$=4+\frac{m-1}{2}\{2\cdot 7+(m-2)\cdot 2\}$

$=4+(m-1)(7+m-2)$

$=m^2+4m-1$

(注)　上の解き方で

$$f(m+1)=f(m)+2m+5$$

の扱い方がピンとこないかもしれません。これは，数列（☞「基解」p.128）

$$a_1=4$$

$$a_{m+1}=a_m+2m+5 \quad (m\geqq 1)$$

と同じものです。つまり

$$\underbrace{a_1\ a_2}_{7}\ \underbrace{a_2\ a_3}_{9}\ \underbrace{a_3\ \cdots}_{11}\cdots\cdots\ \underbrace{a_{m-1}\quad a_m}_{2m+3}$$

ですから

$$a_m=a_1+\sum_{k=2}^{m}(2k+3)$$

$$=4+\sum_{k=1}^{m}(2k+3)-5$$

$$=4+2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+3m-5$$

$$=m^2+4m-1$$

と考えてもよいのです。

*　*　*

◆　直接分割するわけではありませんが，これなども同じハンチュウに入るでしょう。

練習 4. 同じ大きさの正 n 角形を並べて平面を隙間なく埋めていけるとき，n はどんな値か。

(ヒント)　正 n 角形の1つの内角の大きさは

$\frac{n-2}{n}\pi$ で与えられます。したがって，これの整数倍が 2π にならなければなりません。

$$\frac{n-2}{n}\pi\times k=2\pi$$

とおくと

$$(n-2)k=2n$$

$$\therefore\quad k=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$$

ゆえに $n-2$ は4の約数でなければなりません。かくして　$n-2=1,\ 2,\ 4$

$$\therefore\quad n=3,\ 4,\ 6$$

*　*　*

◆　ここでは平面の分割が主題ですが，なにも平面に限ることはありません。球面だっていいのです。では，これを：——

練習 5. 1つの球面上に相異なる4つの大円がある。4つの大円は球面を何個の部分にわけるか。適当に場合を分けて答えよ。

(滋賀大)

(ヒント)　大円というのは，球面の中心を通る平面で切った切り口の円です。さて，どうかな：——

4つの大円が共通の交点をもつときには，いうまでもなく，8個です。

ここで，わからなかったら，マリに線を引いてみるとスッキリします。次は：——

3つの大円が共通の交点をもつときには

12（個）

そして，どの大円も共通の交点をもたないときには14個あります。

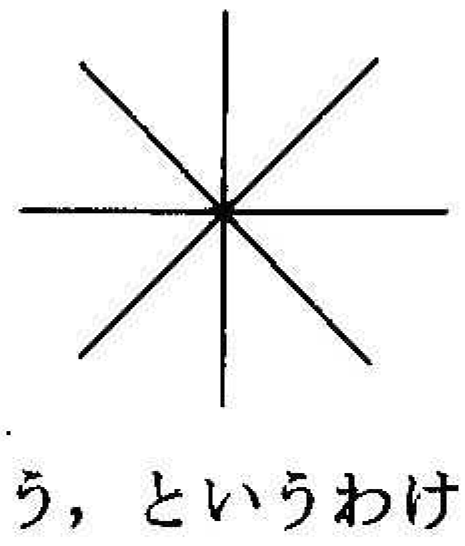
ともかく，わからないときにはあきらめないで，手元にある球に線を引いてみるのです。ともあれ，交点は

$$\begin{cases}\text{4つの大円が共通の交点をもつとき 8}\\ \text{3つの大円が共通の交点をもつとき 12}\\ \text{どの3つも共通の交点をもたないとき 14}\end{cases}$$

となります。

ところで，平面と球面のちがいはどこにあるのでしょうか。

4つの大円が共通の交点があるときは，いわば北極と南極を通る大円を考えることになります。これを北極の直上からみると右の図のようになってやはり8つになります。しかし，これらの直線は南極でもういちど出合う。したがって，面積は有限になってしまう，というわけです。ここが平面と球面の大きなちがいです。他の2つの場合も同じようにくらべてみませんか。



