第4章

図形と式

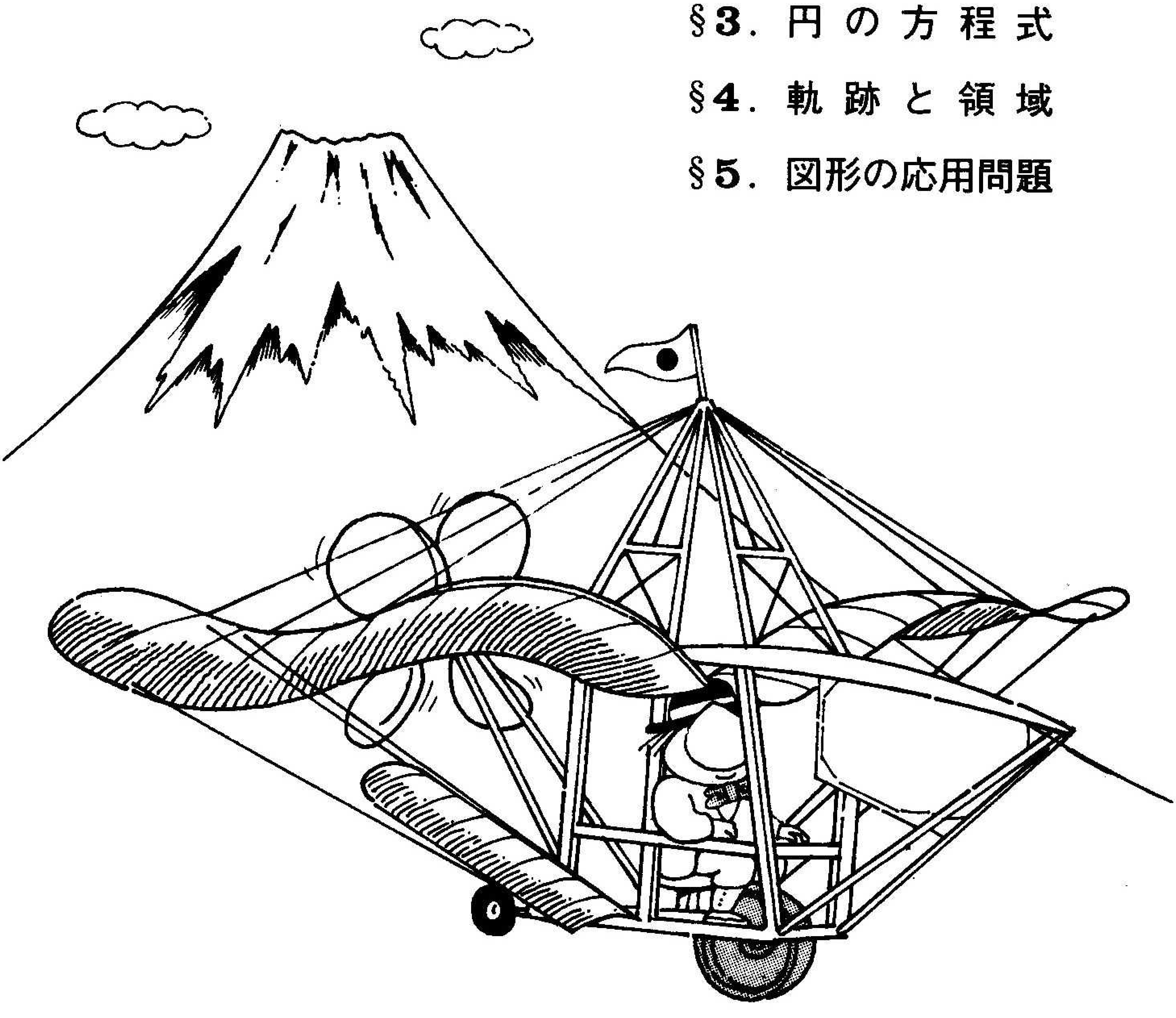
§1. 点 の 座 標

§2. 直線の方程式

§3. 円 の 方 程 式

§4. 軌 跡 と 領 域

§5. 図形の応用問題



① 座標とは何か

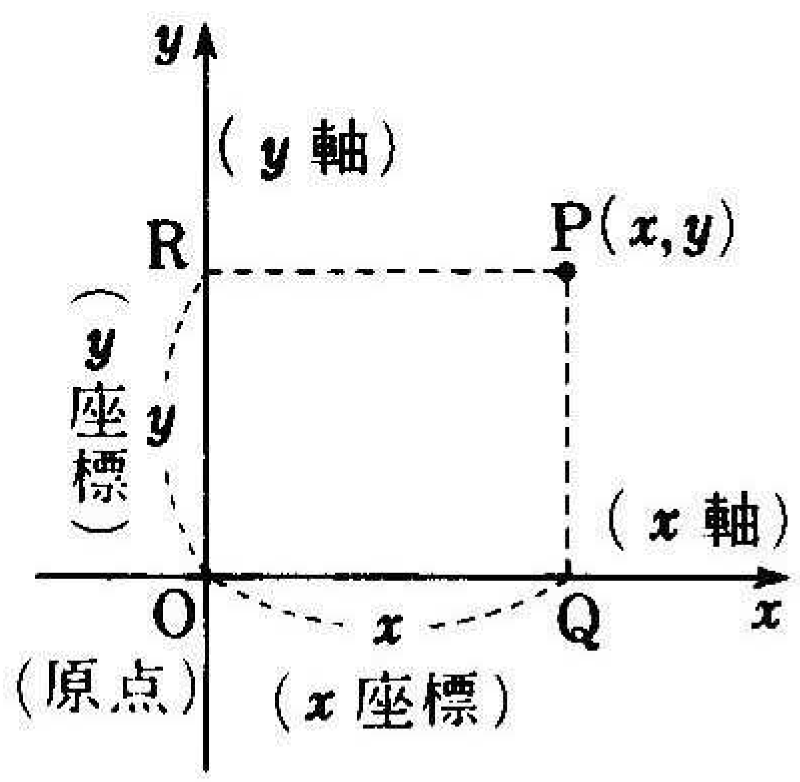
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数学だけが正しいものと信じ，あらゆるものを数で表そうとしたデカルトが最初にしなければならないことは，点を数に，だった。

◆ 図形を数によって表そうとすると，そのもっとも簡単なもの，つまり，点を数で表さなければなりません。

その１つの方法は，こうです。

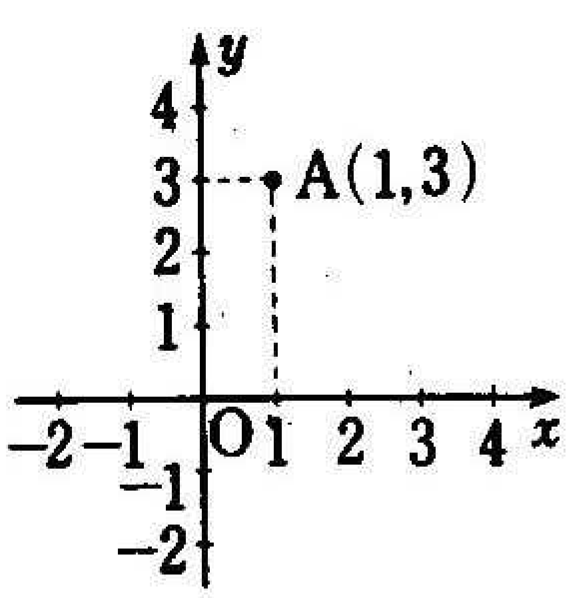
平面上に直交する２直線を引き，その交点をＯとしましょう。（右図参照）



点Ｐからこの２直線に下した垂線の足をそれぞれＱ，Ｒとし，OQ=x，OR=y としますと，点Ｐがきまれば x，y が求められます。逆に，x，y が与えられるとＰを求めることができます。ただし，x，y は符号をつけます。つまりＱがＯの右にあれば x はプラス，ＱがＯの左にあれば x はマイナスです。

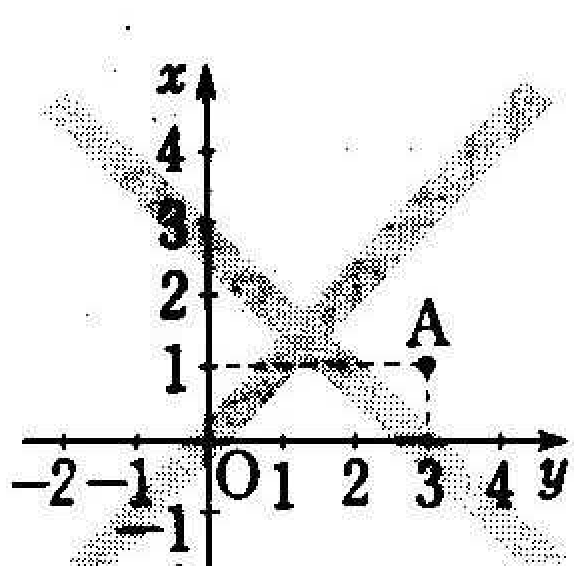
同じく，y もＲがＯの上にあればプラス，下にあればマイナスと約束します。

■練習 1. 平面上で，点 A(1, 3) をプロットせよ。

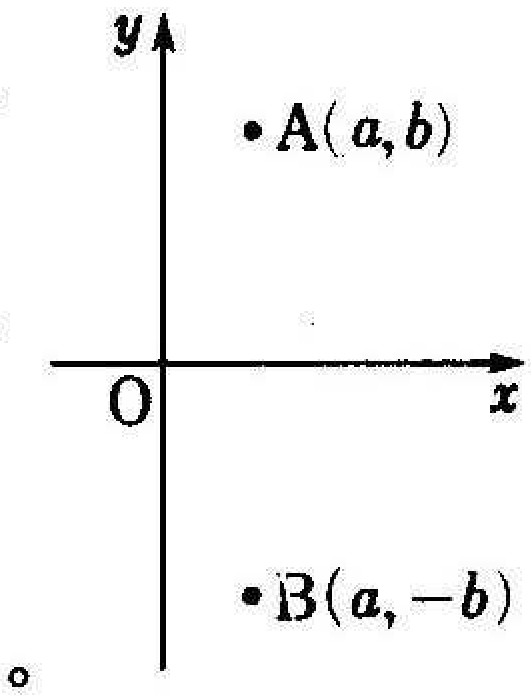


ヒント　まず x 軸，y 軸を引き，交点をＯとし，目盛りをとります。

その上で，$x=1$，$y=3$ の点Ａを右上図のようにとります。よくマチガウのは，右下図のようにやる人が多いということ。うっかり，x 軸を縦軸，y 軸を横軸にとってしまうのです。注意してください。



■練習 2. 点 A(a, b) と x 軸について対称な点の座標は何か。



ヒント　図をかいてみるとすぐわかるように (a, $-b$) です。y 軸に関して対称な点なら ($-a$, b) となるし，原点について対称な点なら ($-a$, $-b$) となりましょう。

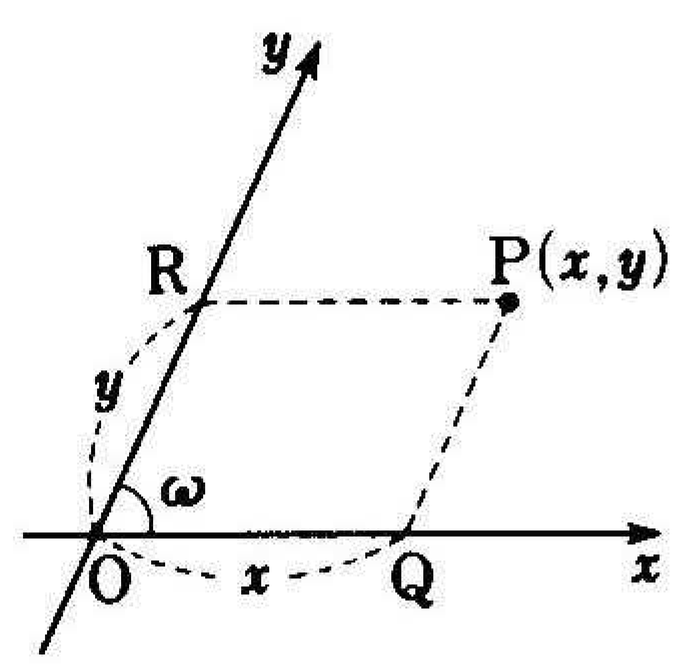
＊　＊　＊

◆ 上のように点と数の組 (x, y) を対応させることができました。そこで，次は点と点の関係，直線，直線と直線の関係，円，……といったいろいろな図形を数で表すことが必要になってきます。このようにして，**座標幾何学** あるいは **解析幾何学** といわれる分野ができたのです。さらに，微分学を応用して微分幾何学といった分野もできましたし，はじめて幾何学は飛躍的な発展をとげることができたのでした。

しかし，実は平面上の点を数と対応させるのは上の方法だけではありません。高校ではやりませんが，斜交座標，極座標，双極座標といったいろいろのものがあります。次にそのいくつかを紹介だけしておきましょう。

＊　＊　＊

◆ **斜交座標**　右の図に示すように，点Ｏで x，y 軸が ω（オメガ）の角をなして交わるとしましょう。点Ｐから x，y

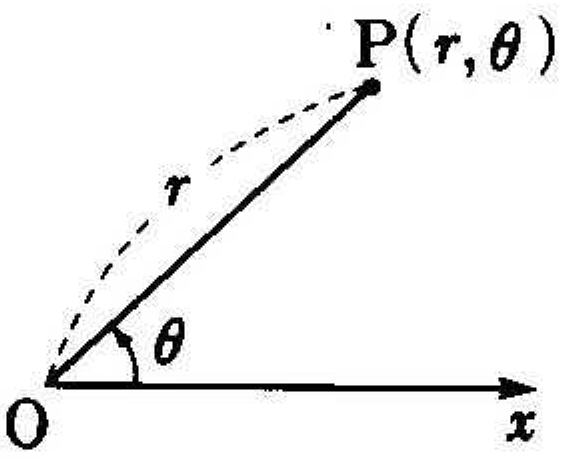


軸に平行に PR, PQ を引き，OQ, OR を x, y にとるのです。

このような座標系を採用しますと，一般には，角 ω が入ってきてめんどうになります。しかし，ある種の問題にはスゴク便利になるのです。

* * *

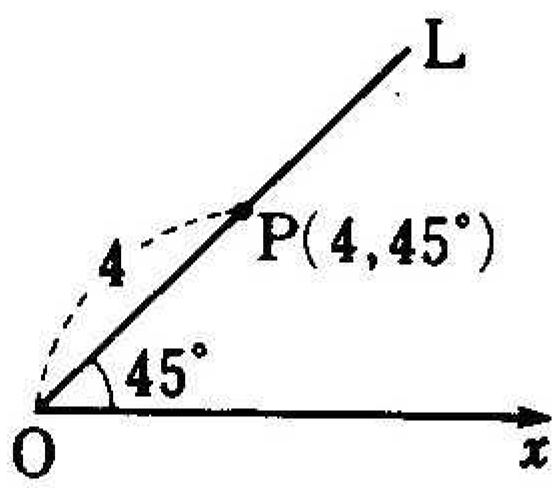
◆ **極座標** 右の図のように定半直線 Ox を引き，これを **始線** または **起線** といいます。1点Pを極Oに結び，$OP=r$, $\angle POx=\theta$ として，Pを $(r,\ \theta)$ で表すのが極座標です。



r や θ にもプラス・マイナスを考えます。θ は $\angle POx$ を時計の針の回転する方向と反対に測ったときプラス，同じ方向に測ったときマイナスとします。また r はOから，上にきめた θ の辺上に測ったときプラス，反対の方向に測ったときマイナスとします。いや，こんな説明を読んでも，何のことかわからないでしょう。次に，実際にやってみましょう。

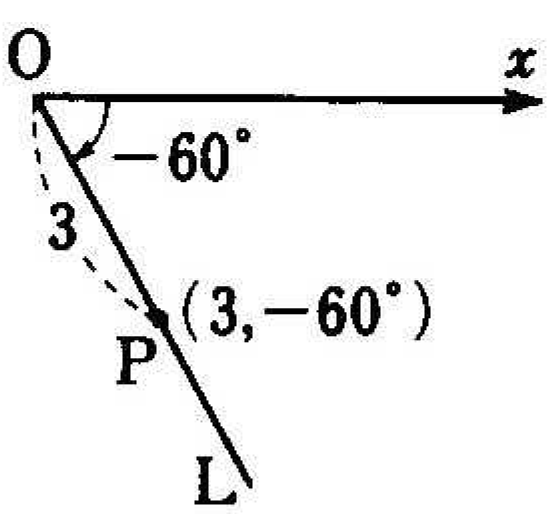
練習 3. 極座標で点 $P(4,\ 45°)$ をプロットせよ。

(ヒント) まず始線Oを引いて，Ox から反時計まわりに 45° の半直線 OL を引き，その上に $OP=4$ になるように点Pをとればいいのです。



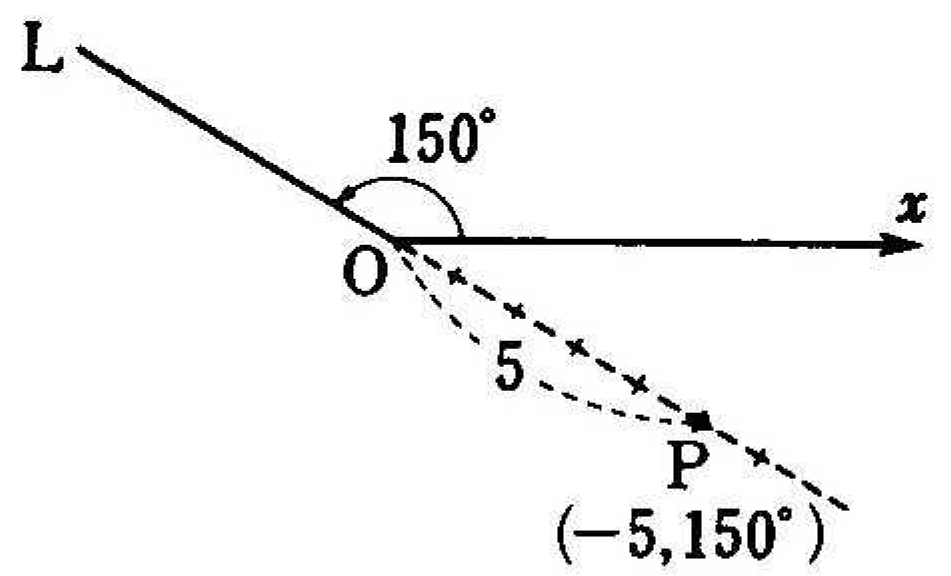
練習 4. 極座標で点 $(3,\ -60°)$ をプロットせよ。

(ヒント) 右の図のように時計まわりに 60° の半直線 OL を引いてから点Pをとればよいのです。



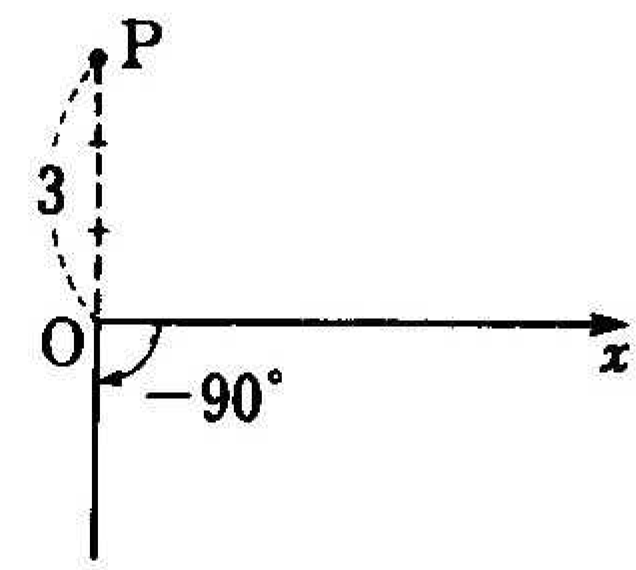
練習 5. 極座標で点 $P(-5,\ 150°)$ をプロットせよ。

(ヒント) もう説明はいいでしょう。



練習 6. 極座標で点 $P(-3,\ -90°)$ をプロットせよ。

(解) 下図の通り。

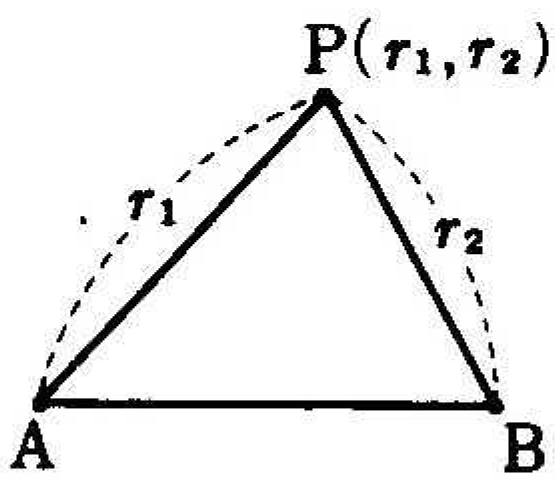


(注) 極座標で1点をいろいろ表すことができます。例えば，上の練習 6. の点 $P(-3,\ -90°)$ は $(3,\ 90°)$ といってもいいでしょう。

また，基礎解析でやる一般角を使って $\left(3,\ \dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ と表すこともできます。これは不便に見えますが，問題によっては，それだからこそ便利になるのです。

* * *

◆ **双極座標** 2定点A, Bを定め，点 $P(r_1,\ r_2)$ を右の図に示すように $AP=r_1$, $BP=r_2$ で表すこともできます。しかし，これでは $P(2,\ 3)$ といっただけでは AB についてPと対称な点も $(2,\ 3)$ になって区別がつかない。これはまずい。しかし，AB に関して対称な図形を扱うなら何の不便もないでしょう。問題によっては，この座標も便利なのです。例えば，A, B を焦点とするだ円は



$$r_1+r_2=一定$$

と表せるでしょう。

ともかく，ここでは座標にもいろいろあるということを学んだのです。

① 点の座標の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆図形において，点はアルファにしてオメガである。はじめにしておわりなんです。決してバカにしてはいけない，ということ!!

◆ 点の座標について大切なことが2つあります。1つは，点の座標を求める問題。もう1つは点の座標の関係を求める問題です。単純にいえば，前のほうは方程式を解く問題で，あとのほうは消去の問題であるということができます。しかし，こんな抽象的なことよりも，具体的な練習に入るとしましょう。

*　*　*

◆ 点の座標を求める問題を2，3当たってみませんか。まず，これです。

練習 1. 三角形の3辺の中点の座標が

$$\left(\frac{1}{4},\ \frac{13}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(-\frac{5}{4},\ \frac{5}{4}\right)$$

であるとき，この三角形の頂点の座標を求めよ。（明治大）

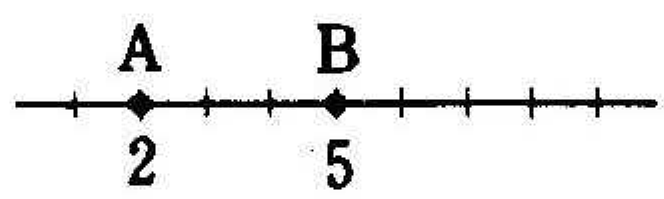
ヒント 3つの頂点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ とすると

$$x_1+x_2=\frac{1}{2},\qquad y_1+y_2=\frac{13}{2}$$
$$x_2+x_3=-1,\qquad y_2+y_3=2$$
$$x_3+x_1=-\frac{5}{2},\qquad y_3+y_1=\frac{5}{2}$$

これらを解けばいい。

答 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$，$(1,\ 3)$，$(-2,\ -1)$

練習 2. 数直線上の2点 A(2)，B(5) がある。ABを2:1に内分する点，および2:1に外分する点の座標を求めよ。



ヒント 内分点は $\frac{2\cdot5+1\cdot2}{2+1}=\frac{12}{3}=4$ で，外分点は $\frac{2\cdot5-1\cdot2}{2-1}=8$ である。

3/5

練習 3. 平面上に3点 O(0, 0)，A(12, −5)，B(17, 7) が与えられている。線分OA，ABを辺とする平行四辺形OABCを作るとき頂点Cの座標を求めよ。（鹿児島大）

ヒント 平行四辺形の対角線の中点は一致するから，OBの中点とACの中点は一致します。いまCの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\frac{0+17}{2}=\frac{12+x}{2},\quad \frac{0+7}{2}=\frac{-5+y}{2}$$
$$\therefore\quad x=5,\ y=12$$

答 C(5, 12)

練習 4. 点 A(2, 3) について，点 P(1, 5) と対称な点Qの座標を求めよ。

ヒント PQの中点がAであるから，Qの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\frac{x+1}{2}=2,\quad \frac{y+5}{2}=3$$
$$\therefore\quad x=3,\ y=1$$

答 (3, 1)

練習4.のような図形変換の問題については（☞ p.250）を参照。

*　*　*

◆ 次は点の関係を求める問題です。

3/5

練習 5. 2点 A(1, 3)，B(4, 2) を通る直線の方程式を求めよ。

ヒント これは，直線上の点を $P(x,\ y)$ とするとき，x と y の間にどんな関係があるか，という問題なんです。そして，それはABの傾きとAPの傾きが等しいということなんです。だから

$$\frac{2-3}{4-1}=\frac{y-3}{x-1}$$
$$\therefore\quad x+3y-10=0\qquad \cdots\cdots 答$$

練習 6. 2点 A(1, 2), B(5, 8) を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

ヒント もちろん AB の中点 M(3, 5) が円の中心，$AB=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ が直径ですから，円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-5)^2=\sqrt{13}^2$$

となります。しかし，中心を求めないでも求めることができます。それは，円周上の点を P(x, y) とすると

$$PA \perp PB$$

ですから PA, PB の傾きの積が -1

$$\therefore \quad \frac{y-2}{x-1}\cdot\frac{y-8}{x-5}=-1$$

$$\therefore \quad (x-1)(x-5)+(y-2)(y-8)=0$$

ここで大切なことは点を求めないですんだことです。次の問題でも同じことがあります。

3/5

練習 7. 2直線 $x+my=1$, $mx-y=2$ の交点の軌跡を求めよ。

ヒント 交点を求めないで，交点を (X, Y) としますと，これが2直線上にあることから

$$X+mY=1 \quad \cdots\cdots①$$

$$mX-Y=2 \quad \cdots\cdots②$$

$X \neq 0$ のとき，②より

$$m=\frac{Y+2}{X}$$

これを①に代入して

$$X+\frac{Y+2}{X}\cdot Y=1$$

$$\therefore \quad X^2+Y^2+2Y=X \quad (X \neq 0)$$

$X=0$ のときは①，②は

$$mY=1, \quad -Y=2$$

となり，したがって $m=-\frac{1}{2}$ のとき $X=0$, $Y=-2$ を満足する。つまり点 $(0, -2)$ は軌跡上の点である。

以上のことから，軌跡は，円 $x^2+y^2-x+2y=0$ から点 $(0, 0)$ を除いたものである。

ここでも，交点を求めないで交点の軌跡が求められたわけです。このような扱い方はやや高等な技術に属するのですが，できればよくマスターしておきたいところです。次の問題になると，もはや，この方法しかちょっと手がつけられないでしょう。

3/5

練習 8. 2直線

$$x^2+xy-2y^2+lx+my+1=0$$

の交点の軌跡を求めよ。

ヒント これが2直線を表すのですから，左辺は因数分解できて

$$(x+2y+a)(x-y+b)=0$$

の形になるハズ。そして $ab=1$

したがって，2直線は

$$x+2y+a=0$$

$$x-y+b=0$$

この交点を (X, Y) とすると

$$X+2Y+a=0$$

$$X-Y+b=0$$

そこで，これから X, Y の関係を求めればよいということになります。

そこで a, b を求めて，これを $ab=1$ に代入すると，

$$(-X-2Y)(-X+Y)=1$$

$$\therefore \quad X^2+XY-2Y^2=1$$

ゆえに，求める軌跡の方程式は

$$x^2+xy-2y^2=1$$

である。

このように，交点に限りませんが，点を扱うのに点の座標を直接扱わなくてもすむことが多いのです。もう1つ：——

3/5

練習 9. 2直線 $x+2y+5=0$, $3x-y+4=0$ の交点と原点を通る直線の方程式を求めよ。

ヒント 与えられた2直線の交点を通る直線は

$$\lambda(x+2y+5)+\mu(3x-y+4)=0$$

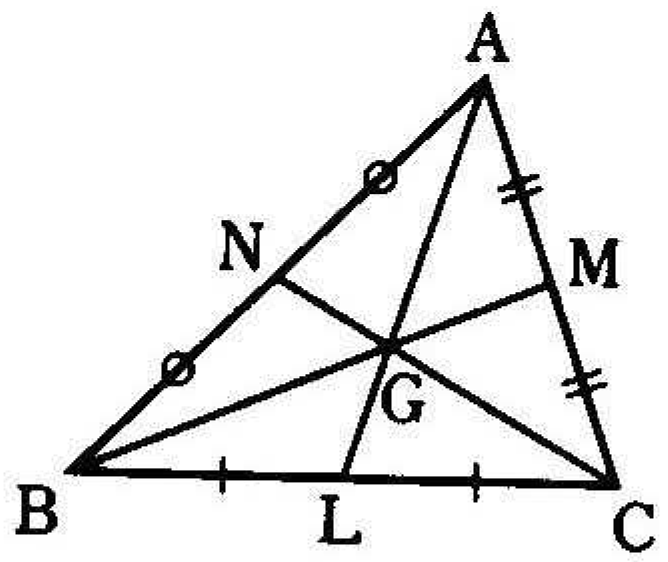
と表せます。$\lambda=-4$, $\mu=5$ にとると，$(0, 0)$ を通ることは明らか。したがって，……

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◐ 三角形の重心は重要

◆重心がとくに重要な意味をもつのは力学においてであるが，数学においてもまた，大きな役割をもっているのだ。

◆ △ABC において，BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N としますと，AL，BM，CN は同一点で交わります。



この点を三角形の **重心**（じゅうしん）といいます。ところで，AL，BM，CN が同一点を通る証明はいろいろあります。

M，N はそれぞれ辺 AC，AB の中点ですから，中点連結定理から

$$MN /\!/ BC \quad かつ \quad MN=\frac{1}{2}BC$$

いま BM と CN の交点を G としますと

$$\triangle MNG \backsim \triangle BCG$$

$$\therefore \quad BG=2GM, \ CG=2GN$$

つまり，点 G は BM，CN を 2：1 に内分する点です。そこで，次に AL，CN の交点を G′ とすると，まったく同じ関係が成り立ちますから，G′ は AL を 2：1 に内分すると同時に CN を 2：1 に内分する点でもありますから，G と G′ は一致します。

座標を使うと次のようにもできます。

点 A，B，C の座標をそれぞれ $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$，$C(c_1,\ c_2)$ としますと

$$L\left(\frac{b_1+c_1}{2},\ \frac{b_2+c_2}{2}\right)$$

ゆえに重心の x 座標は次の通りです。

$$\frac{1\times a_1+2\times\dfrac{b_1+c_1}{2}}{1+2}=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

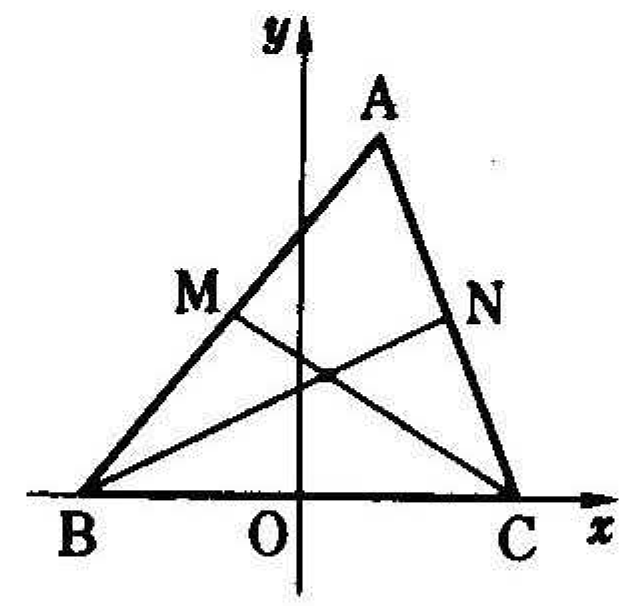
y 座標も同様ですから，重心の座標は

$$\left(\frac{\boldsymbol{a_1+b_1+c_1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\boldsymbol{a_2+b_2+c_2}}{\mathbf{3}}\right)$$

