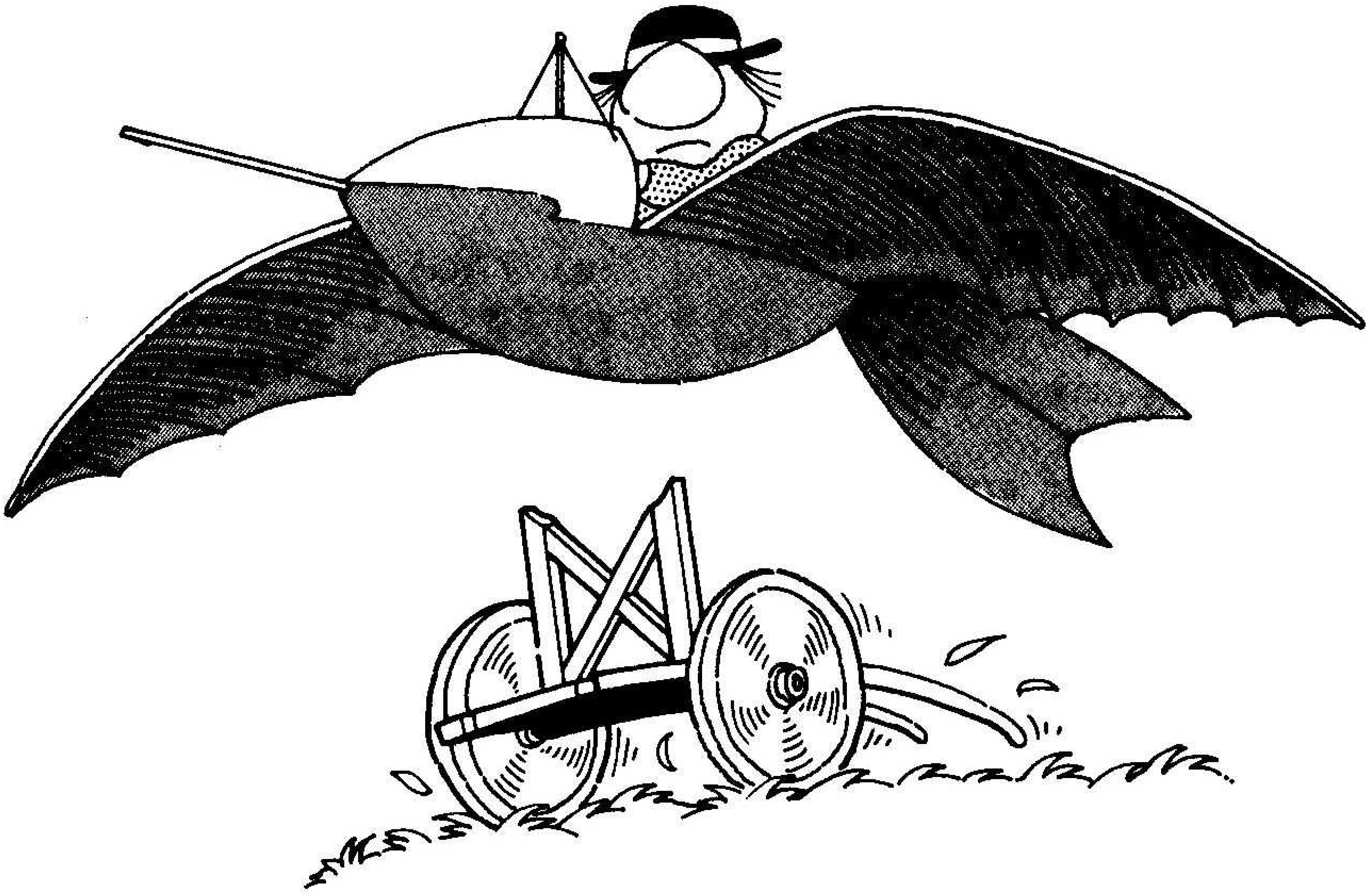
第3章

関　数



① 関数とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆簡単にみえることほど本質的で難しい。人間とは何かと聞かれて即答できる人が少ないようなもの。関数とは何か，これも同じ。

◆ 集合Xの各要素xに集合Yの要素yが1つずつ対応しているとき，この対応fをXからYへの **写像** といいます。記号では

$$f: X \longrightarrow Y$$

とか，

$$X \xrightarrow{f} Y$$

とか，

$$f(X)=Y$$

などと書きます。関数という言葉は写像とまったく同じに使うこともありますが，集合が数の場合に主として用いるのです。

ここでも集合が数の場合に限って考えることにしましょう。

1/29
■練習 1. 集合 $A=\{2, 3, 4, 5\}$ の要素xに集合 $B=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, 10\}$ の要素で，xの2倍の数を対応させる関数を $f(x)$ で表すことにする。$f(3)$ を求めよ。

ヒント　いうまでもなく　$f(3)=6$

注　$f(x)$ のxは2, 3, 4, 5の値をとります。この集合をこの関数の定義域といいます。つまり

定義域は　A

です。また，Bのうち $f(x)$ の値となるものは4, 6, 8, 10です。この集合をこの関数 $f(x)$ の値域といいます。つまり

値域は　$\{4, 6, 8, 10\}$

です。

■練習 2. 集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ の要素xに，集合 $B=\{0, 1, 2\}$ の要素で，xを3で割った余りであるものを対応させる関数を $f(x)$ で表すことにする。$f(x)$ の定義域と値域を求めよ。

ヒント　定義域は　A，　値域は　B

で，

$$f(1)=f(4)=f(7)=1$$
$$f(2)=f(5)=2$$
$$f(3)=f(6)=0$$

です。

*　*　*

◆ 2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ があるとき，$f(x)$ のxに $g(x)$ を代入したものを

