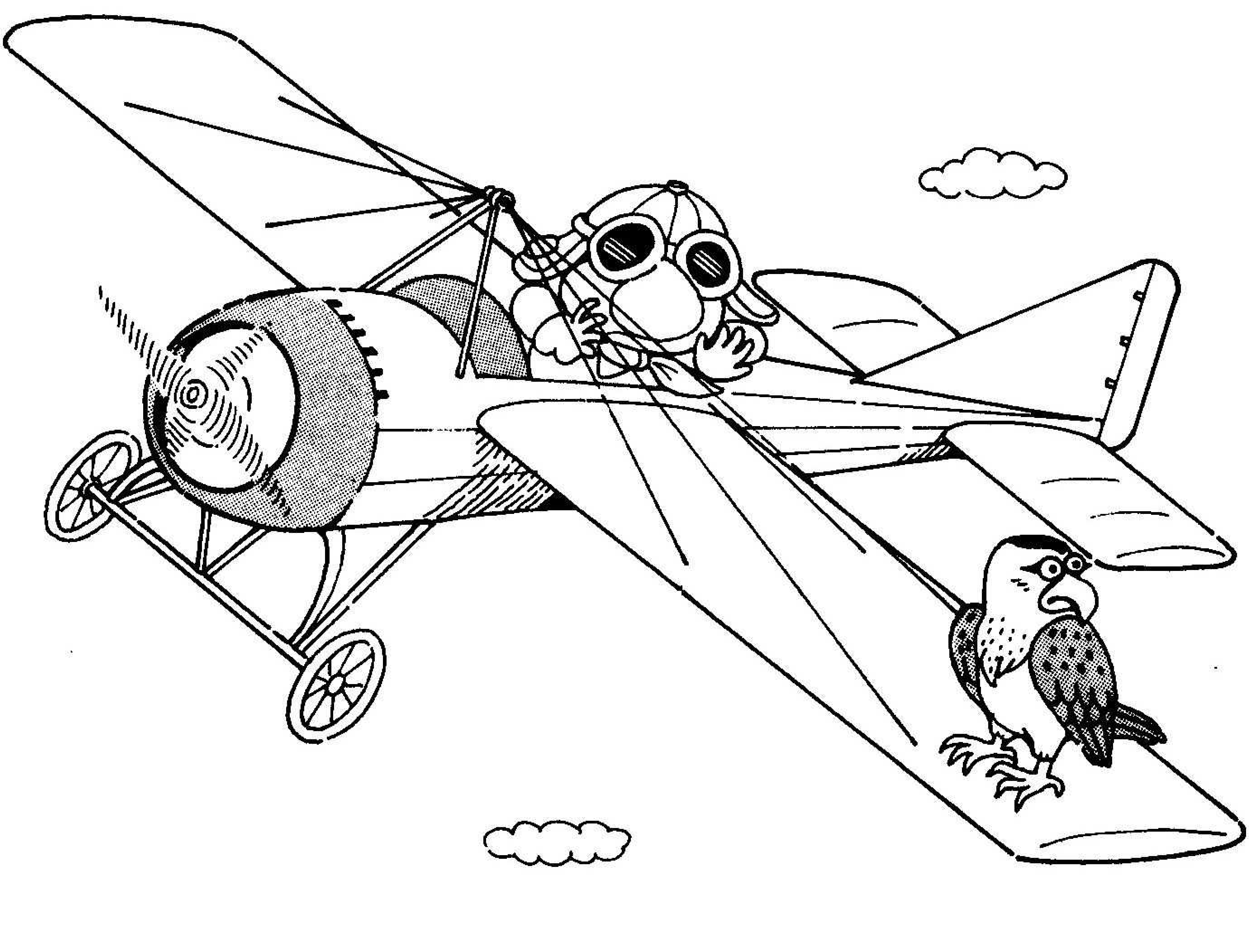
第5章

三　角　比

§1. 三　角　比

§2. 正弦定理・余弦定理

§3. 三角比の応用



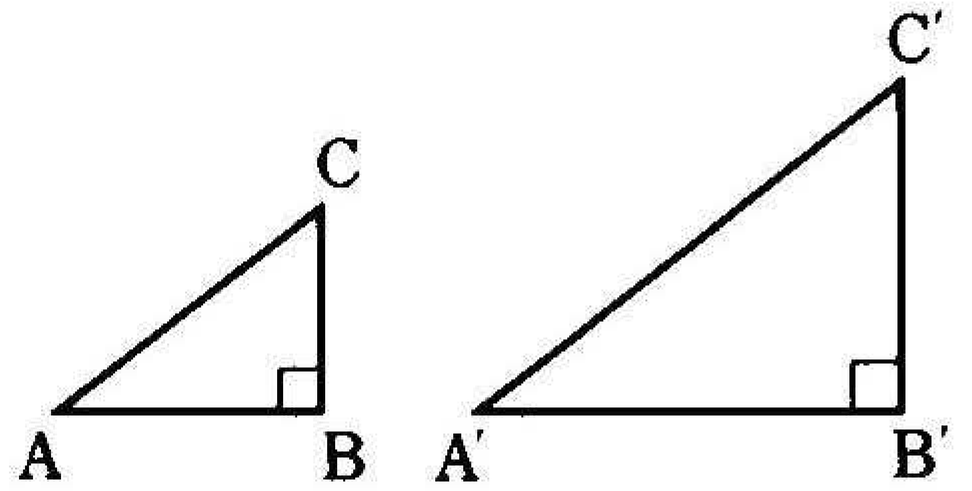
○三角比とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角関数ひとつあればいいのに，さらに三角比などやるのは，いささかムダなような気もするが，……

◆ 1つの鋭角が等しい2つの直角三角形はすべて相似です。

すなわち，右の2つの直角三角形 ABC, $A'B'C'$ において $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'=90°$ としますと，もちろん $\angle C=\angle C'$ で，かつ



$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'},\quad \frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'},\quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}$$

なる関係があります。つまり，これらの比の値は $\angle A$ によってきまってしまいます。

そこで，$\angle A=\theta$ とおいて

$$\sin\theta=\frac{BC}{AC},\quad \cos\theta=\frac{AB}{AC},\quad \tan\theta=\frac{BC}{AB}$$

なる記号を使って表し，これらを **三角比** と呼びます。そして $\sin\theta$ はサイン・シーター，$\cos\theta$ はコサイン・シーター，$\tan\theta$ はタンジェント・シーターと読むのです。人によっては $\cos\theta$ をコス・シーター，$\tan\theta$ をタン・シーターなどと読むが，あまりすすめたくありません。

*　*　*

◆ 主な角の三角比を求めておきましょう。これらのものは覚えておくことが必要です。

$$\sin 30°=\frac{1}{2},\ \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

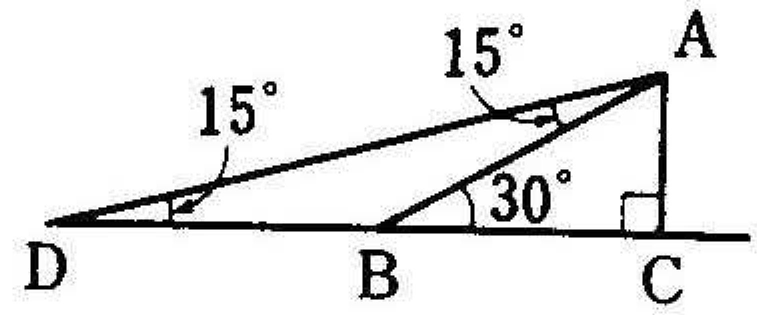
$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45°=1$$

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60°=\frac{1}{2},\ \tan 60°=\sqrt{3}$$

これらのほかにも比較的簡単に求められるものがいくつかあります。次にいくつか求めてみましょう。

41

練習 1. 右の図をもとにして $\sin 15°$ の値を求めよ。（神戸大）



ヒント　$\angle ABC=30°$, $\angle C=90°$ ですから，

$AB=2$, $AC=1$, $BC=\sqrt{3}$

とおくことができます。そして，$\triangle ADC$ において，

$DC=DB+BC=AB+BC=2+\sqrt{3}$

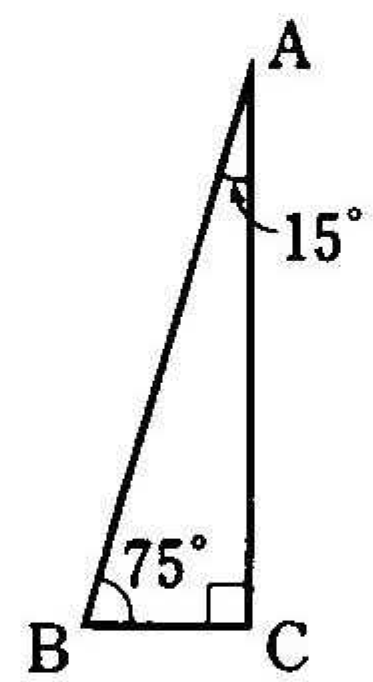
$AC=1$

$$\therefore\quad AD=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \sin 15°=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

練習 2. $\sin 75°$ の値を求めよ。

ヒント　右の図において



$$\sin 75°=\frac{AC}{AB}=\cos 15°$$

ところが $\cos 15°$ は練習 1. のようにして求めることができます。つまり上の図で

$$\cos 15°=\frac{DC}{AD}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\quad \sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ …… 答

練習 3. $\tan 15°$ の値を求めよ。

答　$2-\sqrt{3}$

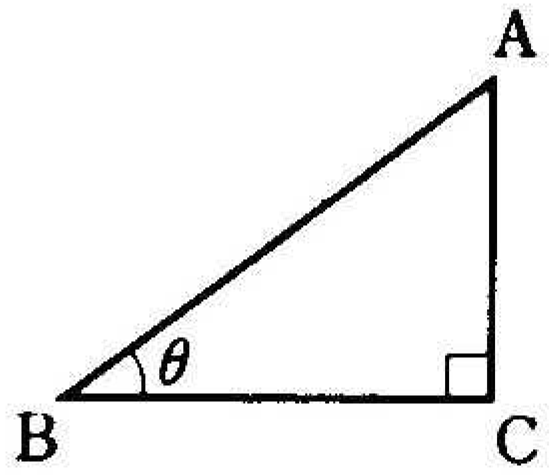
* * *

◆ 三角比の間にはいくつかの重要な関係があります。これを次に学ぶことにしましょう。

4/2

■練習 4. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を証明せよ。

（解） 右の図において



$$\sin\theta=\frac{AC}{AB}$$

$$\cos\theta=\frac{BC}{AB}$$

$$\therefore\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$=\frac{AC^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}$$

$$=\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}$$

$\angle C=90^\circ$ であるから三平方の定理により

$$AC^2+BC^2=AB^2$$

$$\therefore\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

Q. E. D.

4/2

■練習 5. $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を証明せよ。

（解） 上の図において

$$\tan\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{AC}{AB}}{\frac{BC}{AB}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Q. E. D.

■練習 6. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を証明せよ。

（解） $1+\tan^2\theta=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

Q. E. D.

（注） $(\sin\theta)^2$ のことを $\sin^2\theta$, $(\cos\theta)^3$ のことを $\cos^3\theta$ といったぐあいに表します。$(\sin\theta)^2$ を $\sin\theta^2$ と書いてはいけません。また，よく

$$\sin 40^\circ+\sin 20^\circ=\sin 60^\circ \qquad \cdots\cdots(*)$$

とやる人がありますが，とんでもないまちがい。

$$\sin 60^\circ=\sin(40^\circ+20^\circ)$$

$$=\sin 40^\circ\cos 20^\circ+\sin 20^\circ\cos 40^\circ$$

となります。しかし，これは数Ｉの範囲ではありません。だから，(*) の成り立たないことだけ，しっかりつかんでおいてください。

■練習 7. 次の式を簡単にせよ。

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

（広島工大）

（解）

$$与式=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)-\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta-\cos\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}=-2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=-2\tan\theta$$

［答］ $-2\tan\theta$

4/2

■練習 8. 次の式を簡単にせよ。

$$\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

（解）

$$\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

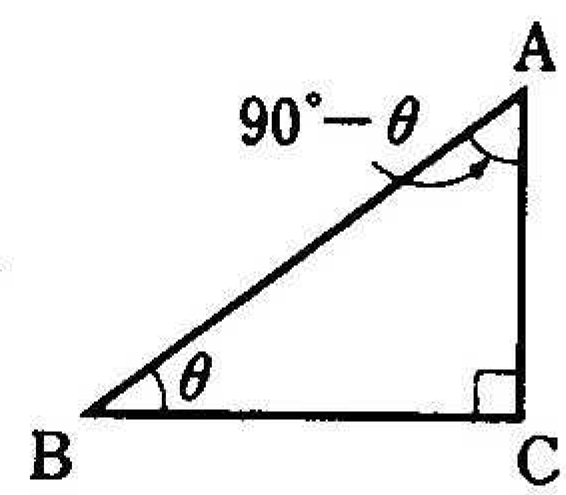
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{1}=\sin^2\theta$$

［答］ $\sin^2\theta$

4/2

■練習 9. $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ であることを示せ。



（ヒント） この種のものはもとの定義にもどって考えてみるのがいいのです。

右の図で

$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin A=\frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta=\cos B=\frac{BC}{AB}$$

$$\therefore\quad \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta \qquad \text{Q. E. D.}$$

同じ流儀で，次のもやってみませんか。

■練習 10. 次の関係を証明せよ。

4/2 $\quad \tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○三角比の表の使い方(度)

◆三角比がいろいろと役に立つ最大の理由は三角比の表が手軽に使える，という点にある。それなのに，使い方を知らないだって!!

◆ ふつう三角比の表は $0°\leqq\theta°\leqq 90°$ の角 $\theta°$ について $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を与えてあります。右のページに示してあるのは1°きざみ，つまり，0°，1°，2°，……，89°，90° について上の3つの関数の値を示してあります。例えば

$\theta°=31°$ の場合なら

$\sin\theta=0.5150$

$\cos\theta=0.8572$

$\tan\theta=0.6009$

といったぐあい。

途中の値，つまり，表にない角度については，もっと詳しい表を使えばもちろんよいが，手元にないときには **比例部分の法則** を使えばよい。つまり，その区間では θ の増加量と関数の値の増加量は比例する，と考えるのです。例えば $\theta°=31°40'$ に対する $\sin\theta$ の値の求め方を下にあげておきます。

$\sin 31°$ ……………… 0.5150

$\sin 31°40'$ ………… ?