で与えられます。

ともあれ，この重心の座標を与える公式はオボエテおいて下さい。

練習 1. 三角形の三中線は同一点を通ることを示せ。



ヒント　△ABC の辺BC を x 軸にとり，$\overline{BC}$ の中点を原点とし，各頂点の座標を

$A(a,\ a')$，$B(-l,\ 0)$，$C(l,\ 0)$

とすれば $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ の中点 M，N はそれぞれ $M\left(\dfrac{a-l}{2},\ \dfrac{a'}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{a+l}{2},\ \dfrac{a'}{2}\right)$ で与えられる。ゆえに BN の方程式は

$$y-0=\frac{\dfrac{a'}{2}}{\dfrac{a+l}{2}+l}(x+l)$$

$$\therefore \quad y=\frac{a'}{a+3l}(x+l) \qquad \cdots\cdots①$$

同様に CM の方程式は

$$y=\frac{a'}{a-3l}(x-l) \qquad \cdots\cdots②$$

BN，CM の交点は①，②を解いて

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{a'}{3}$$

ところが中線 AO の方程式は

$$y=\frac{a'}{a}x$$

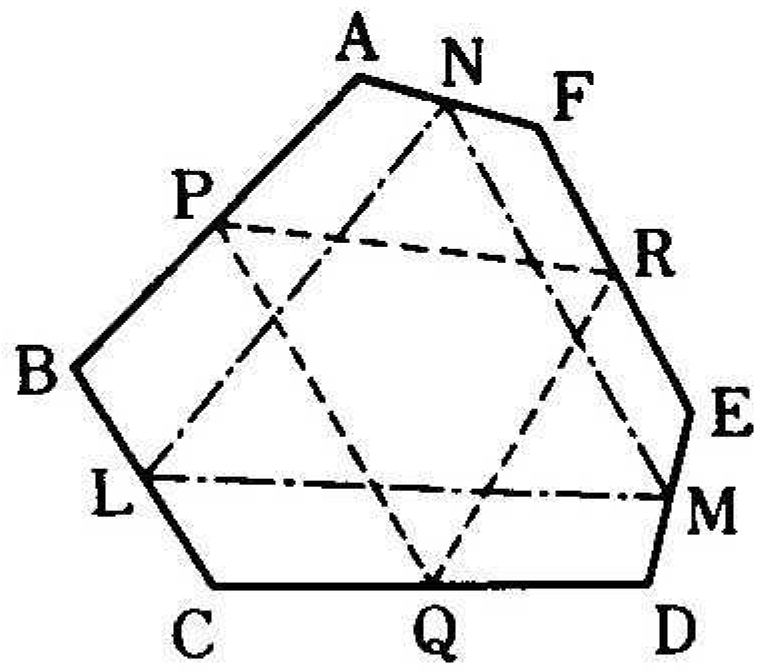
で，確かに BN，CM の交点を通ることがわかります。

キミ，もし余裕があったなら，A を通り x 軸に垂直な直線を y 軸に選んでやってみるといいでしょう。このときには，各頂点の座標

は A(0, a), B(b, 0), C(c, 0) とすればいいのです。

■練習 2. 六角形 ABCDEF の辺AB, BC, CD, DE, EF, FA の中点をそれぞれ P, L, Q, M, R, N とすると，△PQR と △LMN の重心は一致することを示せ。

ヒント　A, B, C, ……の座標をそれぞれ (a, a'), (b, b') ……とすると，点 P, L, ……などの座標は，



それぞれ $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a'+b'}{2}\right)$, ……ですから，

△PQR の重心の x 座標は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}+\frac{e+f}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f)$$

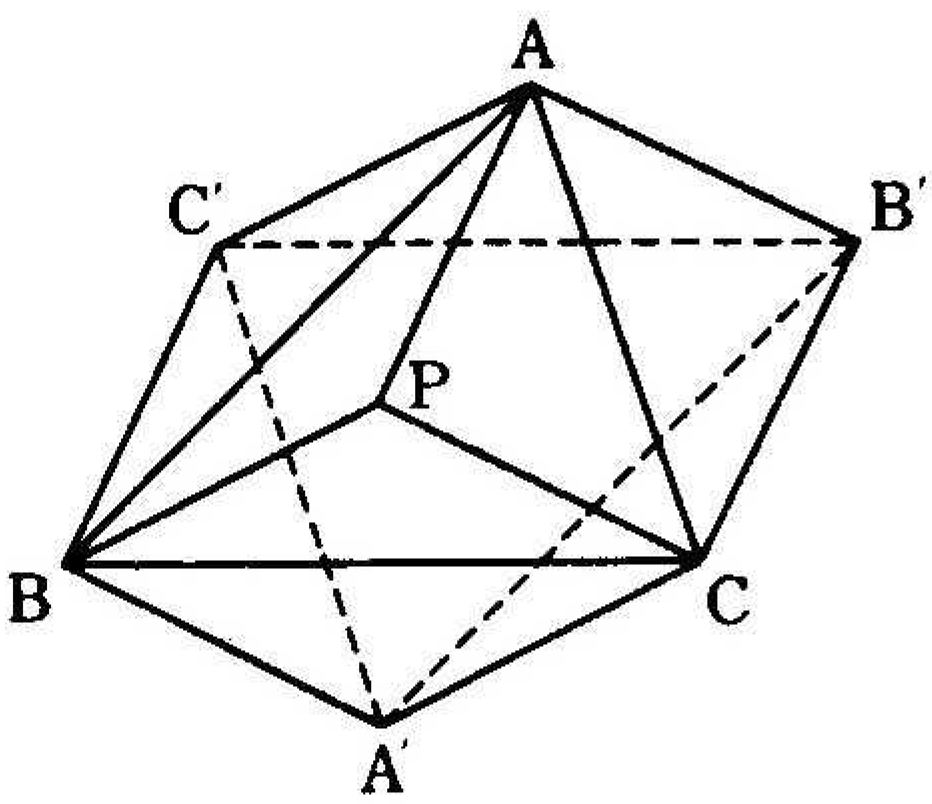
△LMN についてもおなじ。また，y 座標は $'$ をつけるだけで求められます。だから……

* * *

◆ では，次は，やや高度な問題をとりあげてみましょう。3/7

■練習 3. △ABC の内部に1点 P をとり，▱APBC′, ▱BPCA′, ▱CPAB′ を作り，△A′B′C′ の重心を G′ とすると，PG′ は定点を通ることを示せ。　（横浜国大）

ヒント



点A, B, C, P の座標をそれぞれ (a, a'), (b, b')……としますと A′, B′, C′ の座標はそれぞれ

$$(b+c-p,\ b'+c'-p')$$

などで与えられます。したがって，△A′B′C′ の重心 G′ の x 座標は

$$\frac{1}{3}\{(b+c-p)+(c+a-p)+(a+b-p)\}$$
$$=\frac{1}{3}\{2(a+b+c)-3p\}$$
$$=\frac{2}{3}(a+b+c)-p=2g-p$$

で与えられます。ここに g は △ABC の重心の x 座標です。

y 座標についても同様です。

つまり，この結果は，点 P と G′ の中点が G であることを示しています。

いいかえると，PG′ は定点 G を通るわけです。

3/7

■練習 4. 2定点 A, B と定円 C がある。円 C 上の動点を P とするとき，△ABP の重心 G の軌跡を求めよ。

ヒント　円 C の中心を (0, 0), 半径を R とすれば

円 C の方程式は

$$x^2+y^2=R^2 \qquad \cdots\cdots①$$

で与えられます。

また，A(a, 0), B(b, b'), P(x, y) とし，G(X, Y) としますと

$$X=\frac{x+a+b}{3},\quad Y=\frac{y+0+b'}{3}$$

$$\therefore\quad x=3X-(a+b),\quad y=3Y-b'$$

これを①に代入しますと

$$\{3X-(a+b)\}^2+(3Y-b')^2=R^2$$

$$\therefore\quad \left(X-\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{b'}{3}\right)^2=\left(\frac{R}{3}\right)^2$$

ゆえに求める軌跡は点 $\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{b'}{3}\right)$ すなわち △ABO の重心を中心とし，半径が円 C の3分の1に等しいような円であることがわかります。

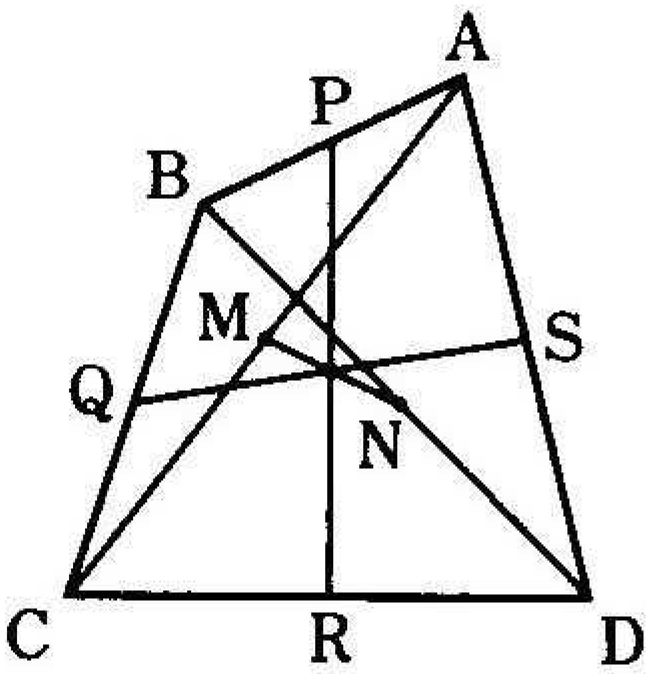
余裕があれば，別の座標軸をとって，もういちどやってみるといいのだが……。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

四角形の重心とは

◈四角形にも重心があるということは，直接には知らなくてもいい。しかし，重心の関係した問題はいろいろあるんですよ。

◆ 四角形 ABCD において，AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ P, Q, R, S, M, N としますと，3つの直線 PR, QS, MN は同一点で交わります。



この交点を四角形 ABCD の重心といいます。べつに，このコトバを知らなくてもさしつかえありませんが，このような性質があることは知っておきたいもの。ところで，まず，上の定理の証明からはじめましょう。

$\triangle$ABC において，P，Q は辺 BA，BC の中点ですから，**中点連結定理** によって

$$PQ /\!/ AC \quad \text{かつ} \quad PQ=\frac{1}{2}AC$$

同様に $\triangle$ADC について考えて

$$SR /\!/ AC \quad \text{かつ} \quad SR=\frac{1}{2}AC$$

$$\therefore \quad PQ \underline{/\!/} SR$$

ゆえに，PQRS は平行四辺形です。ゆえに，PR, QS はその中点で交わります。同じようにして，PR, MN もその中点で交わることがわかりますから，PR, QS, MN は，その中点で交わるわけです。

では，その証明をしておくことにしましょう。x，y 軸をとって，A，B，C，Dの座標をそれぞれ

$A(a,\ a')$, $B(b,\ b')$, $C(c,\ c')$, $D(d,\ d')$

としますと，各辺の中点の座標は，次のようになります。

$$P\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a'+b'}{2}\right),\ Q\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{b'+c'}{2}\right),\ \cdots\cdots$$

ゆえに，$\overline{PR}$ の中点の x 座標は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

y 座標は $'$ をつけるだけ。そして，他の $\overline{QS}$, $\overline{MN}$ の中点の座標もまったくおなじ座標で与えられます。だから，3線分は同一点を通ることがわかります。もちろん，直線 PR などの方程式を用いてもできます。なお上で突然，線分の中点をとりたくなる理由を説明するのは困難です。だから，この証明をみると不愉快になる人もあるでしょう。それは，図を正確にかいてみたら，中点でありそうだ。そこで，中点をとってみたら，グウゼンにも，ちょうどうまくいった，と理解しておけばいいでしょう。

■**練習 1.** 四角形 ABCD において1つの頂点と，他の3つの頂点を頂点とする三角形の重心を結ぶ直線は同一点を通ることを示せ。

(ヒント) A，B，C，Dの座標を $(a,\ a')$, $(b,\ b')$, ……としますと $\triangle$BCD の重心 G_A の座標は $\left(\dfrac{b+c+d}{3},\ \dfrac{b'+c'+d'}{3}\right)$ で与えられます。したがって $\overline{AG_A}$ を $3:1$ に内分する点の x 座標は

$$\frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{b+c+d}{3}+1\cdot a\right)=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

で与えられます。同様の記号を使うと BG_B, CG_C, DG_D を $3:1$ に内分する点もみなおなじになって証明完了です。

■練習1. で，$\overline{AG_A}$ を 3：1 に内分する，ということに抵抗を感じる人もあるでしょう。

それをやらないで済ますには，直線 AG_A の方程式を求めて，4 直線が同一点で交わることをいわなければなりません。しかし，かなりめんどうな計算になります。ファイトのある人はやってみませんか。

*　*　*

■練習2. 4定点 A(2, 3)，B(1, 5)，C(−3, −4)，D(0, −4) からの距離の平方の和が一定 (k^2) である点Pの軌跡を求めよ。

(ヒント)　P(x, y) としますと

$$\overline{PA}^2=(x-2)^2+(y-3)^2$$
$$=x^2+y^2-4x-6y+13$$
$$\overline{PB}^2=(x-1)^2+(y-5)^2$$
$$=x^2+y^2-2x-10y+26$$
$$\overline{PC}^2=(x+3)^2+(y+4)^2$$
$$=x^2+y^2+6x+8y+25$$
$$\overline{PD}^2=(x-0)^2+(y+4)^2$$
$$=x^2+y^2+8y+16$$

ところが

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=k^2$ であるから，

$$4x^2+4y^2+80=k^2$$
$$\therefore\quad x^2+y^2=\frac{k^2-80}{4}$$

ゆえに $k^2<80$ ならば軌跡はない。

$k^2=80$ ならば原点ただ1点で，これはもとの四角形の重心です。

また，$k^2>80$ ならば軌跡は四角形の重心を中心とし，半径 $\frac{1}{2}\sqrt{k^2-80}$ の円です。

(注)　この場合にかぎらず，一般に重心を中心とする円になるのです。

*　*　*

■練習3. 四角形 ABCD において，$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$ をおなじ比に内分する点をそれぞれP，Q，R，Sとするとき，四角形 ABCD と四角形 PQRS の重心は一致することを示せ。

(ヒント)　2点 A(a, a')，B(b, b') があるとき $\overline{AB}$ を $m:n$ に内分する点は

$$\left(\frac{mb+na}{m+n},\ \frac{mb'+na'}{m+n}\right)$$

で与えられます。これを使えばもちろんできますが，実は

$$\frac{mb+na}{m+n}=\frac{m}{m+n}b+\frac{n}{m+n}a$$

で，$\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=1$ ですから，一般に $t:(1-t)$ に分ける方が計算がらくになります。

では：——

P，Q，R，S は，それぞれ辺 AB，BC，CD，DA を $t:1-t$ に内分するものとすれば

$$P(tb+(1-t)a,\ tb'+(1-t)a')$$
$$Q(tc+(1-t)b,\ tc'+(1-t)b')$$
$$R(td+(1-t)c,\ td'+(1-t)c')$$
$$S(ta+(1-t)d,\ ta'+(1-t)d')$$

となります。したがって，四角形 PQRS の重心の座標は

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4},\ \frac{a'+b'+c'+d'}{4}\right)$$

で，これは四角形 ABCD の重心の座標なのです。

よって証明されました。　Q.E.D.

*　*　*

◆　このように，四角形の重心というのは重要な性質をもっていることがわかるでしょう。

では，最後にもうひとつ：——

■練習4. 正方形 ABCD と，半直線 AB，BC，CD，DA 上に定点P，Q，R，S がある。いま4点X，Y，Z，Uはそれぞれ P，Q，R，Sから出発しておなじ速さで，それぞれAP，BQ，CR，DSの方向に進むものとする。このとき，四角形 XYZU の重心は定点であることを示せ。

*　*　*

○直線の方程式の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆直線の方程式なんて，中学校からやっているじゃないか，というかもしれないが，なかなか，どうして……

◆ 直線の方程式で知っていなければならぬことは3つです。

第1は，x，y に関する1次方程式

$$ax+by+c=0$$

は直線を表すということ，

第2は，

点 $(\alpha,\ \beta)$ を通り，傾き m の直線は

$$y-\beta=m(x-\alpha)$$

で与えられるということ，

第3は，点 $(\alpha,\ \beta)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられるということ，

です。第3については（☞ p. 274）を参照してもらうとして，ここでは第2に重点をおいてその扱い方をいろいろと学ぶことにしよう，というわけ。

*　*　*

◆ では，まず第2の場合の基礎がため，といこう。

Q 7/11

練習 1. 点 $(-3,\ 4)$ を通り，傾き2の直線の方程式を求めよ。

ヒント 上の第2の公式から

$$y-4=2\{x-(-3)\}$$

$$\therefore\quad 2x-y+10=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 2. 2点 $(2,\ 3)$，$(5,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

ヒント 点 $(2,\ 3)$，$(5,\ 1)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{3-1}{2-5}=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$ ですから，求める直線は

$$y-3=-\frac{2}{3}(x-2)$$

$$\therefore\quad 2x+3y-13=0$$

となります。もちろん

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-5)$$

としても同じになります。

7/11

練習 3. 2点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$，$\mathrm{Q}(3,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直2等分線の方程式を求めよ。

（芝浦工大）

ヒント PQ の中点は $(1,\ 2)$，また，PQ の傾きは $\dfrac{3-1}{-1-3}=-\dfrac{1}{2}$ ですから，PQ に垂直な直線の傾きは2です。ゆえに求める直線は

$$y-2=2(x-1)$$

$$\therefore\quad y=2x \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

あるいは，垂直2等分線上の点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は P，Q から等距離にあることから

$$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RQ}}$$

$$\therefore\quad (x+1)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$$

$$\therefore\quad y=2x$$

としてもいい。

このほうが簡単だと思いませんか？

7/13

練習 4. 3点　$\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 1)$，$\mathrm{C}(a, 3)$ が1直線上にあるように定数 a の値を定めよ。

ヒント 直線 AB の方程式は

$$y-2=\frac{2-1}{1-4}(x-1)$$

$$\therefore\quad x+3y-7=0$$

この上に点 $(a,\ 3)$ があるから

$$a+3\cdot3-7=0 \qquad \therefore\quad a=-2$$

実は，こんなことをやるより AB，BC の傾きが等しいことを式で表して

$$\frac{1-2}{4-1}=\frac{3-1}{a-4} \quad \therefore \quad \frac{-1}{3}=\frac{2}{a-4}$$

$$\therefore \quad -a+4=6$$

$$\therefore \quad a=-2$$

としたほうがラクだったなあ。

*　　*　　*

◆ 2直線の交点を通る直線の扱い方も知っておかなければなりません。例えば

$$2x+y-3=0 \text{ と } x+4y-5=0$$

の交点は $(1,\ 1)$ ですが，λ，μ を定数として

$$\lambda(2x+y-3)+\mu(x+4y-5)=0 \cdots\cdots (*)$$

を作りますと，これは $x=1$，$y=1$ によって満足されます。つまり，λ，μ が何であろうとも，直線 $(*)$ は定点 $(1,\ 1)$ を通るわけです。

（注） λ，μ は数学ではよく使うギリシア文字です。読み方は λ がラムダ，μ はミュー，この機会にオボエテおいてください。なおローマ字ではそれぞれ l，m に当たります。

では，これを：――

3/13

練習 5. 2直線　$4x+3y-12=0$，$-x+3y+3=0$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線の方程式を求めよ。

8

（ヒント） $4x+3y-12=0$ と $-x+3y+3=0$ の交点を通る直線を

$$4x+3y-12+k(-x+3y+3)=0$$

とすると，$y=x$ に平行なことから

$$\frac{k-4}{3k+3}=1$$

$$\therefore \quad k-4=3k+3$$

$$\therefore \quad k=-\frac{7}{2}$$

よって，求める方程式は

$$4x+3y-12-\frac{7}{2}(-x+3y+3)=0$$

$$\therefore \quad x-y-3=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

（注） ここでは

$$\lambda(4x+3y-12)+\mu(-x+3y+3)=0$$

としないで

$$(4x+3y-12)+k(-x+3y+3)=0$$

とおきました。あとのほうは k をどのように選んでも $-x+3y+3=0$ を表すことができないという欠点があります。しかし，求める直線がこれに重ならないことは明らかですので，こうおいてもよかったのです。というよりも，必ずといっていいくらい，さしつかえありません。なぜなら，2直線の一方が求めるものだ，ということは，まずないことだからです。

3/13

練習 6. 2つの直線　$x+y-3=0$　および $2x+5y-1=0$ の交点と原点を結ぶ直線の方程式を求めよ。

（ヒント） $(x+y-3)+k(2x+5y-1)=0$

が原点を通るように k をきめればいいでしょう。$x=0$，$y=0$ を代入すると

$$-3-k=0 \qquad \therefore \quad k=-3$$

ゆえに，求める方程式は

$$5x+14y=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

です。

*　　*　　*

◆ 2次方程式が因数分解できて2直線を表すこともあります。（☞ p. 273）

9

練習 7. $2x^2-xy-y^2-7x+y+6=0$ は2直線を表すことを示し，そのグラフをかけ。

（ヒント） $y^2+(x-1)y-(2x^2-7x+6)=0$

$$\therefore \quad y^2+(x-1)y-(2x-3)(x-2)=0$$

$$\{y+(2x-3)\}\{y-(x-2)\}=0$$

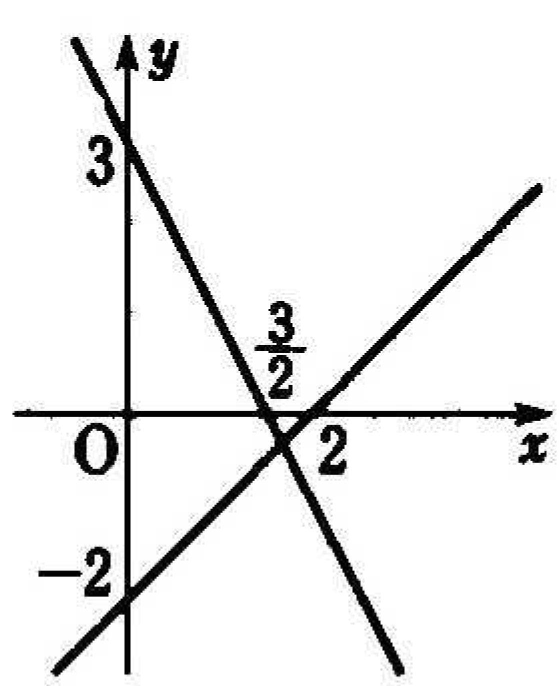
$$\therefore \quad y=-2x+3$$

および

$$y=x-2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & (2x-3) \\ 1 & & -(x-2) \\ \hline 2x-3 & & -x+2 \end{array}$$

このグラフは右のようになります。



2次方程式が2直線を表すことについての問題は，本質的には因数分解の問題であることを忘れてはいけませんよ。

1回目	年	月	日
2回目	年	月	日
3回目	年	月	日

① 2直線の関係とは

◆2直線があったとき，どんな相互関係を生じるか，それには3つの場合があるのです。そして，それがすべてなのです。

◆ 平面上に2直線があったとき，これは1点で交わるか，平行になるか，重なるか，の3つの場合があります。まずこの関係を吟味することからはじめましょう。

2直線

$l:\ ax+by+c=0$

$l':\ a'x+b'y+c'=0$

が，1点で交わるための条件は，2直線の傾きが異なることです。つまり $aa'bb'\neq 0$ なら

$$-\frac{a}{b}\neq-\frac{a'}{b'}$$

すなわち

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\qquad \textbf{（1点で交わる条件）}$$

と書けます。また，l と l' が平行であるための条件は，傾きが等しいことから

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

が必要で，2直線が一致しないことも含めて

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\qquad \textbf{（平行である条件）}$$

となります。

最後に一致する条件は文字がすべて0でないとして

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\qquad \textbf{（一致する条件）}$$

であることもおわかりでしょう。

係数の中に0のものがあるときには，個々に考えたほうが無難です。

では，さっそくながら，具体的な問題にいきましょう。

3/14

■練習 1. 2つの直線 $ax+y=1$，$x+ay=1$ が1点で交わるための条件を求めよ。

ヒント　$\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{1}{a}$ より　$a^2\neq 1$

3/14　$\therefore\quad a\neq\pm 1$　……答

■練習 2. 2直線

$4x+ay+3=0,\ 2x+y+5=0$

が平行であるように定数 a の値を求めよ。

ヒント　$\dfrac{4}{2}=\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{3}{5}$

より　3/14　$a=2$　……答

■練習 3. 2直線

$x+ay+2=0,\ (a+1)x+2y-2=0$

が一致するための条件を求めよ。　（慶大）

ヒント　$\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{-2}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{a+1}=-1$　かつ　$\dfrac{a}{2}=-1$

$\therefore\quad a=-2$　……答

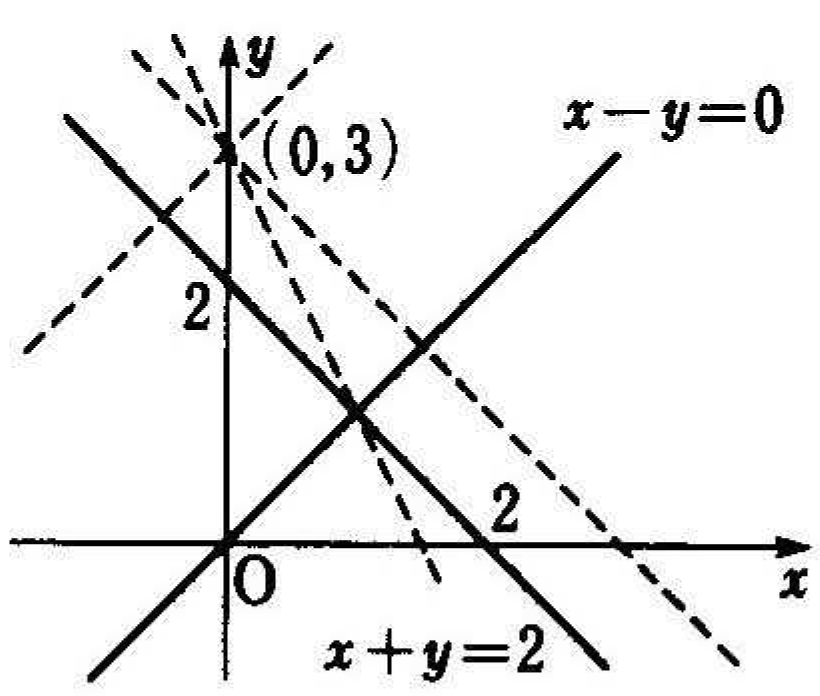
*　*　*

◆ 基礎的なことは終わりましたから，次にはもっと複雑なものに進むとしましょう。

■練習 4. 3直線 $x-y=0$，$x+y-2=0$，$5x-ky-15=0$ が三角形を作るための k の条件を求めよ。　（岐阜大）

ヒント　図をていねいにかいてみるとわかるように，結果は

$k\neq-10,\ k\neq-5,\ k\neq 5$



練習 5. 3直線

$$\begin{cases} 2x-3y=a+3 \\ x+3y=1-a \\ 3x-y=2a-1 \end{cases}$$

が1点で交わるように a の値を定めよ。

（高知大）

ヒント $2x-3y=a+3$ ……①

$x+3y=1-a$ ……②

$3x-y=2a-1$ ……③

①+②： $3x=4$ $\therefore$ $x=\dfrac{4}{3}$

したがって $y=-\dfrac{3a+1}{9}$

これを③に代入して

$$3\cdot\frac{4}{3}-\left(-\frac{3a+1}{9}\right)=2a-1$$

$$\therefore\ a=\frac{46}{15} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ x, y に関する2次方程式が1次式の積に因数分解されるときは直線を表しますが，その2直線に条件が入ると，かなりめんどうな問題になることが多いものです。この機会に2，3やっておくことにしましょう。

練習 6. $ax^2+2hxy+by^2=0$ $(ab\neq 0)$ が直交する2直線を表す条件を求めよ。

ヒント $by^2+2hxy+ax^2=0$

解の公式を使って y について解きますと

$$y=\frac{-hx\pm\sqrt{h^2x^2-abx^2}}{b}$$

$$\therefore\ y=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}x$$

この2直線が直交するための条件は傾きの積が -1 ですから

$$\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}\cdot\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

$$=\frac{h^2-(h^2-ab)}{b^2}=\frac{a}{b}=-1$$

$$\therefore\ a+b=0$$

これと実数条件 $h^2-ab>0$ と組み合わせて求める条件が得られるのです。

練習 7. $ax^2+(1-a)xy-y^2+x-y=0$ が直交する2つの直線を表すための条件を求めよ。

ヒント a について整理しますと

$$x(x-y)a+(xy-y^2+x-y)=0$$

$$x(x-y)a+y(x-y)+(x-y)=0$$

$$\therefore\ (x-y)(ax+y+1)=0$$

ゆえに与えられた方程式は，2直線

$$\begin{cases} y=x \\ y=-ax-1 \end{cases}$$

を表す。これが直交するための条件は

$$1\cdot(-a)=-1 \quad \therefore\ a=1 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 8. 方程式 $2x^2+3xy+ay^2+bx+2y+4=0$ が直交する2直線を表すという。これら2直線を求め，図示せよ。（阪大）

ヒント x について整頓すると

$$2x^2+(3y+b)x+(ay^2+2y+4)=0$$

解の公式を使って x について解くと

$$x=\frac{-(3y+b)\pm\sqrt{(9-8a)y^2+(6b-16)y+(b^2-32)}}{4}$$

これが2直線を表すならば根号内は完全平方式である。したがって

$$x=\frac{-3y-b\pm\sqrt{9-8a}\,y+\cdots\cdots}{4}$$

$$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8a}}{4}y+\cdots\cdots$$

したがって，2つの直線の直交する条件は

$$\frac{-3+\sqrt{9-8a}}{4}\cdot\frac{-3-\sqrt{9-8a}}{4}=-1$$

$$\therefore\ a=-2$$

そこで，改めて

左辺 $=(x+2y+c)(2x-y+d)$

とおいて，係数を比較をすると c, d がきまる。結果は

(1) $x+2y=4$, $2x-y=1$

(2) $x+2y=-2$, $2x-y=-2$

の2組の解がある。グラフをかくことはキミにまかせるとして，余力があったら未定係数法を使って別解をやってみるとよい。

◐ 垂線の長さを与える公式

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆平面上の1点から1直線に下した垂線の長さの公式は大変有用です。その公式を導くことと，その応用が目的なんですが。

◆ まず，公式は，

平面上の1点 $A(\alpha,\ \beta)$ より直線
$l: ax+by+c=0$
に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

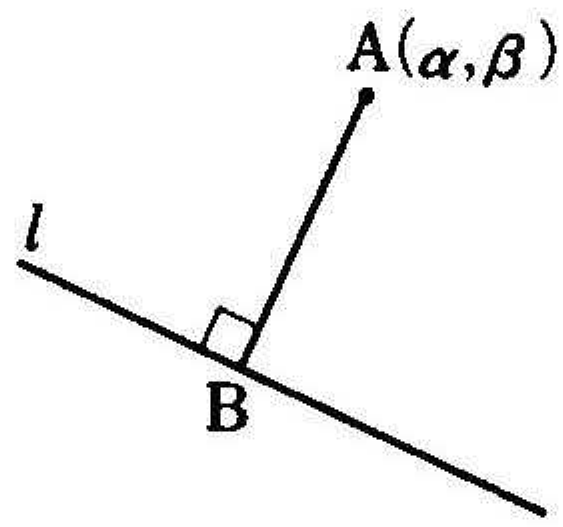
です。この公式を導くにはいろいろの仕方がありますが，ここでは強引に計算でやろう。

点 $A(\alpha,\ \beta)$ を通り l に垂直な直線の方程式は

$b(x-\alpha)-a(y-\beta)=0$

つまり

$bx-ay=b\alpha-a\beta$ ……①



で与えられます。l と①の交点Bは，これらを連立させて解いて

$$B\left(\frac{b^2\alpha-ab\beta-ac}{a^2+b^2},\ \frac{-ab\alpha+a^2\beta-bc}{a^2+b^2}\right)$$

ゆえに

$$\overline{AB}^2=\left(\frac{b^2\alpha-ab\beta-ac}{a^2+b^2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{-ab\alpha+a^2\beta-bc}{a^2+b^2}-\beta\right)^2$$

$$=\frac{a^2(a\alpha+b\beta+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2(a\alpha+b\beta+c)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a\alpha+b\beta+c)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\therefore\quad \overline{AB}=\frac{\sqrt{(a\alpha+b\beta+c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（注） $\sqrt{(a\alpha+b\beta+c)^2}=a\alpha+b\beta+c$ ではありませんよ。絶対値| |をお忘れなく!!

*　*　*

◆ 垂線の長さの公式は覚えておくべきもの。その上で使い方が大切です。次にその主なものを練習しておきましょう。

まず単純な応用から：——

3/18

練習 1. 原点 $(0,\ 0)$ から直線 $3x+4y=5$ に下した垂線の長さを求めよ。

（解） 点 $(0,\ 0)$ から

$$3x+4y-5=0$$

に下した垂線の長さは，公式により

$$\frac{|3\cdot0+4\cdot0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

3/18

練習 2. 原点を通り，点 $(3,\ 1)$ から1なる距離にある直線の方程式を求めよ。

（解） 求める直線の方程式を

$$ax+by=0$$

とすると，点 $(3,\ 1)$ からの距離は

$$\frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\therefore\quad |3a+b|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad (3a+b)^2=a^2+b^2$$

$$\therefore\quad a(4a+3b)=0$$

$$\therefore\quad a=0 \text{ あるいは } b=-\frac{4}{3}a$$

したがって求める直線は

$$y=0 \quad と \quad 3x-4y=0 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

である。

3/18

練習 3. 2つの平行な直線

$l: ax+by+c=0$

$l': ax+by+c'=0$

の距離を求めよ。ただし $ab\neq0,\ c\neq c'$.