●順列・組合せと極限

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆順列・組合せと極限を混合した問題も少なくありません。もちろん，微分積分をとらない人には無縁のものですが。

◈ 順列や組合せの入った極限の問題もあります。本質的には微分・積分の範囲ですから，それの要らない人はもちろんとばしてかまいません。さて，それは：――

練習 1. $f(x)$ を x について微分できる関数とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は相異なる n 個のものから k 個とり出す組合せを表す。とくに

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$

のとき，問題の極限値はどうなるか。

（東京工大）

ヒント　まず，見なれない記号 $\binom{n}{k}$ でおどろいたかも知れません。しかし，問題文中に説明がある通り，ここでは ${}_nC_k$ のことなのです。大学ではもっと広い意味に使います。

ところで，

$$\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k$$

$$=\binom{n}{k}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot x^k$$

$f(x)$ は $x=0$ において微分可能ですから定義によって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}=f'(0)$$

です。

ピンとこない人は，$\frac{x}{n}$を h とおきかえてみればよいでしょう。

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k=\{f'(0)\}^k$$

となります。

そして，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^k\binom{n}{k}x^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}$$

$$=\frac{x^k}{k!}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k=\frac{x^k}{k!}\{f'(0)\}^k$$

となります。

そして，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ のときには $f'(0)=-(\alpha+\beta)$ ですから，もはやいうこともなし，求める極限値は

$$(-1)^k\cdot\frac{x^k}{k!}(\alpha+\beta)^k$$

となります。

練習 2. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n}\qquad\text{（東京工大）}$$

ヒント　$$a_n=\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n}$$

とおきますと

$$a_n=\frac{1}{n}\{\log{}_{2n}P_n-n\log n\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\log(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots$$

$$\cdots(2n-n+1)-n\log n\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\log(2n)+\log(2n-1)+\cdots\cdots$$

$$+\log(2n-n+1)-\log n-\log n\cdots\cdots-\log n\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\log(1+x)dx$$
$$=\Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^1$$
$$=2\log 2-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}=e^{a_n}$$
$$=e^{2\log 2-1}=\frac{e^{2\log 2}}{e}=\frac{4}{e}$$

答 $\frac{4}{e}$

＊　＊　＊

◆ もっと総合的なものとして次のようなものもあります。

練習 3. x の n 次の整式
$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\cdots\cdots(1+a^nx)$
の展開式において，x^2 の係数を c_n とするとき $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ を求めよ。($|a|<1$)

ヒント これは直接 ${}_n\mathrm{P}_r$ や ${}_n\mathrm{C}_r$ と関係をもつわけではありませんが，$a=1$ のときには $(1+x)^n$ となってまさしく二項定理の問題になるわけです。

さて，

$$c_n=a(a^2+a^3+\cdots\cdots+a^n)$$
$$+a^2(a^3+a^4+\cdots\cdots+a^n)$$
$$+a^3(a^4+a^5+\cdots\cdots+a^n)$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+a^{n-1}(a^n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}a^k(a^{k+1}+a^{k+2}+\cdots\cdots+a^n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}a^k\cdot\frac{a^{k+1}(1-a^{n-k})}{1-a}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a^{2k+1}-a^{n+k+1}}{1-a}$$
$$=\frac{1}{1-a}\left\{\frac{a^3(1-a^{2(n-1)})}{1-a^2}-\frac{a^{n+2}(1-a^{n-1})}{1-a}\right\}$$

となります。

だから，$|a|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{a^3}{(1-a)(1-a^2)}$$
$$=\frac{a^3}{(1+a)(1-a)^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ では，もう１つ：——

練習 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{{}_{l+x}\mathrm{C}_l}{{}_{m+x}\mathrm{C}_m}$ を求めよ。ただし，x は自然数である。