$\sin 32°$ ……………… 0.5299

表差$=0.5299-0.5150=0.0149$

ですから 40′ に対する増加量は

$$0.0149\times\frac{40}{60}=0.0149\times\frac{2}{3}$$

$$=0.0298\times\frac{1}{3}=0.00993\cdots\cdots$$

ということになります。ゆえに

$\sin 31°40'=0.5150+0.0099=0.5249$

ということになりましょう。なお正しい値は 0.524976… ですから，十分よい近似度だと申せましょう。では，次の練習を右の表から求めてみませんか。

練習 1. $\sin 38°30'$ を求めよ。

答 0.6225

練習 2. $\cos 61°10'$ を求めよ。

(解)
$$\begin{array}{r} \cos 62°=0.4695 \\ -)\ \cos 61°=0.4848 \\ \hline -0.0153 \end{array}$$

$$\cos 61°10'=0.4848+(-0.0153)\times\frac{10}{60}$$

$$=0.4848-0.0026$$

$$=0.4822 \quad\cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ この右の表には $\cot\theta$ は入っていませんが $\boldsymbol{\cot\theta=\tan(90°-\theta)}$ ですから $\tan\theta$ の表を使うことができます。例えば

$\cot 40°=\tan 50°=1.1918$

といったぐあい。

$\sec\theta$ や $\mathrm{cosec}\,\theta$ はそれぞれ $\cos\theta$ や $\sin\theta$ の表を使うより仕方がありません。つまり，

$$\boldsymbol{\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}}$$

だからです。

練習 3. $\sec 40°$ を求めよ。

(解) $$\sec 40°=\frac{1}{\cos 40°}=\frac{1}{0.7660}$$

$$=1.30548\cdots=1.3055 \quad\cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ なお，三角比をやがて三角関数という名で学ぶことになります。また，度のかわりにラジアンという単位も使うことになりましょう。これらの表はくわしいのが市販されています。

なお，江戸時代末期には八線表といわれたものでした。それは sin，cos，tan，cot，sec，cosec のほかに vers，covers と合計8つあったからです。

◆三 角 比 の 表◆

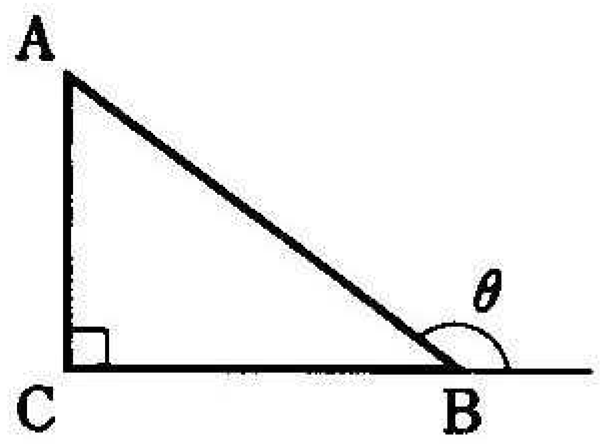
角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)	角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞

○鈍角の三角比とは

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆鋭角の三角比から鈍角の三角比へ。やがて，基礎解析では一般角の三角関数へと進むことになるのです。

◆ 角 θ が鈍角，つまり90°より大で180°より小の場合の三角比は次のように約束します。



$$\sin\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\ (>0)$$

$$\cos\theta=-\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\ (<0)$$

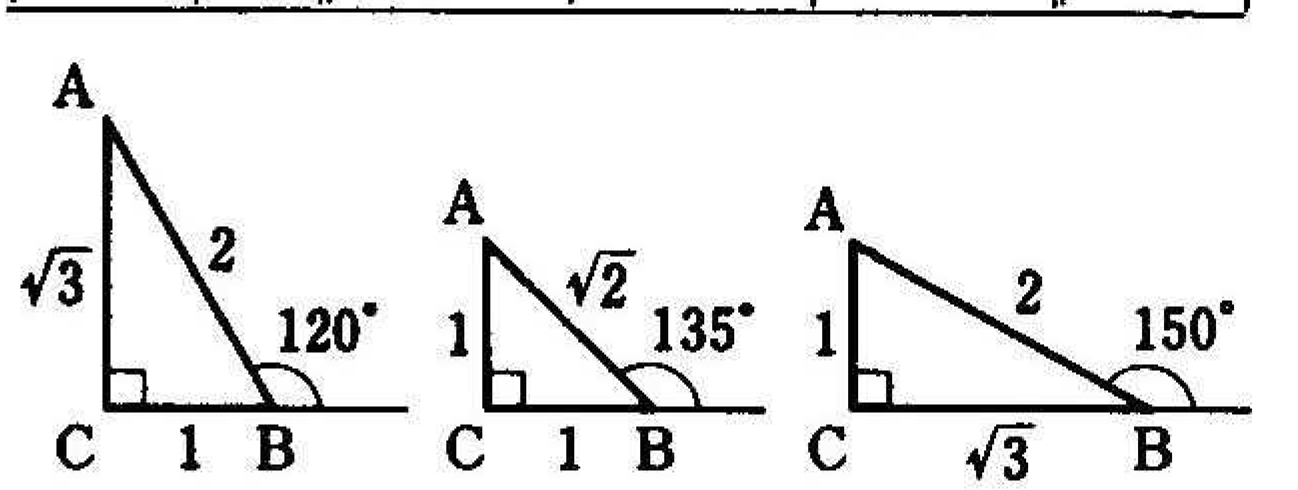
$$\tan\theta=-\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\ (<0)$$

これは，このままオボエルのがよい。その本質的な意味は基礎解析でならうハズ。さらに深い意味は大学の理工系にいけば複素変数関数論という分野でならうことになりましょう。とかく，三角比がいやがられる原因は，このふきんにありそうです。

* * *

◆ 主な鈍角の三角比で知っていなければならないのは次のようです。これらの値は，角をみたとき，図が思い出されて，各辺の長さがスグ頭に浮かんで，値がスグいえるところまで何回も練習することです。リクツよりも実行，ならうよりなれろ，です。

θ	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



4/3

■練習 1. 次の式の値を求めよ。

$$2\cos150°\cos30°-\cos135°\cos45°$$

（解）

$$\text{与式}=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1 \quad \cdots\cdots\text{答}$$

4/3

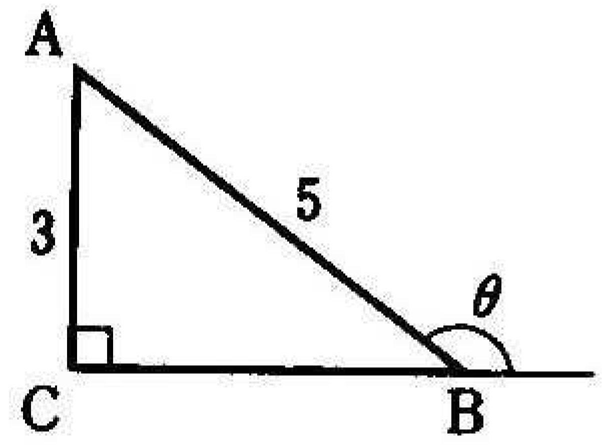
■練習 2. $\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき $\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，θ は鈍角である。

（解） 右の図において

$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{5^2-3^2}$

$=\sqrt{16}=4$



$\therefore\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$ ……答

4/3

■練習 3. $0°<\theta<180°$ で $\sin\theta=\frac{12}{13}$ のとき $\cos\theta$，$\tan\theta$ を求めよ。

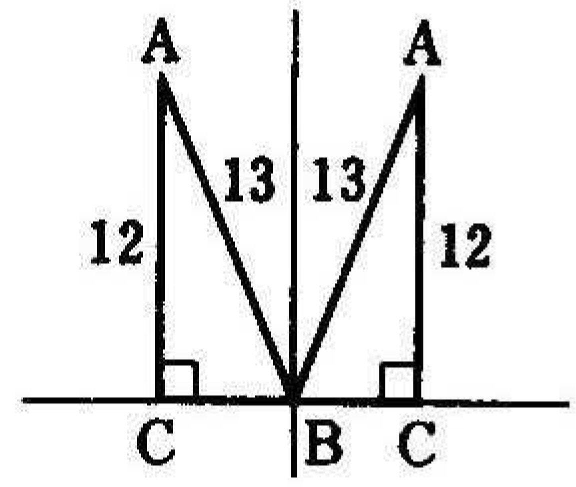
（ヒント） $\sin\theta=\frac{12}{13}$ になる角は鋭角と鈍角と 2 つあります。そのおのおのの場合について他の三角比を求めればよいのです。

まず，右の図において

$\overline{BC}=\sqrt{13^2-12^2}$

$=5$

ですから次のようになります。



θ が鋭角　$\cos\theta=\frac{5}{13}$，$\tan\theta=\frac{12}{5}$

θ が鈍角　$\cos\theta=-\frac{5}{13}$，$\tan\theta=-\frac{12}{5}$

◆ 角 θ が鋭角であれば $180°-\theta$ は鈍角です

し，角θが鈍角であれば $180°-\theta$ は鋭角です。そして，次の関係があります。

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$

これは必ずオボエテおくこと!!

ではこれを：——

■練習 4. p.315 の表を用いて，次の値を求めよ。

$$\sin 140°,\ \cos 160°,\ \tan 170°$$

(ヒント) $\sin 140° = \sin(180°-140°)$
$= \sin 40°$
$= 0.6428$

$\cos 160° = -\cos(180°-160°)$
$= -\cos 20°$
$= -0.9397$

$\tan 170° = -\tan(180°-170°)$
$= -\tan 10°$
$= -0.1763$

*　*　*

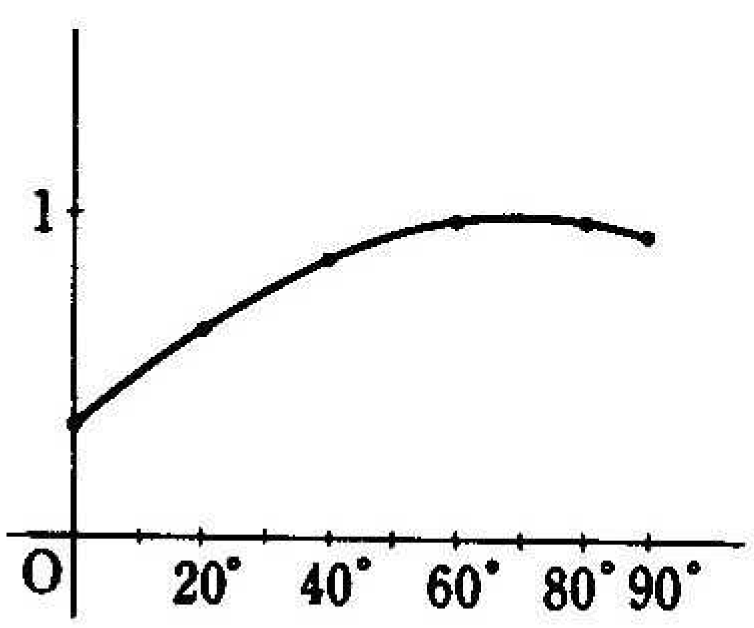
◆ p.315の表を用いれば $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき，$\sin\theta$ や $\cos\theta$ や $\tan\theta$ のグラフを容易にかくことができます。例えば：——

■練習 5. $y=\sin(x+20°)$　$(0°\leqq x\leqq 90°)$ のグラフをかけ。

(ヒント) $0°\leqq x\leqq 90°$ ですから

$$20°\leqq x+20°\leqq 110°$$

この間の値は p.315 の表から求められて下のようになります。そして，グラフもスグかけます。



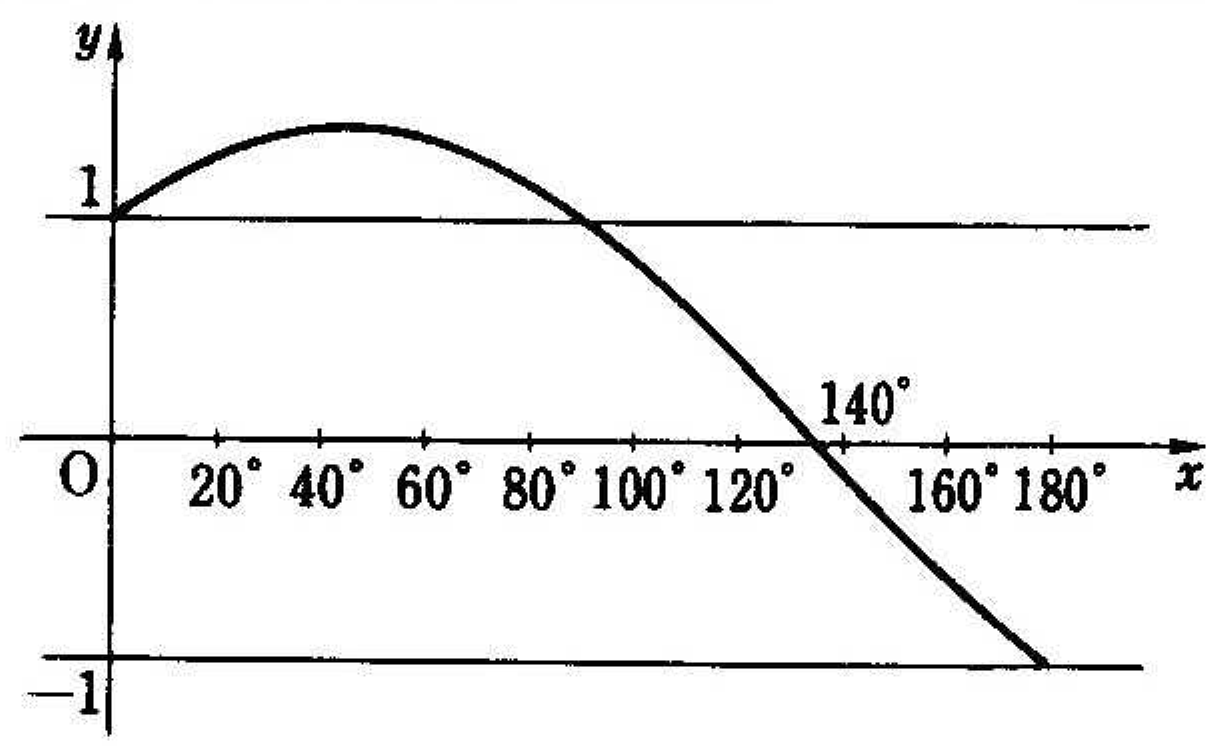
x	y
0°	0.34
20°	0.64
40°	0.87
60°	0.98
80°	0.98
90°	0.94

(注) このグラフをみると最大値，最小値もわかります。最大値はいうまでもなく 1 で，これは $x=70°$ のときです。また，最小値は $x=0°$ のときで正確には $\sin 20°$，その大体の値は 0.34 というわけです。

■練習 6. $y=\sin x+\cos x$ のグラフをかけ。ただし p.315 の表を使ってよい。$0°\leqq x\leqq 180°$

(ヒント) $\sin x$，$\cos x$ の値を求めてさらにその和を求めて表にしますと，下のようになります。（もちろん表を使わなくても求められる）

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin x$	0.00	0.50	0.87	1.00	0.87	0.50	0.00
$\cos x$	1.00	0.87	0.50	0.00	−0.50	−0.87	−1.00
y	1.0	1.4	1.4	1.0	0.4	−0.4	−1.0



(注) この図をみると，最大値はほぼ1.5くらい，最小値は−1であることがわかります。

なお最大値の正しい値は $\sqrt{2}$ です。このことは基礎解析では三角関数の合成法というのがあってふつうそれでやるのですが，数Iの範囲でもできます。コーシー・シュワルツの公式（☞ p.178）を使いますと

$$(1^2+1^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqq(1\sin\theta+1\cos\theta)^2$$
$$\therefore\ 2\cdot 1\geqq(\sin\theta+\cos\theta)^2$$
$$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta\leqq\sqrt{2}$$

となるからです。

(注)の(注) おかしいな，これでは最小値が $-\sqrt{2}$ になるハズではないか，と，気がついた人は御立派。しかし，その困難を切りぬけるカギは上のグラフにあったのだ!