（ヒント） 一方の直線上の点から他方に下した垂線の長さを求めればいいでしょう。例えば l が x 軸と交わる点 $A\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$ をとり，Aから l' に下した垂線の長さを求めると

$$\frac{\left|a\left(-\frac{c}{a}\right)+b\cdot 0+c'\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{c\sim c'}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

となります。答としては $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ でもかまわない。なお，$c\sim c'$ は c と c' の差（つまり大きいほうから小さいほうを引いたもの）を表す記号です。

3/19

練習 4. 2直線 $y=x-3$ と $y=2x-1$ の交点を通り，点 (2, 2) からの距離が1であるような直線の方程式を求めよ。（早大）

ヒント　まず2直線の交点を求めてみると $(-2,\ -5)$ ですから，求める直線は

$$y+5=m(x+2)$$

とおくことができます。すなわち，

$$mx-y+(2m-5)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

点 (2, 2) から①に下した垂線の長さが1であるから

$$\frac{|2m-2+(2m-5)|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\quad (4m-7)^2=m^2+1$$

これを解いて

$$m=\frac{12}{5},\ \frac{4}{3}$$

よって，求める直線は

$$y=\frac{12}{5}x-\frac{1}{5} \quad と \quad y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3} \quad \cdots \boxed{答}$$

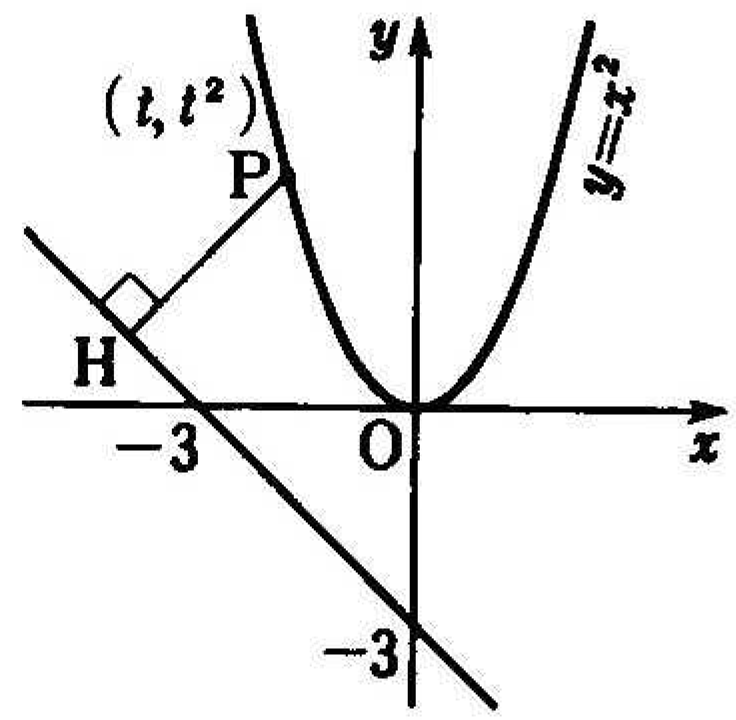
これらがわかれば，次は，いわば本格的な応用ということになります。

*　*　*

◆ 垂線の長さの公式はいろいろ重要な応用をもっています。例えば角の2等分線を求めることについては（☞ p. 276）を参照してください。円の弦の長さについては（☞ p. 298）に多くの例をあげてあります。

ここでは，2次曲線に関連した問題をとりあげてみましょう。

練習 5. 放物線 $y=x^2$ 上の点Pと，直線 $x+y+3=0$ 上の点Qとを結ぶ線分 PQ の長さの最小値を求めよ。（山形大）



ヒント　放物線上の点 $P(t,\ t^2)$ から直線 $l：x+y+3=0$ に下した垂線 PH の長さの最小値を求めればいいでしょう。

さて，公式により

$$\overline{PH}=\frac{|t+t^2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|t^2+t+3|$$

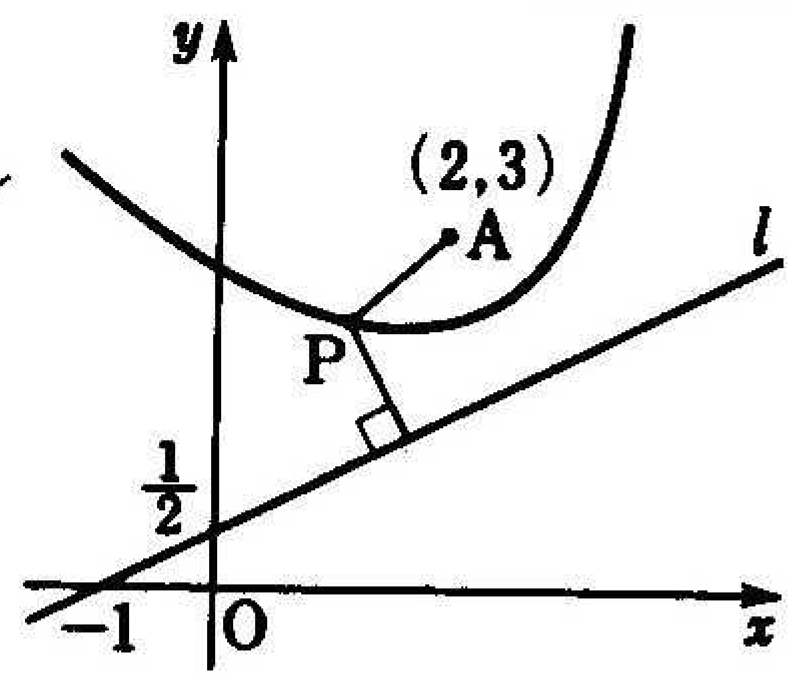
ところが　$t^2+t+3=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$

ですから，$\overline{PH}$ の最小値は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{11}{4}=\frac{11\sqrt{2}}{8}$$

となります。

練習 6. 点 A(2, 3) と直線 $l：x-2y+1=0$ に至る距離の等しい点Pの軌跡の方程式を求めよ。（北九州大）



ヒント　点 $P(X,\ Y)$ から l に下した垂線の長さは $\dfrac{|X-2Y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$ に等しい。

また，

$$AP=\sqrt{(X-2)^2+(Y-3)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{|X-2Y+1|}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{X^2+Y^2-4X-6Y+13}$$

$$\therefore\quad X^2+4Y^2+1-4XY+2X-4Y$$

$$=5(X^2+Y^2-4X-6Y+13)$$

整理して小文字に書きかえると

$$4x^2+4xy+y^2-22x-26y+64=0$$

となります。

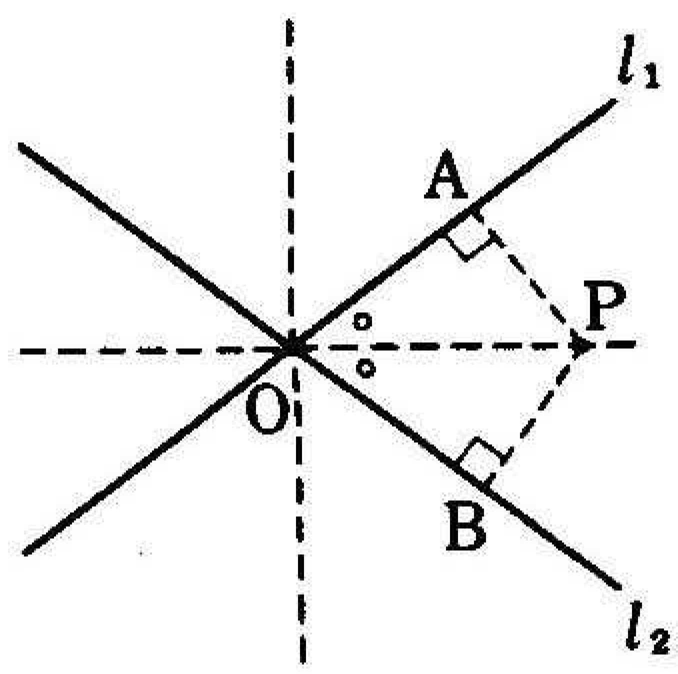
●角の2等分線を求めるには

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆角というものはとかく扱いにくいもの。考えてもごらん。角はみる方向をかえると変わってみえさえするものなのだ。

◆ 2直線の方程式が与えられたときに，その角の2等分線を求めるにはどうしたらよいかというのが，ここの主眼点です。

さて，2直線 l_1, l_2 の交点をO，l_1, l_2 のなす角（2つありますが）の2等分線上の任意の点をPとし，Pから l_1, l_2 に下した垂線の足をA，Bとしますと，



△POA，△POB において

$$\begin{cases} \angle POA = \angle POB \\ \angle A = \angle B \ (=90^\circ) \\ PO \text{ は共通} \end{cases}$$

∴ △POA≡△POB

∴ PA=PB

逆に，ある点Pから l_1, l_2 に下した垂線の長さが等しければ，Pは l_1, l_2 のなす角の2等分線上にあります。

だから，l_1, l_2 に下した

垂線の長さの等しい点の軌跡

を求めれば，それが求める2等分線ということになります。

ところで，点 (α, β) から，直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さの公式は

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

です。詳しくは（☞ p. 274）を参照。

* * *

◆ さあ，これで準備は完了です。では，次へ。

3/20

■練習 1. 2直線 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ のなす角の2等分線の方程式を求めよ。

（解） 角の2等分線は，その角を作る直線への距離の等しい点の軌跡であるから，2等分線上の点を $P(X, Y)$ とすると

$$\frac{|2X-Y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|X+2Y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$\therefore\ |2X-Y-1|=|X+2Y-1|$$

（ところが $|a|=|b|$ なら $a=\pm b$ であるから）

$$2X-Y-1=\pm(X+2Y-1)$$

＋を採用すると　$X-3Y=0$

－を採用すると　$3X+Y-2=0$

が得られる。

答　$x-3y=0$, $3x+y-2=0$

■練習 2. 平面上に3点 $A(4, 5)$, $B(1, 1)$, $C(5, -2)$ がある。$\angle ABC$ の2等分線の方程式を求めよ。

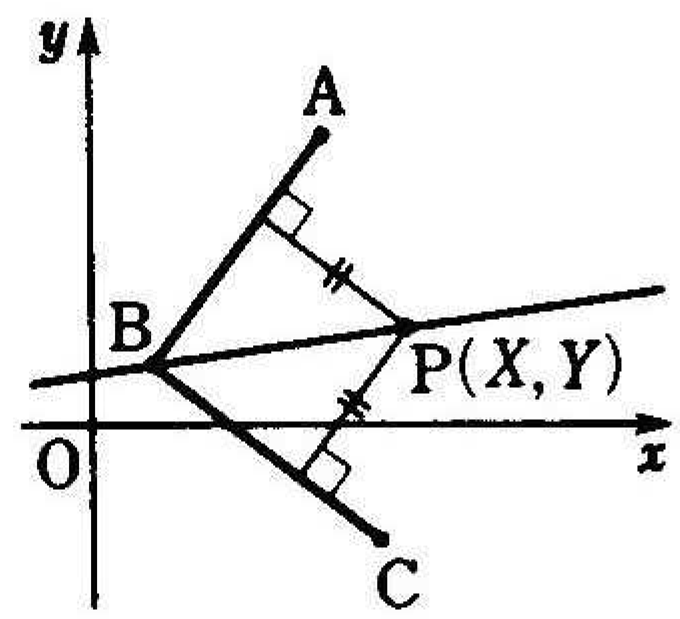
（ヒント） ABの方程式は

$4x-3y-1=0$

BCの方程式は

$3x+4y-7=0$

ですから，そのなす角の2等分線上の点 $P(X, Y)$ に対して



$$\frac{|4X-3Y-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3X+4Y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\therefore\ |4X-3Y-1|=|3X+4Y-7|$$

$$\therefore\ 4X-3Y-1=\pm(3X+4Y-7)$$

＋を採用すれば　$X-7Y+6=0$

－を採用すれば　$7X+Y-8=0$

しかし，図からわかるように求める2等分線の傾きは正ですから，この2つのうち，上のほうが題意に適することがわかります。

答　$x-7y+6=0$

この問題に限れば，もっと簡単にもできます。というのは：——

$$BA=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$BC=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

から △ABC はBを頂点とする二等辺三角形です。そこで，AC の中点をMとすると，M の座標は $\left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ ですから，求める2等分線 BM の方程式は

$$y-1=\frac{1}{7}(x-1)$$

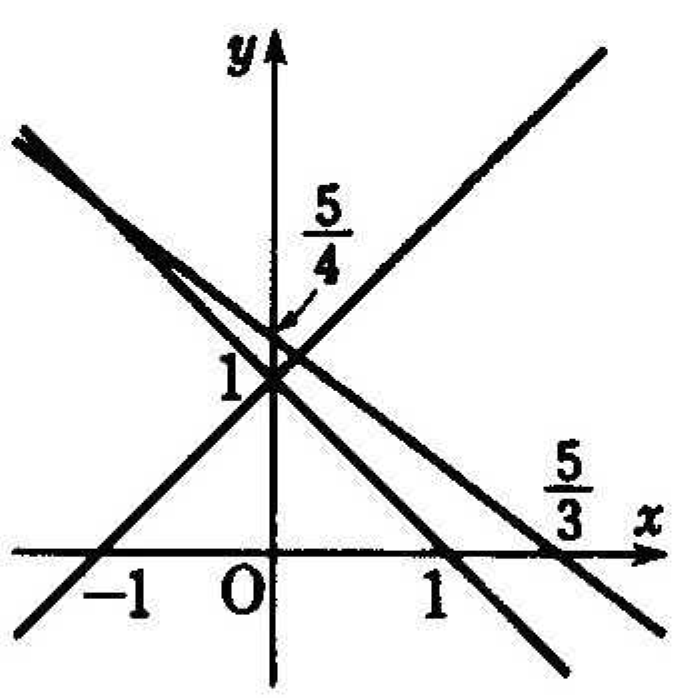
$$\therefore\quad x-7y+6=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ 角の2等分線が直接関係してくるのは三角形の内心です。例えばこれです。

練習 3. 3直線 $x+y-1=0$, $x-y+1=0$, $3x+4y-5=0$ で囲まれる三角形の内心の座標を求めよ。 (東大)

(ヒント) 内心 $I(X,\ Y)$ から，3直線に下した垂線の長さが等しいことから



$$\frac{|X+Y-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|X-Y+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|3X+4Y-5|}{5}$$

そして，内心Ｉは直線 $x+y-1=0$ について原点と反対側にあります。ところが，原点の座標を $x+y-1$ に代入してみると -1, つまり原点は $x+y-1$ の負領域にあるわけ。してみると内心は正領域にあるハズ。

$$\therefore\quad X+Y-1>0$$

同じようにして調べてみますと

$$X-Y+1<0,\quad 3X+4Y-5<0$$

$$\therefore\quad \frac{X+Y-1}{\sqrt{2}}=\frac{-(X-Y+1)}{\sqrt{2}}=\frac{-(3X+4Y-5)}{5}$$

これを解いて

$$X=0,\quad Y=\frac{15-5\sqrt{2}}{7}$$

となりますから，求める内心の座標は

$$\left(0,\ \frac{15-5\sqrt{2}}{7}\right) \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

なお，この解でもっとも大切な点は正領域，負領域を調べて絶対値記号をとりさるところです。領域については（☞ p. 294）を参照してください。

また，内心が y 軸上にあることは，はじめからわかっていますから，それを使うと，少し計算がラクになります。

3/20

練習 4. 3直線 $x+y-1=0$, $x-2y+2=0$, $2x-y-2=0$ によって囲まれた三角形の内接円の中心を求めよ。 (横浜国大)

答 $\left(\frac{2+\sqrt{10}}{6},\ \frac{2+\sqrt{10}}{6}\right)$

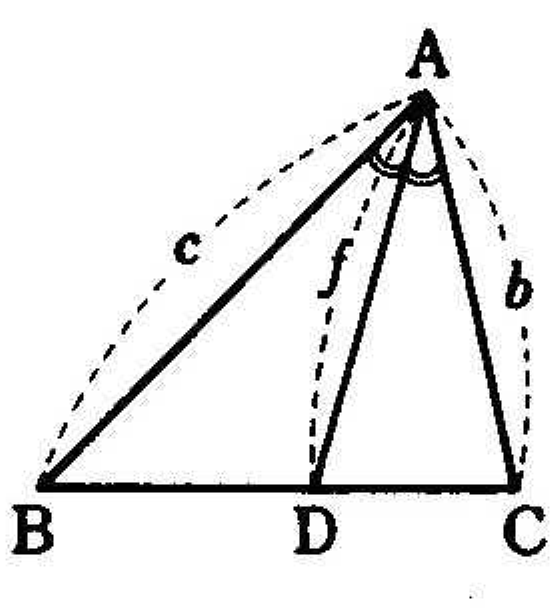
* * *

◆ ついでに三角形の角の2等分線の長さについて学んでおくとしましょう。

3/20

練習 5. △ABC において，$\angle BAC=60°$, $AB=c$, $AC=b$ のとき，$\angle A$ の2等分線 AD の長さを求めよ。

(解) $AD=f$ とすると



$$\triangle ABD=\frac{1}{2}cf\sin 30°=\frac{1}{4}cf$$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}bf\sin 30°=\frac{1}{4}bf$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}cf+\frac{1}{4}bf=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

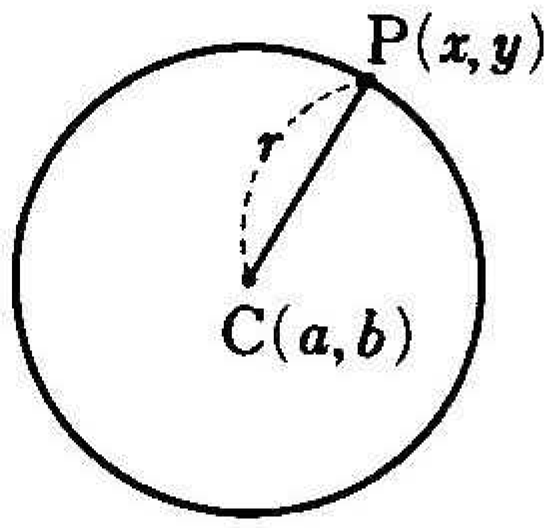
$$\therefore\quad f=\frac{\sqrt{3}\,bc}{b+c} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

◐円の方程式，2つ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆円の方程式には２つのタイプがあります。そして，そのいずれを採用するかによって著しくめんどうさがちがうものデス。

◆ 円の方程式には２つのタイプがあります。



第１は：円の中心をC$(a,\ b)$，半径をrとしますと，円周上の点P$(x,\ y)$とCの距離がrに等しいことから

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots①$$

なる関係があります。これが円の方程式の第１のタイプです。

注 円の半径はもちろん正ですから，①の式で$r>0$です。しかし，単に円の方程式が

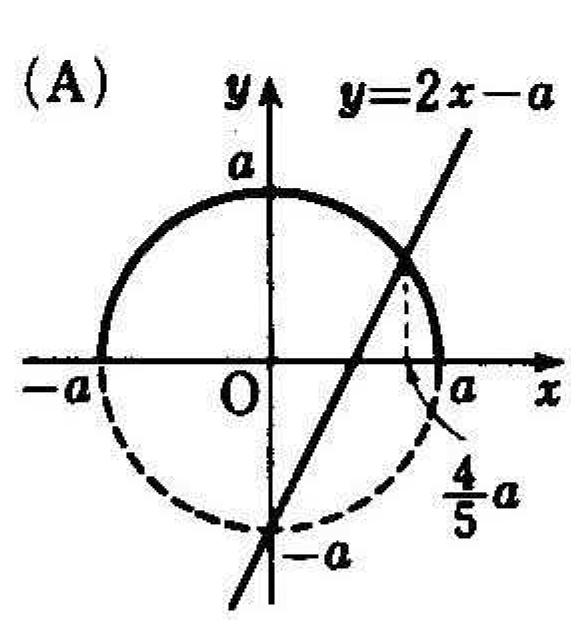
$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

と与えられたときには$c^2>0$はもちろんですが，cは負かもしれませんよ。このため，思ワヌ不覚をとることがあるもの。そうだ，１つの例をあげておくことにしよう。

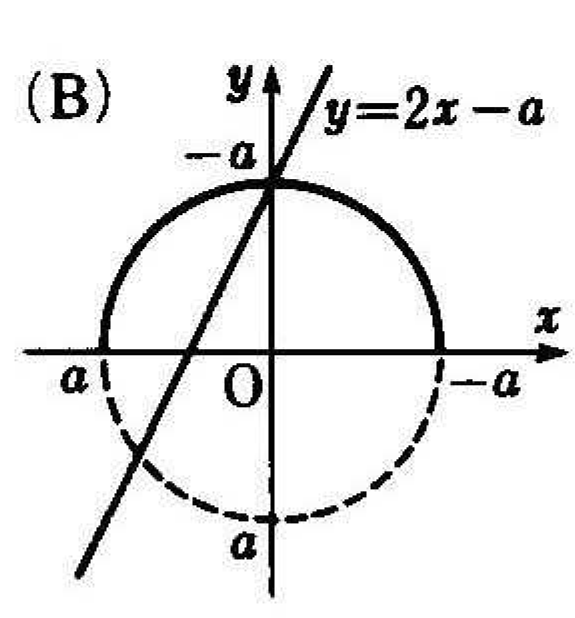
≪グラフを使って
$$\sqrt{a^2-x^2}=2x-a$$
を解け≫

というのがあると，たいていの人は下図(A)をかいて，答として$\dfrac{4a}{5}$を求めてできたと思う。しかし，$a<0$のときには(B)のようになって，0という答が出てきます。それから，$a=0$のときにはグラフは原点と直線$y=2x$で，もちろん解は$x=0$となります。いや，それはともかく，(B)の場合は半径が$-a$なんですよ。

(A)



(B)



◆ それはさておき，第２のタイプは①をバラバラにして

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$

を導き，さらにまとめて

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad \cdots\cdots②$$

となります。

ふつう円の中心や半径が直接関係してくる問題には①を使用し，円の中心や半径が直接関係してこない問題には②を使えばいいのです。では，実際の問題について練習してみましょう。

練習 1. ３点$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$を通る円の方程式を求めよ。　(室蘭工大)

ヒント これは直接円の中心も半径も関係ありませんね。だから，上の②のタイプを利用したほうがいいでしょう。そこで求める円の方程式を

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

とおきますと，３点$(0,2)$，$(1,1)$，$(1,-1)$を通ることから，

$$2B+C=-4 \quad \cdots\cdots①$$
$$A+B+C=-2 \quad \cdots\cdots②$$
$$A-B+C=-2 \quad \cdots\cdots③$$

②−③より　$2B=0$　∴　$B=0$

これを①に代入して

$$C=-4$$

B，Cの値を②に代入して

$$A=2$$

ゆえに，求める円の方程式は

$$x^2+y^2+2x-4=0 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

これをワザワザ$(x+1)^2+y^2=5$とすることは不必要です。

練習 2. 2直線 $2x-y-1=0$, $x+y+7=0$ の交点を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ。（福島大）

ヒント　2直線の交点を求めてみますと $(-2, -5)$ が得られます。これで中心が直接関与してきたのですから，第1のタイプの方程式を使うべきでしょう。

原点を通るから，半径は

$$\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$$

で，したがって

$$(x+2)^2+(y+5)^2=29 \qquad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+4x+10y=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

答としてはここまでやらないで，(*) のままでやめてもちろんかまわない。

7/21

練習 3. 3つの直線 $x-y+2=0$, $x+3y+6=0$, $5x+3y-6=0$ の作る三角形の外接円の方程式を求めよ。（福岡教育大）

ヒント　大きく分けて2つの方法があります。第1はまず3つの頂点を求めること。それは $(0, 2)$, $(-3, -1)$, $(3, -3)$ です。そこで，この3点を通る円の方程式を求めるのだ。

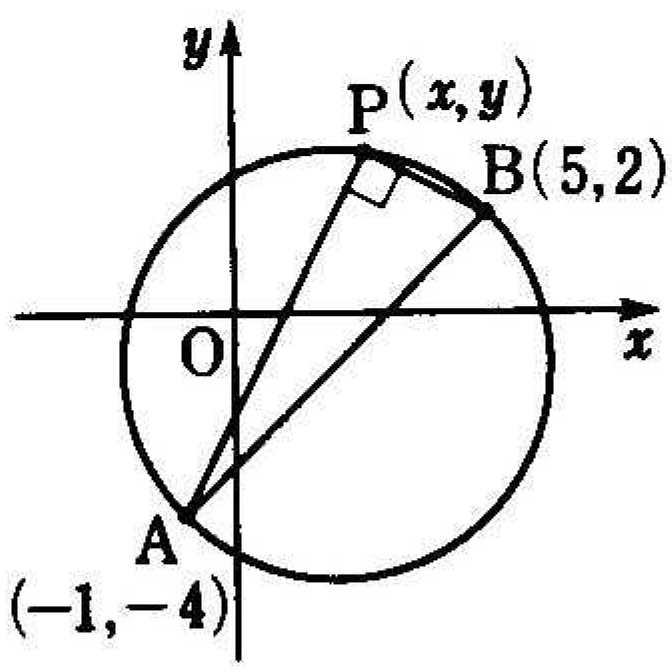
答　$x^2+y^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}y-9=0$

もう1つの方法は練習6. を参照のこと。

練習 4. 2点 $(-1, -4)$, $(5, 2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。（早大）

ヒント　2つの方法がありましょう。

1つは，まず中心 $(2, -1)$ を求め，半径 $\sqrt{18}$ を求め，これから円を求める。



いま1つは，点A $(-1, -4)$, 点B $(5, 2)$ と円周上の点 $P(x, y)$ をとると

$\angle APB=90^\circ$

$$\therefore\quad AP\perp BP$$

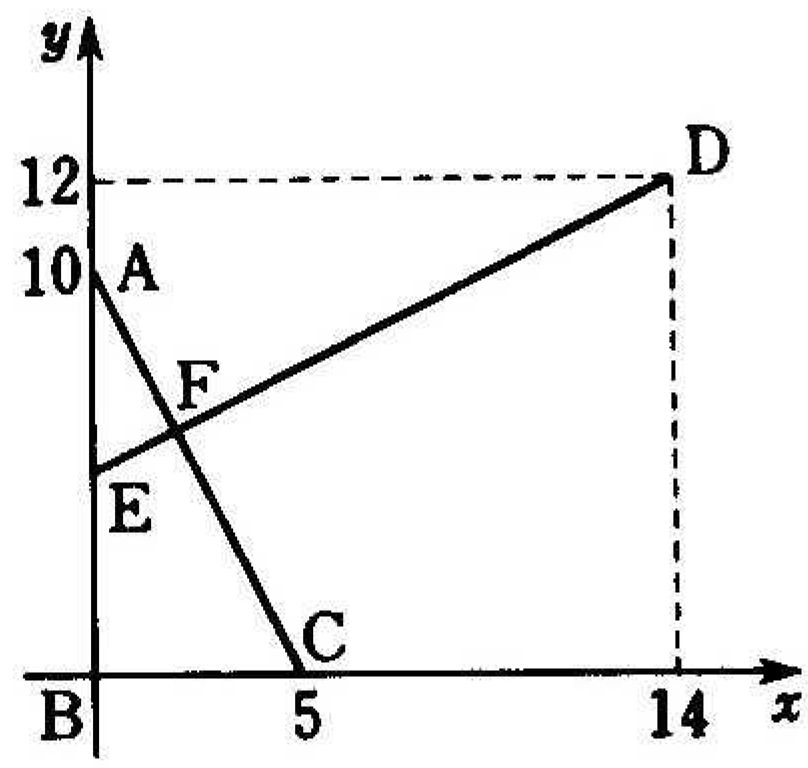
ところが AP, BP の傾きは，それぞれ $\dfrac{y-(-4)}{x-(-1)}$, $\dfrac{y-2}{x-5}$ ですから，その積は -1

$$\therefore\quad \frac{y+4}{x+1}\cdot\frac{y-2}{x-5}=-1$$

これを変形して

$$x^2+y^2-4x+2y-13=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 5. $A(0, 10)$, $B(0, 0)$, $C(5, 0)$, $D(14, 12)$ を平面上の4点とする。Dを通り，線分 AB, AC とそれぞれ E, F で交わる直線をとり，B, C, F, Eは同一周上にある異なる4点となるようにする。このとき，この円の方程式を求めよ。（東大）



解　四辺形 BCFE は円に内接するから

$\angle CFD=\angle CBE=90^\circ$

$\therefore$ $ED\perp AC$

しかるに AC の方程式は

$$y=-2x+10 \qquad \cdots\cdots①$$

したがって DE は点 $D(14, 12)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線である。ゆえに，DE の方程式は

$$y-12=\frac{1}{2}(x-14)$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}x+5 \qquad \cdots\cdots②$$

②と y 軸との交点Eの座標は $(0, 5)$, かくして求める円は EC を直径とする円

$$x^2+y^2-5x-5y=0$$

である。

3/21

練習 6. $l_1=x+a_1y+b_1=0$, $l_2=x+a_2y+b_2=0$, $l_3=x+a_3y+b_3=0$ は互いに2つずつ交わる3直線である。定数 p, q, r に対して $pl_1l_2+ql_2l_3+rl_3l_1=0$ が円を表すための p, q, r のみたすべき条件を求めよ。

また，この円は3直線 l_1, l_2, l_3 が作る三角形の外接円であることを証明せよ。

（早大）

答　$\begin{cases} p+q+r=pa_1a_2+qa_2a_3+ra_3a_1\neq 0 \\ p(a_1+a_2)+q(a_2+a_3)+r(a_3+a_1)=0 \end{cases}$

○直線と円の関係

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆直線と円との関係については垂線の長さの公式を使うのがコツ。これを使いこなせるようによく練習しておくこと。

◆ 直線と円との関係は3つあります。第1は交わるとき，第2は接するとき，そして，第3はまったく外にあるとき，です。

ところでこれを吟味するには，判別式を使う方法と，垂線の長さを利用する方法とあります。どちらも使いこなせることが大切ですが，便利なことからいうと，何といってもあとのほうです。ともあれ，**判別式の使い方**からはじめるとしようか。

2/23

練習 1. 直線 $x+y=1$ と円 $x^2+y^2-2mx-2my+2m-1=0$ との交点を求めよ。

(解) $y=1-x$ を円の方程式に代入すると

$$x^2+(1-x)^2-2mx-2m(1-x)+2m-1=0$$

$$\therefore\ x(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=0,\ 1$$

$x=0$ のとき $y=1$；$x=1$ のとき $y=0$

よって求める2点は $(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ である。

3/23

練習 2. 直線 $x+my-m=0$ が円 $x^2+y^2-x=0$ と相異なる2点で交わるように定数mの範囲を求めよ。

(解) $x=m-my$ を円の方程式に代入して

$$(m-my)^2+y^2-(m-my)=0$$

$$\therefore\ (m^2+1)y^2-m(2m-1)y+m(m-1)=0$$

これが相異なる2つの実数解をもつための条件は，判別式をDとして

$$D=\{m(2m-1)\}^2-4(m^2+1)\{m(m-1)\}>0$$

$$\therefore\ m(3m-4)<0$$

$$\therefore\ 0<m<\frac{4}{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 3. 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+a$ が接するための条件を求めよ。

(解) $y=x+a$ を円の方程式に代入すると

$$x^2+(x+a)^2=1$$

$$\therefore\ 2x^2+2ax+(a^2-1)=0$$

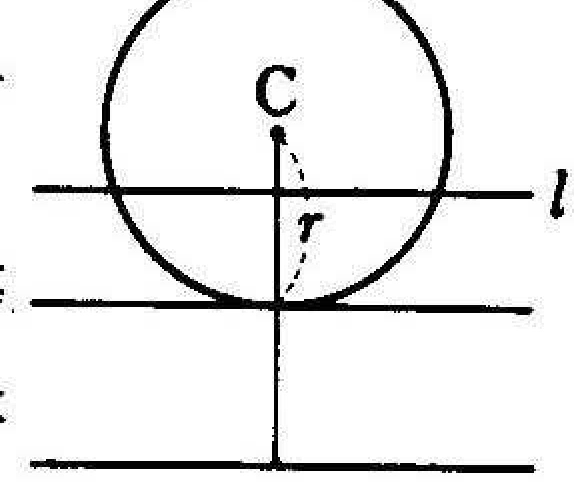
判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2-1)=0$$

$$\therefore\ a=\pm\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

◆ 次は **垂線の長さの使い方** です。



円の中心Cから直線 l に下した垂線の長さが半径より小なら相異なる2点で交わるし，半径に等しいなら接するし，半径より大ならまったく外にあることはおわかりでしょう。ところで，

点 $(\alpha,\ \beta)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられます。(☞ p. 274)

そこで次の問題をやってみましょう。

4/23

練習 4. 円 $x^2+y^2+8x-6y+21=0$ と直線 $x-y+5=0$ とは2点で交わることを示せ。

(ヒント) $x^2+y^2+8x-6y+21=0$ を変形すると

$$(x+4)^2+(y-3)^2=4$$

ゆえに円の中心は $(-4,\ 3)$ で半径は2です。

さて，点 $(-4,\ 3)$ から直線 $x-y+5=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|-4-3+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}<2$$

Q. E. D.

練習 5. 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=mx+3m$ が接するように定数mの値を求めよ。

（徳島大）

ヒント　円の中心 (0, 0) から直線 $mx-y+3m=0$ に下した垂線の長さが $\sqrt{5}$ に等しくなればよい。つまり，

$$\frac{|m\cdot 0-0+3m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\quad |3m|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore\quad 9m^2=5m^2+5$$

$$\therefore\quad m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$ ……答

練習 6. 直線 $Ax+By=1$ が
円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ に接するための条件を求めよ。

ヒント　円の中心 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ から直線に下した垂線の長さが $\frac{1}{2}$ であるための条件を求めればよい。それは，

$$\frac{\left|A\cdot\frac{1}{2}+B\cdot 0-1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \sqrt{A^2+B^2}=|A-2|$$

$$\therefore\quad A^2+B^2=(A-2)^2$$ ……答

注　もちろんバラバラにして

$$4A+B^2=4$$

としてもかまわない。

＊　＊　＊

◆ ではいささかめんどうなものにとりかかるとしましょう。では，まず，これからはじめるとしましょうか。

練習 7. 次の□にあてはまる数は何か。
直線 $y-5x+\square=0$ は円 $3x^2+3y^2-2x+4y+\square=0$ と点 (□, -1) において接する。

（東大）

ヒント　直線の方程式を $y=5x-m$ とし，円の方程式を

$$3x^2+3y^2-2x+4y+c=0$$

としますと，この2式からxを消去して

$$3\left(\frac{y+m}{5}\right)^2+3y^2-2\left(\frac{y+m}{5}\right)+4y+c=0$$

つまり

$$78y^2+2(3m+45)y+(3m^2-10m+25c)=0$$

が得られます。$y=-1$ において接するから，

$$y=-\frac{3m+45}{78}=-1$$

$$\therefore\quad m=11$$

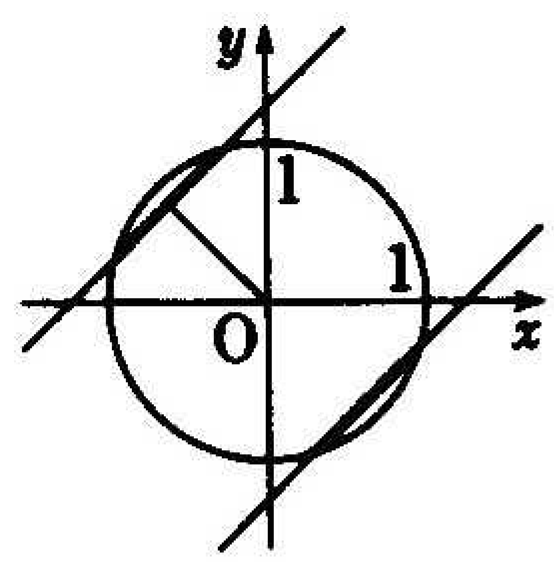
$y=-1$, $m=11$ を上の2次方程式に代入してcを求めれば，　$c=-7$

ここまでくればもう大丈夫。$y=-1$, $m=11$ を $y=5x-m$ に代入して　$x=2$

答　順に，11, -7, 2

練習 8. 円 $x^2+y^2=1$ によって，直線 $y=x+k$ が切りとられる弦の長さが1になるようにkの値を定めよ。　（九州産業大）

ヒント　半径が1で，弦の長さが1であるから，円の中心から下した垂線の長さは



$$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad |k|=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore\quad k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$ 答　$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

＊　＊　＊

◆ 円と直線との関係について，もう1つ大切なことがあります。それは，円C~~と直線 l が2点で交わるとき~~，その交点を通る円の方程式に関することです。~~それは，~~

$$l\ :\ ax+by+c=0$$

$$\mathrm{C}\ :\ x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

とすると，その交点を通る円は

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=k(ax+by+c)}$$

の形だということなんです。（☞ p. 302）

○円の接線の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆円はほかの2次曲線に比べるとカンタンです。そのため，めんどうな問題がよく出るのです。ハテナ，この意味わかる!!