ヒント l，mは自然数であると書いてありませんが，もちろん負でない整数であることはいうまでもありません。

さて，$lm\neq 0$ のときは，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(l+x)(l+x-1)\cdots\cdots(x+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot l}}{\dfrac{(m+x)(m+x-1)\cdots\cdots(x+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot m}}$$
$$=\frac{m!}{l!}\lim_{x\to\infty}\frac{(l+x)(l+x-1)\cdots\cdots(x+1)}{(m+x)(m+x-1)\cdots\cdots(x+1)}$$

$l>m$ のときには

$$\frac{m!}{l!}\lim_{x\to\infty}(l+x)(l+x-1)\cdots(m+x+1)$$
$$=+\infty$$

$l<m$ のときには

$$\frac{m!}{l!}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(m+x)(m+x-1)\cdots(l+x+1)}$$
$$=0$$

$l=m$ のときにはいうまでもなし 1 です。

そして，$l=0$ または $m=0$ のときは上の結果に含まれることは明らかです。

結局，

$$\left.\begin{array}{l} l>m\ \text{のとき}\ +\infty\\ l=m\ \text{のとき}\ 1\\ l<m\ \text{のとき}\ 0\end{array}\right\}\cdots\cdots\text{答}$$

となります。

なお，${}_n\mathrm{C}_r$ の公式としては，$\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ のように「階乗」を使わず上のようにやる方が見易しいものです。

整数の分割と蛇足

◆直線を分割する，平面を分割する，空間を分割する，といろいろ分割する問題がありますが，それでは整数を分割するのは？

◆ 正の整数5をいくつかに分けてみましょう。ただし，5を 1+4 と分けても 4+1 と分けても同じ仕方だと約束します。また，5だけでも≪ヒトツに分けた≫と考えることにします。そうすると，次のようになります。

5
1+4　および　2+3
1+1+3　および　1+2+2
1+1+1+2
1+1+1+1+1

つまり，全部で7通りあります。では，キミ，次をやってみませんか。

練習 1. 6を自然数の和で表す仕方をすべて書け。

解　6を2と4に分けるのを (2, 4) と書くことにすると次の11通りある。

(6)；(3, 3), (2, 4), (1, 5)；
(2, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 1, 4)；
(1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 3)；
(1, 1, 1, 1, 2)；
(1, 1, 1, 1, 1, 1)　……答

練習 2. 正の整数 n を m 個の正の整数に分ける仕方を $P_m(n)$ 通りで表すことにするとき，次のものを求めよ。

(1) $P_2(5)$
(2) $P_1(n)$
(3) $P_n(n)$

ヒント　(1)は5を2つに分割する仕方の数ですから，いうまでもなく (1, 4), (2, 3) の2通り。

$$\therefore\quad P_2(5)=2$$

(2) n を1通りに分ける，つまり5は5，7は7だけ，というのですから1通り。

$$\therefore\quad P_1(n)=1$$

(3) n を n 個に分けるというのですから

$$\underbrace{(1,\ 1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1)}_{n\text{個}}$$

で，やはり1通り。

$$\therefore\quad P_n(n)=1$$

です。

*　*　*

◆ さて，n の分割の数全体を $P(n)$ で表すと，上の記号を使って

$$P(n)=\sum_{m=1}^{n}P_m(n)$$

となるのは当然です。そして次の関係が成り立つのです。

練習 3. m, n が正の整数で $m\leqq n$ とすると

$$P_m(n)=\sum_{k=1}^{m}P_k(n-m)$$

であることを示せ。

ヒント　例えば，5の分割 (1, 2, 2) に対し，(1−1, 2−1, 2−1) つまり2の分割 (1, 1) を対応させ，5の分割 (1, 4) には (1−1, 4−1) つまり3の分割 (3) を対応させることにすると，n の分割に n より小さいものの分割を対応させることができるのです。次に，$P_m(n)$ の表の一部をあげておきましょう。

n \ m	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0
4	1	2	1	1