この問題にかぎりませんが，グラフをかくことによって，いろいろな困難が軽くこえられるものなのです。そしてそれは，全体を総観することができるからです。

*　*　*

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○三角比で大切なこと，3つ

◆数Ⅰでは三角比の大切なことが3つあります。第1は……，第2は……，そして第3は……，です。

◆ 三角比はスキですか。たいていの人はキライらしい。しかし，大切なことをキチンとやってものにしておけば，べつにめんどうはないのです。ところで大切なことは3つ。

第1は，$\tan\theta$，$\cot\theta$，$\sec\theta$，$\mathrm{cosec}\,\theta$などは**$\sin\theta$と$\cos\theta$で表して考える**，ということなんです。

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

実は数Ⅰではふつう$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$までわかっていればいいのですが，$\cot\theta$，$\sec\theta$，$\mathrm{cosec}\,\theta$なども知っておきたいもの。

さて，次の練習をやってみましょう。

4/1

■練習 1. $90°<\theta<180°$ で $\sin\theta=0.8$ のとき，$\tan\theta$ を求めよ。

ヒント　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{0.8}{\cos\theta}$

ですから$\cos\theta$がわかればいいでしょう。

ところが，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ですから，

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-0.8^2=0.36$$

そして，第2象限では$\cos\theta<0$ですから

$$\cos\theta=-0.6$$

$$\therefore\quad \tan\theta=-\frac{0.8}{0.6}=-\frac{4}{3}\quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

4/1

■練習 2. $\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=2\tan^2\theta$

を証明せよ。

ヒント　原則通りいうと，まず，$\tan\theta$を$\sin\theta$と$\cos\theta$で表して

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

を証明すればいい。両辺に$\sin\theta$があるから

$$\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

を証明すればいいにちがいない。さて，ここで左辺を通分してみると

$$左辺=\frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=\frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$

ナルホド，できたようだ。もちろん，答案はここまでやることもない。すぐ与えられた式の左辺を通分してみればいいのだ。

■練習 3. $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta$

を証明せよ。

ヒント　$左辺=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$右辺=\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

ナルホド，もはやできた。

*　*　*

◆ 第2は **$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の使い方**が大切。そのままズバリ使われる例としては，これです。(☞ p. 320)

■練習 4. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

を簡単にせよ。

ヒント　与えられた式をそのままバラバラにすると

$$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=2$$

4/3

■練習 5. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta\cos\theta$

の値を求めよ。　(岐阜大)

ヒント　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

を使うこと。　$\boxed{答}$　$-\dfrac{3}{8}$

4/3
練習 6. $a\sin\theta+b\cos\theta=c$ ……①

$b\sin\theta+a\cos\theta=d$ ……②

のとき，次式を簡単にせよ。

$$(ac-bd)^2+(ad-bc)^2-(a^2-b^2)^2$$

（山形大）

ヒント　おそらく答は

$$(ac-bd)^2+(ad-bc)^2-(a^2-b^2)^2=365$$

といった形になるだろう，365 に意味はありませんよ。してみると，与えられた2式から **θ を追い出せばいいだろう**。そのためには，$\sin\theta$, $\cos\theta$ についての連立方程式と思って解いてから，2乗して加えればいいのです。

①×a－②×b から

$(a^2-b^2)\sin\theta=ac-bd$ ……③

②×a－①×b から

$(a^2-b^2)\cos\theta=ad-bc$ ……④

③^2+④^2 を作ると

$$(a^2-b^2)^2=(ac-bd)^2+(ad-bc)^2$$

$$\therefore\ (ac-bd)^2+(ad-bc)^2-(a^2-b^2)^2=0$$

*　*　*

◆ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ は $\sin\theta$ から $\cos\theta$ へ，$\cos\theta$ から $\sin\theta$ へかきかえるときに使われます。例えば，次の練習をとりあげよう。

4/3
練習 7. $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ のとき，

$\cos^2\theta+\cos^4\theta$ の値を求めよ。（鹿児島経大）

ヒント　与えられた式は $\sin\theta$ だけ，求める式は $\cos\theta$ だけ，さては $\sin\theta$ をなくせばいいにちがいない。

$$\sin\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\therefore\ \sin\theta+(1-\cos^2\theta)=1$$

$$\therefore\ \sin\theta=\cos^2\theta$$

この $\sin\theta$ をなくすために，両辺を2乗して

$$\sin^2\theta=\cos^4\theta$$

$$\therefore\ 1-\cos^2\theta=\cos^4\theta$$

$$\therefore\ \cos^2\theta+\cos^4\theta=1$$ ……答

練習 8. $f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$ であるとき $2f(6)+1=3f(4)$ であることを示しなさい。

（慶大）

ヒント　$2f(6)+1-3f(4)=0$ を示せばいいでしょう。ところで，この左辺は

$$2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)+1-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$$

で，ここには $\sin\theta$ と $\cos\theta$ しかない。さては，$\sin\theta$ か $\cos\theta$ か，一方をなくせばいいだろう。

$$上式=2\{\sin^6\theta+(1-\sin^2\theta)^3\}+1$$
$$-3\{\sin^4\theta+(1-\sin^2\theta)^2\}$$

$\sin^2\theta=u$ とおくと，計算しやすいようだ。

$$=2\{u^3+(1-u)^3\}+1-3\{u^2+(1-u)^2\}$$
$$=2(1-3u+3u^2)+1-3(2u^2-2u+1)$$
$$=0$$

Q. E. D.

◆ 最後は $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の **同次式を作るのに便利** です。こういっただけでは何のことかわからないでしょう。では，次の練習をやってみませんか。

4/3
練習 9. $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

を証明せよ。

ヒント　まず，$右辺=\dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

ところが，左辺の分子は

$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$ ですから，結局

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$$

が証明できればいい。分母をはらってみるとどうやらできそうだ。これでいいのですが，もう1つの考えは，与えられた式の左辺は1がジャマだということ。これがあるため，分母は $\sin\theta$, $\cos\theta$ に関する2次の同次式になれないのだ。そこでこうする。

$$左辺=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=右辺$$

Q. E. D.

◆ 三角比の重要事項の第3は **正弦定理，余弦定理の使い方** です。これについては（☞ p. 324, 326）をやってください。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◎ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の使い方

◆三角比の中で，もっとも難しいのが，この公式です。なーんだ。こんなもの，中学でやったではないか，というかもしれないが。

◈ この項にとりかかる前に（☞ p. 318）を一応やっておいてくれませんか。さて，それから続いての本項目，というわけ。

＊　＊　＊

◈ ところで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の使い方は大きく分けて4つあります。第1はそのものズバリ計算のプロセスで出てくるもの。

練習 1. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき $\tan\theta+\cot\theta$ の値を求めよ。

（解）$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$ より

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

$$\therefore\quad \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=-\frac{8}{3}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

4/4

練習 2. $\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$ を簡単にせよ。

（ヒント）与式 $=\dfrac{(1+\sin\theta)+\cos\theta}{(1+\sin\theta)-\cos\theta}+\dfrac{(1+\sin\theta)-\cos\theta}{(1+\sin\theta)+\cos\theta}$

$$=\frac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}=\frac{2\cdot2(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}$$

$$=2\frac{1}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$$

（注）答は $\dfrac{2}{\sin\theta}$ でも $2\operatorname{cosec}\theta$ でもかまわないでしょう。

要するに問題点は $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使ってまとめてゆくのが，腕のみせどころなんです。この種の計算に強くなるコツは同じ問題をくり返し，何度でもやることといえます。

◈ 第2は消去問題です。原則は

$$\begin{cases}2\sin\theta+\cos\theta=a\\ \sin\theta+2\cos\theta=b\end{cases}$$

から θ を消去せよ，といったもの。これは，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の連立方程式を考えて解くと，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が出る。そこで，これらを2乗して加える，といったわけ。

では，具体的な練習にいきましょう。

4/4

練習 3. 次の2式から θ を消去せよ。

$$a\sin\theta-b\cos\theta=1$$
$$b\sin\theta+a\cos\theta=1+b\cos\theta$$

（弘前大）

（ヒント）
$$a\sin\theta-b\cos\theta=1\quad\cdots\cdots①$$
$$b\sin\theta+(a-b)\cos\theta=1\quad\cdots\cdots②$$

①×$(a-b)$＋②×b を作れば

$$(a^2-ab+b^2)\sin\theta=a\quad\cdots\cdots③$$

②×a－①×b を作れば

$$(a^2-ab+b^2)\cos\theta=a-b\quad\cdots\cdots④$$

③^2＋④^2 を作れば

$$(a^2-ab+b^2)^2=a^2+(a-b)^2\quad\cdots\cdots\text{答}$$

これで θ がなくなった。

4/4

練習 4. $\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$|a|\leqq\sqrt{2}$，$|a|\neq1$ とする。（慶大）

（ヒント）いろいろなやり方が考えられましょう。ここでは消去の立場からやってみます。

$$x=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

とおきますと

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a & \cdots\cdots①\\ \sin\theta-x\cos\theta=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

が出ます。これから θ を消去すれば x の方程

式が得られるにちがいありません。

①×x+②：　$(x+1)\sin\theta=ax$　……③

①－②：　$(x+1)\cos\theta=a$　……④

③^2+④^2：　$(x+1)^2=(ax)^2+a^2$

$$\therefore\ (a^2-1)x^2-2x+(a^2-1)=0$$

$a^2\neq1$ であるから，解の公式を使って解くと

$$x=\frac{1\pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

* * *

◆ 第3は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の一方を追い出すために使われます。では，次の練習5. をやってみませんか。

練習 5. 関数 $y=\sin^4x^\circ+\cos^4x^\circ$ のとりうる値の範囲を求めよ。（東大）

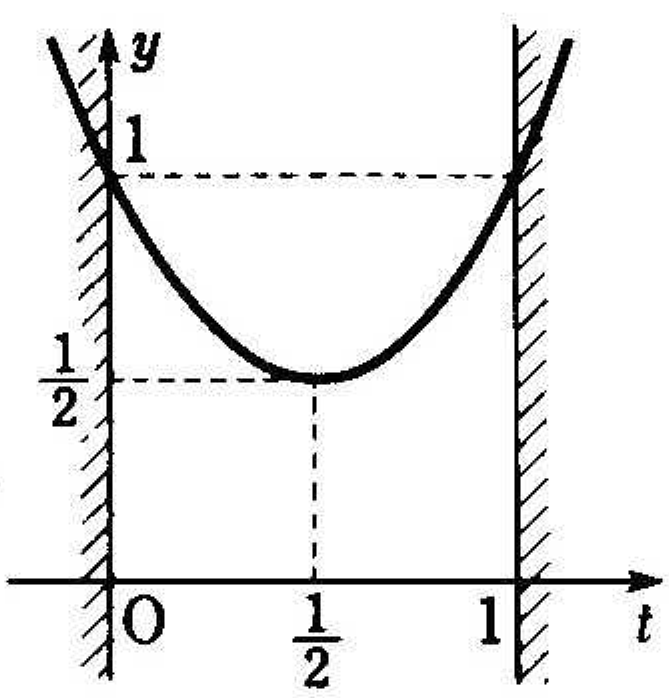
（解）$y=\sin^4x^\circ+(1-\sin^2x^\circ)^2$

$$=2t^2-2t+1$$

$$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

ここに $t=\sin^2x^\circ$ で，　$0\leqq t\leqq1$

そこで，y を t の関数と考えてグラフをかいてみると，右の図のようになり，明らかに最大値は1，最小値は $\frac{1}{2}$ に等しい。



4/4

$$\therefore\ \frac{1}{2}\leqq y\leqq1\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

練習 6. $\sin\theta+2\cos\theta=1$ のとき $\sin\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$

（ヒント）$2\cos\theta=1-\sin\theta$

$$\therefore\ 4\cos^2\theta=(1-\sin\theta)^2$$

$\sin\theta=x$ とおくと　$x\geqq0$

$$4(1-x^2)=(1-x)^2$$

$$\therefore\ 5x^2-2x-3=0$$

$$\therefore\ (x-1)(5x+3)=0$$

$$\therefore\ x=1$$

$x=1$ のとき　$\sin\theta=1$, $\cos\theta=0$

答　1

他のやり方もありますから，余裕があったら考えてみて下さい。

* * *

◆ 第4は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の同次式の扱い方です。というのは $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ですから

$$2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$$

$$=\frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\tan^2\theta+2\tan\theta+3}{\tan^2\theta+1}$$

といったぐあいに，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の同次式は $\tan\theta$ だけで表すことができるのです。では，何はともあれ，次の練習にいきましょう。

練習 7. $\tan\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値を小数で求めよ。（一橋大）

（解）$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta+1)^2}{\tan^2\theta+1}=\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}=1.6$$

4/4

練習 8. $\tan\theta=2$ のとき $\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}$ の値を求めよ。（広島工大）

（解）$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}$

$$=\frac{2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$=2(1+\cot^2\theta)=2\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2}\quad\cdots\ \boxed{答}$$

* * *

◆ このように $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の扱い方ひとつでも，いろいろと使い方があるもの。

三角比の学習においては，とくに焦点をきめて力をそそぐことが大切なのです。では最後に練習9. をヒントなしにあげておきます。

9. $\sin^4x+\cos^2x=\frac{5}{8}$ を解け。ただし，$0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$（福岡大）

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○三角比の関係式の証明では

◆三角比になれるコツはいろいろ値を求めたり，グラフをかいたり，それにもまして有効なのは，その関係式をいじることにある!!