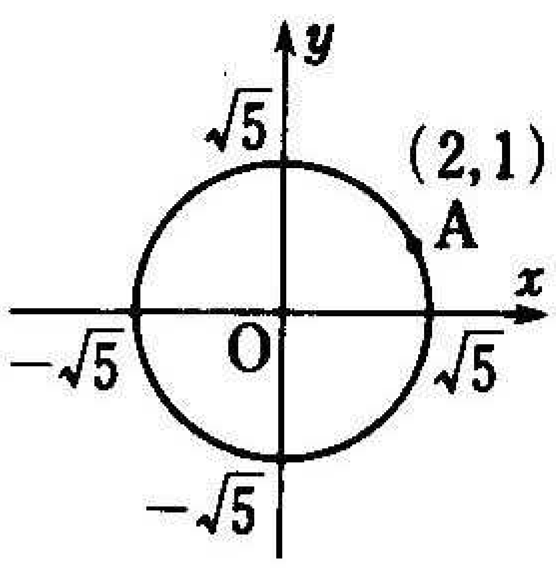
◆ 円・だ円・双曲線・放物線，いわゆる2次曲線の接線はみな同じように扱えるのですが，円だけはとくに簡単に扱えるのです。なぜなら，

円周上の1点における接線は，この点を通る半径に垂直

だからです。何はともあれ，次の練習をやってみませんか。

3/27

■**練習 1.** 円 $x^2+y^2=5$ 上の点 A(2, 1) における接線の方程式を求めよ。



ヒント　OA の傾きは $\dfrac{1}{2}$ ですから，これに垂直な直線の傾きは -2 です。ゆえに，求める接線は

$$y-1=-2(x-2)$$

$\therefore$　$2x+y=5$　…答

3/27

■**練習 2.** 円 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 上の1点 (0,0) における接線の方程式を求めよ。

ヒント　$x^2+y^2-6x-8y=0$

$\therefore$　$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

ですから，中心は (3, 4)，したがって中心から原点に至る直線の傾きは

$$\frac{0-4}{0-3}=\frac{4}{3}$$

ゆえに，これに垂直な直線の傾きは $-\dfrac{3}{4}$ です。よって求める接線の方程式は

$$y=-\frac{3}{4}x$$　……答

*　*　*

◆ 直線と円の関係は3つあります。交わるとき，接するとき，まったく離れているとき，です。ところで，この3つの場合を調べるには，円の中心から直線に下した垂線の長さが半径より小さいか，半径に等しいか，半径より大きいか，を吟味するのがもっとも簡単。忘れていたら思い出してくださいよ。

点 $(\alpha,\ \beta)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられます。では，次を：——

3/27

■**練習 3.** 傾きが3で円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式を求めよ。

ヒント　傾き3の直線は

$$y=3x+a$$

の形に書ける。あるいは

$$3x-y+a=0$$

円の中心 (0, 0) から下した垂線の長さは

$$\frac{|3\cdot0-0+a|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{10}}$$

これが半径2に等しければいい。つまり，

$$\frac{|a|}{\sqrt{10}}=2$$

$\therefore$　$|a|=2\sqrt{10}$

$\therefore$　$a=\pm2\sqrt{10}$

ゆえに，求める接線は

$$y=3x\pm2\sqrt{10}$$　……答

■**練習 4.** 点 (8, 19) を通り，円 $x^2+y^2-6x-8y=0$ に接する直線の方程式を求めよ。

（奈良女大）

ヒント　点 (8, 19) を通る直線は

$$y-19=m(x-8)$$

とおけます。つまり

$$mx-y+(19-8m)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$$

と変形できるから，円の中心 (3, 4) から直線①に下した垂線の長さは

$$\frac{|3m-4+(19-8m)|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|15-5m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

これが半径5に等しいから

$$\frac{|15-5m|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$$\therefore \quad \sqrt{m^2+1}=|3-m|$$

$$\therefore \quad m^2+1=9-6m+m^2$$

$$\therefore \quad m=\frac{4}{3}$$

よって，求める接線は

$$\frac{4}{3}x-y+\left(19-8\cdot\frac{4}{3}\right)=0$$

つまり

$$4x-3y+25=0$$

である。

オヤ!! オカシイゾ。円外の1点から接線がたった1つしかないハズはない。それとも点(8, 19) はこの円周上にあるのだろうか。

注意深い人はここでグラフを正確にかいてみてもう1つを発見するだろう。もし，理論好きなら，

$$y-19=m(x-8)$$

が y 軸に平行な直線を表さないことに気がついて

$$x-8=n(y-19)$$

とおきなおしてやりなおすかもしれない。

どれでもいい，やってみてください。もう1つの直線は $x=8$ なのです。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやることにしましょう。

3/17

■練習5. 点 $P(2,\ 2\sqrt{3})$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の接点Q，Rの座標を求めよ。　　(高知大)

(ヒント) 2つの考え方があります。

第1の方法は，点Pから引いた接線の方程式を求める。次に，この接線と円の方程式を連立させて解いて接点を求める。

第2の方法は，点Q（またはR）における接線が点Pを通るようにするのです。

さて，キミはどちらがいいと思いますか。多くの場合，あとのほうがいいのです。それでやってみましょう。

(解) Q または R の座標を $(a,\ b)$ とすると，この点における接線は

$$ax+by=4$$

これが点 $(2,\ 2\sqrt{3})$ を通るのであるから

$$2a+2\sqrt{3}b=4 \quad \cdots\cdots ①$$

次に，点 $(a,\ b)$ が円 $x^2+y^2=4$ 上にあることから

$$a^2+b^2=4 \quad \cdots\cdots ②$$

①より　$a=-\sqrt{3}b+2$

これを②に代入して

$$(-\sqrt{3}b+2)^2+b^2=4$$

$$\therefore \quad b=0,\ \sqrt{3}$$

ゆえに求める接点は

$$(2,\ 0),\ (-1,\ \sqrt{3}) \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

3/17

■練習6. 直線 $y=x+1$ 上に中心をもち，点 (5, 2) を通り，直線 $y=3-x$ に接する円の方程式を求めよ。　　(神戸市外大)

(ヒント) 円の中心を $(a,\ a+1)$ としますと，この点と (5, 2) との距離は，この点から $y=3-x$ に下した垂線の長さに等しいハズ。

$$\sqrt{(a-5)^2+(a+1-2)^2}=\frac{|a+(a+1)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\therefore \quad 2(2a^2-12a+26)=4a^2-8a+4$$

$$\therefore \quad a=3$$

ゆえに中心は(3, 4)，半径は $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ ですから，求める円は $(x-3)^2+(y-4)^2=8$ です。

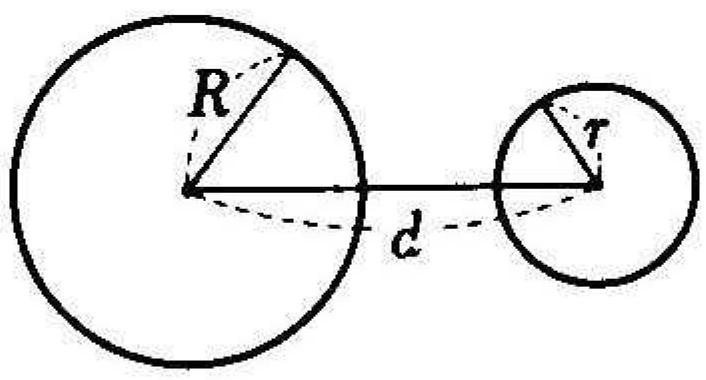
(注) 2直線が直交していることに気づくともっと簡単にできます。

① 円と円の関係

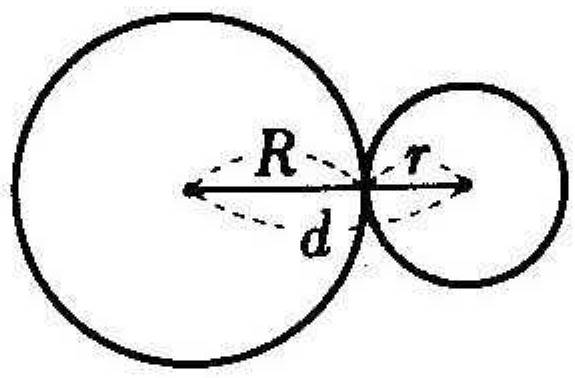
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ 2つの円の関係には5つの場合がありますが，判別式で処理しようなどと思ってはいけませんよ。

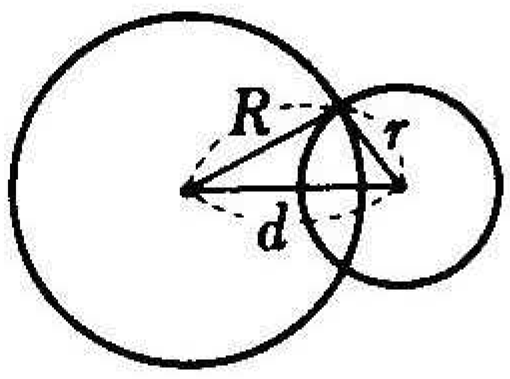
◆ 2つの円の関係には5つの場合があります。それは下に示してあるように，まったく外にあるとき，外接しているとき，2点で交わっているとき，内接しているとき，1つが他の内部に含まれるとき，です。



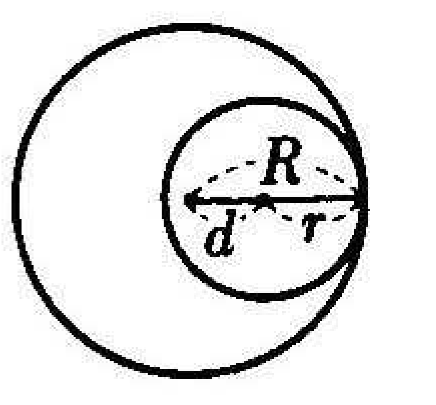
$d>R+r$



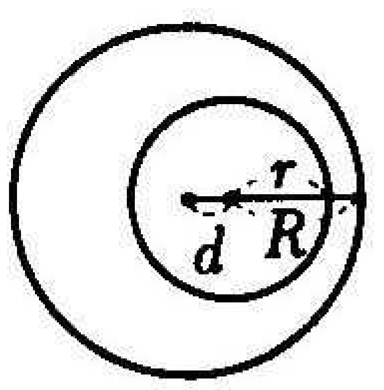
$d=R+r$



$R+r>d>R\sim r$



$d=R\sim r$



$R\sim r>d$

この5つの場合をきめるものは，**2つの円の中心間の距離**（これをふつう **中心距離** という d と2つの円の半径 R，r の和や差の関係なのです。このことは上の図をみればわかるでしょう。では，次の練習1.をやろう。

練習 1. 2つの円　$(x-a)^2+y^2=1$，$x^2+(y-b)^2=1$ が外接するための条件を求めよ。（東海大）

ヒント　2つの円の中心距離 d は

$$d=\sqrt{a^2+b^2}$$

で与えられ，半径はいずれも1であるから外接するための条件は

$$\sqrt{a^2+b^2}=1+1$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=4 \qquad \cdots\cdots 答$$

です。3/19

練習 2. 2つの円

$$x^2+y^2-2ax-2y+1=0$$
$$x^2+y^2-2x-2ay+1=0$$

が接するとき定数 a の値を求めよ。

解　$(x-a)^2+(y-1)^2=a^2$
$(x-1)^2+(y-a)^2=a^2$

と変形されるから，2円の中心距離は

$$\sqrt{(a-1)^2+(1-a)^2}=\sqrt{2}\,|a-1|$$

である。また，2円の半径は共に $|a|$ で等しいから内接することはありえない。

よって，2円が外接するための条件は

$$\sqrt{2}\,|a-1|=2|a|$$

で，

$$2(a-1)^2=4a^2$$

$$\therefore\quad a=-1\pm\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots 答$$

3/19

練習 3. 2つの円 $x^2+y^2=1$，$(x-a)^2+(y-a)^2=1$ が2点で交わるとき a のとり得る値の範囲を求めよ。

ヒント　中心距離 $=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,|a|$ ですから，2点で交わるための条件は

$$0<\sqrt{2}\,|a|<2$$
$$\therefore\quad 0<2a^2<4$$
$$\therefore\quad 0<a^2<2$$
$$\therefore\quad -\sqrt{2}<a<\sqrt{2} \quad (a\neq 0)$$

となります。

練習 4. 円 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$ が円 $x^2+y^2=9$ の内部にあるように a の範囲を求めよ。

ヒント　2円の中心距離は

$$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,|a|$$

ですから

$$\sqrt{2}\,|a|<1\sim3$$

$$\therefore\quad |a|<\sqrt{2}$$

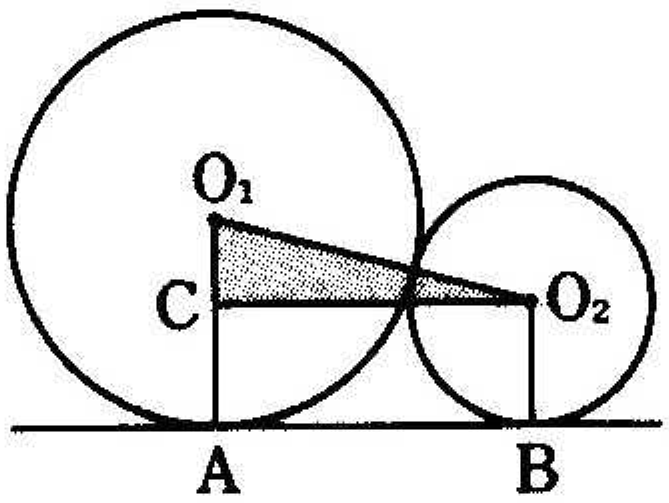
$$\therefore\quad -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

注　1つの円が他の円の内部にあるというのはとかく誤解のもとになります。内接する場合も含むのではないか，というのです。しかし，円の内部といえば，円周は含まないのですから，内接の場合は除外すべきです。

*　　*　　*

◆ 以上で，2円の関係で大切なことは一応終わりましたが，次にはいくらか応用的な面をとりあげてみましょう。

練習 5. 半径 R, r の2円が外接しているとき，その共通接線の長さ l を R と r で表せ。



ヒント　2円が外接しているのですから，中心距離が $R+r$ であることを使わないでは，できないハズ。これに気がつけば，あとは自然にできます。上の図において

$$\overline{\mathrm{O_1C}}^2+\overline{\mathrm{CO_2}}^2=\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2$$

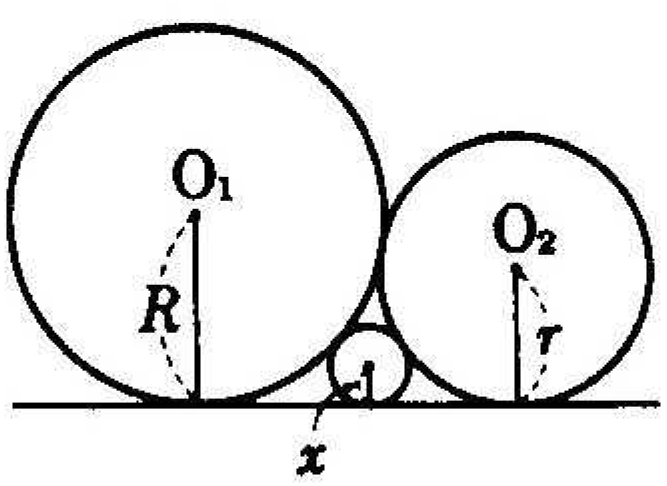
$$\therefore\quad (R\sim r)^2+l^2=(R+r)^2$$

$$\therefore\quad l^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4Rr$$

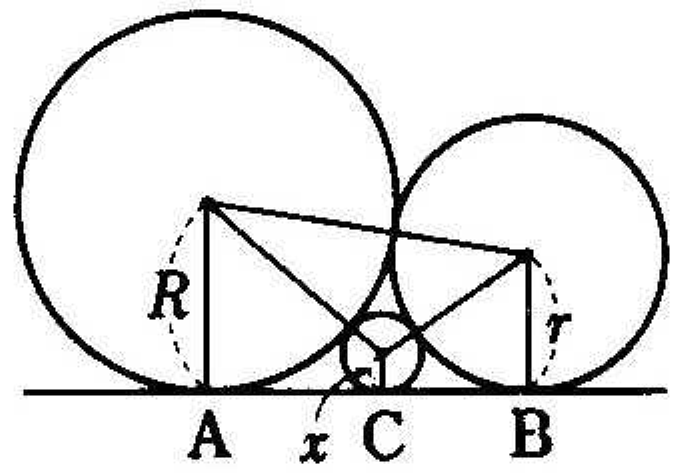
$$\therefore\quad l=2\sqrt{Rr}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

この関係がわかると，例えば次のような問題も容易に解けます。

練習 6. 右の図において円 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ および共通接線に接する小円の半径 x を求めよ。



ヒント　練習5.の結果を使うと



$$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{Rx}$$

$$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{rx}$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{Rr}$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}=2\sqrt{Rr}$$

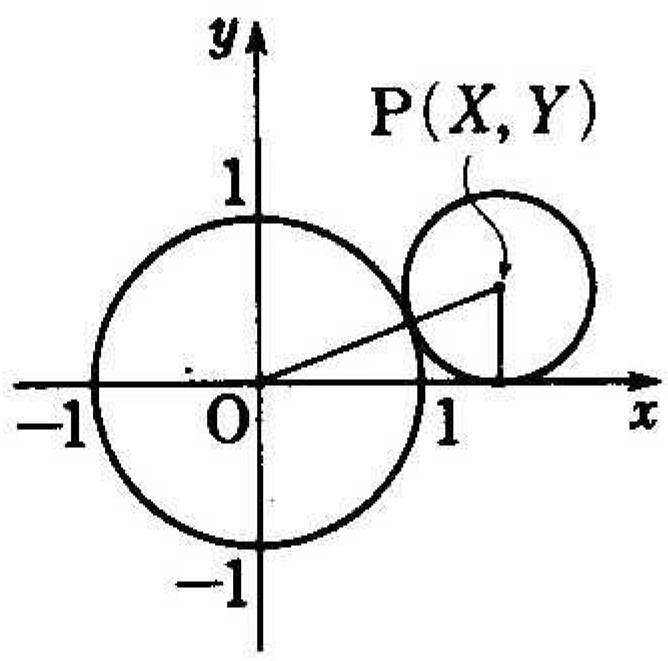
$$\therefore\quad (\sqrt{R}+\sqrt{r})\sqrt{x}=\sqrt{Rr}$$

$$\therefore\quad \sqrt{x}=\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$$

$$\therefore\quad x=\left(\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}\right)^2=\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$$

3/29

練習 7. 円 $x^2+y^2=1$ に外接し，x 軸に接する円の中心Pの軌跡の方程式を求めよ。



ヒント　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，Pを中心とし，x 軸に接する円の半径は $|Y|$ ですから，この円と円 $x^2+y^2=1$ が外接する条件は

$$\sqrt{X^2+Y^2}=1+|Y|$$

と書けます。両辺正であるから2乗しても同値です。つまり

$$X^2+Y^2=1+Y^2+2|Y|$$

$$\therefore\quad |Y|=\frac{X^2-1}{2}$$

ゆえに $X^2-1>0$, したがって $X>1$ あるいは $X<-1$ が必要で，このとき

$$Y=\pm\frac{X^2-1}{2}$$

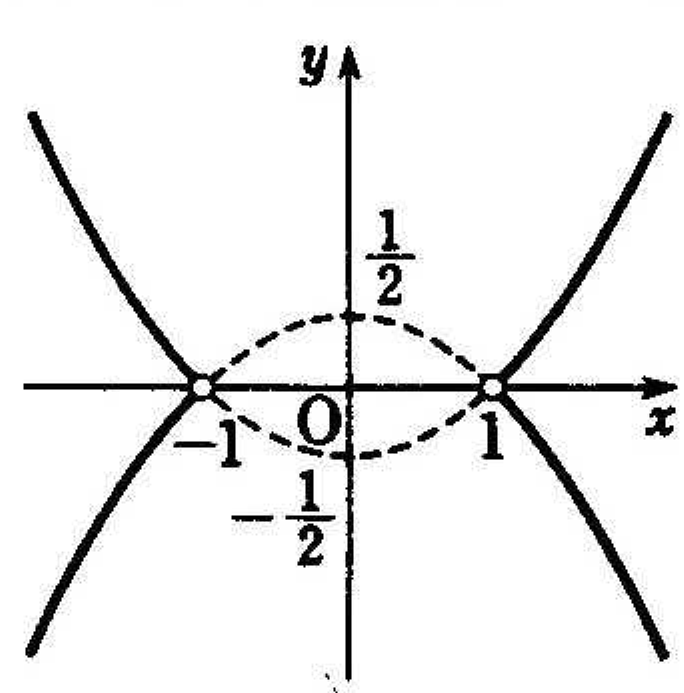
ゆえに求める軌跡の方程式は，放物線の一部

$$y=\pm\frac{x^2-1}{2}$$

$(x>1,\ x<-1)$

です。

念のためグラフをかくと右のようになります。

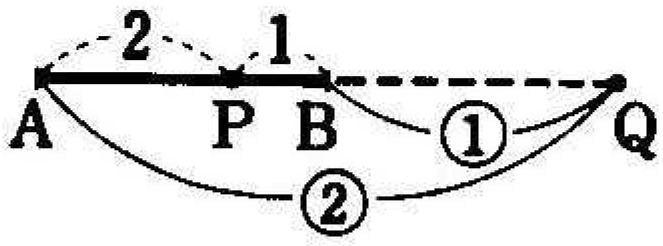


アポロニウスの円

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆アポロニウスはギリシアの数学者ですが，2次曲線の研究を体系づけたことで知られる。それにもまして，アポロニウスの円で有名。

◆ 線分 AB 上に1点Pをとって AP : PB =2 : 1 にしたとき，PはABを 2 : 1 に **内分** するといいます。



また，AB の延長上に1点Qをとって，2AB=AQ にしますと

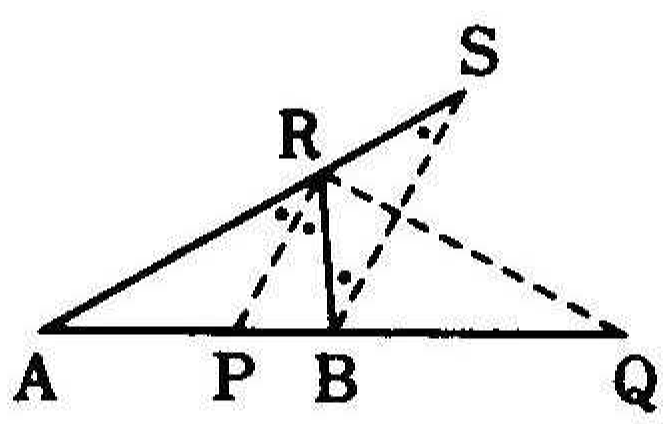
$$AQ : QB=2 : 1$$

です。このとき，Qは AB を 2 : 1 に **外分** するといいます。

では，一般に，この平面上で

$$AR : RB=2 : 1$$

であるような点Rはどんな図形上にあるでしょうか。実はこれは円になります。その証明は次の通りです。まず，問題の形式で書きますと：——



練習 1. 2定点A，Bが与えられたとき

$$AR : RB=2 : 1$$

である点Rの軌跡を求めよ。

ヒント　AB を 2 : 1 に内分する点をP，外分する点をQとしますと

$$AR : RB=AP : PB$$

そこで，AR の延長上に RB=RS となるようにSをとると

$$AR : RS=AR : RB=AP : PB$$

$$\therefore\ RP /\!/ SB$$

$$\therefore\ \angle ARP=\angle ASB=\angle RBS=\angle PRB$$

ゆえに RP は ∠ARB の2等分線です。同じようにして RQ は ∠BRS の2等分線であることが証明できます。こうして

$$\angle PRQ=90°$$

ゆえに，RはPQを直径とする円周上にあることがわかります。

次には，同じ種類のものを計算でやってみましょう。

練習 2. 2点 A(−2, 0)，B(2, 0) からの距離の比が 3 : 1 に等しい点Rの軌跡を求めよ。

ヒント　$\overline{RA}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\overline{RB}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

これを $\overline{AR} : \overline{RB}=3 : 1$，すなわち

$$3\overline{RB}=1\cdot\overline{AR}$$

に代入しますと

$$3\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

両辺を2乗しますと（2乗しても同値）

$$9(x^2-4x+4+y^2)=x^2+4x+4+y^2$$

$$\therefore\ x^2-5x+y^2+4=0$$

あるいは

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

ゆえに点 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ を中心とし，半径 $\frac{3}{2}$ の円であることがわかります。

*　*　*

◆ アポロニウスの円は，いろいろな難問に出会ったとき，大いに威力を発揮するものですから，よくオボエテおくことが必要です。その証明などより，その意味を知っておきたいところ。つまり，

2定点からの距離の比が一定である点の軌跡は，2定点を同じ比に内分および外分する点を直径の両端とする円である

ということなのです。では，次にその応用例をやってみることにしましょう。

これは応用例とはいいかねるが，応用的問題といってもいいでしょう。

練習 3. 2定点 A，B からの距離の比が一定 $m:n$ であるような点 P の軌跡を求めよ。（奈良女大）

（解） A, B を x 軸上にとり，A, B の座標を A$(a,\ 0)$，B$(b,\ 0)$ としますと，P$(x,\ y)$ に対して，

$$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$$

$$\therefore\ \ n\overline{PA}=m\overline{PB}$$

$$\therefore\ \ n\sqrt{(x-a)^2+y^2}=m\sqrt{(x-b)^2+y^2}$$

両辺を平方しても同値で

$$n^2\{(x-a)^2+y^2\}=m^2\{(x-b)^2+y^2\}$$

$$\therefore\ \ (m^2-n^2)(x^2+y^2)+2(n^2a-m^2b)x+m^2b^2-n^2a^2=0$$

ゆえに，

$m=n$ のとき

$$2(a-b)x=a^2-b^2$$

$$\therefore\ \ x=\frac{a+b}{2}$$

すなわち，点 P の軌跡は AB の垂直2等分線である。

$m\fallingdotseq n$ のときには

$$\left(x-\frac{-n^2a+m^2b}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\left\{\frac{mn(a-b)}{m^2-n^2}\right\}^2$$

これは，中心が $\left(\dfrac{-n^2a+m^2b}{m^2-n^2},\ 0\right)$，半径が $\left|\dfrac{mn(a-b)}{m^2-n^2}\right|$ の円である。つまり，線分ABを $m^2:n^2$ に外分する点を中心とし，半径 $\dfrac{mn}{|m^2-n^2|}\overline{AB}$ の円である。

練習 4. 与えられた線分 AB 上の任意の点を P とする。A，P を通る円 O と，B，P を通る円 O′ を，2円 O，O′ の面積の比が $4:1$ になるように任意にかく。このとき，2円の第2の交点Qは一定の図形上にあることを証明せよ。（山梨大）

（ヒント） これはズイブンめんどうな感じを与える問題ですね。しかし，そうでもない。まず，2円 O，O′ の面積の比が $4:1$ だということに目をつけて考えてみましょう。

円O，円 O′ の直径 QA′，QB′ を引いてみますと，$\angle QPA'=90°$，$\angle QPB'=90°$ ですから A′PB′ は1直線上にあって，かつ

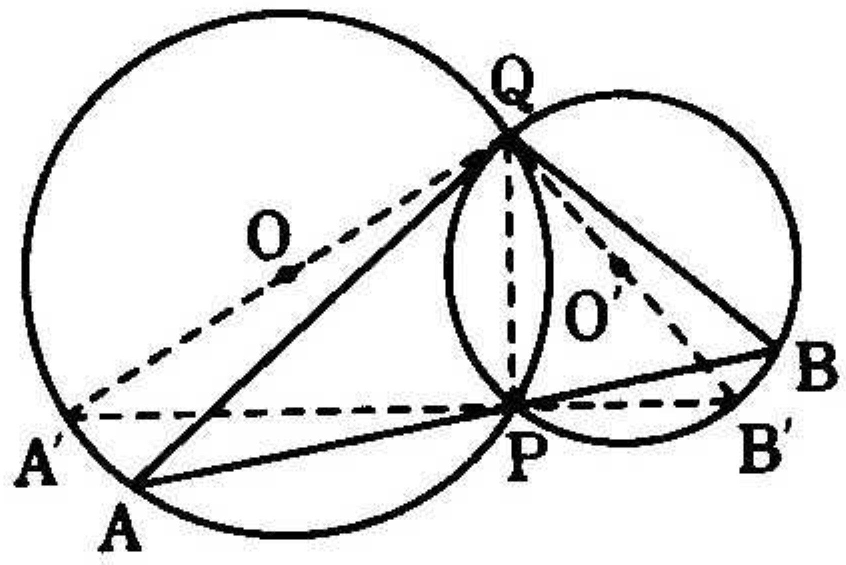
$$\angle QAP=\angle QA'P,\ \angle QBP=\angle QB'P$$

$$\therefore\ \ \triangle QAB\backsim\triangle QA'B'$$

$$\therefore\ \ QA:QB=QA':QB'$$

ところが円 O と円 O′ の面積の比が $4:1$ ですから，直径の比は $2:1$ です（相似な図形の面積の比は相似比の2乗に等しいから）。

$$\therefore\ \ QA:QB=2:1$$



ゆえに点Qの軌跡は AB を $2:1$ に内分および外分する点を直径の両端とするアポロニウスの円であることがわかります。

＊　＊　＊

◆ 2定点 A，B に至る距離の比の値がある値より大である点の存在範囲となると，ある領域になること。その境界がアポロニウスの円であることもわかります。例えば，：——

練習 5. 2定点を A$(-9,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ とするとき $\overline{PA}>3\overline{PB}$ なる点Pの存在範囲を求めよ。

（解） 点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$PA=\sqrt{(x+9)^2+y^2},\ \ PB=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

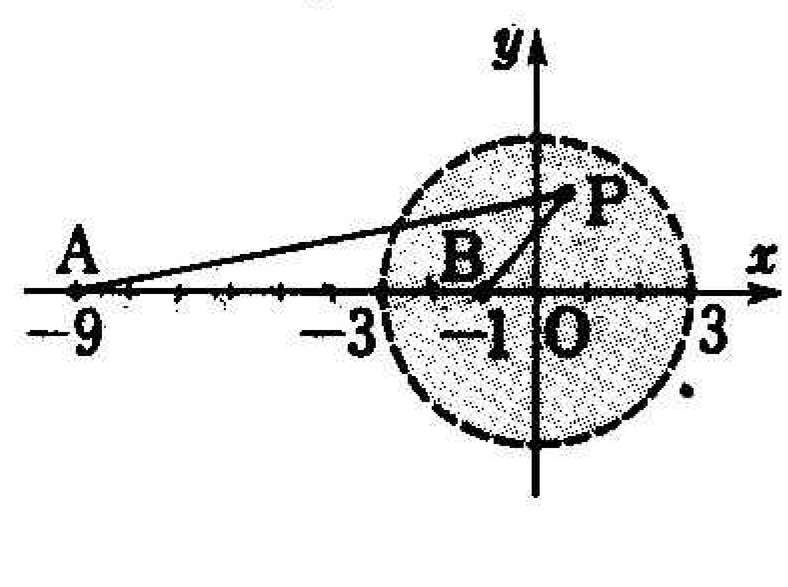
$$\therefore\ \ \sqrt{(x+9)^2+y^2}>3\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

両辺を2乗して（これは同値デスネ）

$$x^2+18x+81+y^2>9(x^2+2x+1+y^2)$$

$$\therefore\ \ x^2+y^2<9$$

ゆえに，点Pは原点を中心とし，半径3の円の内部にある。



○円弧で囲まれた部分の面積

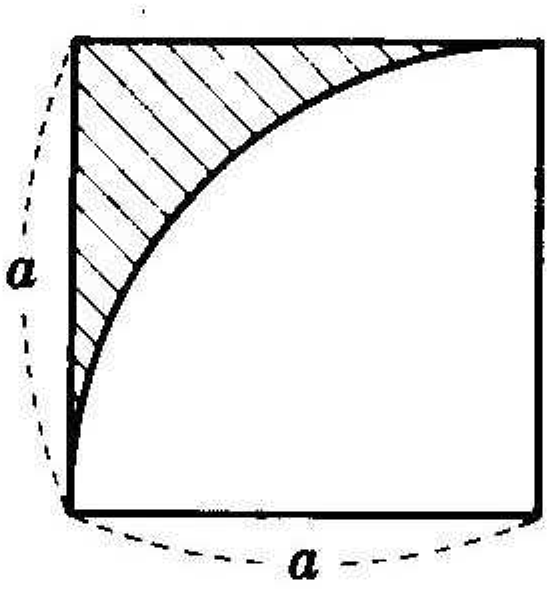
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆面積計算の練習でもっとも効果的なのは円弧で囲まれた部分について徹底的にやってみることだ。

◆ 半径 a の **円の面積が πa^2 である** ことさえ知っていれば全部できるハズ。では，さっそくはじめるとしようか。

4/~

練習 1. 右の図において斜線を引いた部分の面積を求めよ。



（解） 正方形の面積 a^2 から，半径 a の円の面積の $\frac{1}{4}$ を引いたものですから，

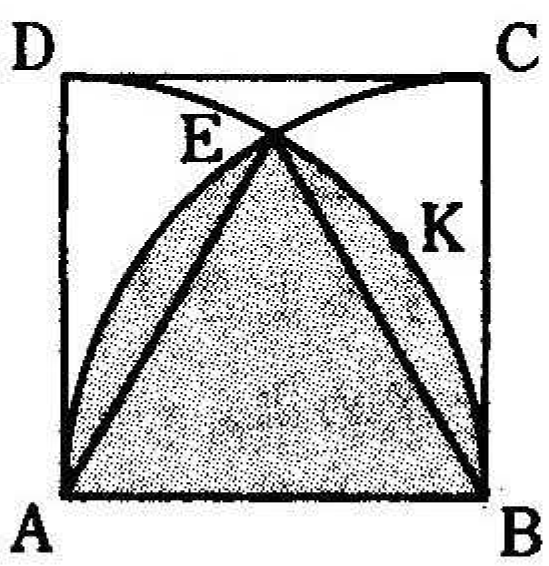
$$a^2-\frac{\pi a^2}{4}=\frac{4-\pi}{4}a^2$$

に等しい。　　　答　$\frac{4-\pi}{4}a^2$

4/~

練習 2. 1辺の長さ1 mの正方形ABCDの内部にあって，2頂点A，Bから1 m以内にある部分の面積を求めよ。　（九大）

（ヒント） A，B を中心とし，半径1 mの円をえがき，正方形内の交点をEとする。右図で



$$EA=EB=AB$$

であるから

$$\triangle ABE=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

また，扇形 ABKE の面積は $\frac{\pi\cdot 1^2}{6}=\frac{\pi}{6}$ であるから，求める面積は

(扇形 ABKE $-\triangle$ABE)$\times 2+\triangle$ABE

$=$(扇形 ABKE)$\times 2-\triangle$ABE

$=\frac{\pi}{6}\times 2-\frac{\sqrt{3}}{4}$

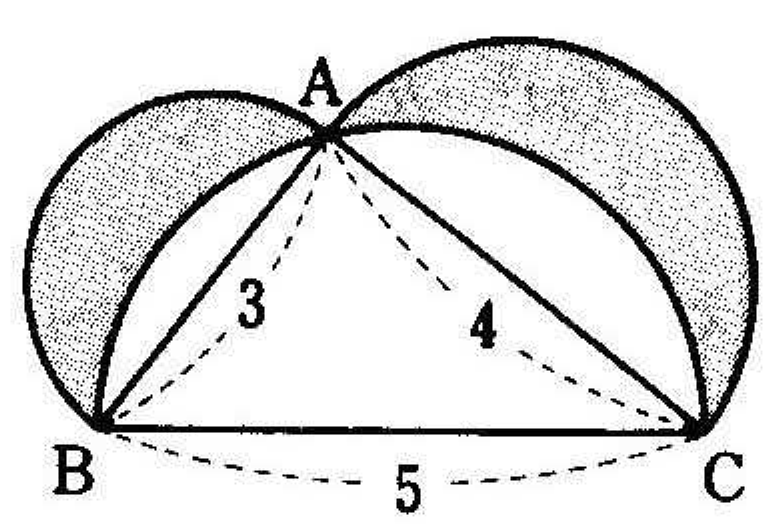
$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (m^2)　　……答

4/✓

練習 3. △ABC において AB=3cm，AC=4cm，BC=5cm とする。辺 AB，AC をそれぞれ直径として，△ABC の外側に描かれた2つの半円が，△ABC の外接円によって切りとられて残った2つの三日月形の面積の和を求めよ。　（山形大）

（ヒント）　$AB^2+AC^2=BC^2$

となるから ∠A $=90^\circ$ であることはすぐ気がついていい。求める面積は



(半円 AB)＋(半円 AC)

　＋△ABC－(半円 BC)

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2+\frac{3\cdot 4}{2}-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

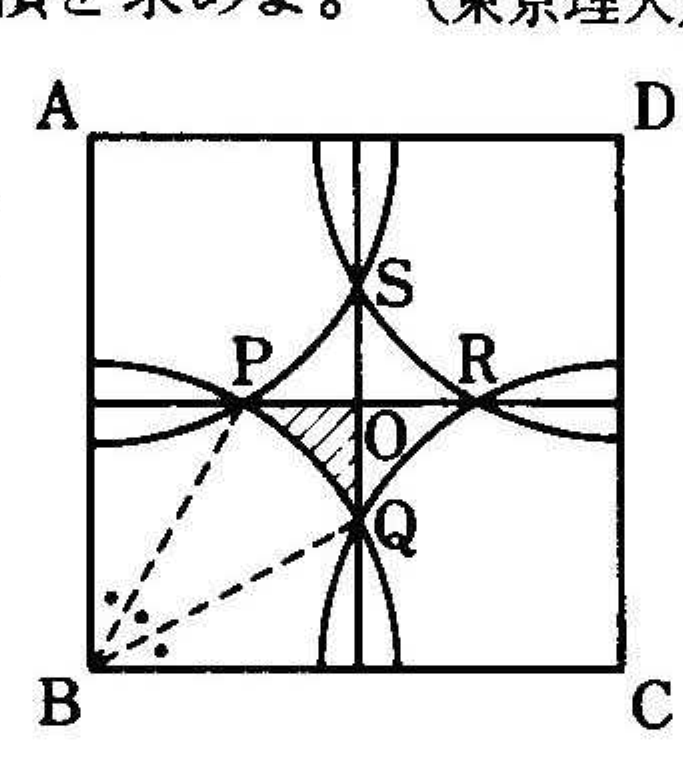
$=6$ (cm^2)

（注） この問題はギリシア時代から有名なもの。というのも，円弧で囲まれた部分の面積の和が直線形で囲まれた面積に等しいからです。というのも，円の面積に等しい正方形を作ることが大きな問題だったからです。（しかし，それは不可能であることが今では証明されています）

練習 4. 1辺の長さ1の正方形内にあり，各頂点からの距離が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 以上である点の存在する領域の面積を求めよ。（東京理大）

（ヒント） 右の図において斜線を引いた部分の面積を4倍すればいい。答は

$\frac{1}{9}(9-3\sqrt{3}-\pi)$



＊　＊　＊

◆ 面積を求める問題はよく点集合とコンビにして出題されます。そこで，2，3練習しておくことにしましょう。点集合については（☞ p. 296）参照。

■練習 5. 次のような点集合 A，B がある。

$A=\{\mathrm{P}(x,\ y)\,|\,(x+y)^2\leqq 1\}$

$B=\{\mathrm{P}(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$

$A\cap B$ を図示し，その面積を求めよ。

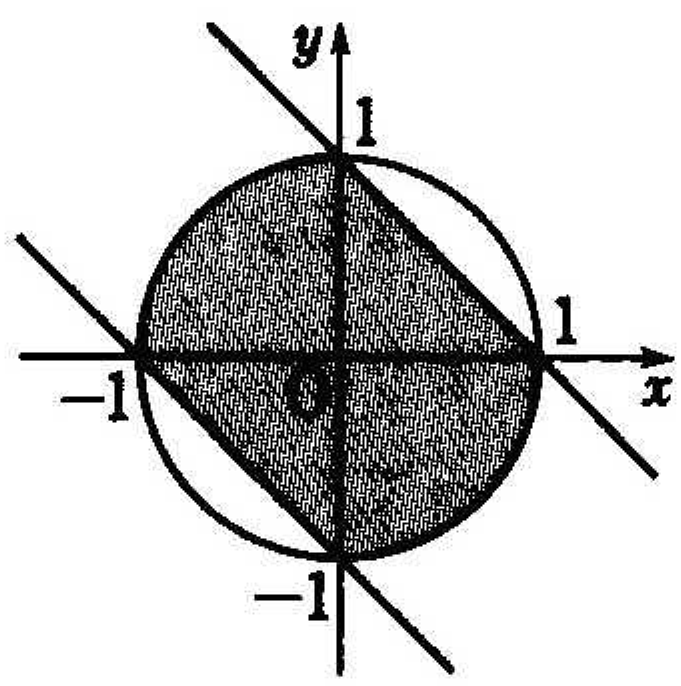
（東京外大）

ヒント　$(x+y)^2\leqq 1$

を変形すれば

$-1\leqq x+y\leqq 1$

となりますから，A は 2 直線 $x+y=1$ と $x+y=-1$ にはさまれた部分です。等号がついているから境界線上の点も含みます。



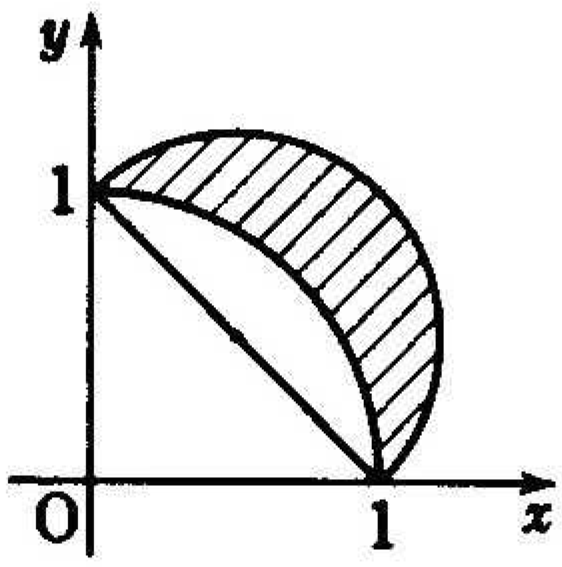
また，Bはいうまでもなく単位円の周上，および内部です。

したがって $A\cap B$ は上の図に示す通りです。そして境界線を含んでいます。

ところで，その面積は，単位円から 2 つの弓形を引いたと考えてもいいし，直角三角形 2 つと 4 分円 2 つの和と考えてもいいでしょう。

答　$1+\dfrac{\pi}{2}$

■練習 6. 右の図の斜線の部分（境界を含む）を x，y の不等式を用いて表せ。またその面積を求めよ。



ヒント　単位円 $x^2+y^2=1$ の外部および周上は

$$x^2+y^2\geqq 1$$

で表され，円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ の内部および周上であるから

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{2}$$

つまり，図の斜線部は

$$\begin{cases} x^2+y^2\geqq 1 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

と書ける。さて，その面積は

半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の半円と直角三角形の面積の和から，単位円の $\dfrac{1}{4}$ を引いたものである，ことに気がつけばすぐできる。すなわち，

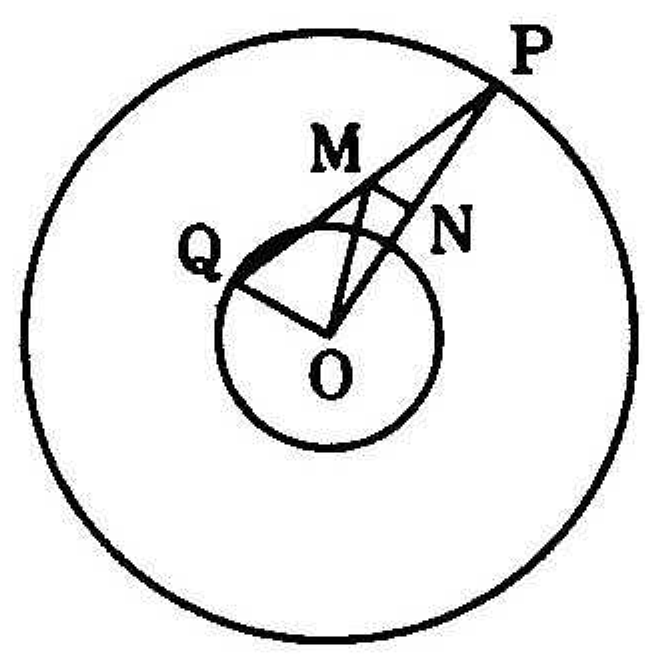
$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

＊　＊　＊

◆ 面積を求める問題には，このほかにもいくつかのタイプのものがありますが，大部分はその領域を求めるほうに重点があって，面積のほうは，いわば従になっていますから，ここではとりあげません。ただ 1 つだけ例示します。

■練習 7. 半径 R，r $(R>r)$ の同心円上にそれぞれ点 P，Q をとるとき，線分 PQ の中点の存在範囲を図示し，その面積を求めよ。

ヒント　同心円の中心を O，PO，PQ の中点をそれぞれ N，M としますと，



$$\mathrm{NM}=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}=\frac{r}{2}$$

$$\mathrm{ON}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}=\frac{R}{2}$$

そして，$\triangle\mathrm{OMN}$ において

$$\mathrm{ON}-\mathrm{NM}\leqq\mathrm{OM}\leqq\mathrm{NM}+\mathrm{ON}$$

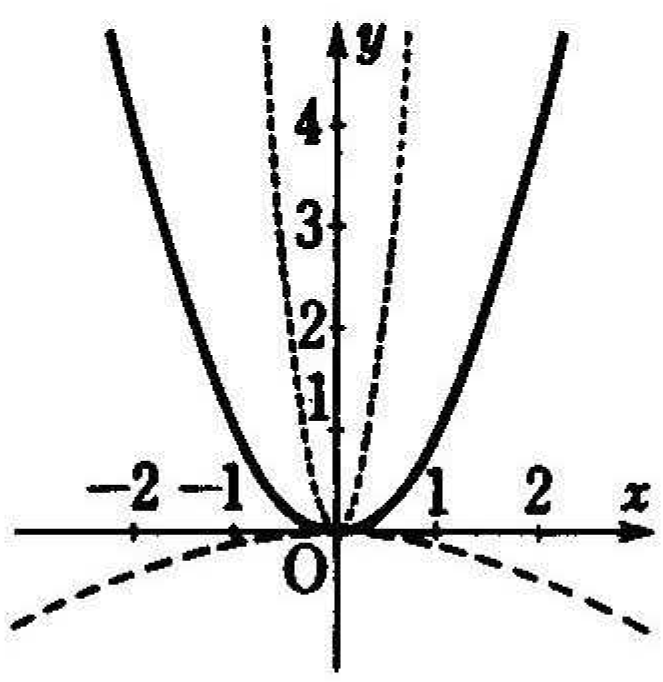
が成り立ちます。等号は，実は $\triangle\mathrm{OMN}$ が線分になってしまったときなのですが。こんなわけで，点 M は半径 $\dfrac{R+r}{2}$，$\dfrac{R-r}{2}$（中心O）の円にはさまれた部分にあって面積は πRr.

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○放物線の性質

◆ホウブツセン，昔は抛物線と書いた。ものを抛る(ホウル)とホウブツセンを描くからだ。しかし，物を放したら直線を描くのでは？

◆ **放物線** $y=ax^2$ のグラフは右のような曲線になります。



y 軸について対称で，a の値によって形が変わります。

まず，

$a>0$ なら 下に凸，$a<0$ なら 上に凸

そして $|a|$ の大きいほど細くなり，$|a|$ の小さいほど平らべったくなります。図では $a=1$（実線），$a=10$（点線），$a=-\dfrac{1}{10}$（破線）のときを示してあります。しかし，実は この形はすべて相似ですから，形が変わったというより，見る部分がちがった，というのが本当です。これが放物線で，O を **頂点**，対称軸をこの放物線の **軸** といいます。

*　*　*

◆ 一般に，放物線は

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)}$$

で表される曲線で，変形しますと

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

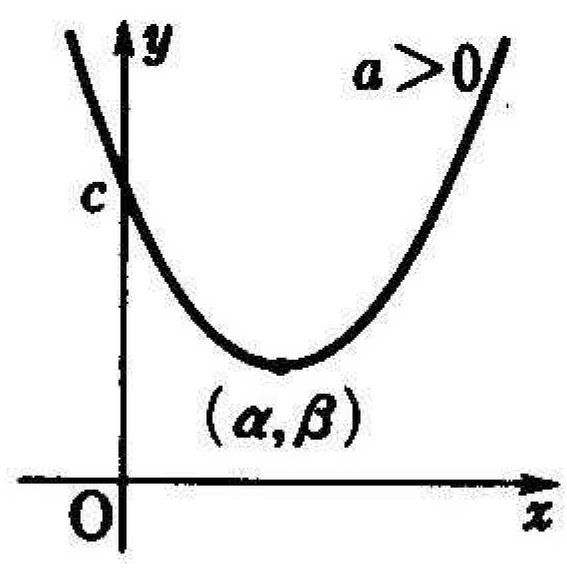
$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}$$

ここで $-\dfrac{b}{2a}=\alpha$，$c-\dfrac{b^2}{4a}=\beta$ とおくと，

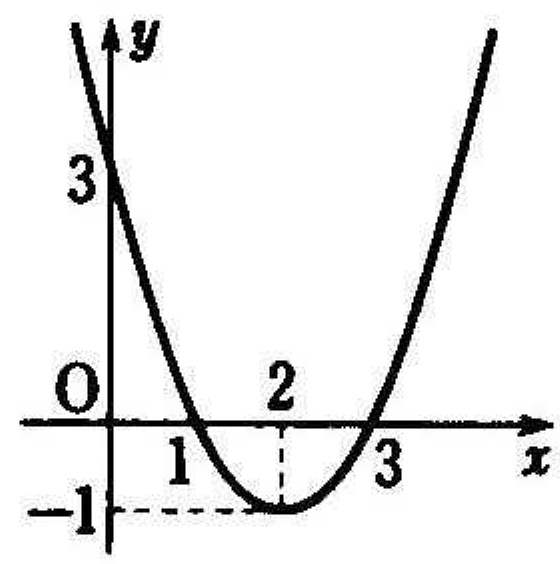
$$\boldsymbol{y=a(x-\alpha)^2+\beta}$$

となり，このグラフは右のような放物線で，頂点は $(\alpha,\ \beta)$ に，軸はもちろん $x=\alpha$ で，点 $(0,\ c)$ で y 軸と交わる。



練習 1. $y=x^2-4x+3$ のグラフをかけ。

（解） $y=(x-2)^2-1$ であるから，頂点は $(2,\ -1)$，軸は $x=2$ の放物線。また $y=0$ となるのは $x=1,\ 3$ のときであるから，グラフは右のようになる。



同じようにして次の練習をやってください。

練習 2. $y=-2x^2-4x$ のグラフをかけ。

*　*　*

◆ 放物線と直線，または，放物線と放物線の交点を求めるには，その方程式を連立させて解けばいいのです。では：——

練習 3. 放物線 $y=x^2+x+1$ と，直線 $y=2x+1$ との交点を求めよ。

（解） y を消去すると

$$2x+1=x^2+x+1$$

$$\therefore\ x^2-x=0 \qquad \therefore\ x=0,\ 1$$

$x=0$ のとき $y=1$；$x=1$ のとき $y=3$

ゆえに2点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 3)$ で交わる。

練習 4. 放物線 $y=x^2+2x-3$ と放物線 $y=-x^2-4x+5$ との交点を求めよ。

（解） y を消去すると

$$x^2+2x-3=-x^2-4x+5$$

$$\therefore\ 2x^2+6x-8=0$$

$$\therefore\ (x+4)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=-4,\ 1$$

$x=-4$ のとき $y=5$；$x=1$ のとき $y=0$

ゆえに2点 $(-4,\ 5)$，$(1,\ 0)$ で交わる。

◆ **放物線の幾何学的定義**：左のページでは，放物線を $y=ax^2+bx+c$ のグラフだと定義しましたが，幾何学的には次のように定義されます。すなわち：——

定点Fと，これを通らない定直線 l があるとき，点Fと直線 l に至る距離の等しい点の軌跡を 放物線 という。

いま，l として x 軸をとり，F の座標を $(0,\ k)$ とし，放物線上の点を $P(x,\ y)$ としますと

$$PF=\sqrt{x^2+(y-k)^2}$$

Pから l に下した垂線の長さは $|y|$（y ではありませんよ）ですから

$$\sqrt{x^2+(y-k)^2}=|y|$$

両辺を２乗しても同値で

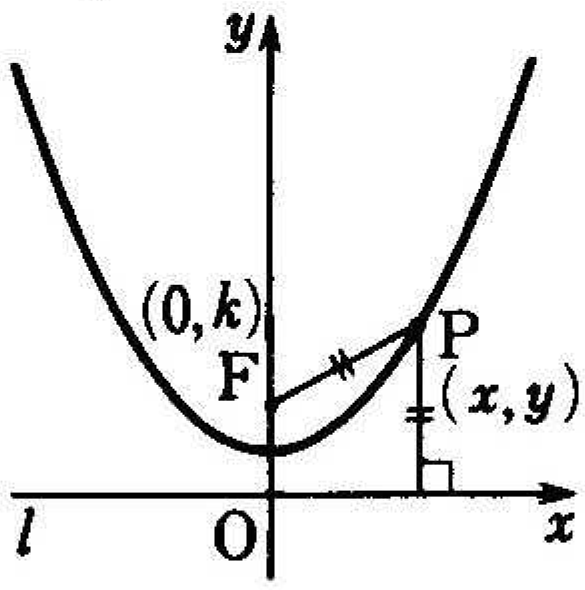
$$x^2+y^2-2ky+k^2=y^2$$

これを書きかえて

$$y=\frac{1}{2k}x^2+\frac{k}{2}$$

$\frac{1}{2k}=a$，$\frac{k}{2}=c$ とおくと

$$y=ax^2+c$$



なるほど放物線の方程式が得られました。

上の幾何学的定義において，Fを **焦点**（しょうてん），l を **準線**（じゅんせん）といいます。では，次の練習を：——

4/8

■練習 5. 原点を焦点とし，直線 $x+y=1$ を準線とする放物線の方程式を求めよ。

ヒント　点 $P(x,\ y)$ から原点に至る距離は $\sqrt{x^2+y^2}$ で与えられます。また点 $(\alpha,\ \beta)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さ h は

$$h=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられるのでしたね（☞ p. 274）。あの公式を使って $P(x,\ y)$ から $x+y-1=0$ への距離は $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$ で与えられますから，Pの軌跡の方程式は

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

で与えられます。分母をはらって両辺を２乗しますと

$$x^2+y^2+1+2xy-2x-2y=2x^2+2y^2$$

$$\therefore\quad x^2-2xy+y^2+2x+2y-1=0 \cdots\cdots \boxed{答}$$

注　はじめ放物線を $y=ax^2+bx+c$ のグラフと定義しましたね。しかし，上の結果はまったく似ても似つかぬもの。これはおかしいぞ，と思ったかもしれません。

実は，上の図形を 45° 回転して，放物線の軸を y 軸に平行にしてやると $y=ax^2+bx+c$ の形になるのです。しかし，図形を 45° 回転したらどうなるか，これは代数・幾何の範囲になってしまいます。

*　　*　　*

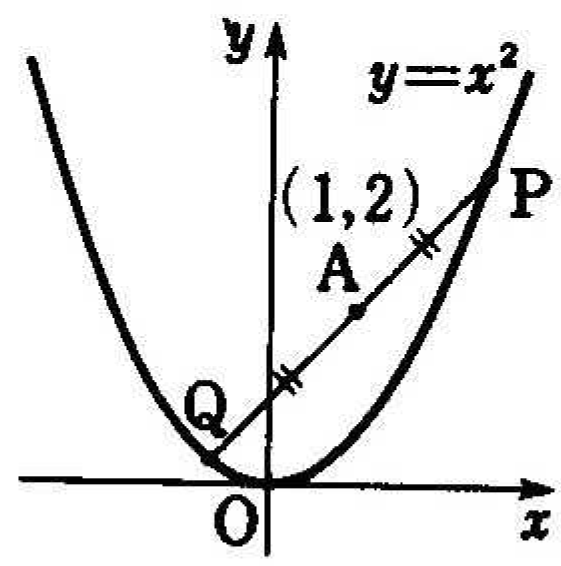
◆ 放物線に関する問題の多くは，$y=ax^2$ について調べてみればよいのですが，このとき，放物線上の点は，**パラメーター（媒介変数**を使って $(\alpha,\ a\alpha^2)$ で表すと計算が楽になります。

では，次の練習をやってみませんか。

4/9

■練習 6. $y=x^2$ の弦で点 $(1,\ 2)$ で２等分されるものを求めよ。（東大）

ヒント　点 $A(1,\ 2)$ で２等分される弦の両端を $P(t,\ t^2)$，$Q(s,\ s^2)$ としましょう。



Aは PQ の中点ですから

$$\frac{t+s}{2}=1,\quad \frac{t^2+s^2}{2}=2$$

第１式より　　$t=2-s$

これを第２式に代入して

$$(2-s)^2+s^2=4 \qquad \therefore\quad s=0,\ 2$$

$s=0$ のとき $t=2$；$s=2$ のとき $t=0$ となる。結局 $P(2,\ 4)$，$Q(0,\ 0)$ で，PQの方程式は $y=2x$ となります。

もちろん，PQ を $y-2=m(x-1)$ として出発してもできます。

○軌跡の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆軌跡を求めるには大きく分けて２つの方法があります。その２つのタイプを知ってしまえば，あとは楽なんだが，……

◆ ある条件を満足する点の集合が曲線（もちろん直線を含みますよ）からなるとき，それを **軌跡**（きせき）といいます。例えば，次の練習をやってみるとわかるでしょう。

4/13

練習 1. 原点からの距離が１に等しい点Ｐの軌跡を求めよ。

ヒント　まず条件に適する点Ｐの座標を，$(X,\ Y)$ としますと，原点からの距離が１であるから

$$X^2+Y^2=1$$

逆に，この条件式を満足する点 $P(X,\ Y)$ は原点からの距離が１に等しいことも確かです。

ゆえに，求める点の軌跡の方程式は

$$x^2+y^2=1$$

であり，原点中心，半径１の円である。

注　はじめ点Ｐの座標を $(X,\ Y)$ としないで $P(x,\ y)$ としてもいいわけですが，複雑な問題になると，とかく混乱のもとになります。だから，このように $(X,\ Y)$ とか，あるいは $(u,\ v)$ とかで表しておいて，最終段階で $(x,\ y)$ に書きかえると安全です。しかし，上のような場合は混乱もおきませんから，はじめから $P(x,\ y)$ でいいのです。

また，ここでは逆証明をしましたが，ふつうは逆証明をしないで，その代わり逆も成り立つように，**同値変形**（つまり同値関係がくずれないように変形していく）をしてゆくのがコツ。

4/17

練習 2. ２定点Ａ，Ｂから等距離にある点の軌跡を求めよ。

ヒント　この問題では，まず，適当な座標系を選ぶことが大切です。直線 AB を x 軸にとり，$\overline{AB}$ の垂直２等分線を y 軸にとりますと，Ａ，Ｂの座標は，$a>0$ として

$$A(-a,\ 0),\ B(a,\ 0)$$

とおくことができます。そして，点Ａ，Ｂから等距離にある点を $P(X,\ Y)$ とすると

$$PA=\sqrt{(X+a)^2+Y^2}$$
$$PB=\sqrt{(X-a)^2+Y^2}$$
$$\therefore\ \sqrt{(X+a)^2+Y^2}=\sqrt{(X-a)^2+Y^2}$$

両辺正ですから２乗しても同値です。

$$\therefore\ (X+a)^2+Y^2=(X-a)^2+Y^2$$
$$\therefore\ 4aX=0$$
$$\therefore\ X=0\quad(a>0)$$

ゆえに求める軌跡は $x=0$ である。

これでもわるくはないが，座標系は，与えられていたものではなく，解くものが自由に選んだものなのですから，それで答を表すのは適当でありません。幸い，$x=0$ は y 軸，そして，y 軸は $\overline{AB}$ の垂直２等分線なんですから，答としては，線分 $\overline{AB}$ の垂直２等分線である，といえばいいでしょう。

しかし，複雑な問題になると，そういううまい表現のできないこともありますから，そのような場合には，自分できめた座標系を使った表し方でも仕方がありません。

＊　＊　＊

◆ さて，軌跡を求める１つのタイプは２つの動く曲線の交点として与えられるときです。こんな抽象的なことをいってもわからないでしょう。では，これを：——

4/19

練習 3. ２直線 $y+k(x-2)=0$, $ky-(x+2)=0$ の交点は k の値が変わるときどんな曲線上を動くか。（神戸商船大）

ヒント　このような問題で交点を求めては一般に損です。それよりは，交点を $(X,\ Y)$ とするのです。そうすると

$$Y+k(X-2)=0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$kY-(X+2)=0 \qquad \cdots\cdots②$$

となります。この2つから $X,\ Y$ の関係を求めればいい。そのためには k を消去すればよい。

さて，②より $Y\neq 0$ のとき

$$k=\frac{X+2}{Y}$$

これを①に代入しますと

$$Y+\frac{X+2}{Y}(X-2)=0$$
$$\therefore\quad Y^2+(X^2-4)=0$$
$$\therefore\quad X^2+Y^2=4 \qquad \cdots\cdots③$$

ただし，これは $Y\neq 0$ という条件がついていることをお忘れなく。

さて，$Y=0$ のときはどうなるか，①，②において $Y=0$ とすると

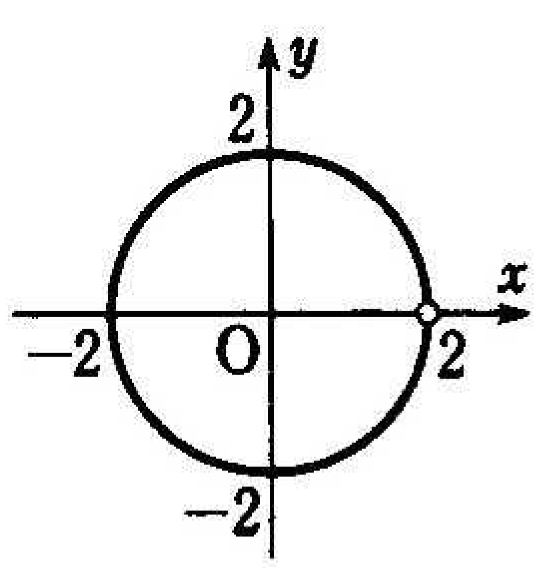
$$k(X-2)=0 \qquad \cdots\cdots④$$
$$-(X+2)=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

⑤より $X=-2$，これを④に代入して

$$k(-4)=0 \qquad \therefore\quad k=0$$

この結果は何を意味するか？

$k=0$ のとき，①，②の交点は $(-2,\ 0)$ だということなんです。つまり③から $Y=0$ の場合の点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ が除かれていたのですが，$(-2,\ 0)$ はここで復活したというわけ。



結局求める解は，円

$$x^2+y^2=4$$

から点 $(2,\ 0)$ を除いたものである。

では，ついでに次をやってみませんか。

練習 4. 2直線 $mx-y=0,\ x+my-1=0$ の交点の軌跡を求めよ。

答　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，ただし，$(0,\ 0)$ を除く。

*　　*　　*

◆ 軌跡を求めるタイプの第2は，点の座標が求められているとき，あるいはすぐ求められるときです。例えば，これです。

練習 5. xy 平面上の円 $(x-t)^2+(y-t^2)^2=1$ の中心の軌跡を求めよ。　(東京商船大)

ヒント　円の中心を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=t,\quad Y=t^2$$

これから t を消去すると

$$Y=X^2$$

ゆえに求める軌跡は $y=x^2$ である。

4/8

練習 6. m がいろいろな値をとって変わるとき，放物線 $y=x^2-mx+m$ の頂点の軌跡を求めよ。　(宮崎大)

ヒント　$y=x^2-mx+m$

$$=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(m-\frac{m^2}{4}\right)$$

ゆえに頂点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$X=\frac{m}{2},\quad Y=m-\frac{m^2}{4}$$

これより m を消去すれば

$$Y=2X-\frac{(2X)^2}{4}$$
$$\therefore\quad Y=2X-X^2$$

を得る。ゆえに，求める軌跡の方程式は

$$y=-x^2+2x \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

である。

練習 7. 点 $A(2,\ 4)$ から円

$$x^2+y^2+4x+2y+1=0$$

の周に至る線分の中点の軌跡を求めよ。

ヒント　円周上の点を $(x,\ y)$，条件に適する点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{x+2}{2},\quad Y=\frac{y+4}{2}$$