◆ $\sin\theta$ や $\cos\theta$ などの関係式を証明することは，これになれる最良の方法です。では，いやがらずやることにしようではないか。

そして，この際大切なことは

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

と

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

を片時も忘れぬことです。では，早速ながら次の練習1へ。

■練習 1. 次の等式を証明せよ。

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

ヒント $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ですからまず $\tan\theta$ を追い出して

$$左辺=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$$

(デハ，ドウスル，通分スルヨリ仕方アルマイ)

$$=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

(オヤ，分子ハ $\sin^2\theta$ デククレルゾ)

$$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

($1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ デハナイカ)

$$=\frac{\sin^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

(オッ，ウマイゾ，モウデキタ)

$$=\tan^2\theta\sin^2\theta=右辺$$

Q.E.D.

注 上の場合には左辺から右辺が容易にでましたが，一般には左辺は左辺，右辺は右辺で別々に計算することになります。

4/k

■練習 2. 次の等式を証明せよ。

$$\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$$

ヒント まず，何はともあれ $\tan\theta$ を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ で表してみると

$$\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

となります。そこで両辺をニランデみると左辺の分母は $\cos\theta$ で，分子は $\sin\theta$ でくくれるではないか。つまり

$$\frac{(\sin\theta)(1-2\sin^2\theta)}{(\cos\theta)(2\cos^2\theta-1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

してみると

$$1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

とならなければならない。(少しくどいなあ)

ところが，これは証明できる。すなわち，

$$1-2\sin^2\theta=1-2(1-\cos^2\theta)$$
$$=2\cos^2\theta-1$$

というわけ。解答は次のように書けばいいだろう。

$$左辺=\frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)}$$

しかるに $1-2\sin^2\theta=1-2(1-\cos^2\theta)$

$$=2\cos^2\theta-1$$

$$\therefore\quad 左辺=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{2\cos^2\theta-1}{2\cos^2\theta-1}\right)$$
$$=\tan\theta$$

Q.E.D.

■練習 3. $\sin^6\theta+\cos^6\theta\leqq1$ を証明せよ。

ヒント ここには $\tan\theta$ は入っていないから $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を使う余地はない。しかし，最大の武器 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ が待っている。

つまり，これを使って $\cos\theta$ を追い出すのがいい。さあ，方針はきまった!!

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=\sin^6\theta+(1-\sin^2\theta)^3$$
$$=\sin^6\theta+1-3\sin^2\theta+3\sin^4\theta-\sin^6\theta$$

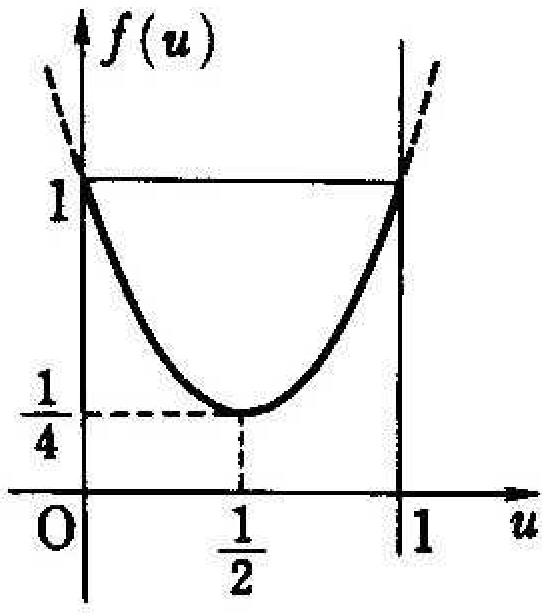
$=1-3\sin^2\theta+3\sin^4\theta$

$=1-3u+3u^2\quad(u=\sin^2\theta)$

（サテ，困ッタゾ，ドウシヨウ，$0\leqq u\leqq 1$ ノ範囲デグラフヲカイテミヨウカ）

$f(u)=3u^2-3u+1$

$=3\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$



のグラフは右のようである。

おや，もうできたではないか。これを答案の形にまとめるのはキミにまかせるとしよう。

*　*　*

◆ 今まで $\tan\theta$ は $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に書きかえることだけ考えてきました。しかし，逆の場合もあります。それを次に扱ってみましょう。

4/8

■練習 4. $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ を $t=\tan\theta$ で表せ。

（ヒント） $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$$=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

分母，分子を $\cos^2\theta$ で割って

$$=\frac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+3}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}$$

$$=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta+3}{\tan^2\theta+1}=\frac{t^2+2t+3}{t^2+1}$$

答　$\dfrac{t^2+2t+3}{t^2+1}$

これがわかれば，次のような問題もすぐできるハズ。入試にはよく出ているタイプのものです。

4/5

■練習 5. $\tan\theta=3$ のとき

$$3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\cos^2\theta$$

の値を求めよ。

（解） 与式$=\dfrac{3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$$=\frac{3\tan^2\theta+4\tan\theta+5}{\tan^2\theta+1}$$

$$=\frac{3\cdot3^2+4\cdot3+5}{3^2+1}=\frac{44}{10}=\frac{22}{5}\cdots\cdots\text{答}$$

では，次へ：——

■練習 6. $a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ が θ の値にかかわらず一定であるための条件を求めよ。

（ヒント） $a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$

$$=\frac{a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{at^2+2bt+c}{t^2+1}\quad(t=\tan\theta)$$

一定値を K とすると

$$\frac{at^2+2bt+c}{t^2+1}=K$$

$$\therefore\quad at^2+2bt+c=Kt^2+K$$

$$\therefore\quad(a-K)t^2+2bt+(c-K)=0$$

これが t のすべての値について成り立つための条件は

$$a-K=0,\ 2b=0,\ c-K=0$$

$$\therefore\quad a=c,\ b=0\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

（注） 上の答として

$$a=c=K,\ b=0$$

としてはいけません。なぜなら，一定値はべつに与えられてはいないからです。もし，問題が

≪θ の値にかかわらず

$a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta=K$

であるための条件を求めよ≫

というのであれば，もちろん

$$a=c=K,\ b=0$$

と書かなければなりません。

■練習 7. $a\sin^4\theta+b\sin^2\theta\cos^2\theta+c\cos^4\theta$ が θ の値にかかわらず一定であるための条件を求めよ。

（ヒント） $\sin^4\theta$, $\cos^4\theta$, $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ からなっていますから，$\sin^2\theta$ だけ，$\cos^2\theta$ だけで表して考えることができます。あるいは，上の方式でやるなら，$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2$ で割ってから，分母，分子を $\cos^4\theta$ で割るのです。$\tan\theta$ だけになってしまう。

ここまでくれば，もはや，いうこともありますまい。

◐ 正弦定理の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

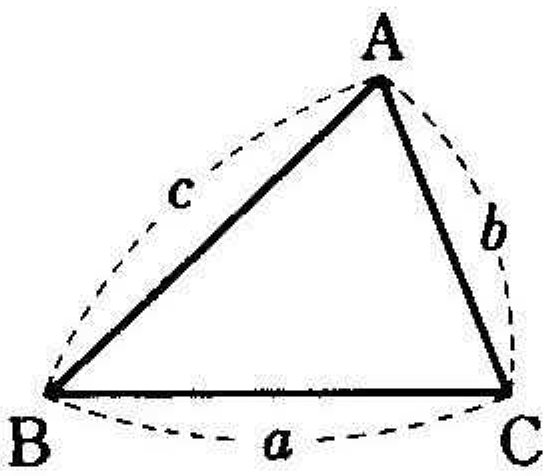
◆正弦定理はなぜ重要なのか，それは角と辺の仲立ちをする関係式だからである。ちょっと待ってください。仲立ちとは何です!!

◆ まず公式を。

△ABC において，A，B，C の対辺をそれぞれ a，b，c とするとき

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

なる関係が成り立ちます。ここにRは外接円の半径です。そして，これを **正弦定理** というのです。マチガッテ



$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=2R$$

とやる人がある。こんな不安定な頭デッカチの公式を誰がつくるものか，ネエ。注意してくださいよ。それはさておき，正弦定理から

$$a=2R\sin A,\ \ b=2R\sin B,\ \ c=2R\sin C \qquad \cdots\cdots①$$

が得られます。また，

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \ \sin B=\frac{b}{2R},\ \ \sin C=\frac{c}{2R} \qquad \cdots\cdots②$$

なる関係が得られます。

さて，その使い方の第１号はこれです。

練習 1. △ABC において $a\sin A=b\sin B$ ならばどんな三角形か。

ヒント　どんな三角形か，というときには角をやめて **辺だけで表す** のが定石です。この場合には②を使って

$$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R} \qquad \therefore\ a^2=b^2$$

$$\therefore\ a=b$$

ゆえに点Cを頂点とする二等辺三角形であることがわかったわけ。もちろん角だけにしてもできはしますが，おもしろくない。

練習 2. △ABC において

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$$

ならばどんな三角形か。

解　正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \ \sin B=\frac{b}{2R},\ \ \sin C=\frac{c}{2R}$$

$$\therefore\ \left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\therefore\ a^2+b^2=c^2$$

4/6 ゆえに ∠C＝90° の直角三角形である。

練習 3. △ABC において

$$a\sin B=b\sin C=c\sin A$$

ならばどんな三角形か。

解　正弦定理により

$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \ \sin C=\frac{c}{2R},\ \ \sin A=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore\ a\cdot\frac{b}{2R}=b\cdot\frac{c}{2R}=c\cdot\frac{a}{2R}$$

$$\therefore\ ab=bc=ca$$

$$\therefore\ ab=bc,\ \ bc=ca$$

$$\therefore\ a=c,\ \ b=a$$

$$\therefore\ a=b=c$$

答　正三角形

◆ では，正弦定理の使い方の第２号は証明問題です。方針はまったく同じ。では，まずこれを：――

4/6
練習 4. △ABC において次式を証明せよ。

$$(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C=0$$

ヒント　左辺$=(b-c)\cdot\dfrac{a}{2R}+(c-a)\cdot\dfrac{b}{2R}+(a-b)\cdot\dfrac{c}{2R}$

$$=\frac{1}{2R}(ba-ca+cb-ab+ac-bc)$$

4/6 $=0$　　Q. E. D.

■練習 5. △ABC の面積 S は

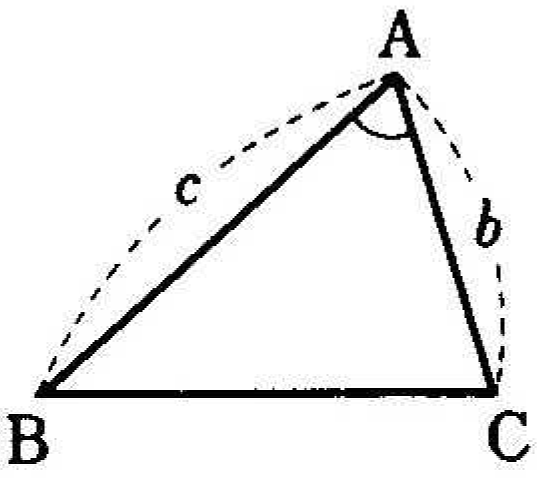
$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

で与えられることを示せ。　(工学院大)

(ヒント)

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$

は知ってますね。



$b=2R\sin B$

$c=2R\sin C$

を代入すると

$$S=\frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A=\cdots\cdots$$

√/6

■練習 6. △ABC において

$$(b-c)\cos^2 A=b\cos^2 B-c\cos^2 C$$

ならばどんな三角形か。　(宇都宮大)

9

(ヒント)　$\cos^2 A=1-\sin^2 A$, $\cos^2 B=1-\sin^2 B$

など，したがって

$$\begin{aligned}&(b-c)\cos^2 A-(b\cos^2 B-c\cos^2 C)\\&=(b-c)(1-\sin^2 A)-b(1-\sin^2 B)\\&\quad+c(1-\sin^2 C)\\&=(b-c)-b+c\\&\quad-(b-c)\sin^2 A+b\sin^2 B-c\sin^2 C\\&=-(b-c)\frac{a^2}{4R^2}+b\cdot\frac{b^2}{4R^2}-c\cdot\frac{c^2}{4R^2}\\&=\frac{-1}{4R^2}\{(b-c)a^2-(b^3-c^3)\}\\&=\frac{-1}{4R^2}(b-c)\{a^2-(b^2+bc+c^2)\}\\&=-\frac{1}{4R^2}(b-c)(a^2-b^2-bc-c^2)=0\end{aligned}$$

$\therefore$　$b=c$　あるいは　$a^2=b^2+bc+c^2$

オヤオヤ，前ノホウハイイガ，後ノホウハドウシタライイダロウ，か？

実は，これには余弦定理（☞ p. 326）が必要なのです。

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b^2+bc+c^2)}{2bc}$$

$$=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$　$\angle A=120°$

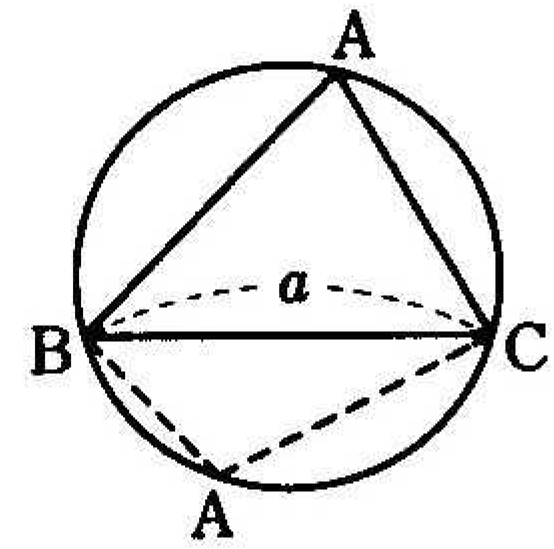
答 $\begin{cases}AB=AC\ \text{の二等辺三角形}\\ \text{または，}\angle A=120°\ \text{の三角形。}\end{cases}$

これは，ちょっと難問といべきだなあ。

◆ さて次は使い方の第3号です。これは円の弦の長さの計算です。

正弦定理から

$a=2R\sin A$



でしたね。つまり円の弦 BC の長さ a はその円の直径 $2R$ と $\overset{\frown}{BC}$（2つあるうちどちらでもかまわない。そのわけわかる？）の上に立つ円周角 A の正弦 $\sin A$ との積で与えられるのです。

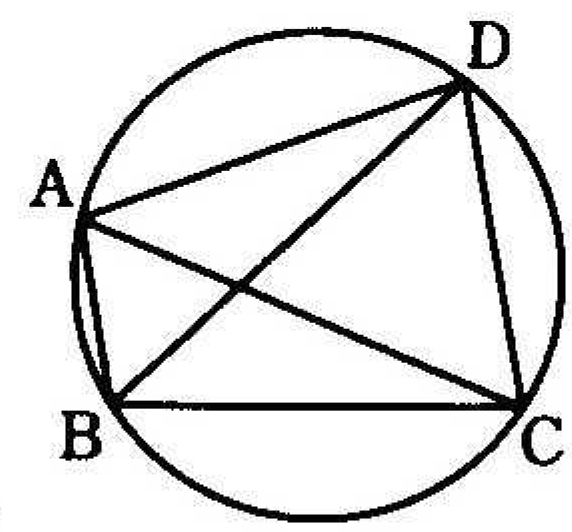
何はともあれ，具体例を：——

4/b

■練習 7. 円に内接する四辺形 ABCD において，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin A:\sin B=BD:AC$$