この2つより得られる

$$x=2X-2,\quad y=2Y-4$$

を与えられた方程式に代入して変形する。

答　$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○正領域と負領域とは何か

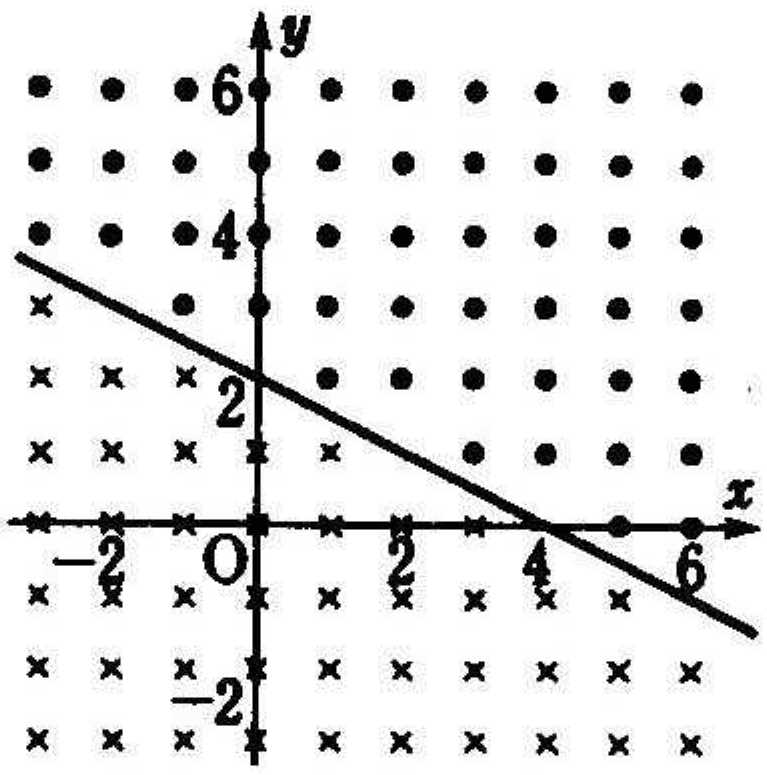
◆平面上の直線は，これを２つの部分に分けますが，いったい，分けるとは何のことなのであろうか？

◆　　$f(x,\ y)=x+2y-4$

という関数を考えてみましょう。$x,\ y$ にいろいろ値を入れて

$$f(0,\ 0)=-4<0$$
$$f(1,\ 1)=1+2-4=-1<0$$
$$f(3,\ 2)=3+4-4=3>0$$

といったぐあいに符号がきまります。次々に x, y に整数を代入して $f(x,\ y)>0$ のとき・を，$f(x, y)<0$ のとき × をつけてみると右の図のようです。これをみるとわかるように $f(x,\ y)=0$ という直線の一方の側に $f(x, y)>0$ である点が存在し，他方に $f(x,\ y)<0$ である点が存在しています。



$f(x,\ y)>0$ であるような点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を **正領域**，あるいは **正域**，$f(x, y)<0$ であるような点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を **負領域**，あるいは **負域** というのです。では，それをどうして求めたらよいか。

＊　＊　＊

◆ **正領域・負領域の求め方**：タイプからいうと３つあります。第１は整関数のとき，第２は分数関数のとき，第３は無理関数のときなんです。まず第１のタイプから：——

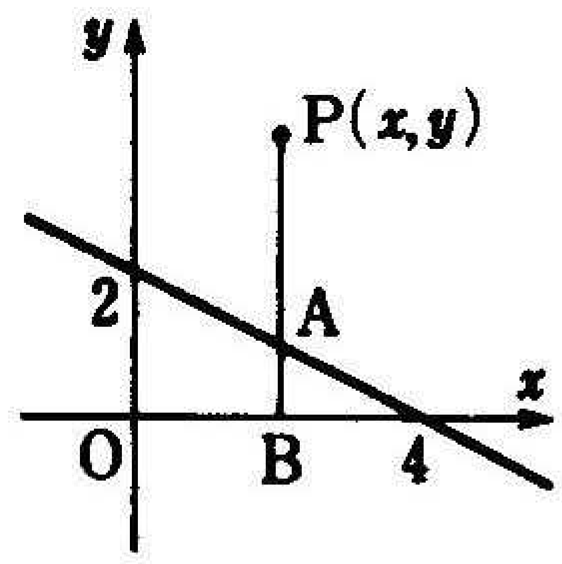
4/10

練習 1. $x+2y-4>0$ なる領域を図示せよ。

ヒント　これは上の説明に使ったものと同じですが，変形すると

$$y>2-\frac{x}{2}$$

いま $x+2y-4>0$ を満足する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を通り，y 軸に平行な直線が，直線 $y=2-\dfrac{x}{2}$ と交わる点を $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ としますと，もちろん



$$y_0=2-\frac{x_0}{2}=2-\frac{x}{2}$$
$$\therefore\ \ y>y_0$$

ゆえに点Pは点Aの上のほうにあります。つまり，求める領域は直線 $y=2-\dfrac{x}{2}$ の上のほうなのです。（下図の通り）

しかし，個々の問題にイチイチこんなことをして調べているわけにはいきませんから，実際上は次のようにするのです。

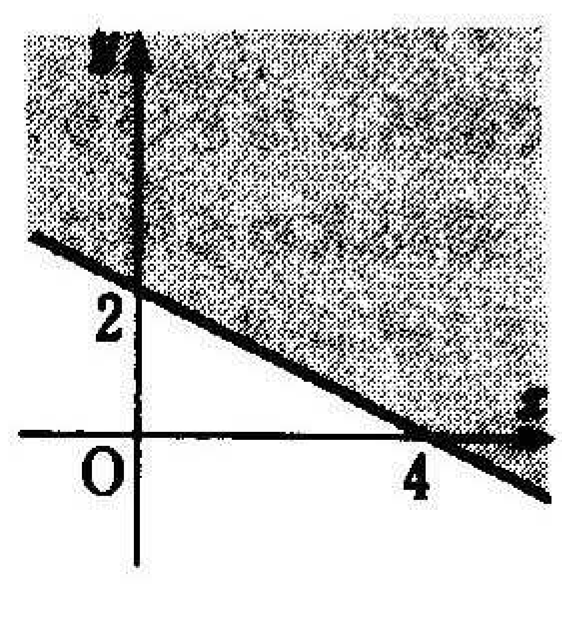
不等号を等号にして

$$y=2-\frac{x}{2}$$

のグラフをかく。次に，この直線上にない点，この場合には，例えば，原点 (0, 0) を入れてみましょう。すると，

$$0<2-\frac{0}{2}$$

となって不成立。つまり，原点はダメ。いや，原点のある側がすべてダメ。つまり，原点のない側が求める範囲，で右図の通り，というワケ。

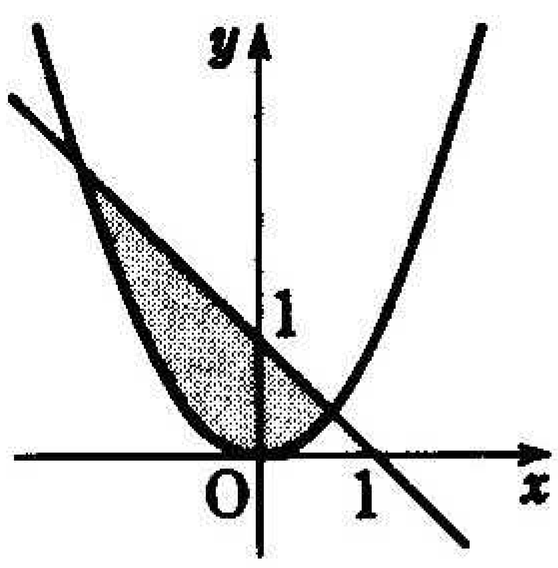


ダい

練習 2. $y>x^2,\ x+y<1$ を満足する平面上の部分を図示せよ。　　（宇都宮大）

ヒント　$y=x^2$ のグラフをまずかく。そこで原点 (0, 0) を入れても役に立たぬ。点 (0, 1)

を入れると $1>0^2$ で成り立つから，$y=x^2$ について点 (0, 1) のある側である。また $x+y<1$ については……。



結局，求める範囲は右のようになります。境界線上は含みません。

4/10

■練習 3. 不等式

$$(4x^2+9y^2-36)(y-x^2+4)>0$$

を満足する領域を図示せよ。 (大阪電通大)

ヒント 本問は

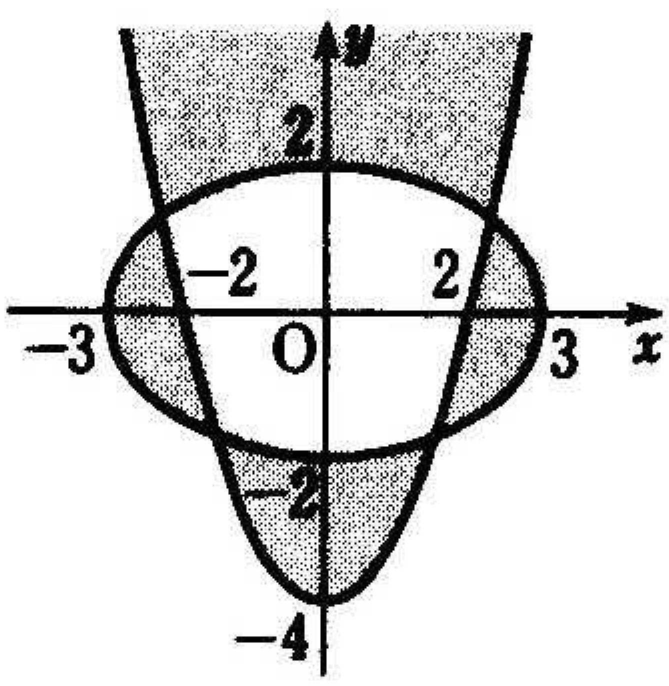
（i） $4x^2+9y^2-36>0$ かつ $y-x^2+4>0$

（ii） $4x^2+9y^2-36<0$ かつ $y-x^2+4<0$

なる2つの部分を求めればよいのですが，実際は，次のようにすればいいのです。

$$(4x^2+9y^2-36)(y-x^2+4)=0$$

のグラフをかく。次に点 (0, 0) を入れてみると明らかに与えられた不等式を満足しない。そこで，点 (0, 0) のある部分はダメ，その隣りはヨイ，その隣りはダメ，その隣りはヨイ，といったぐあいで，図のようになる。



*　　*　　*

◆ 第2のタイプは分数関数のときです。このときは移項して，通分して，分母をはらってしまえば，第1のタイプになってしまいます。しかし，分母をはらうときにマチガウ人が実に多いのです。それというのも

$\dfrac{b}{a}>0$ の分母をはらって　$b>0$

とやってしまうのです。これはとんでもない失敗です。

$\dfrac{b}{a}>0$ の両辺に a^2 を掛けて　$ab>0$

としなければなりません。なお，領域の問題では，境界について必ずふれることが必要。

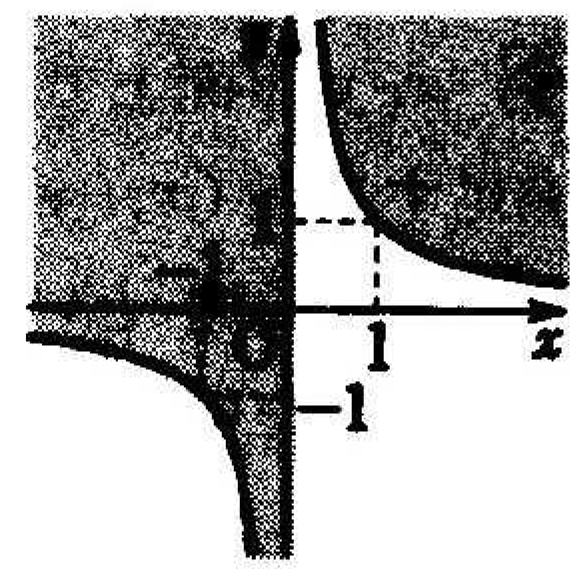
では，具体的な例にいきましょう。

■練習 4. $y>\dfrac{1}{x}$ を満足する点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を示せ。

ヒント すぐ分母をはらうよりはまず移項して

$$y-\frac{1}{x}>0$$

$$\therefore\quad \frac{yx-1}{x}>0$$



両辺に x^2 を掛けて

$$x(yx-1)>0$$

かくて，結果は上の通り，です。

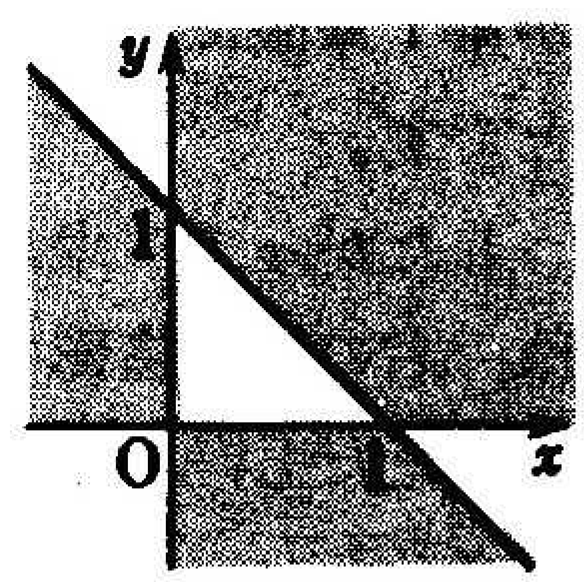
4/1。

■練習 5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{xy}$ を満足する領域を求めよ。

ヒント $\dfrac{x+y-1}{xy}>0$

$$\therefore\quad xy(x+y-1)>0$$

これから求める範囲は右の図のようになります。



*　　*　　*

◆ 第3のタイプは無理関数の入った場合です。このときは，根号内が負にならないことにまず目をつけること。

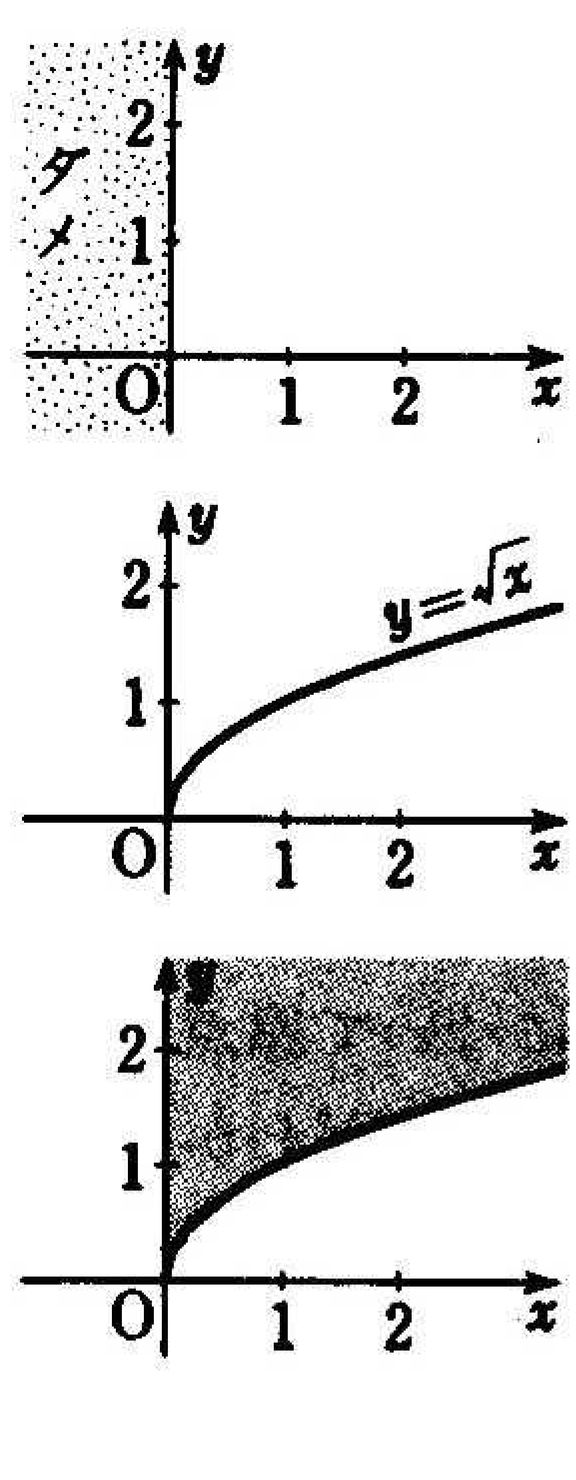
■練習 6. $y>\sqrt{x}$ を満足する領域を求めよ。

ヒント 根号内は負になれないから　$x\geqq0$

次に　$y=\sqrt{x}$　のグラフは放物線の半分。

次に点 (1, 2) は $y>\sqrt{x}$ を満足する。

この3段階を右の図と比べてみてください。なお，上の図にダメなどと書いてあるが，答案にこんなことを書いてはいけません。



■練習 7. $x\geqq-\sqrt{1-y^2}$ を満足する領域を求めよ。 (阪大)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◎ (不等式の表す)領域の求め方

◆不等式の表す領域はいろいろの問題にスゴク役に立つ。しかし，それを求めるのにマゴマゴしているようではまずいでしょう。

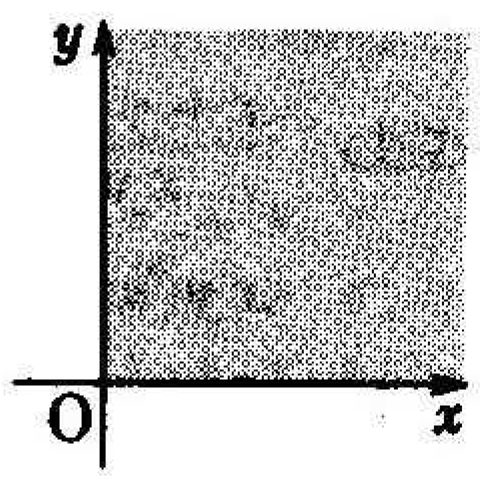
◆ x-y 平面上で，ある与えられた不等式を満足する点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その **不等式の表す領域** といいます。

具体的な例をあげてみましょう。

練習 1. $x>0$ かつ $y>0$ を満足する領域を求めよ。

ヒント $x>0$ かつ $y>0$ というのは点$(x,\ y)$が第1象限にあるということです。

したがって，求める領域は，右の図の陰影の部分です。ただし，軸上の点を含みません。



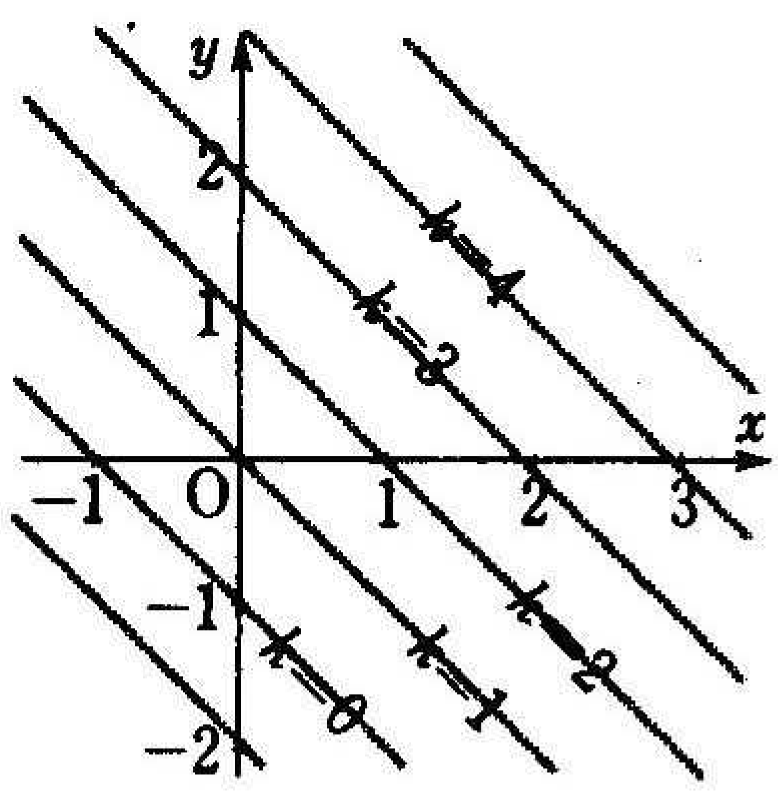
練習 2. $x+y+1>0$ を満足する領域を求めよ。

ヒント $x+y+1=k$ のグラフをかいてみると見やすいでしょう。

右の図に示すように，

$$x+y+1=k$$

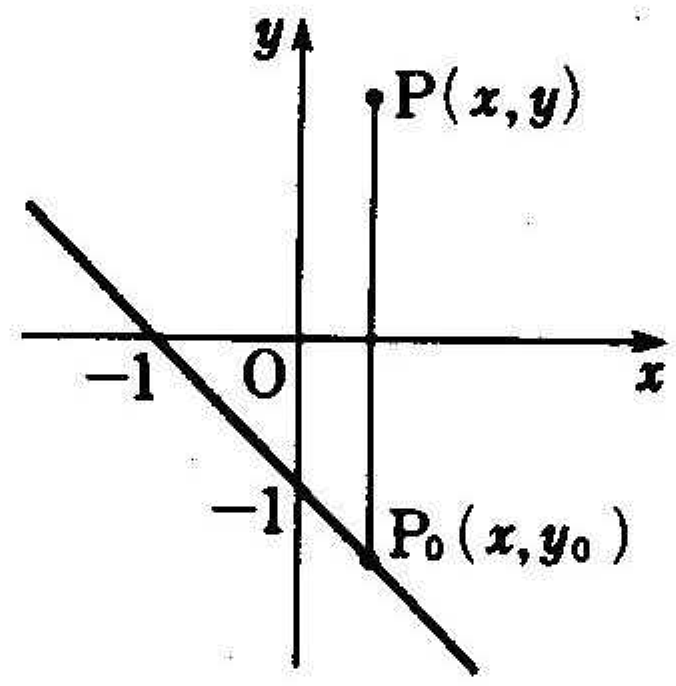
のグラフは平行な直線で，その値は $k=0$ となるのが $x+y+1=0$ の上で，$k>0$ となるのはその直線の上側(あるいは $x+y+1=0$ について原点側といってもいい)，そして，$k<0$ となるのは $x+y+1=0$ の下側(あるいは $x+y+1=0$ について原点と反対側といってもいい)，であることがわかります。



あるいは，もう少し形式的にいうと次のようになります。

$$x+y+1>0$$

を満足する領域は，直線 $x+y+1=0$ について，原点と同じ側である。何となれば，この領域の点 P$(x,\ y)$ を通り y 軸に平行な直線を引き，$x+y+1=0$ との交点を $P_0(x,\ y_0)$ とすると，明らかに



$$y>y_0$$

$$\therefore\quad x+y+1>x+y_0+1=0$$

$$\therefore\quad x+y+1>0$$

ゆえに，$x+y+1=0$ について原点と同じ側の点 $(x,\ y)$ はすべて $x+y+1>0$ を満足する。

まったく同様にして $x+y+1=0$ について，原点と反対側の点はすべて $x+y+1<0$ を満足する。ゆえに，……

というわけだ。

(注) 一般に $f(x,\ y)>0$ を満足する領域を $f(x,\ y)$ の **正領域** といい，$f(x,\ y)<0$ を満足する領域を $f(x,\ y)$ の **負領域** というのです。

なお，$x+y+1>0$ なる領域を求めるには，ふつうはもっと機械的にやって，次のようにします。

まず $x+y+1=0$ のグラフをかく。

次は原点 $(0,\ 0)$ を $x+y+1$ に入れてみると $+1$，つまり >0，そこで，原点は確かに正領域にある。そこで，原点側がすべていい，というわけです。

このようなやり方に習熟することが大切なんです!!

＊　＊　＊

◆ 不等式の表す領域を求める問題は大きく分けて3つになります。第1は整式のとき，

第2は分数式のとき，第3は無理関数の入っているとき，なんです。

では，第1のタイプから：——

4/11

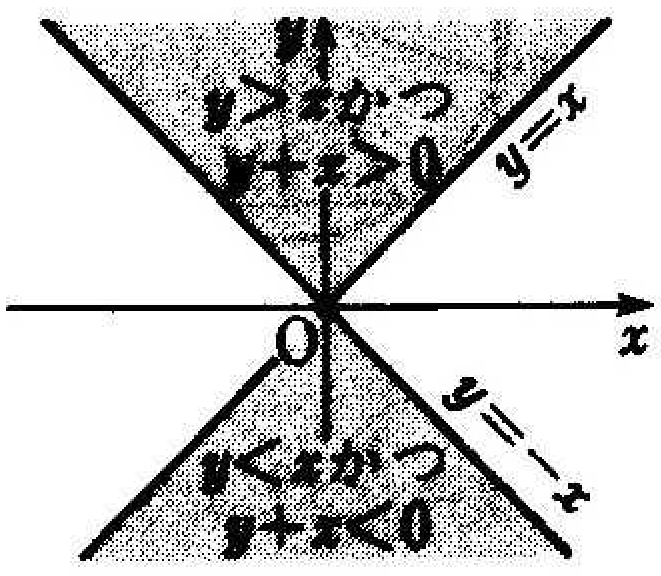
■練習 3. $(y-x)(y+x)>0$ を満足する点 $(x,\ y)$ の存在領域を求めよ。

(ヒント)　$(y-x)(y+x)>0$

ですから

（i）　$y-x>0$ かつ $y+x>0$

（ii）　$y-x<0$ かつ $y+x<0$



の2つの場合があります。結局左図の陰影部分です。

しかし，次のようにやったほうが簡単です。

不等号>の代わりに等号にすると

$$(y-x)(y+x)=0$$

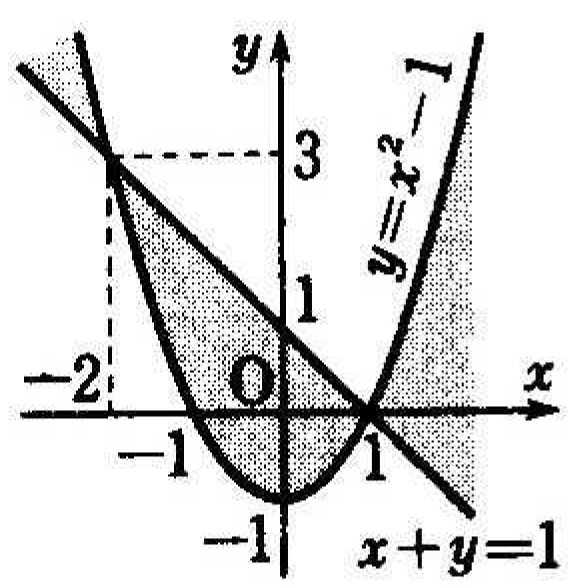
このグラフは2つの直線で，これが求める範囲の境界線です。点 (0, 1) を入れてみると満足するから，この点のある部分はよい。そのトナリはダメで，そのトナリはイイ。結果を求めるだけなら，これでやること。しかし，説明の要るときには上のようにしてやる必要があります。もう1つ：——

■練習 4. 不等式 $(y-x^2+1)(y+x-1)<0$ をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。　　（東海大）

(解)　$y-x^2+1>0$ かつ $y+x-1<0$

$y-x^2+1<0$ かつ $y+x-1>0$

なる2つの領域を求めれば右の図に示す通り。ただし，境界は含まない。



◆ 第2は分数式のときです。このときは，移項して通分して分母をはらって，第1の型に変えてからやればいいのです。

4/11

■練習 5. $x>\dfrac{1}{y}$ を満足する領域を求めよ。

(ヒント)　$x-\dfrac{1}{y}>0$　　$\therefore$　$\dfrac{xy-1}{y}>0$

$\therefore$　$y(xy-1)>0$

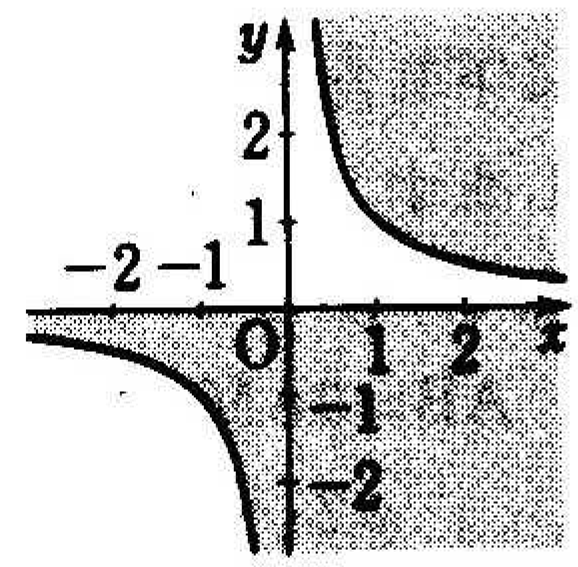
（ここでちょっと注意をしますが，多くの人は

$\dfrac{xy-1}{y}>0$　から　$xy-1>0$

としてしまう。これはいけません。なぜか，わかる？）

ここまでくればもはやいうことなし。

結果は右の通り。



4/11

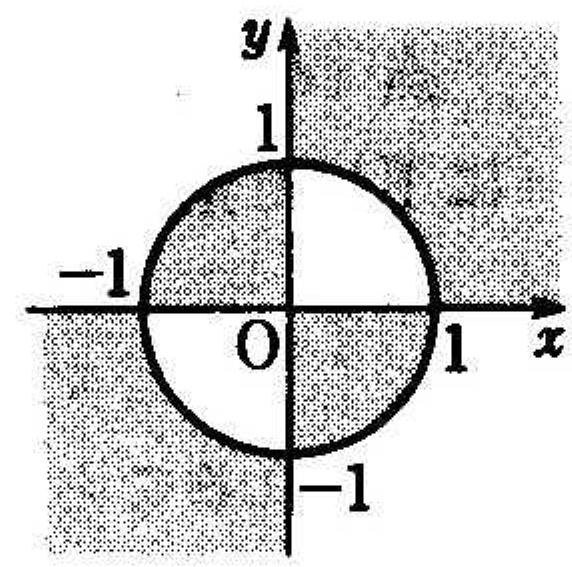
■練習 6. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}>\dfrac{1}{xy}$　なる領域を求めよ。

(ヒント)　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{xy}>0$

$\therefore$　$\dfrac{y^2+x^2-1}{xy}>0$

$\therefore$　$xy(x^2+y^2-1)>0$

ゆえに，右のようになる。



*　　*　　*

◆ 第3は無理関数のとき，このときは根号内が負にならぬことに注意のこと。

4/11

■練習 7. $x\geqq-\sqrt{1-y^2}$ を満足する領域を求めよ。　　（阪大）

(ヒント)　まず，何はともあれ

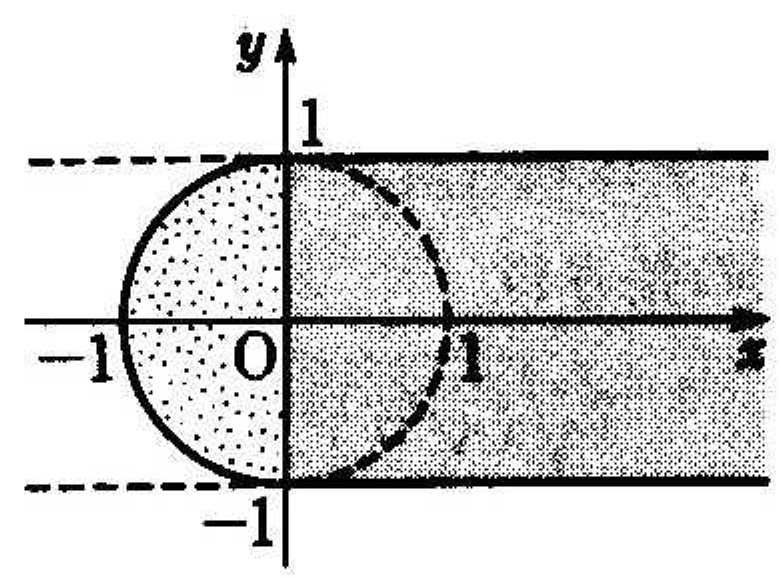
$$1-y^2\geqq0 \quad \therefore \quad -1\leqq y\leqq1$$

その上で $x\geqq0$ なら当然成り立つ。

$x<0$ なら，両辺を2乗して

$$x^2\leqq1-y^2$$

$$\therefore \quad x^2+y^2\leqq1$$



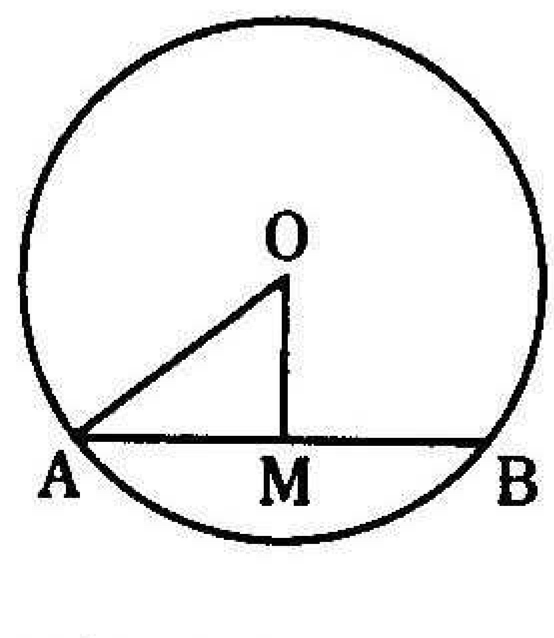
結果は上図の2つの部分。境界も含む。

◐弦の長さの計算のコツ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆直線と曲線と交わってできる弦の長さの計算はかなりめんどうになりがちなもの。そのコツをよくマスターしておきたいものデス。