(ヒント)　△ABD について正弦定理を適用すると



$$\frac{BD}{\sin A}=2R$$

$\therefore$　$BD=2R\sin A$

ここに $2R$ はもちろん外接円，つまり，この円の直径です。同じように △ABC について正弦定理を適用しますと

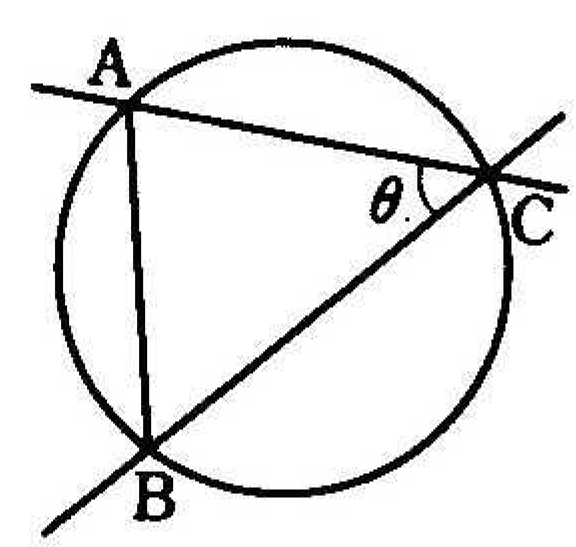
$$\frac{AC}{\sin B}=2R\qquad\therefore\quad AC=2R\sin B$$

ナルホド!!

$$\begin{aligned}BD:AC&=2R\sin A:2R\sin B\\&=\sin A:\sin B\end{aligned}$$

Q. E. D.

■練習 8. 点C で交わる2つの定直線が点C を通る任意の円と交わる点をそれぞれ A，B とすれば，この円の半径 R と $\overline{AB}$ の比は一定であることを示せ。　(名大)



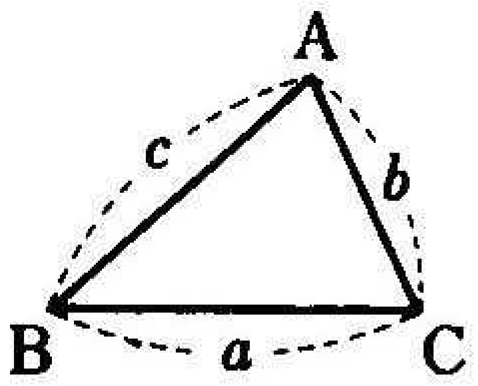
9

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◑ 余弦定理の使い方

◆余弦定理において角を90°にしてみなさい。ピタゴラスの定理が出るでしょう。つまりそれは余弦定理の一部。ピタさんビックリ。

◆ △ABC において BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とすると



$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

なる関係があります。これが **余弦定理** といわれるもの。とくに，第2余弦定理ということもありますが，ふつうは余弦定理といえばこれを意味しております。

この余弦定理の使い方の第1号は単純応用つまり，2辺夾角を知って対辺の長さを計算するものです。では，これを：——

4/6

■練習 1. △ABC において

AB＝3cm，AC＝4cm，∠A＝60°

のとき $\overline{\mathrm{BC}}$ の長さを求めよ。

(解) $\overline{\mathrm{BC}}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos60°$

$=9+16-12=13$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$ (cm) ……答

4/8

■練習 2. △ABC において ∠A が鈍角ならば

$$a^2>b^2+c^2$$

であることを示せ。

(解) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

∠A が鈍角ならば $\cos A<0$

したがって

$a^2=b^2+c^2+2bc(-\cos A)$

$>b^2+c^2$

$\therefore\ a^2>b^2+c^2$ Q. E. D.

■練習 3. △ABC において $a^2<b^2+c^2$ ならば ∠A は鋭角であることを示せ。

◆ さて，第2号は三角形でどんな三角形かという問題，このとき，cos をなくすためにこの定理を使う。これは定石です。

では：——

■練習 4. △ABC において

$$a\cos B=b\cos A$$

ならばどんな三角形か。

(ヒント) 余弦定理から

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\therefore\ a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\therefore\ \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

$\therefore\ c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

$\therefore\ a^2=b^2 \qquad \therefore\ a=b$

ゆえに，$\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CA}}$ なる二等辺三角形である。

■練習 5. △ABC において

$$a\cos A=b\cos B=c\cos C$$

ならばどんな三角形か。

(ヒント) まず左の半分から：——

$a\cos A=b\cos B$

$\therefore\ a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

両辺に $2abc$ を掛けて

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$\therefore\ c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$

$\therefore\ (a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$

$\therefore\ a=b$ あるいは ∠C＝90°

同様に $b=c$ あるいは ∠A＝90°

このことから

(イ)　$a=b$ かつ $b=c$

(ロ)　$a=b$ かつ $\angle \mathrm{A}=90°$

(ハ)　$\angle \mathrm{C}=90°$ かつ $b=c$

(ニ)　$\angle \mathrm{C}=90°$ かつ $\angle \mathrm{A}=90°$

の4つであるが，成立できるのは(イ)だけ。したがって正三角形の場合だけである。

答　正三角形

4/8

■練習 6. △ABC において

$$a\cos A=b\cos B+c\cos C$$

ならばどんな三角形か。　（和歌山県医大）

ヒント　余弦定理を使って角をなくすと，あとは因数分解の練習です。

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\therefore\quad a^2(b^2+c^2-a^2)$$
$$=b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)$$

あとはバラバラにして……

答　$\angle \mathrm{B}=90°$ または $\angle \mathrm{C}=90°$ の直角三角形

◆ 応用の第3号は角の計算です。例えば，次の練習をやってみましょう。

■練習 7. △ABC において

$$a=3,\ b=5,\ c=7$$

のとき，∠C を求めよ。

ヒント　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5}$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad C=120°\quad\cdots\cdots\ \text{答}$$

■練習 8. 3辺の長さが x^2+x+1, $2x+1$, x^2-1 のとき最大角の大きさを求めよ。

（神戸大）

ヒント　x^2+x+1, $2x+1$, x^2-1 のグラフをかいてみると，x^2+x+1 が最大であることはすぐわかります。そこで，最大角は x^2+x+1 に対する角。これを θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{(2x+1)^2+(x^2-1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x+1)(x^2-1)}=-\frac{(2x+1)(x^2-1)}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad \theta=120°$$

4/8

■練習 9. △ABC において

$$\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1$$
$$b^2+\sqrt{2}bc-c^2=0$$

ならば，3つの頂角の大きさを求めよ。

ヒント　正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}=\sqrt{2}:1$$

$$\therefore\quad a:b=\sqrt{2}:1$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{2}b\qquad\cdots\cdots①$$

第2式より

$$c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b\qquad\cdots\cdots②$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{b^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b\right)^2-(\sqrt{2}b)^2}{2b\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\therefore\quad A=45°$$

次に，第1式より

$$\sin A=\sqrt{2}\sin B$$

$$\therefore\quad \sin^2 A=2\sin^2 B$$

$$\therefore\quad 2\sin^2 B=1-\cos^2 A=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \sin B=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad B=30°$$

$$\therefore\quad C=180°-(45°+30°)=105°$$

答　$A=45°$, $B=30°$, $C=105°$

■練習 10. △ABC において

$$a:b:c=2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$$

のとき，∠A, ∠B, ∠C を求めよ。

（東邦大）

ヒント　上とまったく同じですからやってみてください。

答　$A=45°$, $B=60°$, $C=75°$

○三角形の面積の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角形の面積は小学校でもやったし，中学校でもやったが，高校でもやります。そして大学でもやるでありましょう。

◆ 三角形の面積の公式で大切なものが5つあります。そのうち3つはオボエテおくべきで，ほかの2つはすぐ使えるようにしておかなければなりません。それは何か，それが，ここの目的です。

＊　＊　＊

◆ 第1はいわずと知れたこと。

$$\textbf{面積}=\frac{1}{2}\times(\textbf{底辺})\times(\textbf{高さ})$$

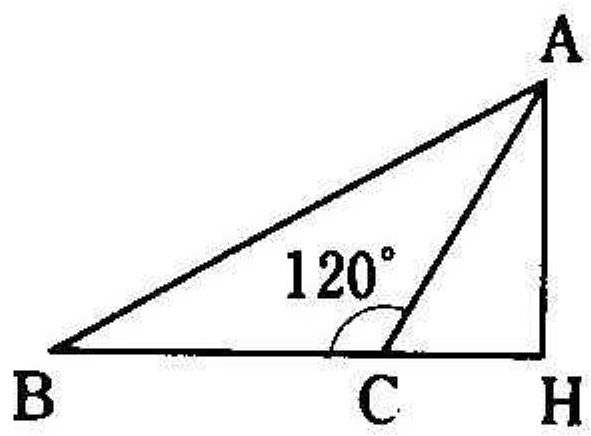
です。

練習 1. △ABC において BC=10，Aから BC に下した垂線の足をHとし，AH=4 のとき，△ABC の面積を求めよ。

(解) 面積を S とすれば

$$S=\frac{1}{2}\cdot10\cdot4=20 \quad\cdots\cdots \text{答}$$

練習 2. △ABC において ∠C=120°，直線 BC にAから下した垂線の足をH，BC=5，AH=4 とするとき，△ABC の面積を求めよ。



(解) 求める面積を S とすれば

$$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4=10 \qquad \text{答}\ 10$$

(注) 鈍角三角形においても，上のようにまったく同じです。この点でよく混乱する人がありますが注意してください。

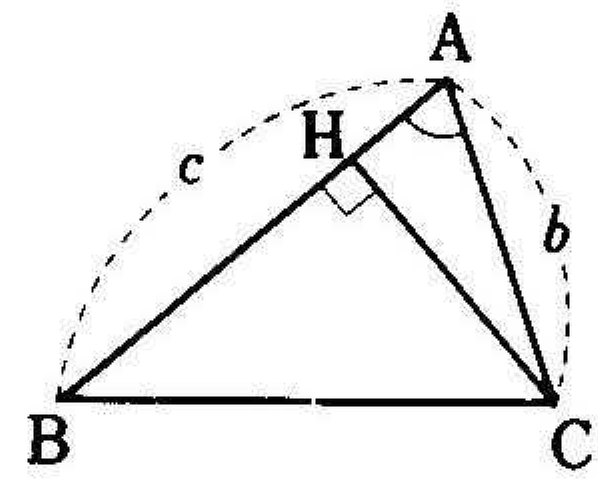
＊　＊　＊

◆ 第2は **2辺と夾角を知って面積** を求める公式です。

すなわち，次の図において，面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

となります。

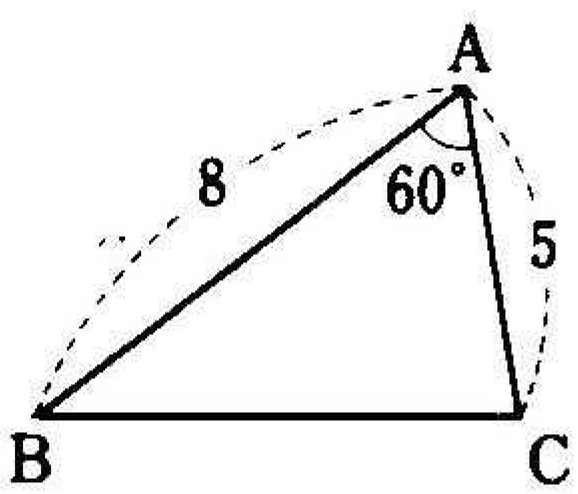


練習 3. 上の公式を証明せよ。

(ヒント) べつにめんどうはありません。点Cから AB に下した垂線の足をHとしますと

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$$
$$=\frac{1}{2}c(b\sin A)$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad \text{Q. E. D.}$$

練習 4. △ABC において AB=8，AC=5，∠A=60° のとき，その面積を求めよ。

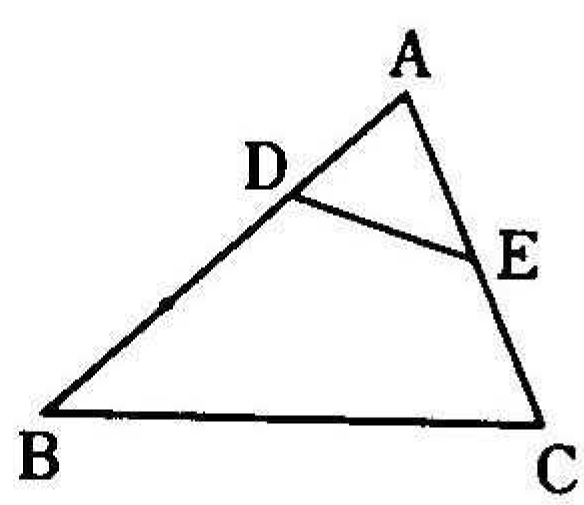


(解) 面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=10\sqrt{3} \qquad \text{答}\ 10\sqrt{3}$$

418

練習 5. △ABC において，AB を 1：2 に内分する点をD，AC の中点をEとするとき



$$\triangle ADE=\frac{1}{6}\triangle ABC$$

であることを示せ。

(ヒント)
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \qquad \text{Q. E. D.}$$

＊　＊　＊

◆ 第3は **3辺の長さを知って面積** を求めること，いわゆる **ヘロンの公式** です。
△ABC の3辺の長さを a, b, c，$2s=a+b+c$ とおくと，面積 S は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

である。

（注） とかく，根号内の s を大きく書いて，面積の S と見まちがうことがあっておもしろくない。そこで s の代わりに p を使う人もあるが，ふつうは s です。なお ヘロンはギリシアの数学者です。

4/8

練習 6. △ABC において AB=7，BC=8，CA=9 のとき面積 S を求めよ。

（解） $s=\dfrac{1}{2}(7+8+9)=12$

より

$$S=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 7. 面積 $\sqrt{3}$ の正三角形の1辺の長さをヘロンの公式を使って求めよ。

（解） 1辺の長さを a とすると

$$s=\frac{1}{2}(a+a+a)=\frac{3}{2}a$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{3}{2}a-a\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad a=2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

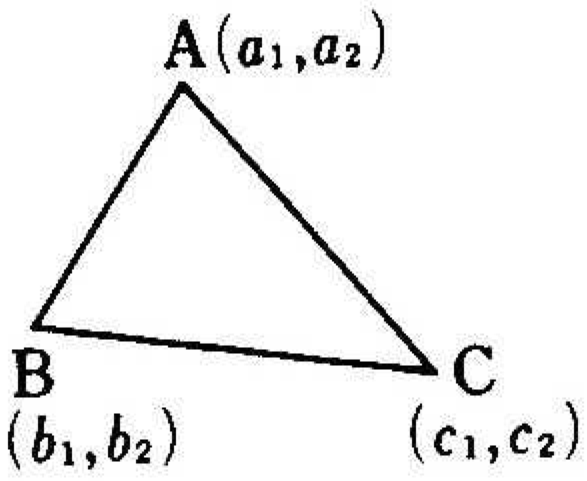
◆ 第4は **座標を知って面積** を求める公式です。しかし，これはオボエテいなければならぬものではありませんが，オボエテいればときにすばらしい働きをすることも確かなのです。

三角形 ABC の3頂点の座標を

A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)

C(c_1, c_2)

とするとその面積 S は



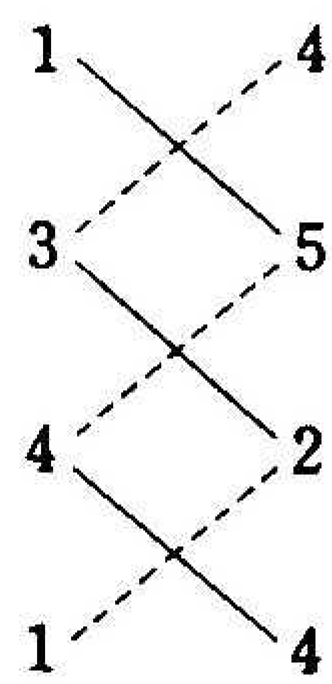
$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2-a_2b_1-b_2c_1-c_2a_1|$$

（注） この公式を使うには次のようにするのも1つの方法です。そうだ，具体的な例でいこう。

4/8

練習 8. 3頂点が (1, 4)，(3, 5)，(4, 2) なる三角形の面積を求めよ。

（ヒント） 3つの頂点の座標を右のように書きます。順序はどうでもかまいませんが，いちばん上に書いたのは，いちばん下にも書くのです。



そして実線で結んだ1と5；3と2；4と4の積の和を作り，次に破線で結んだ4と3，5と4，2と1の積の和を引く，それに絶対値をつける，そして2で割る，というぐあい。

$$S=\frac{1}{2}|(1\cdot5+3\cdot2+4\cdot4)$$
$$-(4\cdot3+5\cdot4+2\cdot1)|$$
$$=\frac{1}{2}|27-34|=\frac{7}{2}$$

実は座標が数で与えられているときは，こんな公式を使うまでもない。座標軸をかき，点をプロットしてすぐ求めることができます。しかし文字で与えられると，困ってしまう。この公式が役に立つわけなのです。

なお，この公式を証明するにはいろいろな仕方がありますが，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$$

において $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ とし，$\cos A$ は3辺の長さから余弦定理を使って計算するのがよさそうだ。しかし，いずれにせよ，計算はやっかい。無理にやるほどのこともないでしょう。

＊　＊　＊

◆ 第5は △ABC において **ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を使って面積** を求めることなんですが，これは代数・幾何の範囲になってしまいますからここではふれません。そんな公式もあるのか，と思えばいいでしょう。

ヘロンの公式とその応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角形の面積を求める公式は重要なものが5つある。その1つが，このヘロンの公式。ヘロンはギリシアの数学者です。

◆ △ABCにおいて，$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$とし，面積をSとすると，

ヘロンの公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

が成り立つ。ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

このsは面積Sと紛らわしいからpと書く人もあります。

この公式は，これを導くこともさることながら，活用することが大切。では，さっそくながら面積の計算から練習しましょう。

■練習 1. 三角形の3辺の長さが7cm, 5cm, 3cmのとき，その面積を求めよ。(山形大)

(解) $s=\dfrac{7+5+3}{2}=\dfrac{15}{2}$

ゆえに面積Sはヘロンの公式により

$$S=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}\ (\mathrm{cm}^2)$$

■練習 2. ヘロンの公式を用いて，1辺の長さaの正三角形の面積を求めよ。

(解) $s=\dfrac{3a}{2}$

$$\therefore\quad S=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}$$

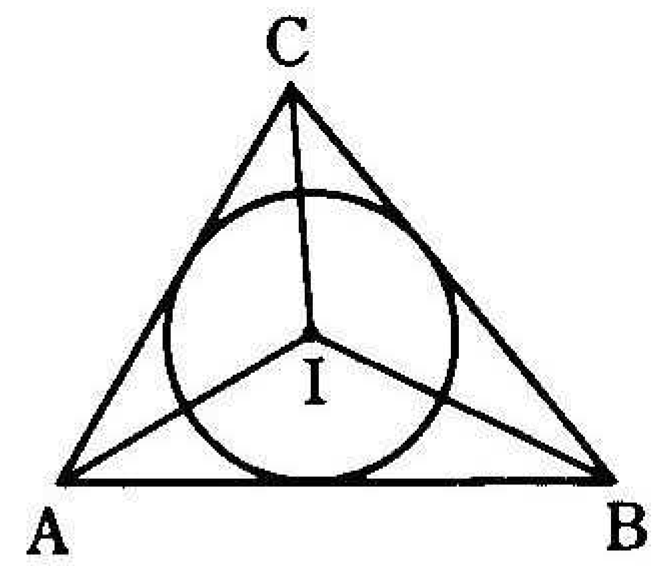
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ ヘロンの公式の意味がわかれば，次はその応用です。第1は何といっても内接円の半径を求めることです。では，さっそくやってみませんか。それはこれです。

■練習 3. △ABC において $AB=7$, $BC=4\sqrt{2}$, $CA=5$のとき，内接円の半径を求めよ。(慶大)

(ヒント) 内心をIとすると，Iから各辺に下した垂線の長さは内接円の半径rに等しいのですから



$$\triangle IAB=\frac{1}{2}\times7\times r$$

$$\triangle IBC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times r$$

$$\triangle ICA=\frac{1}{2}\times5\times r$$

他方△ABCの3辺の長さがわかっているので，ヘロンの公式を使って求めますと，

$$s=\frac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5)=6+2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad S=\{(6+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})\times(6-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{28\cdot7}=14$$

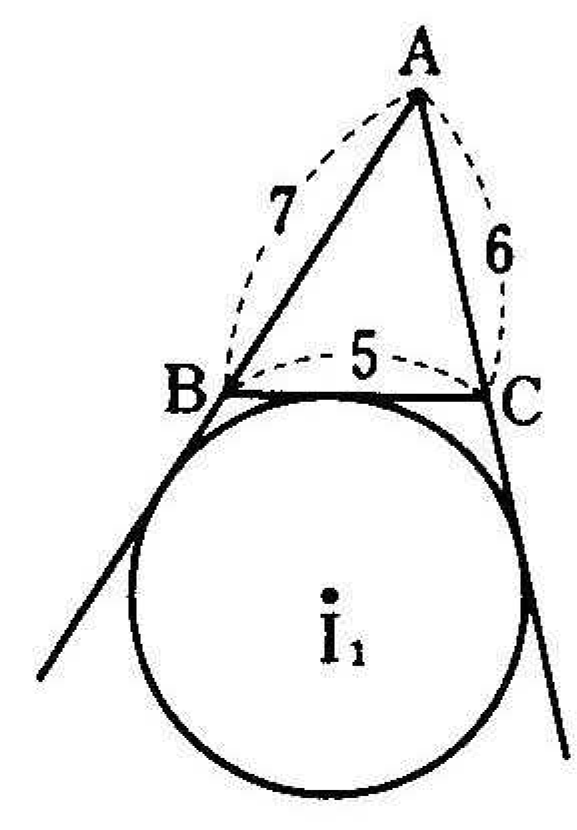
ここで，

$$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$$

を用いて　$14=(6+2\sqrt{2})r$

$$\therefore\quad r=3-\sqrt{2} \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 4. 右の図のような円（傍接円）の半径を求めよ。



(ヒント) $\triangle ABC=\triangle I_1AB+\triangle I_1AC-\triangle I_1BC$

△ABC はヘロンの公式から。そして $\triangle ABI_1$ は $\dfrac{1}{2}\times7\times r_1$ といったぐあい。

$\boxed{答}$ $\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$

*　*　*

◆ ヘロンの公式を証明してから，応用にもどることにしましょう。

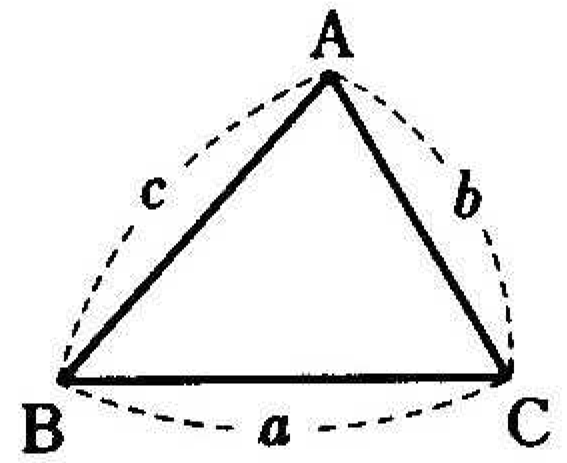
練習 5. △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とするとき，面積 S は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

で与えられることを示せ。（大分大，早大）

（解）$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

ところが余弦定理により



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\therefore\quad \sin^2 A=1-\cos^2 A$$

$$=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}$$

$$=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

ところが $a+b+c=2s$ であるから

$$b+c+a=2s$$
$$b+c-a=(a+b+c)-2a=2(s-a)$$
$$a+b-c=(a+b+c)-2c=2(s-c)$$
$$a-b+c=(a+b+c)-2b=2(s-b)$$

$$\therefore\quad \sin^2 A=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}bc\times\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ さあ，これでヘロンの公式の意味はつかんだし，その証明もやったし，次はやや高等な応用へと進むことにしましょう。

練習 6. 周囲が一定である三角形の中で面積の最大なものは正三角形であることを示せ。（東京女大，九大）

（ヒント）三角形の 3 辺の長さを a, b, c とし，$2s=a+b+c$ とすると，面積 S は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

で与えられます。ここで，s は周の半分だから一定です。

さて，3 つの正の数 $s-a$, $s-b$, $s-c$ の相加・相乗平均を考えると

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}$$
$$\geqq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ところが，左辺は

$$\frac{1}{3}\{3s-(a+b+c)\}$$

$$=\frac{1}{3}(3s-2s)=\frac{s}{3}\ \text{（一定）}$$

$$\therefore\quad \frac{s}{3}\geqq\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

そして，$s-a=s-b=s-c$，つまり $a=b=c$ のとき等号が成り立って最大値をとる。ゆえに，正三角形のとき最大となる。

そして，このとき，面積の最大値はもちろん $s=\dfrac{3a}{2}$ であることから

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

となるのです。（$\because\quad a=b=c$）

*　*　*

（注）上の問題で 4 つの正の数 s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ の相加・相乗平均を考えてもうまくいきません。なぜか考えてみてください。

なお，四角形の場合には，4 つの辺の長さがきまっても形も面積もきまらないのですから，ヘロンの公式に当たるものはありません。しかし，円に内接するときに次の関係があります。ムリにやることもあるまい。

≪円に内接する四角形の 4 つの辺を a, b, c, d とし，周の半分を s とすれば，面積 S は

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

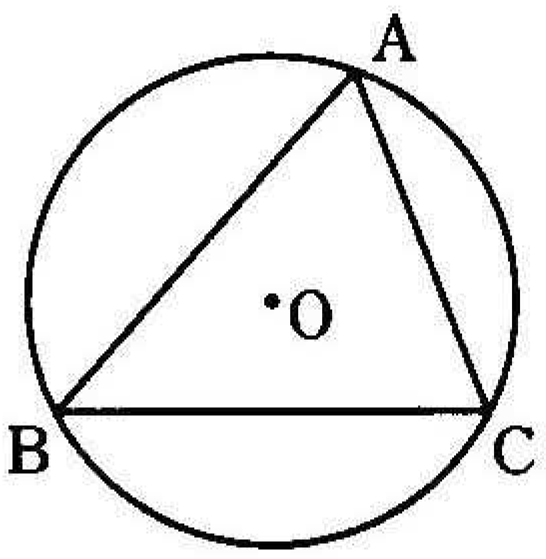
で与えられる≫

① 三角形の外接円の中心と半径

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆三角形の外心は，いわゆる五心の1つ，また半径は正弦定理に現れてくる。その重要さはいわずもがなのことであろう。

◆ 三角形の3辺の垂直2等分線は同一点で交わります。この点は三角形の外接円の中心で，**外心**（がいしん）と呼ばれています。



三角形の外接円の半径をRとしますと，**正弦定理** が成り立ち，それは，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

で与えられるのでした。外接円の半径といったら，この公式から出発すればよいと考えてさしつかえありません。では：——

■練習 1. △ABC の面積をSとするとき

$S=\dfrac{abc}{4R}$ を証明せよ。

（解） $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

ところが正弦定理から

$$\frac{a}{\sin A}=2R \qquad \therefore \quad \sin A=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

Q. E. D.

■練習 2. △ABC の面積をSとすると

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

であることを証明せよ。

（ヒント） $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

ところが正弦定理から

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\therefore \quad b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A=\cdots\cdots$$

では，次は中心です。

*　*　*

◆ 外接円の中心は主して円の方程式の関係する問題に出てきます。そこで，次の原則をつかんでおくことが肝心!!

円の方程式は大きく分けて2通りあります。1つは

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

です。**中心や半径が直接関係してくる問題には，このほうがぐっとラク** なのがふつう。

この円の中心はもちろん（a，b）ですが，半径はcではありません。$|c|$ ですよ!!