◆ 円の弦の長さは簡単に計算できます。下の図で，Oから，弦ABに下した垂線の足をMとしますと，MはABの中点ですから



$$AB=2AM$$
$$=2\sqrt{OA^2-OM^2}$$

円の方程式とABの方程式が与えられていれば，OAとOMが計算できますからABはすぐ出るわけ。ただし，

点$(\alpha,\ \beta)$から直線$ax+by+c=0$に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられることは知っておく必要があります。この公式については（☞ p. 274）を参照してください。

では，次の練習1.をやってみましょう。

練習 1. 円 $x^2+y^2=a$ $(a>0)$ で表される円が直線 $x+2y=1$ と交わるとき，切りとる弦の長さを求めよ。

ヒント　円の中心Oから直線 $x+2y-1=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|1\cdot0+2\cdot0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

で，円の半径は $\sqrt{a}$ であるから，切りとる弦の長さは

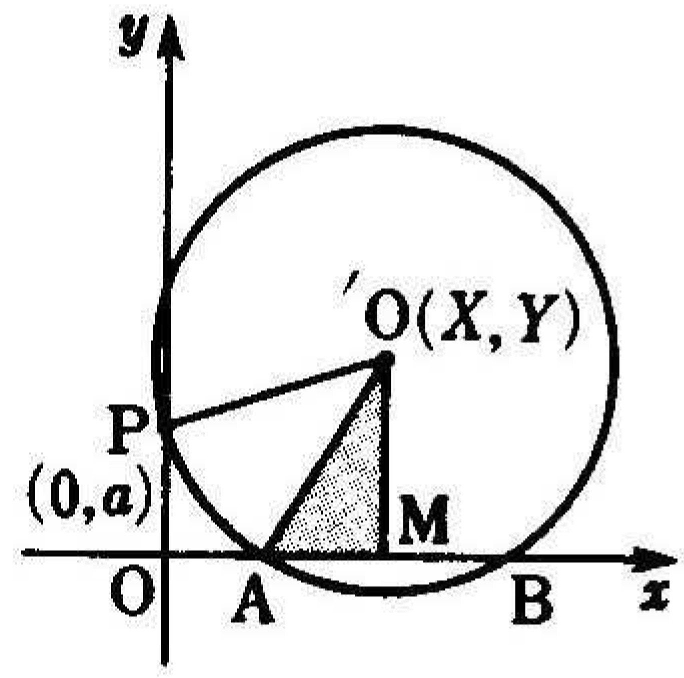
$$2\sqrt{(\sqrt{a})^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{a-\frac{1}{5}}$$

である。

練習 2. 点 $(0,\ a)$ を通り，x軸から長さ$2a$の弦を切りとる円の中心の軌跡を求めよ。

（日本大）

ヒント　右の図において



$O'P=O'A$

$=\sqrt{O'M^2+AM^2}$

$\therefore\quad X^2+(Y-a)^2$

$=Y^2+a^2$

$\therefore\quad Y=\dfrac{1}{2a}X^2$

よって，求める方程式は $y=\dfrac{1}{2a}x^2$ です。

*　*　*

◆ 円の場合は上のように割合簡単に扱うことができますが，他の曲線の場合はめんどうです。では，さっそく具体的な問題をやってみましょう。

4/18

練習 3. 直線 $y=x-1$ がだ円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で切りとられる弦の長さを求めよ。

（昭和薬大）

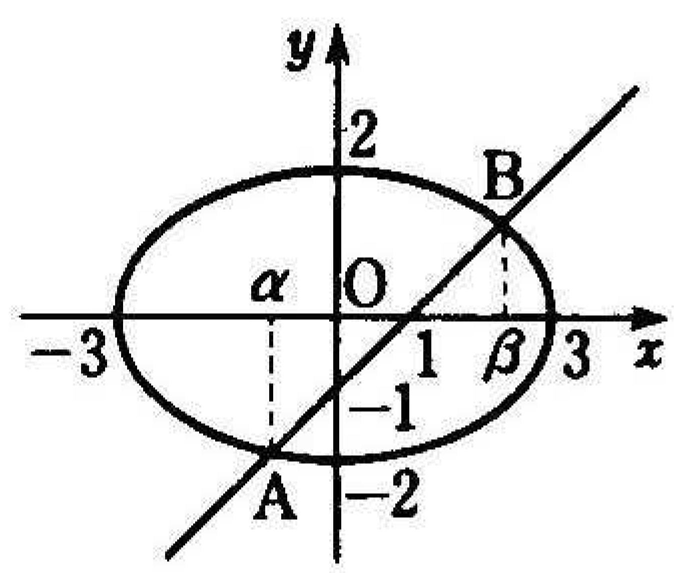
解　図のように交点のx座標を

$\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$

とすると，

$A(\alpha,\ \alpha-1)$

$B(\beta,\ \beta-1)$



$$\therefore\quad \overline{AB}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

ところが，$y=x-1$ を $4x^2+9y^2=36$ に代入してxについて整理すると

$$13x^2-18x-27=0$$

で，この2つの解が$\alpha,\ \beta$であるから

$$\alpha+\beta=\frac{18}{13},\ \alpha\beta=-\frac{27}{13}$$

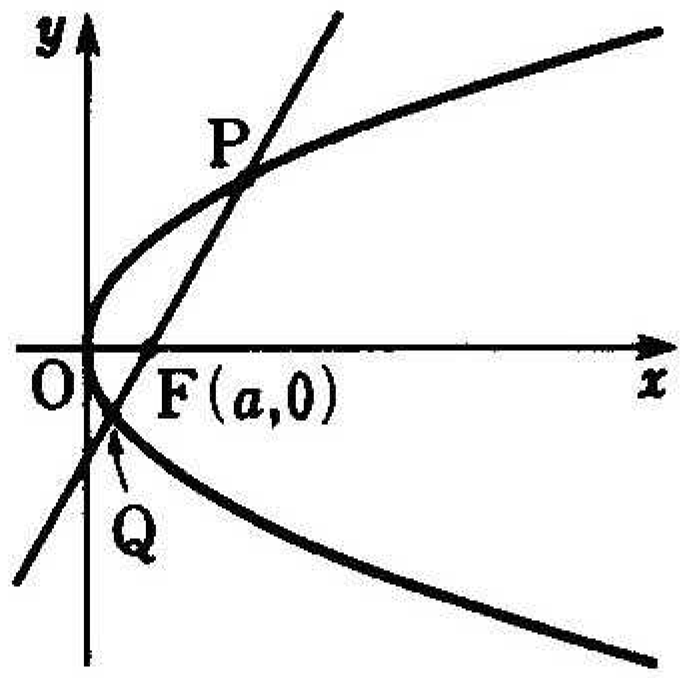
$$\therefore\quad AB=\sqrt{2\left\{\left(\frac{18}{13}\right)^2-4\left(-\frac{27}{13}\right)\right\}}=\frac{24}{13}\sqrt{6}$$

4/12

■練習 4. 放物線 $y^2=4ax$ $(a>0)$ の弦PQが点 $F(a,\ 0)$ を通るとき，PQ の傾き m と a とで PQ の長さ L を表せ。 (岡山大)

ヒント 直線PQの方程式は

$y=m(x-a)$



そこで，P, Q の座標をそれぞれ

$P(\alpha,\ m(\alpha-a))$

$Q(\beta,\ m(\beta-a))$

とおくと

$$\begin{aligned}L^2&=\overline{PQ}^2\\&=(\alpha-\beta)^2+\{m(\alpha-a)-m(\beta-a)\}^2\\&=(\alpha-\beta)^2+m^2(\alpha-\beta)^2\\&=(m^2+1)(\alpha-\beta)^2\end{aligned}$$

ところが $y=m(x-a)$ と $y^2=4ax$ から y を消去すると

$$\{m(x-a)\}^2=4ax$$

$$\therefore\quad m^2x^2-2a(m^2+2)x+m^2a^2=0$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\frac{2a(m^2+2)}{m^2},\quad \alpha\beta=a^2$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\frac{4a^2(m^2+2)^2}{m^4}-4a^2=\frac{16a^2(m^2+1)}{m^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad L&=\sqrt{(m^2+1)\cdot\frac{16a^2(m^2+1)}{m^4}}\\&=\frac{4a(m^2+1)}{m^2}\end{aligned}$$ ……〔答〕

* * *

◆ 長さが問題になっていても，ときには長さを求めないですむこともあります。例えば，これです。

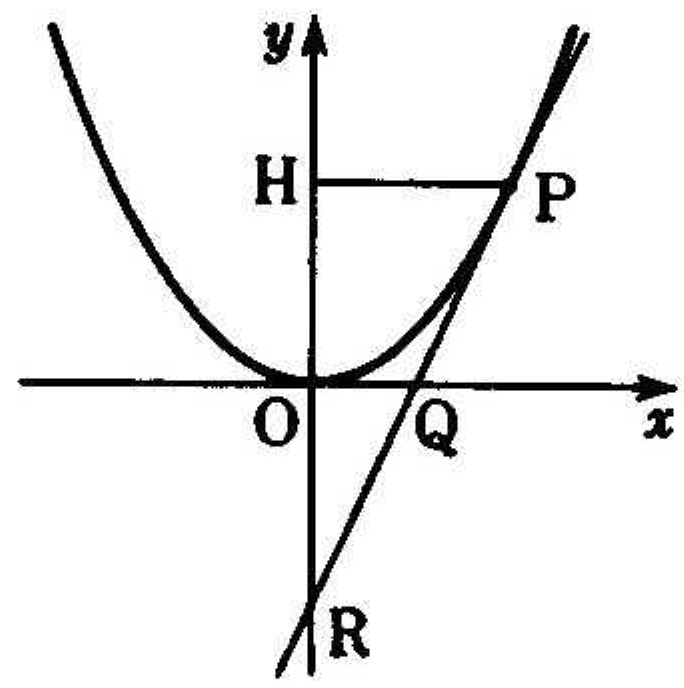
4/18

■練習 5. 放物線 $y=x^2$ 上の点 P における接線が x 軸と交わる点をQ，y 軸と交わる点をRとするとき PQ : QR を求めよ。

ヒント このようなときは，何も PQ, QR の長さを求める必要はないのです。Pから y 軸に下した垂線の足をHとすると，

PQ : QR＝HO : OR

でしょう。そして，これなら簡単です。



では：——

点Pの座標を $(t,\ t^2)$ とし，P を通る直線の傾きを m としますと

$$y-t^2=m(x-t)$$

これが $y=x^2$ と接するように m を定めたい。y を消去しますと

$$x^2-mx-(t^2-mt)=0$$

接する条件は，判別式を D として

$$D=m^2+4\cdot1\cdot(t^2-mt)=0$$

$$\therefore\quad (m-2t)^2=0\quad \therefore\quad m=2t$$

こんなわけで接線は

$$y-t^2=2t(x-t)\quad \therefore\quad y=2tx-t^2$$

これが y 軸と交わる点は $(0,\ -t^2)$ だから

$$\begin{aligned}PQ : QR&=HO : OR\\&=(t^2-0):(0-(-t^2))\\&=t^2:t^2=1:1\end{aligned}$$

ということになります。

上は直接弦とは関係ありませんが，弦の場合もまったく同様です。例えば：——

■練習 6. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$ との交点をP，Qとし，この直線上に点Rをとる。PR・QR＝2 となる点 R は k をいろいろに変化させるとき，どんな図形を描くか。 (中央大，早大)

ヒント $y=x+k$ の傾きは1ですから PR や QR の長さはその x 軸上への正射影の $\sqrt{2}$ 倍です。ですから，P, Q の x 座標を α, β としますと，$R(X,\ Y)$ として

$$PR=\sqrt{2}\,|X-\alpha|,\quad QR=\sqrt{2}\,|X-\beta|$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad PR\cdot QR&=2|X-\alpha||X-\beta|\\&=2|X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta|\end{aligned}$$

となってウマクいく。しかし，ちょっとした難問。 〔答〕 $y=x^2-1$, $y=x^2+1$ $(4y-4x+1>0)$

線分の長さの入った問題では

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

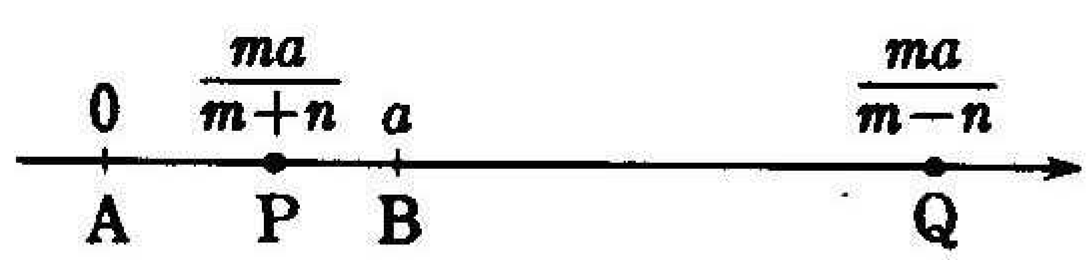
◆線分の長さの扱い方を一歩誤まると，スゴクめんどうになることが多いものです。計算のテクニックをマスターしよう。

◆　2次曲線と1つの直線が交わっているとき，その切りとられる線分の長さを求めることはよく出る問題ですが，それらについては，(☞ p.298) をみてください。

ここでは，もっと一般的な場合について考えてみましょう。例えばこれです。

4/19
練習 1. 長さ a の線分 AB を $m:n$ に内分および外分する点をそれぞれ P，Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよ。(都立大)

ヒント　A，B；P，Q はすべて同一直線上にあるのですから，数直線を使うほうが便利でしょう。$m>n$ として，数直線を下のようにとります。



すなわち，A点の座標を0，B点の座標を a としますと

$$\mathrm{P}:\frac{ma+n\cdot 0}{m+n}=\frac{ma}{m+n}$$

$$\mathrm{Q}:\frac{ma-n\cdot 0}{m-n}=\frac{ma}{m-n}$$

PとQのいずれが右のほうかわかりませんね。だからといって，困るようではいけません。

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{ma}{m+n}-\frac{ma}{m-n}\right|=\left|\frac{-2mna}{m^2-n^2}\right|$$

$$=\frac{2mna}{m^2\sim n^2}\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 2. 線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，$m:n$ に外分する点を Q とすると

$$\frac{2}{\mathrm{QP}}=\frac{1}{\mathrm{QA}}+\frac{1}{\mathrm{QB}}$$

なる関係があることを示せ。

ヒント　上の練習1.で得られた結果を使ってみましょう。

$m>n$ のとき

$$\frac{2}{\mathrm{QP}}=2\cdot\frac{m^2\sim n^2}{2mna}=\frac{m^2-n^2}{mna}$$

$$\frac{1}{\mathrm{QA}}+\frac{1}{\mathrm{QB}}=\frac{m-n}{ma}+\frac{1}{\dfrac{ma}{m-n}-a}$$

$$=\frac{m-n}{ma}+\frac{m-n}{na}$$

$$=\frac{(m-n)(m+n)}{mna}$$

$$=\frac{m^2-n^2}{mna}$$

なるほど

$$\frac{2}{\mathrm{QP}}=\frac{1}{\mathrm{QA}}+\frac{1}{\mathrm{QB}}$$

となります。$m<n$ のときも同様です。

*　　*　　*

◆　数直線上の問題では線分の向きによって正負があります。つまり，正の方向に向いていればプラス，負の方向に向いていればマイナス，というわけ。この場合には A，B の座標がそれぞれ a，b として

$$\mathrm{AB}=b-a,\ \ \mathrm{BA}=a-b$$

というふうに到着点の座標から出発点の座標を引けばいいのです。では，これを：——

4/15
練習 3. 数直線上の4点 A，B，C，D があるとき次式を証明せよ。

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

解　A，B，C，D の座標をそれぞれ a，b，c，d とすると

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}-\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

$=(b-a)(d-c)+(d-a)(c-b)$

$\quad-(c-a)(d-b)$

$=(bd-bc-ad+ac)+(dc-db-ac+ab)$

$\quad -(cd-cb-ad+ab)=0$

Q. E. D.

*　　*　　*

◆ 今までは直線上の線分の長さを扱いましたが，次には平面上の線分の長さを考えてみましょう。もちろん

平面上の2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ の距離 $\overline{AB}$ は

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

で与えられます。

■練習 4. 次の2点間の距離を求めよ。

4/15　　$(a,\ b)$，$(b,\ a)$

(解) 求める距離は

$$\sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2(a-b)^2}$$

$=\sqrt{2}\,|a-b|$　　　答 $\sqrt{2}\,|a-b|$

4/15

■練習 5. 点 $A(1,\ 2)$ および $B(-1,\ -2)$ を2つの頂点とする正三角形の他の頂点Cの座標を求めよ。　(東京理大)

(ヒント) Cの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$$

$$\therefore\quad (1+1)^2+(2+2)^2=(x-1)^2+(y-2)^2$$
$$=(x+1)^2+(y+2)^2$$

これを解いて x，y を求めればいいハズ。

$$x^2+y^2-2x-4y=15 \qquad \cdots\cdots①$$

$$x=-2y \qquad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して解けば

$y=\pm\sqrt{3}$　$\therefore$　$x=\mp 2\sqrt{3}$　(複号同順)

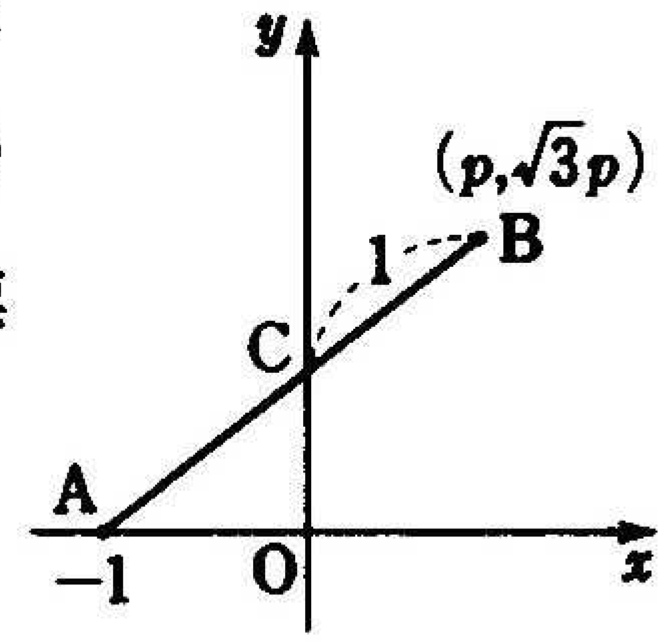
よって，求めるCの座標は

$(\pm 2\sqrt{3},\ \mp\sqrt{3})$　(複号同順)

(注) 複号同順というのも書きちがう人がスゴク多いのです。復号同順というのもあるが，何といっても多いのは複合同順だ。まずいことに数学には複合という用語が別にあるのです。

■練習 6. 2点 $A(-1,\ 0)$，$B(p,\ \sqrt{3}p)$，$(p>0)$ を通る直線と y 軸との交点をCとする。線分BCの長さが1となるとき，線分ACの長さを求めよ。　(都立大)

(ヒント) ABの方程式は



$$y-0=\frac{\sqrt{3}p}{p+1}(x+1)$$

ですから，Cの y 座標は

$$\frac{\sqrt{3}p}{p+1}$$

で与えられます。

$$\therefore\quad \overline{BC}^2=(p-0)^2+\left(\sqrt{3}p-\frac{\sqrt{3}p}{p+1}\right)^2=1$$

分母をはらって整理すると

$$4p^4+2p^3-(2p+1)=0.$$

$$\therefore\quad (2p+1)(2p^3-1)=0$$

ところが $p>0$ という条件があったから

$$p^3=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad p=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

ゆえにCの y 座標は

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad \overline{AC}^2=\left\{\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}\right\}^2+1$$

$$=\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1-2\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}}{3}$$

$$+1$$

$$=\frac{1}{3}(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1-4+2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+3)$$

$$=\frac{1}{3}(3\sqrt[3]{4})=\sqrt[3]{4}$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt[3]{2}$$

*　　*　　*

◆ ヤレヤレ，これは意外とめんどうな計算でした。キミがやって途中でまちがったら，必ずはじめからやりなおして，ストレートにできるまでやるといい。計算力はそれを契機として飛躍的に上がるものだからです。なお上の計算は三角形の相似を使うと少しラク。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

定点通過問題の扱い方

◆定点を通ることを証明せよ，とか，定直線に接することを示せ，とかいう問題は，図形問題の華（はな）だなあ。

◆ 2直線 $x+2y-5=0$, $3x+4y-11=0$ の交点は，これを解いてみるとすぐわかるように (1, 2) です。いいかえると，点 (1,2) はこの2つの式を満足しています。

そこで，いま，kを任意の定数として

$$(x+2y-5)+k(3x+4y-11)=0 \quad \cdots(*)$$

を作りますと，これは点 (1, 2) を満足します。なぜなら代入してみると，

$$0+k\cdot 0=0$$

となるからです。つまり，上の直線 (*) は，kの値が何であっても，定点 (1, 2) を通ることがわかります。定点通過の問題の大切なことはこれだけなんです。では，何はともあれ，次の練習1. にいきましょう。

■練習 1. 直線 $y=mx+(2m+1)$ は，mの値にかかわらず定点を通ることを示せ。

4/10

（大阪外語大）

ヒント　mのついたものと，つかないものに分けると，

$$(-y+1)+m(x+2)=0$$

となります。これは，mが何であっても

$$-y+1=0 \quad かつ \quad x+2=0$$

の交点 (−2, 1) を通るのです。

■練習 2. kがどんな実数値をとっても方程式　$x^2+y^2-2+k(x-2y+1)=0$ は2つの定点を通ることを示せ。

解　$x^2+y^2-2=0 \quad \cdots\cdots①$

$x-2y+1=0 \quad \cdots\cdots②$

とおいて，xを消去すれば

$$5y^2-4y-1=0$$

$$\therefore \quad (y-1)(5y+1)=0$$

$$\therefore \quad y=1,\ -\frac{1}{5}$$

したがって，①，②の交点は2つあって

$$(1,\ 1),\ \left(-\frac{7}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$$

である。ゆえに，与えられた円は，kの値にかかわらず定点 (1, 1), $\left(-\frac{7}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$ を通る。

4/10

■練習 3. mが何であっても，円

$$x^2+y^2-2mx-2my+(2m-1)=0$$

は2定点を通ることを示せ。

ヒント　mのついたものと，つかないものとに分けて

$$(x^2+y^2-1)-2m(x+y-1)=0$$

が得られます。そこで連立方程式

$$x^2+y^2-1=0,\quad x+y-1=0$$

を解いてみますと

$$(1,\ 0) \quad および \quad (0,\ 1)$$

が得られます。つまり，この円は定点(1, 0) および (0, 1) を通るのです。

*　*　*

◆ 定点通過問題をめんどうにするのは条件があるときなんです。例えば，練習4. です。

4/10

■練習 4. 2直線　$y=b+2$, $y=2ax-b$ ($a \neq 0$) の交点を通り，傾きaの直線はa, bの値にかかわらず1つの定点を通ることを示せ。

（新潟大）

ヒント　$y=b+2$, $y=2ax-b$ を連立させて解くと交点 $\left(\frac{b+1}{a},\ b+2\right)$ が得られますから，この交点を通り，傾きaの直線は

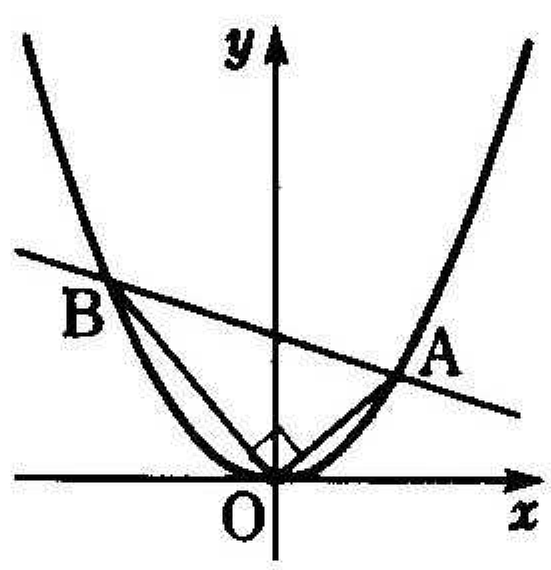
$$y=a\left(x-\frac{b+1}{a}\right)+(b+2)$$

すなわち $y=ax+1$ です。aのついたのと，つかないのに分けて

$$ax+(1-y)=0$$

が得られますから $x=0$, $1-y=0$ を解いて得られる定点 $(0,\ 1)$ を通るのです。実際上はここまでやらないでも $y=ax+1$ が定点 $(0,\ 1)$ を通ることは明らかです。

■練習 5. $y=x^2$ の頂点Oを通る，直交2弦OA, OB を引くとき，弦 AB は定点を通ることを示せ。（東京水産大）



（解） A，Bの座標をそれぞれ $(a,\ a^2)$, $(b,\ b^2)$ とおくと

$$\text{OA の傾き}=\frac{a^2-0}{a-0}=a$$

$$\text{OB の傾き}=\frac{b^2-0}{b-0}=b$$

であるから，OA⊥OB により

$$ab=-1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，直線 AB の方程式は

$$y-b^2=\frac{a^2-b^2}{a-b}(x-b)$$

$$\therefore\quad y-b^2=(a+b)(x-b)$$

$$\therefore\quad y=(a+b)x-ab \qquad \cdots\cdots②$$

①より b を求めて②に代入すると

$$y=\left(a-\frac{1}{a}\right)x+1$$

ここで $a-\dfrac{1}{a}=m$ とおくと

$$y=mx+1$$

これは定点 $(0,\ 1)$ を通る。　　Q. E. D.

さあ，どうです。おわかり。わかったら，ついでだ，練習7.をやってみませんか。もしわからなかったら，練習6.を，上と同じようにしてやってみるといいのだが。

■練習 6. 放物線 $y=2x^2$ の頂点Oを通る直交2弦 OA, OB を引くとき，AB は定点を通ることを示せ。

（ヒント） $A(a,\ 2a^2)$, $B(b,\ 2b^2)$ として，上と同じようにしてやってみてください。定点は y 軸との交点です。

■練習 7. 放物線 $y=x^2$ 上の定点 $P(1,\ 1)$ から直交2弦 PA, PB を引くと，AB は定点を通ることを示せ。

（解） $A(a,\ a^2)$, $B(b,\ b^2)$ とすると

$$\text{PA の傾きは}\quad \frac{a^2-1}{a-1}=a+1$$

$$\text{PB の傾きは}\quad \frac{b^2-1}{b-1}=b+1$$

であるから，PA, PB の直交条件から

$$(a+1)(b+1)=-1$$

$$\therefore\quad ab+a+b+2=0 \qquad \cdots\cdots①$$

次に，直線 AB の方程式は

$$y-a^2=\frac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)$$

$$\therefore\quad y=(a+b)x-ab \qquad \cdots\cdots②$$

①より ab を求め，②に代入すると

$$y=(a+b)x+(a+b)+2$$

$a+b=m$ とおくと

$$y=mx+m+2$$

あるいは

$$m(x+1)+(2-y)=0$$

これは m の値にかかわらず定点 $(-1,\ 2)$ を通る。

この程度のものができれば，定点通過問題は卒業したといっていいでしょう。

* * *

◆ では，いくつか問題をあげておきます。余裕があったらやってみませんか。

■練習 8. 円 $x^2+y^2-2ay=1$ は a がどんな実数値をとっても，2定点を通ることを示せ。（九大） 答 $(\pm1,\ 0)$

■練習 9. 曲線 $y=(a+1)x^2+2ax+a$ は，a の値を変えてもつねに定点を通ることを示せ。（奈良女大） 答 $(-1,\ 1)$

■練習 10. だ円 $x^2+4y^2=4$ 上の1点 A $(2,0)$ から直交する2弦 AP, AQ を引くとき，PQ は x 軸上の定点を通ることを示せ。

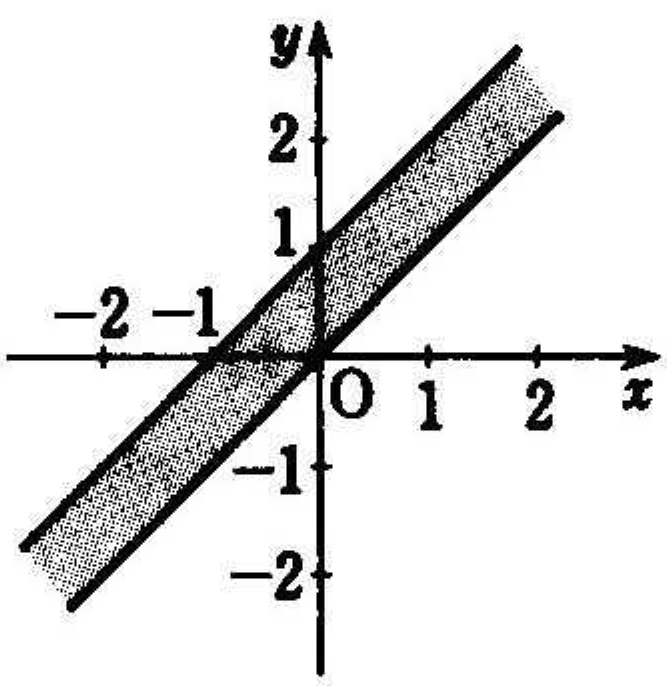
（ヒント） ああ，これは難問だなあ!!