ちょっと練習をやってみませんか。

■練習 3. 円 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ の中心の座標と半径を求めよ。

（ヒント） 変形すると

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$$

これからわかるように，中心は（3，−1），半径は4です。

■練習 4. 方程式 $x^2+y^2-2ax-2ay+a=0$ が円を表すための条件を求めよ。

（解） 変形すると

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2-a$$

これが円を表すための条件は

$$2a^2-a>0$$

$$\therefore \quad a(2a-1)>0$$

$$\therefore \quad a>\frac{1}{2} \quad \text{あるいは} \quad a<0$$

*　*　*

◆ さて，円の方程式の第2のタイプは

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

の形。これは，**中心や半径が直接関係しないものを扱うのに便利** です。

では，もとにもどって，三角形の外接円を考えてみましょう。

4/。

練習 5. 次の 3 直線で囲まれた三角形の外接円の方程式を求めよ。

$x+3y+6=0,\quad x-y+2=0,$

$5x+3y-6=0$

(ヒント) 3 つの頂点は $(-3,\ -1)$，$(0,\ 2)$，$(3,\ -3)$ です。これら 3 点を通る円を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

としますと，a，b，c の方程式が 3 つ得られる。これを解いて

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=-9$$

よって，求める円は

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}y-9=0 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

となります。では，もう 1 つ。

練習 6. 3 直線 $3y=2x+5$，$y-x=3$，$y=3$ によってできる三角形の外接円の中心を求めよ。 $\boxed{答}$ $(1,\ -2)$

練習 7. 原点，$(1,\ 2)$，$(3,\ 1)$ を頂点とする三角形の外接円の中心と半径を求めよ。

(白治医大) $\boxed{答}$ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\frac{\sqrt{10}}{2}$

* * *

◆ では，三角形の外接円に関する総合的な問題を扱ってみることにしましょう。

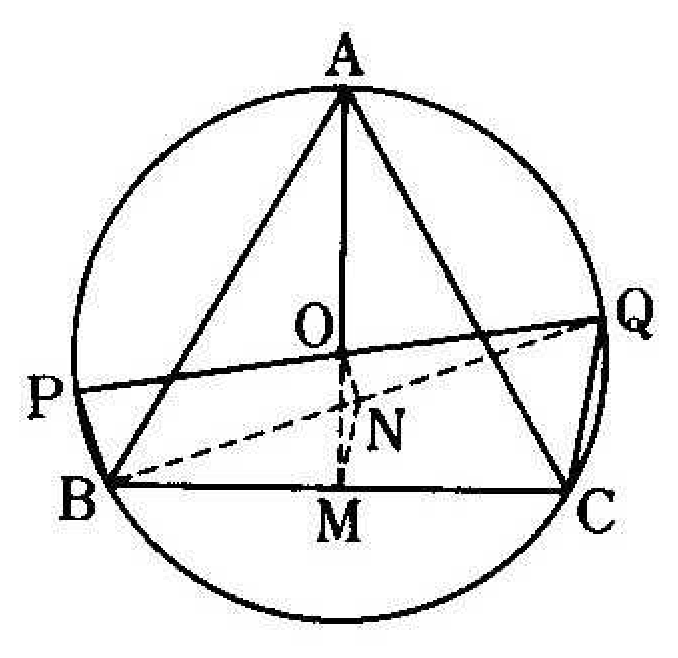
9 N/ー

練習 8. 正三角形 ABC の外接円の中心を O とし，その任意の直径を PQ とすれば

$\mathrm{BP}+\mathrm{CQ} \geqq \mathrm{OA}$ であることを示せ。

(解) 1. BCの中点を M，BQ の中点を N とすれば，中点連結定理から

$\mathrm{BP}+\mathrm{CQ}$
$=2\mathrm{NO}+2\mathrm{MN}$
$=2(\mathrm{MN}+\mathrm{NO})$
$\geqq 2\mathrm{MO}=\mathrm{OA}$

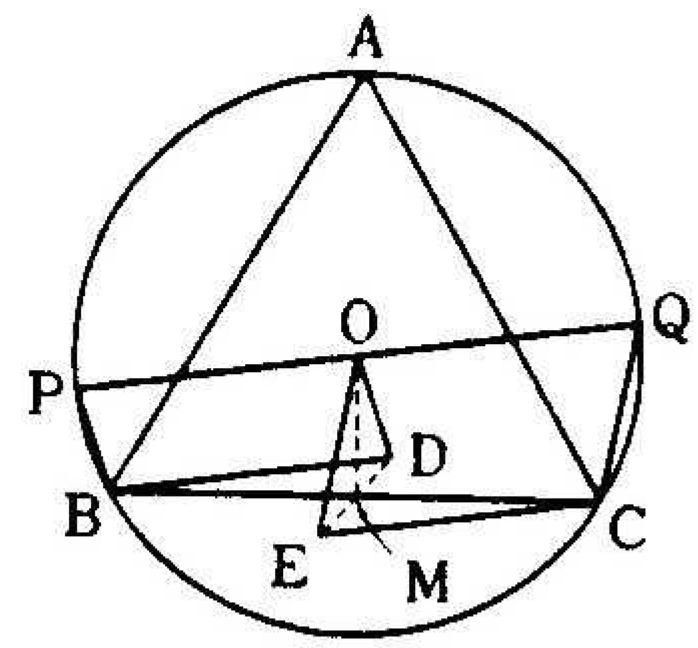


(注) 正三角形では，外心と重心と垂心は一致していますから，左下の図において，M，O，A は一直線上にあって，しかも，$2\mathrm{MO}=\mathrm{OA}$ なのです。

(解) 2. 2 つの平行四辺形 OPBD，OQCE を作ると，

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{BP}}$，
$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{CQ}}$

である。



また，

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{OQ}}$
$=\overline{\mathrm{EC}}$

かつ $\overline{\mathrm{BD}} /\!/ \overline{\mathrm{EC}}$ であるから，BECD は平行四辺形で，したがって，$\overline{\mathrm{DE}}$ の中点は $\overline{\mathrm{BC}}$ の中点Mに一致する。

ゆえに

$$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{OD}}+\overline{\mathrm{OE}}$$
$$\geqq 2\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{OA}}$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CQ}} \geqq \overline{\mathrm{OA}}$$

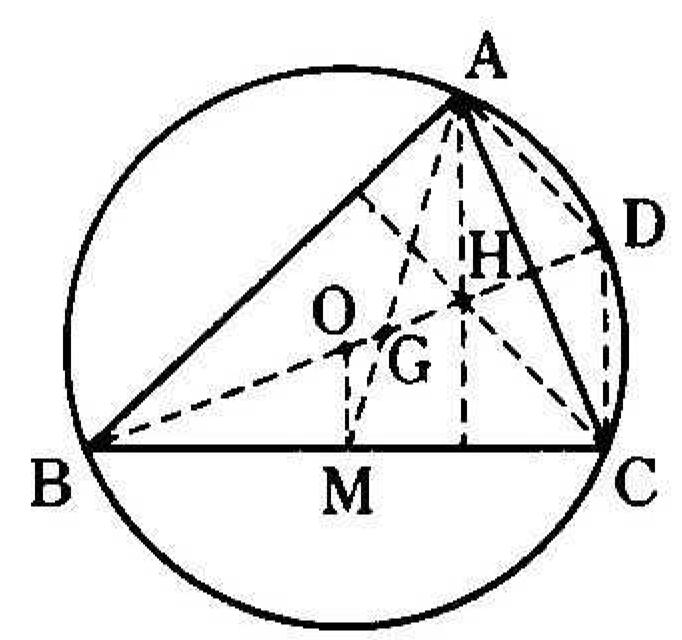
(注) この不等式の証明は三角比を直接使うこともできます。円の半径を a とし，O を原点，OA を y 軸とし，$\angle \mathrm{QO}x$（つまり OQ が x 軸の正の方向となす角）を θ としますと，各点の座標は

$$\mathrm{A}(0,\ a),\ \mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ -\frac{1}{2}a\right) \text{ など}$$

また，$\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$，$\mathrm{P}(-a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ などとなります。これを使って計算すればいいのですが，かなりの計算力が要ります。

練習 9. 三角形の外心 O，重心 G，垂心 H は 1 直線上にあることを示せ。

(ヒント) いろいろな方法がありますが，ここにはヒントとして図だけあげておきます。ムリにやるほどのことはありませんが，ひとつやってやろう，という人はやってみませんか。△AHCD は平行四辺形ですよ!!

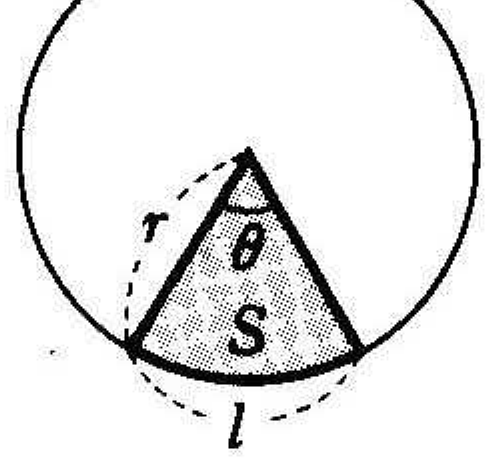


① 扇形の周と面積

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆おうぎがたはせんけいともいう。その面積や周の長さに関係した問題を学ぶことは，図形問題のいい練習になるのだ。

◆ 円の中心から出る2つの半径と円弧で囲む図形を **扇形**（おうぎがた）といいます。



長方形のことを江戸時代の数学者（和算家）は矩形と書いてさしがたといいました。扇形と書いておうぎがた，弓形と書いてゆみがたといったのです。ところが，明治になると，それぞれ，くけい，せんけい，きゅうけいと呼ぶようになって，耳で聞いたのではピンとこないことばになってしまったのですが，最近では，長方形，おうぎがた，ゆみがたでわかりやすくなったのです。

＊　＊　＊

◆ 扇形で大切な公式は2つあります。

1つは **面積の公式**：半径が r，中心角が $\theta°$ の扇形の面積を S としますと，円全体の中心角がいわば $360°$ なのですから，中心角 $\theta°$ の扇形の面積は

$$S : \pi r^2 = \theta : 360$$

から求められます。つまり

$$\boldsymbol{S=\frac{\pi r^2\theta}{360}}$$

となります。

では，次の練習をやってください。

練習 1. 半径 4cm，中心角 $60°$ の扇形の面積を求めよ。

ヒント　上の公式から

$$S=\frac{\pi\cdot4^2\cdot60}{360}=\frac{8}{3}\pi \ (\text{cm}^2)$$

となります。公式をムリにおぼえることはありません。

4/12

練習 2. 半径 $4a$，面積 πa^2 の扇形の中心角は何度か。

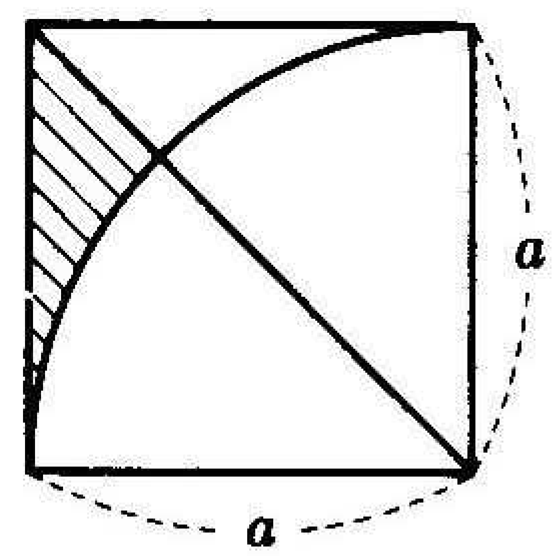
ヒント　公式から $\pi a^2=\dfrac{\pi(4a)^2\theta}{360}$

ゆえに，求める角は

$\dfrac{180°}{8}=22.5°$……答

4/12

練習 3. 右の図の斜線を引いた部分の面積を求めよ。



解　$\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{8}\pi a^2$

$=\dfrac{1}{8}(4-\pi)a^2$　　……答

＊　＊　＊

◆ 次は，**弧の長さ** です。中心角 $\theta°$ 半径を r，扇形の弧の長さを l としますと

$$l : 2\pi r = \theta : 360$$

から　$$\boldsymbol{l=\frac{2\pi r\theta}{360}=\frac{\pi r\theta}{180}}.$$

4/12

練習 4. 半径 5cm，中心角 $45°$ の扇形の弧の長さを求めよ。

ヒント　上の公式から求める弧の長さは

$$l=\frac{\pi\cdot5\cdot45}{180}=\frac{5}{4}\pi \ (\text{cm})$$

となります。もちろん，上の公式をムリにオボエル必要はありません。そのつど，上の比例式をつくればいいのですから。

練習 5. 半径 2cm，弧の長さ 4cm の扇形の中心角の大きさを求めよ。

解　上の公式から

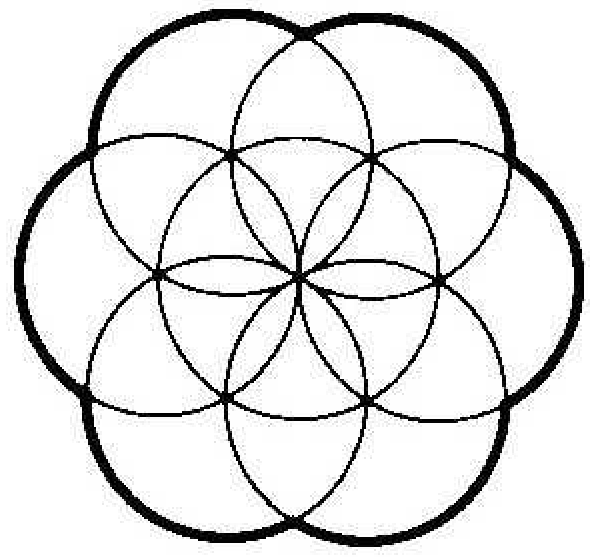
$$4=\frac{\pi\cdot2\cdot\theta}{180}\qquad\therefore\ \theta=\frac{360}{\pi}\ (\text{度})$$

となりましょう。

◆ これで，大切なことは終わりました。あとは総合的な問題を扱うだけです。

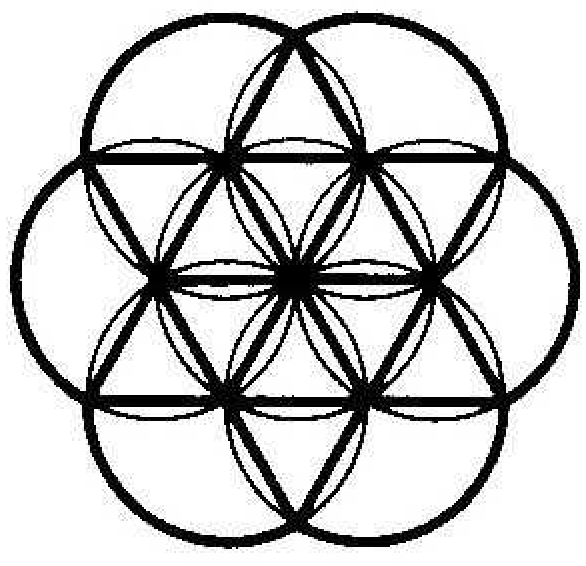
では，元気を出して，次の問題を１つでもいい，２つでもいい，やってみませんか。

練習 6. 半径 a の円周を６等分する点のそれぞれを中心として，半径 a の円を描くとき，これら６個の円がおおう範囲（図の太線に囲まれた範囲）の面積を求めよ。　　（東大）