曲線群の通過範囲の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ある条件を満足する曲線の存在範囲を求める問題はやり方がきまっています。イヤガルなんて，とんでもない。

◆ $y=x+a$ という直線は点 $(0,\ a)$ を通り，傾き1の直線を表すことはいうまでもありません。a を $-\infty$ から $+\infty$（∞は無限大を表す記号です）まで変えると，この直線はあらゆる点を通るわけです。しかし，aにある条件をつけて，$0\leqq a\leqq 1$ のときどんな範囲を通るか，とすると，グラフをかいてみるとわかるように，右のような帯状の部分になるのです。計算で出すなら，



$y=x+a$ から

$a=y-x$

これを $0\leqq a\leqq 1$ に代入して

$$0\leqq y-x\leqq 1$$

が得られ，これを満足する領域を求めればいいのです。

そこで，この種の問題の本格派ですが，それはパラメーターの2次式になるときなのです。それをものにするのが，本項の目的です。さて，それでは：——

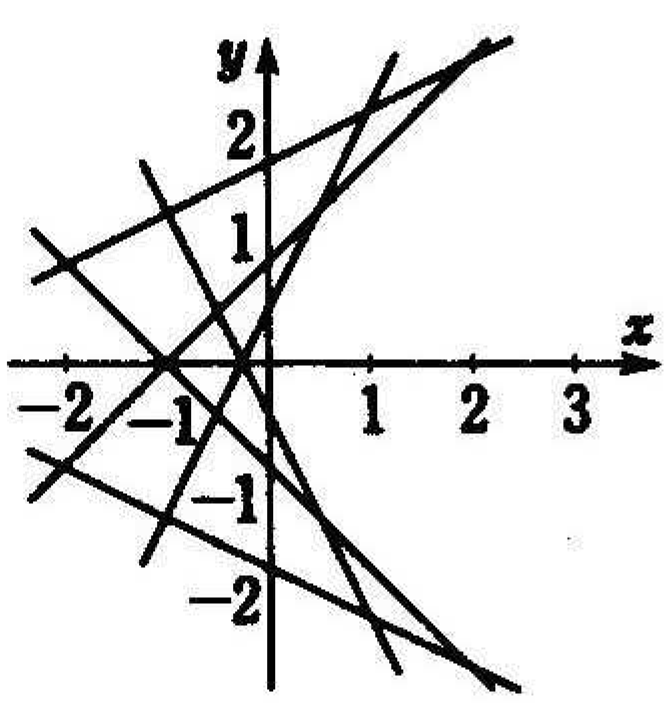
1/24

練習1. mが実数値をとるとき，直線

$$x+my+m^2=0$$

の通りうる範囲を求めよ。

ヒント　mにいろいろ値を入れてグラフをかいてみると右の通り。なるほど，何か放物線と思われるもので囲まれた部分だけは通れないらしい。例えば，点 $(2,\ 1)$ はどうだ？　代入してみると



$$2+m+m^2=0$$

つまり

$$m^2+m+2=0$$

判別式をDとすると

$$D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$$

なるほど，点 $(2,\ 1)$ を通るようなmの実数値がないわけだ。こんなわけで，次のような解答が得られるのです。

解　与えられた式をmについて整理して

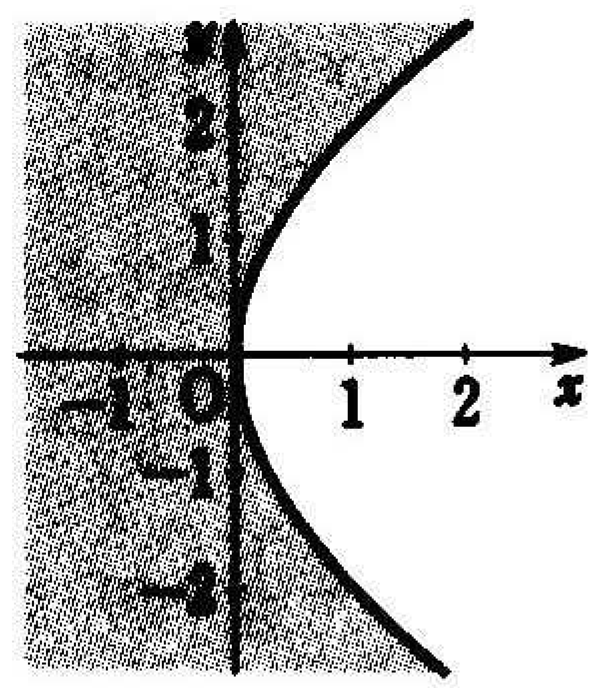
$$m^2+ym+x=0$$

実数解をもつ条件は，判別式をDとすると

$$D=y^2-4\cdot1\cdot x\geqq 0$$

$$\therefore\quad x\leqq\frac{y^2}{4}$$

これを満足する範囲は右の陰影部分で，これが直線の通りうる範囲である。



1/24

練習2. 直線 $y=mx+\dfrac{1}{m}$ の通りうる範囲を求めよ。　（千葉大）

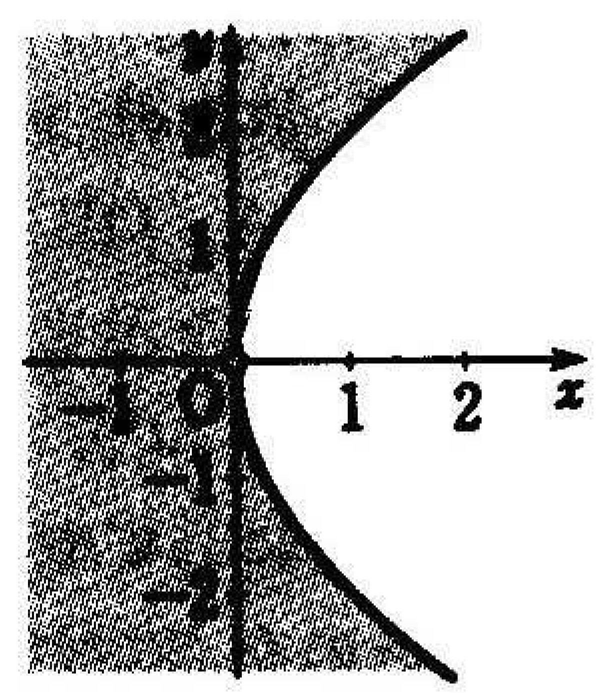
解　$$y=mx+\frac{1}{m}$$

$$\therefore\quad xm^2-ym+1=0$$

これが満足するmの実数解をもつ条件を求めればよい。

(i)　$x=0$ のときは　$ym=1$，ゆえに $y\neq0$ のとき実数解をもつ。

(ii)　$x\neq0$ のときは判別式をDとすると



$$D=y^2-4x\geqq 0$$

(ⅰ), (ⅱ)を満足する範囲は図のようである。ただし，境界は原点O以外を含む。

■練習 3. $m>0$ のとき $y=mx+\dfrac{1}{m}$ の通りうる範囲を求めよ。

ヒント 点 $(-2,\ 1)$ を通るものを求めてみましょう。

$$1=-2m+\frac{1}{m}$$

$$\therefore\quad 2m^2+m-1=0$$

$$\therefore\quad (m+1)(2m-1)=0$$

$$\therefore\quad m=-1,\ \frac{1}{2}$$

つまり，点 $(-2,\ 1)$ を通る直線 $y=mx+\dfrac{1}{m}$ は2つあって，1つは $m=-1<0$，他の1つは $m=\dfrac{1}{2}>0$ なのです。そして，この点 $(-2,\ 1)$ が適することは明らか。

このようなわけで，2次方程式

$$xm^2-ym+1=0$$

の少なくとも1つの解が正である条件を求めればいい。この「**少なくとも**」というところがわからない人が多いのです。

さて：——

解 $\qquad y=mx+\dfrac{1}{m}$

$$\therefore\quad xm^2-ym+1=0 \qquad \cdots\cdots①$$

この①が少なくとも1つの解が正であるための条件を求めればよい。

(ⅰ) $x=0$ のとき，$y\neq 0$ のとき

$$m=\frac{1}{y}>0$$

より， $\quad x=0$ かつ $y>0$

(ⅱ) $x\neq 0$ のとき，①の2つの解を α, β とするとき $\alpha>0>\beta$ となるための条件は

$$\alpha\beta=\frac{1}{x}<0 \qquad \therefore\quad x<0$$

(ⅲ) $\alpha>0=\beta$ となることはない。

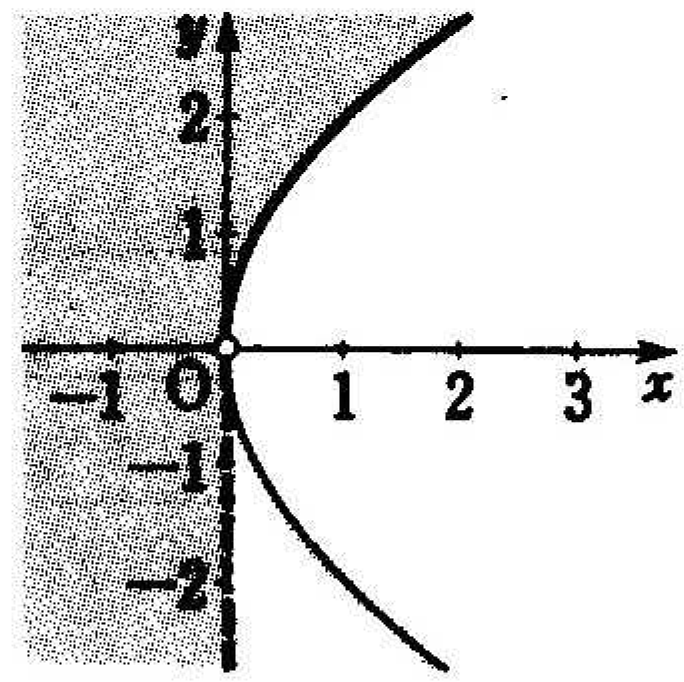
(ⅳ) $\alpha>0$, $\beta>0$ となるための条件は，判別式をDとすると

$$D=y^2-4x\geqq 0$$

$$\alpha\beta=\frac{1}{x}>0$$

$$\alpha+\beta=\frac{y}{x}>0$$

以上(ⅰ)〜(ⅳ)から求める範囲は右のようである。



■練習 4. $1<m<2$ のとき直線 $y=mx+\dfrac{1}{m}$ の通りうる範囲を求めよ。

ヒント $f(m)=xm^2-ym+1=0 \qquad \cdots\cdots①$

の少なくとも1つの解が1より大で2より小であるための条件を求めればよい。

(ⅰ) $x=0$ のとき，$y\neq 0$ のとき $m=\dfrac{1}{y}$ で，これが $1<m<2$ を満足するための条件は

$$1<\frac{1}{y}<2 \qquad \therefore\quad \frac{1}{2}<y<1$$

(ⅱ) $x\neq 0$ のとき，①の1つの解だけが1，2の間にあるための条件は

$$f(1)\cdot f(2)<0$$

$$\therefore\quad (x-y+1)(4x-2y+1)<0$$

(ⅲ) ①の2つの解 α, β $(\alpha<\beta)$ のうち1つが1または2のとき：

$\alpha=1$ ならば $f(1)=0 \quad \therefore\quad x-y+1=0$

で，このとき他の解は $\dfrac{1}{x}$ であるから

$$1<\frac{1}{x}<2 \text{ つまり } \frac{1}{2}<x<1$$

$\beta=2$ ならば $f(2)=0$, $4x-2y+1=0$

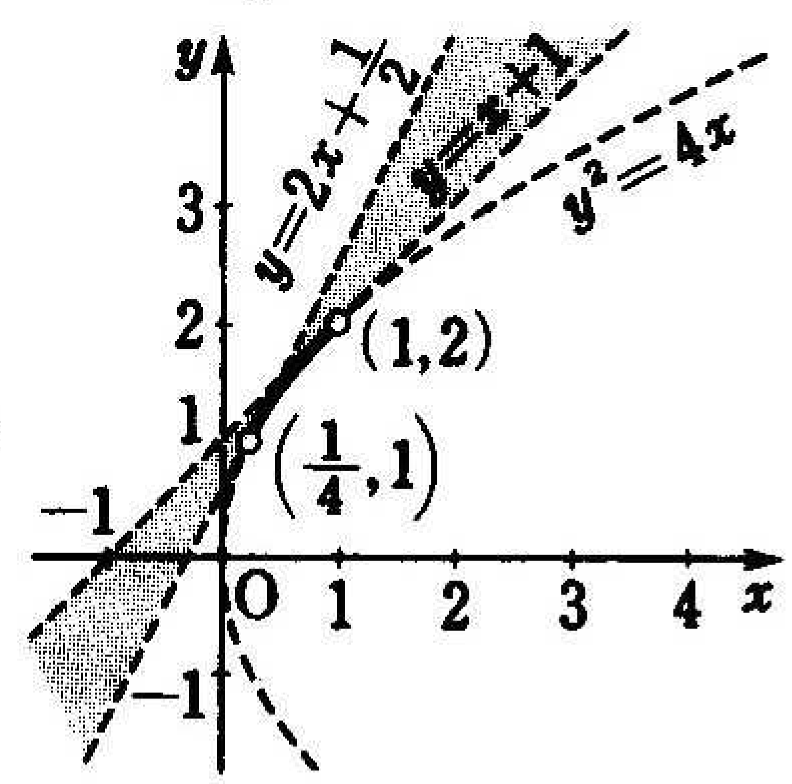
で，このとき他の解は $\dfrac{1}{2x}$ であるから

$$1<\frac{1}{2x}<2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$$

(ⅳ) $1<\alpha<2$, $1<\beta<2$ のとき

判別式 $=y^2-4x\geqq 0$



$xf(1)>0$, $xf(2)>0$, 軸から $1<\dfrac{y}{2x}<2$

以上より上図の通り。難問だなあ。

包絡線の求め方

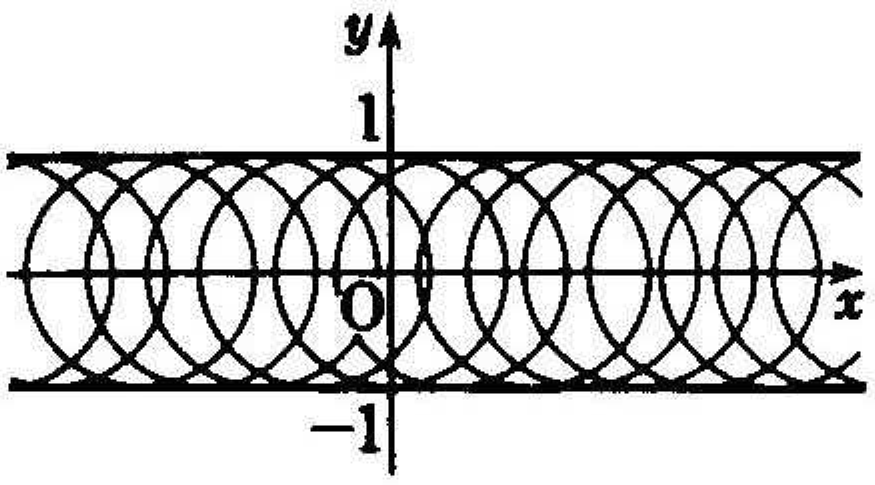
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆オヤ，コレ，何と読むんです。習った覚えがありませんねえ。そうでしょうとも，ホウラクセンと読むのです。

◆ 包絡線というコトバは高校ではやりません。しかし，包絡線を求める問題はずいぶんやっているハズ。では，とりあえず，これを。

練習 1. 円 $(x-a)^2+y^2=1$ は2定直線に接するという。その方程式を求めよ。ただし，aは任意の定数である。

ヒント　aをいろいろ変えてグラフをかいてみればすぐわかるように，この円は2直線 $y=\pm1$ に接するのです。



4/24

練習 2. mを任意の定数とするとき，直線 $x+my+m^2=0$ は放物線 $y^2=Ax$ に接するという。Aの値を求めよ。

ヒント　$x+my+m^2=0$ と $y^2=Ax$ が接するための条件を求めるには，1つの文字を消去して得られる2次方程式が重複解をもつ条件を求めればいいだろう。yを消去するのは損らしい。xにしよう。

$x=-my-m^2$ を $y^2=Ax$ に代入して

$$y^2=A(-my-m^2)$$

$$\therefore\quad y^2+Amy+Am^2=0$$

判別式をDとすると

$$D=(Am)^2-4(Am^2)=0$$

$$\therefore\quad Am^2(A-4)=0$$

$A\neq0$ であることは放物線という条件からわかっています。mが何であろうとも，これが成り立つのは $A=4$ のとき，であることもわかるでしょう。

答　$A=4$

4/24

練習 3. 放物線 $y=ax^2+1+\dfrac{1}{a}$ に接する直線のうち，aに無関係な定直線を求めよ。

(山口大)

ヒント　接線を $y=mx+k$ とおいて，aが何であろうとも接するようにmとkを求めればいいだろう。さて，yを消去すると

$$ax^2-mx+\left(1+\frac{1}{a}-k\right)=0$$

となります。接するための条件は，この2次方程式が重複解をもつことです。つまり，判別式をDとすると

$$D=m^2-4a\left(1+\frac{1}{a}-k\right)=0$$

つまり　$4(k-1)a+(m^2-4)=0$

これがaが何であっても成り立つ条件は

$$4(k-1)=0\quad かつ\quad m^2-4=0$$

$$\therefore\quad k=1\quad かつ\quad m=\pm2$$

ですから，求める直線は

$$y=\pm2x+1$$

であることがわかります。

4/24

練習 4. θが任意の値をとるとき，直線

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$$

は原点を中心とする定円に接することを示せ。

ヒント　原点を中心とする定円というのだから，原点から下した垂線の長さが一定になるにちがいない。さて，それは……

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y-1=0$$

に原点 (0, 0) から下した垂線の長さは

$$\frac{|0+0-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\frac{1}{1}=1$$

なるほど，それは単位円 $x^2+y^2=1$ に接するのだった。

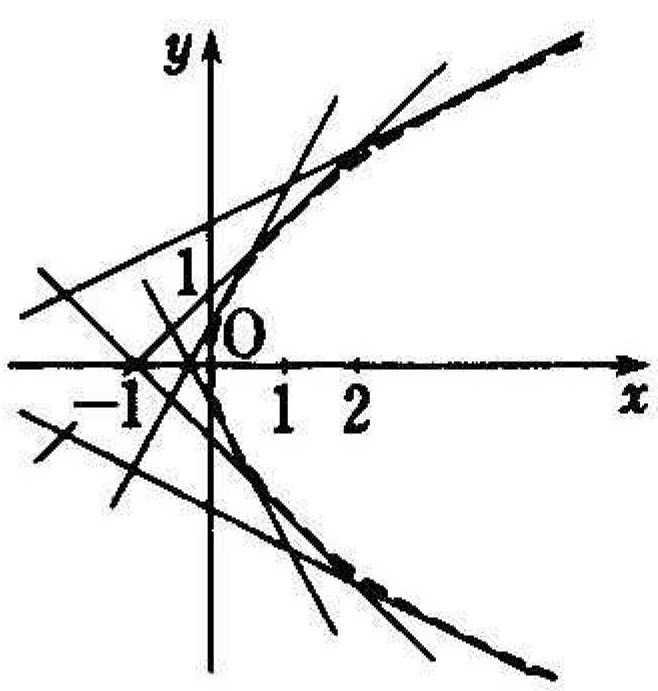
＊　＊　＊

◆ 以上で包絡線の問題の意味がわかったでしょう。つまり，$f(x,\ y,\ a)=0$ といった曲線の定数 a をいろいろに変えてもある定曲線に接するとき，この定曲線を包絡線というのです。

ところで，入学試験などには，もう少し意地のわるい問題も出ています。ムリにやるほどのこともありませんが……。では，——

練習 5. 直線 $y=mx+\dfrac{1}{m}$（m は 0 でない任意の定数）は定放物線に接するという。この定放物線を求めよ。

ヒント　定放物線というだけでどんなものかわからない。これを発見することが第 1 段階でしょう。m に $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots;\ \pm\dfrac{1}{2},\ \cdots\cdots$ を代入して $y=mx+\dfrac{1}{m}$ のグラフをかいてみると，右のようになります。



さては，問題がウソでない限り，放物線は点線で示したようなもの。さては

$$y^2=Ax$$

といった形にちがいない。ここまでくれば，練習 2. と同じにできるでしょう。やってみてください。　　答　$y^2=4x$

練習 6. $a\geqq\dfrac{1}{4}$ のとき円

$$x^2+y^2-(2y+1)a+a^2=0$$

は放物線 $y=Ax^2+B$ に接するという。定数 $A,\ B$ の値を求めよ。

ヒント　$y=Ax^2+B$ から

$$x^2=\frac{y-B}{A}$$

これを代入して

$$\frac{y-B}{A}+y^2-(2y+1)a+a^2=0$$

y について整理すると

$$Ay^2+(1-2Aa)y+(Aa^2-Aa-B)=0$$

これが重複解をもつための条件は判別式を D として

$$D=(1-2Aa)^2-4A(Aa^2-Aa-B)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad (4A^2-4A)a+(1+4AB)=0$$

これが $a>\dfrac{1}{4}$ について恒等的に成り立つための条件は

$$4A^2-4A=0 \quad かつ \quad 1+4AB=0$$

$$\therefore\quad A=1,\ B=-\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots 答$$

注　問題には $a>\dfrac{1}{4}$ という条件があったが，使わないですんでしまった。さては，この条件は不要なのでしょうか。

そうではないのです。実は上のヒントで，(*) のところ，つまり，$D=0$ だからといって接するとは限らないのです。というのは，$D=0$ のとき y は必ず実数です。しかし $y>B$ とは限らない。だから，x は虚数になることもありうるのです。つまり接点がないというわけ。

くどいが x が実数であるためには $y>B$. つまり $y>-\dfrac{1}{4}$ であることが大切な点です。そして，そのためには a に条件が出てくるというわけです。

しかし，数学のイヤな人は，今すぐ理解しようとしなくても結構です。次も同じ系統の問題です。

練習 7. 円 $(x-m)^2+y^2=1-m^2$ とだ円 $x^2+2y^2=2$ が接するように定数 m の範囲を求めよ。

ヒント　y を消去すると

$$(x-m)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=1-m^2$$

これを変形すると

$$x^2-4mx+4m^2=0$$

$$\therefore\quad (x-2m)^2=0$$

だから m が何であっても接するといってはいけません。上の式から　$x=2m$

ところが接点については（$y^2\geqq0$ より）

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq m\leqq\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots 答$$

立体の体積の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数Ⅰの範囲で立体の体積といえば，限られたものなんです。立方体，直方体，柱体，すい体など。いや，まだある。球だ。

◆ 1辺の長さaの **立方体** の体積Vはいうまでもなく

$$V=a^3$$

で与えられます。また，縦・横・高さがそれぞれa，b，cの直方体の体積Vは

$$V=abc$$

で与えられます。

4/14

練習1. 表面積一定の直方体のうち，体積最大のものは何か。

ヒント　1点から出る3つの辺の長さをa，b，cとすると

表面積　$S=2(ab+bc+ca)$

体積　$V=abc$

で与えられます。ab，bc，caの相加・相乗平均の関係から

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geqq\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{S}{2}\geqq\sqrt[3]{V^2}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq V$$

ゆえに$ab=bc=ca$，したがって$a=b=c$，すなわち立方体のとき体積は最大値をとり，その値V'は

$$V'=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

である。ここにSは表面積であることはいうまでもありません。

*　*　*

◆ **柱体**（ちゅうたい）の体積は，底面積に高さを掛ければよいのです。例えば，底面積をS，高さをhとし，体積をVとしますと

$$V=Sh$$

なのです。

練習2. 底面の半径10cm，高さ10cmの円柱の体積はいくらか。

ヒント　底面積は$\pi\cdot10^2$ですから，体積は

$$(\pi\cdot10^2)\cdot10=1000\pi(\text{cm}^3)$$

練習3. 底面が1辺aの正三角形で，高さがaの正三角柱の体積を求めよ。

解　1辺の長さaの正三角形の面積は

$$\frac{1}{2}a^2\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

に等しいから，求める体積は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$$

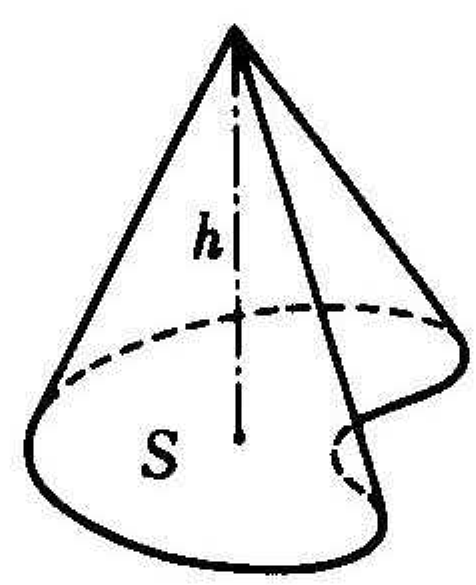
である。　　答　$\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$

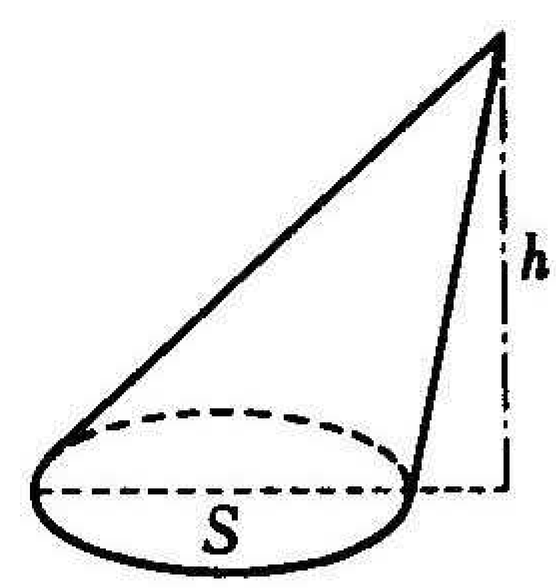
*　*　*

◆ **すい体** の体積Vは，底面積Sに高さhを掛けて3で割ればいいのですから

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

で与えられます。（この証明は積分を使うのがふつう。ここでは単に公式としてオボエテおくこと）





4/20

練習4. 底面が1辺の長さaの正方形で，高さaの正四角すいの体積を求めよ。

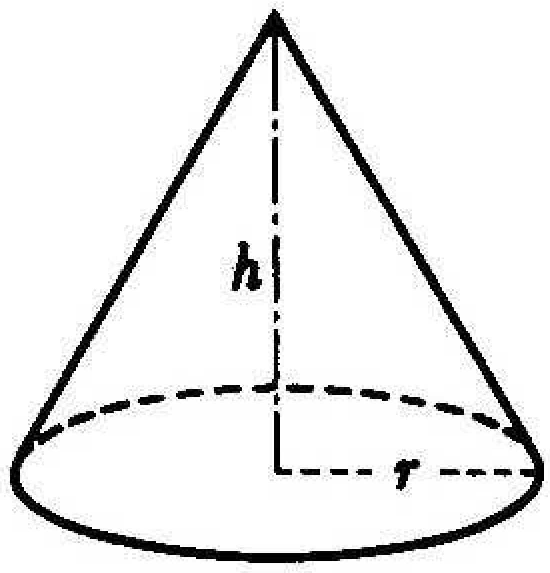
解　底面積がa^2に等しいから，求める体積は

$$\frac{1}{3}a^2\cdot a=\frac{1}{3}a^3$$

である。　　答　$\frac{1}{3}a^3$

練習 5. 底面の半径 r，側面積が底面積の2倍に等しい円すいの体積を求めよ。

ヒント　高さを h とすると母線(右図の AB)の長さは $\sqrt{h^2+r^2}$ で，底円の周囲は $2\pi r$ だから，側面積は



$$\pi(\sqrt{h^2+r^2})^2\cdot\frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{h^2+r^2}}$$
$$=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$$

仮定により

$$\pi r\sqrt{h^2+r^2}=2\pi r^2$$
$$\therefore\quad h^2+r^2=4r^2$$
$$\therefore\quad h=\sqrt{3}r$$

ゆえに求める体積は

$$\frac{1}{3}(\pi r^2)\cdot\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3\quad\cdots\cdots 答$$

*　*　*

◆ では，最後が **球** です。半径 r の球の体積 V は

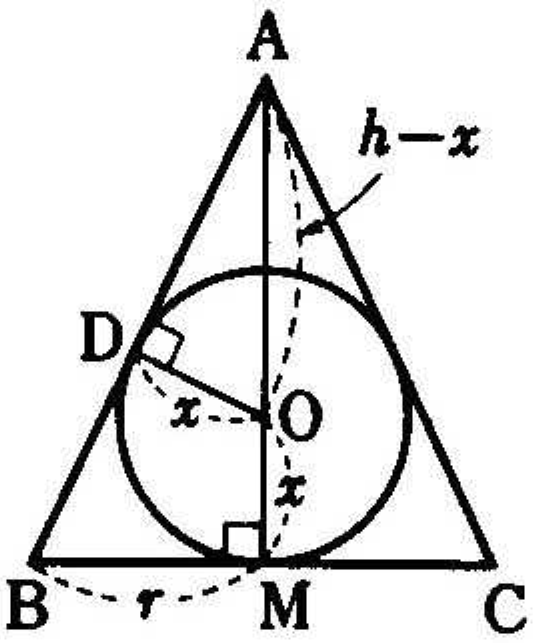
$$\boldsymbol{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$$

です。よく，$\frac{3}{4}\pi r^3$ とまちがえる人がある。ご注意ありたし。ところで，ひとつ球の体積に関係したものをやってみませんか。

練習 6. ある直円すいとそれに内接する球の体積の比が 2：1 であるとき，この直円すいの底面の半径と高さとの比を求めよ。

(東大)

解　円すいの高さを h，底面の半径を r，球の半径を x とすると，右図において



$$\triangle AOD \backsim \triangle ABM$$

であることから

$$(h-x):x=\sqrt{r^2+h^2}:r$$
$$\therefore\quad x=\frac{rh}{r+\sqrt{r^2+h^2}}$$

円すいの体積は $\frac{\pi r^2 h}{3}$ であり，球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi r^3h^3}{(r+\sqrt{r^2+h^2})^3}$$

であるから，題意により

$$\left\{1+\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}\right\}^3=8\left(\frac{h}{r}\right)^2$$

$$\therefore\quad 1+\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}=2\left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{2}{3}}$$

1を右辺に移項して，平方し整理すると

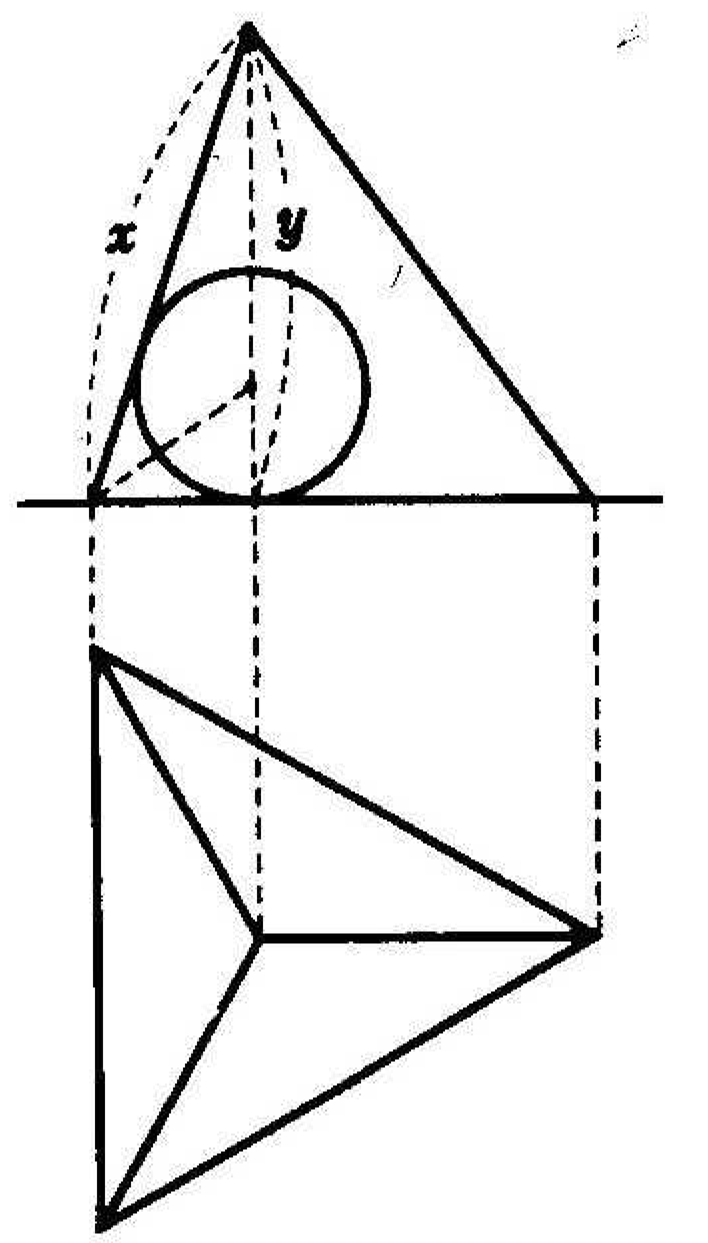
$$\therefore\quad \left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{4}{3}}-4\left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{2}{3}}+4\right\}=0$$

$$\therefore\quad \left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{2}{3}}=2,\quad \frac{h}{r}=2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\quad r:h=1:2\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots 答$$

練習 7. 1辺の長さ1の正四面体の内接球の体積を求めよ。

ヒント　図のように真上からみたものと，真横からみた図（つまり平面面と立画面）を作ると見やすいことが多いものです。



1辺の長さ1の正三角形の高さを x としますと

$$x^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

また正四面体の高さを y としますと

$$y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1^2$$

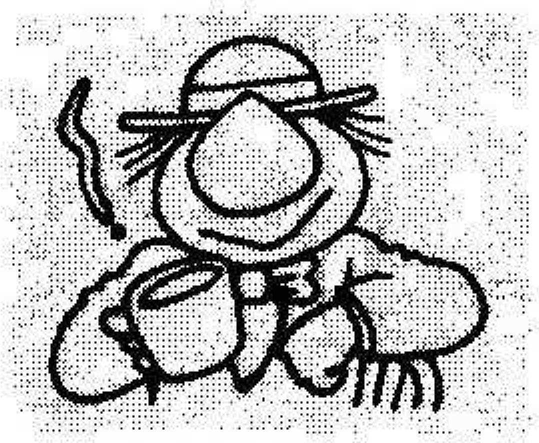
$$\therefore\quad y^2=\frac{2}{3}\qquad\therefore\quad y=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

これから正四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

ここで，1つの面を底面として，高さが r（内接球の半径）の三角すい4つの和がこの正四面体の体積に等しいことから，……

こうして求める体積は $\frac{\sqrt{6}\pi}{216}$ となります。



放物線と直線の関係と蛇足

◆円と直線の関係や2直線の関係などは，みなよくつかんでいるのに放物線と直線の関係は案外弱点となっているのです。

◆ 何はともあれ，次の練習1からはじめるとしましょう。

練習1. $y=x^2$ と $y=2x+a$ が2点で交わるための条件を求めよ。

ヒント　もちろん

連立方程式 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+a \end{cases}$

からyを消去して得られる2次方程式

$$x^2-2x-a=0$$

が相異なる2つの実数解をもてばよいのです。

判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=1^2+a>0 \qquad \therefore \quad a>-1$$

これが求める条件です。では，次へ，

練習2. $y=x^2$ と $y=mx-1$ が接するようにmの値を定めよ。

ヒント　$y=x^2$ と $y=mx-1$ からyを消去しますと

$$x^2-mx+1=0$$

そこで判別式Dが0になればよいのだから

$$D=m^2-4=0$$

$$\therefore \quad m=\pm 2$$

もうできてしまった。

そこで，いよいよ，本論はこれです。

練習3. $y=x^2$ と直線 $ax+by+c=0$ の共通点の個数を調べよ。

ヒント　まずひとつの文字を消去しよう。しかし，$ax+by+c=0$ から x か y を求めて $y=x^2$に代入するという手はいささかまずい。というのもxについて解こうとすると $a=0$ の場合と $a\neq 0$ の場合と分けなければならない。

また，yについて解こうとすると $b=0$ の場合と $b\neq 0$ の場合に分けなければならない。

それよりは $y=x^2$ を $ax+by+c=0$ に代入する方がいいだろう。さて，その結果は

$$ax+bx^2+c=0$$

$$\therefore \quad bx^2+ax+c=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

さて，$b=0$ のときは

$$ax+c=0$$

このとき，もちろん $a\neq 0$ です。(だってキミ，$a=0$, $b=0$ では直線になれませんからねえ)

そこで

$$x=-\frac{c}{a}, \ y=\frac{c^2}{a^2}$$

つまり直線と放物線は1点で交わるのです。

次に，$b\neq 0$ の場合には(＊)の判別式をDとすると

$$D=a^2-4bc$$

であるから

$a^2-4bc=0$ のときには重解をもつ。つまり，放物線と直線は1点で接するのです。

次に

$a^2-4bc>0$ のときにはいうまでもなし，2点で交わりますし，

$a^2-4bc<0$ のときにはまったく共通点なし。つまり，結果は

$$\begin{cases} b=0 \text{ のとき1点で交わる} \\ b\neq 0,\ a^2=4bc \text{ のとき1点で接する} \\ b\neq 0,\ a^2>4bc \text{ のとき2点で交わる} \\ b\neq 0,\ a^2<4bc \text{ のとき共通点なし} \end{cases}$$

というのが正解です。大抵の人は1点で交わる場合を忘れてしまうもの。このとき直線は放物線の軸に平行となって1点で交わることになるのですよ。