ヒント ちょっとみるとめんどうそうですが，さにあらず。

右の図のように分割すると，半径 a，中心角 120°の扇形６個，１辺の長さ a の正三角形12個に分割されます。



扇形１個の面積は

$$\frac{\pi a^2}{3}$$

で，正三角形１個の面積は

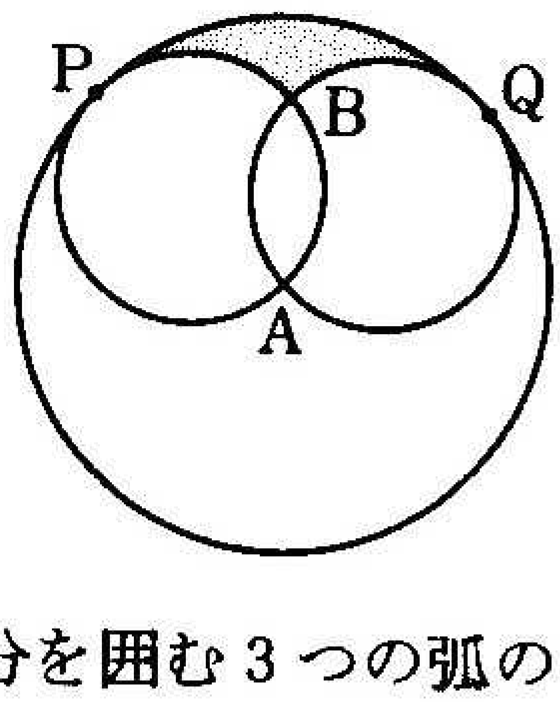
$$\frac{1}{2}a^2\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

ですから，求める面積は

$$\frac{\pi a^2}{3}\times 6 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 12$$
$$= 2\pi a^2 + 3\sqrt{3}a^2$$
$$= (3\sqrt{3}+2\pi)a^2 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

4/12

練習 7. 同じ大きさの２円が２点A，Bで交わっている。点Aを中心としてこの２円に接する円をかき，その接点をP，Qとする。図の陰影をほどこした部分を囲む３つの弧の間に $\widehat{PQ}=\widehat{PB}+\widehat{BQ}$ なる関係のあることを証明せよ。　　（名大）



解 ２点A，Bで交わる等円の中心をそれぞれO，O′とすれば，A，O，P；A，O′，Qはそれぞれ１直線上にある。

ゆえに，円O，O′の半径を a とすると，$PA=QA=2a$ なる関係がある。

また，$\angle PAB=\theta°$ とすると，

$$\angle QAB=\theta°$$
$$\therefore\ \angle POB=2\angle PAB=2\theta°$$
$$\angle QO'B=2\angle QAB=2\theta°$$
$$\widehat{PQ}=\frac{\pi(2a)(2\theta)}{180}=\frac{\pi a\theta}{45}$$
$$\widehat{PB}=\frac{\pi a(2\theta)}{180}=\frac{\pi a\theta}{90}\ \text{など}$$
$$\therefore\ \widehat{PQ}=\widehat{PB}+\widehat{QB} \qquad \text{Q. E. D.}$$

＊　＊　＊

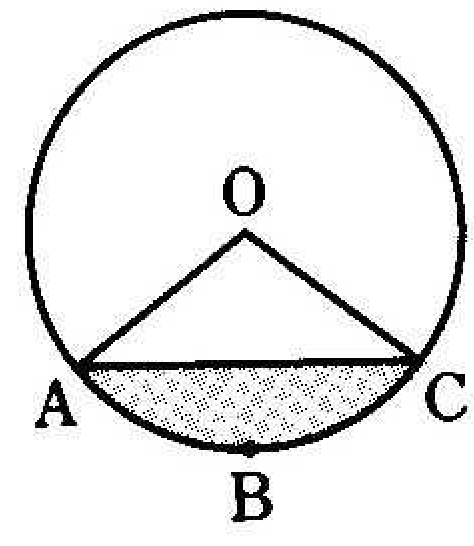
◆ 弓形の面積はすべて扇形を媒介として求めればよいのです。

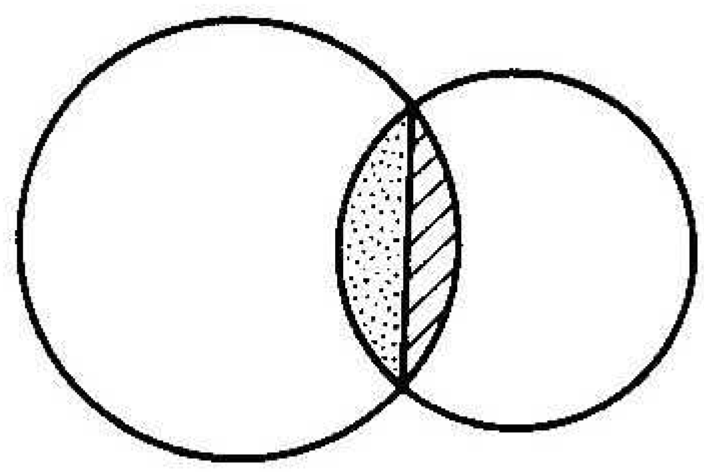
すなわち，下の左図で，

弓形 ABC＝扇形 OABC－△OAC

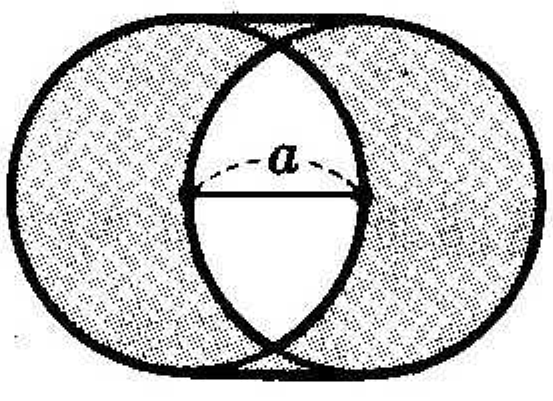
として得られるからです。

また，２つの円が交わって作る共通部分の面積は２つの弓形の和（下右図）として求めればいいこともおわかりでしょう。





練習 8. 右の図で陰影部分の面積を求めよ。　　（横浜国大）



ヒント 交点と円の中心を結んで２つの三角形，４つの弓形などに分解することができます。

全体の面積は πa^2+2a^2，中の部分の面積は $2\left(\frac{\pi a^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$ で，結果は

$$\frac{\pi a^2}{3}+2a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

○三角方程式の解法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆三角方程式とて，べつにめんどうなし。簡単な1次方程式または2次方程式の三角比的応用にすぎません。

◆ 三角方程式といっても，とくに難しいことはありません。ただ，p.312 や p.316 であげた特別な角の三角比の値だけはおぼえておく必要があります。では，ともかく次の練習からはじめましょう。

4/11 **練習 1.** $0° \leqq x \leqq 90°$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ヒント $0° \leqq x \leqq 90°$ ですから

$$0° \leqq 2x \leqq 180°$$

そこで $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満足する $2x$ は2つあって

$$2x = 60°,\ 120°$$

$$\therefore\quad x = 30°,\ 60° \qquad \cdots\cdots 答$$

4/13 **練習 2.** $\cos(2x-30°) = -\dfrac{1}{2}$

を満足する x を求めよ。ただし，$0° \leqq x \leqq 90°$

ヒント $\cos(2x-30°) = -\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\quad 2x-30° = 120°$$

$$\therefore\quad 2x = 150°$$

$$\therefore\quad x = 75° \qquad \cdots\cdots 答$$

4/13 **練習 3.** $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ を解け。

ヒント 2つの考え方があります。ひとつは $\sin x$ と $\cos x$ が入り混じっています。いずれか一方にしたらいいだろう。そこで両辺を自乗して

$$\sin^2 x = 3\cos^2 x \qquad \cdots\cdots(*)$$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ を使って

$$1-\cos^2 x = 3\cos^2 x$$

$$\therefore\quad 4\cos^2 x = 1$$

$$\therefore\quad \cos x = \pm\frac{1}{2}$$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ なら $x = 60°$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ なら $x = 120°$

これが答えといってはあぶない。もとの式に入れてみると $x = 120°$ は適しない。

答 60°

ところでなぜ適しない解がでたのか。それは(＊)のところで平方したから，同値性がやぶれた，それなのです。

それでは，$\sin x$ を残したらどうなるか。(＊)から

$$\sin^2 x = 3(1-\sin^2 x)$$

$$\therefore\quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (>0)$$

$$\therefore\quad x = 60°,\ 120°$$

またもや，吟味の必要がおこるのであった。

しかし，次のような方法もあるのです。

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x$$

$$\therefore\quad \tan x = \sqrt{3}$$

$$\therefore\quad x = 60°$$

バンザイ，ここでは余分のものはでなかった。

4/13 **練習 4.** $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の方程式を解け。

$$2\cos^2\theta + 7\sin\theta = 5$$

ヒント ここでも $\cos\theta$ と $\sin\theta$ が混在している。$\sin\theta$ をなくすには平方しなければならない。しかし，$\cos\theta$ なら，その心配もない。さあ，方針はきまったぞ。

(解) $2(1-\sin^2\theta)+7\sin\theta=5$

$$\therefore\quad 2\sin^2\theta-7\sin\theta+3=0$$

(オヤ，因数分解デキソウダ。

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & -1 \\ 1 & & -3 \\ \hline -1 & & -6 \end{array}$$

ウン，予想ドオリダ)

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-3)=0$$

$\sin\theta \fallingdotseq 3$ であるから

$$\sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=30°,\ 150° \qquad \cdots\cdots 答$$

■練習 5. $\sin x\tan x-1=\cos x$

を解け。

(ヒント) まず，$\tan x$ を追い出すとしよう。

$$\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-1=\cos x$$

$$\therefore\quad \sin^2 x-\cos x=\cos^2 x$$

ここまでくればいうまでもなし。$\sin x$ を追い出そう。

$$1-\cos^2 x-\cos x=\cos^2 x$$

$$\therefore\quad 2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$\therefore\quad (\cos x+1)(2\cos x-1)=0$$

$$\therefore\quad \cos x=-1,\ \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad x=180°,\ 60° \qquad \cdots\cdots 答$$

* * *

◆ 次は連立方程式です。ともかく，やってみようではないか。

4/13

■練習 6. $\sin\theta+\cos\varphi=0 \qquad \cdots\cdots①$

$\sin\varphi+\cos\theta=\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots②$

を解け。

(ヒント) θ はシーターと読むのは誰でも知っていますが，φ をファイと読むことは知らない人もありましょう。目だけでみることができても，声をだしていえないのは，どうしても疎遠になりがち。やはり，読めるようにしておいてください。

さて，θ か φ を追い出すとしよう。

$$\cos\varphi=-\sin\theta \qquad \cdots\cdots①'$$

$$\sin\varphi=-\cos\theta+\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots②'$$

$①'^2+②'^2$ を作ると

$$1=1+2-2\sqrt{2}\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad \theta=45°$$

これを①′と②′に代入しますと

$$\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \varphi=135°$$

答 $\theta=45°,\ \varphi=135°$

(注) 上の解で $\theta=45°$ がでたあとで②′を使い，

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

をみちびき，これから

$$\varphi=45°,\ 135°$$

としてはいけません。上のように 45° は適しないからです。というのも ①′，②′ を自乗して加えたからです。

■練習 7. 連立方程式

4/13

$2\sin x=\sqrt{3}\sin y \qquad \cdots\cdots①$

$2\cos x+\cos y=1 \qquad \cdots\cdots②$

を解け。

(ヒント) いうまでもなし。$\sin y$ を追い出すとしよう。①，②より

$$\sin y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x \qquad \cdots\cdots①'$$

$$\cos y=-2\cos x+1 \qquad \cdots\cdots②'$$

$①'^2+②'^2$ より

$$1=\frac{4}{3}\sin^2 x+4\cos^2 x-4\cos x+1$$

今度は $\sin^2 x$ をなくそう。その結果は

$$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$$

もうできるハズ。では答だけあげておきましょう。

答 $x=60°,\ y=90°\ ;\ x=0°,\ y=180°$

(注) 実はこの種の三角方程式を解くことは基礎解析でもやります。しかし，多くの場合，数Iでもできるし，基礎解析でもできるという問題は数Iでやる方が安全なことが多いものです。このことはひとつの《原則》としてオボエテおいてもらいたいものです。

○ 三角不等式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆不等式の解法はしょせん方程式の解法の延長にすぎません。しかし，不等式の証明は等式の証明から万里のかなたにある。

◆ 不等式を扱うには，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値の変化をよくつかんでいなければなりません。つまり，θが$0°$から$180°$まで変化するとき，

$\sin\theta$ は　0から1に増大
それから減少して0に至る。
$\cos\theta$ は　1から単調に減少して -1に至る。
$\tan\theta$ は　0から増大して∞に至り，一転して $-\infty$ から増大して0に至る。

これです。ではとりあえず次をやってみましょう。

4/16

練習 1. $0 \leqq \sin x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。ただし $0° \leqq x \leqq 90°$ とする。

ヒント　x が $0°$ から $90°$ まで増大するとき，$\sin x$ は0から単調に増加して1に至るわけ。ところで，その途中に $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($x=60°$) があるわけです。さては，きまった。

$$0° \leqq x \leqq 60°$$

が答です。

4/16

練習 2. $\cos 2x \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。ただし $0° \leqq x \leqq 90°$ とする。

ヒント　$0° \leqq x \leqq 90°$ であるから

$$0° \leqq 2x \leqq 180°$$

そして，余弦の値が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるのは角が$135°$のときですから，増減を考えて

$$0° \leqq 2x \leqq 135°$$

ということがわかります。

したがって

$$0° \leqq x \leqq 75° \qquad \cdots\cdots 答$$

が答です。

4/16

練習 3. $\cos x \leqq \sqrt{3}\sin x$ を解け。ただし，$0° \leqq x \leqq 180°$ とする。

ヒント　$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と使うとしましょう。しかし，$\cos x > 0$ ときまっていないから，うっかり割ってはいけませんよ。

$0° \leqq x < 90°$ のときは $\cos x > 0$ であるから両辺を $\sqrt{3}\cos x$ で割って

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \tan x$$

$$\therefore \quad 30° \leqq x < 90°$$

次に $90° \leqq x < 180°$では$\cos x \leqq 0$，$\sin x > 0$であるから明らかに適する。

そして，最後に $x=180°$ が適することは明らかです。

以上をまとめて，

$$答 \quad 30° \leqq x \leqq 180°$$

となります。

なお　　$\cos x \leqq \sqrt{3}\sin x$

の両辺を平方してもできますが，このときも$\cos x$ の正負で分けて扱う必要があります。

4/16

練習 4. $2\cos^2 x - \sin x \geqq 1$ を解け。

ヒント　いうまでもなし，まず，$\cos^2 x$を$\sin x$で表すとしましょう。

$$2(1-\sin^2 x) - \sin x \geqq 1$$

$$\therefore \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leqq 0$$

$$\therefore \quad (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \leqq 0$$

$$\therefore \quad 0 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{2} \quad (\because \ \sin x \geqq 0)$$

さては　$0° \leqq x \leqq 30°$，$150° \leqq x \leqq 180°$