$f(g(x))$ あるいは $f\circ g(x)$

で表して **合成関数** ということがあります。例えば，次の練習をやってみませんか。

2/25
■練習 3. $f(x)=2x+3$, $g(x)=4x+1$ のとき $f\circ g(x)$ および $g\circ f(x)$ を求めよ。

解　$f\circ g(x)=f(g(x))=2g(x)+3$
$=2(4x+1)+3=8x+5$

また，

$$g\circ f(x)=g(f(x))=4f(x)+1$$
$$=4(2x+3)+1=8x+13$$

答　$\begin{cases} f\circ g(x)=8x+5 \\ g\circ f(x)=8x+13 \end{cases}$

注　$f\circ g(x)$ や $g\circ f(x)$ を簡単に $f\circ g$ とか $g\circ f$ と書くこともあります。また $f\circ g(x)$ を $(f\circ g)(x)$ と書くこともあります。

■練習 4. $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ とするとき $f\circ g(x)$ を求めよ。

解　$f\circ g(x)=f(g(x))$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+1}$$

$$=\frac{2}{1+(x-1)}=\frac{2}{x}$$

答　$\dfrac{2}{x}$

*　*　*

◆ $y=f(x)$ の y の値に対応する x の値がただ1つしかないとき，1対1の対応をしているといいます。つまり，写像（関数）においては y の値に対して x は2つ以上対応してもかまわないのですが，それがただ1つしかないときに **1対1の対応** というのです。このとき x は y の関数となります。これを，改めて x の代わりに y，y の代わりに x と書いたものを

$$\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$$

で表して，この $f^{-1}(x)$ を $f(x)$ の **逆関数** といいます。（このような抽象的な説明というものはわかっている人にはハハーンとわかりますが，わかっていない人にはまったく無意味なものです。ともかく，具体的にやってみましょう）

■練習 5. $f(x)=2x+3$ の逆関数を求めよ。

ヒント　$y=2x+3$ と書いてみますと，x の値に対して y は1つしかきまらない。つまり1対1の対応をしています。だから逆関数は存在します。x について解くと

$$x=\frac{y-3}{2}$$

そこで，x と y とを入れかえて

$$y=\frac{x-3}{2}$$

と書いて，これを逆関数というのです。記号で書けば

$$f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$$

注　$f^{-1}(x)$ は $f(x)$ の -1 乗ではありません。-1 乗なら $(f(x))^{-1}$ と書かなければなりません。

3/25

■練習 6. $f(x)=\dfrac{x+4}{3x+1}$ のとき $f^{-1}(x)$ を求めよ。

ヒント　$y=\dfrac{x+4}{3x+1}$ とおいて，分母をはらいますと

$$3xy+y=x+4$$

$$\therefore\quad (3y-1)x=-y+4$$

$y=\dfrac{1}{3}$ となることはありません。なぜなら $y=\dfrac{1}{3}$ を代入してみると $0=\dfrac{11}{3}$ となって不合理だからです。

$$\therefore\quad x=\frac{-y+4}{3y-1}$$

ゆえに求める逆関数は

$$f^{-1}(x)=\frac{-x+4}{3x-1}$$

です。

注　≪x についての方程式

$$(3a-1)x=-a+4$$

を解け≫という問題なら，答は

$$\begin{cases} a\neq\dfrac{1}{3} \text{ のとき} & x=\dfrac{-a+4}{3a-1} \\ a=\dfrac{1}{3} \text{ のとき} & \text{解なし（不能）} \end{cases}$$

です。しかし，逆関数を求めるとき $y=\dfrac{1}{3}$ ならば解なし，などと書いてはいけません。

*　*　*

◆ 逆関数について，次の重要な性質があります。

■練習 7. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ のとき $f\circ f^{-1}(x)$ を求めよ。

ヒント　$y=\dfrac{2x-1}{x+3}$ とおいて x について解きますと

$$x=\frac{-3y-1}{y-2}$$

$$\therefore\quad f^{-1}(x)=\frac{-3x-1}{x-2}$$

$$\therefore\quad f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{-3x-1}{x-2}-1}{\dfrac{-3x-1}{x-2}+3}$$

$$=\frac{-6x-2-x+2}{-3x-1+3x-6}=\frac{-7x}{-7}=x$$

答　$f\circ f^{-1}(x)=x$

注　これは偶然ではなく $f\circ f^{-1}(x)$ または $f^{-1}\circ f(x)$ は必ず x になるのです。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○逆関数の求め方

◆逆関数にはいろいろな定義が使われているので，本当に困ってしまいます。ここでは，その1つだけで驀進するとしよう。

◆ $f(x)=2x+5$ の **逆関数** とは何か。それは次の手順で求めた関数をいいます。

まず，$y=2x+5$ とおきます。

次に，xについて解きます。つまり，

$$2x=y-5$$

$$\therefore\quad x=\frac{y-5}{2}$$

最後に，右辺のyをxで書きかえて得られる関数，$\dfrac{x-5}{2}$

のことを，ふつう

$$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$$

と表して逆関数といいます。$f^{-1}(x)$ は決して $f(x)$ の -1 乗ではありません。$f(x)$ の -1 乗なら $\{f(x)\}^{-1}$ と書かなければなりません。では，具体的にいくつか逆関数を求めてみましょう。

練習 1. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ の逆関数を求めよ。

（東大）

ヒント $y=\dfrac{x}{x-1}$ とおき，xについて解くと

$$x=\frac{y}{y-1}$$

ゆえに求める逆関数は $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$ であることがわかります。

3/15

練習 2. 次の関数の逆関数を求めよ。

$$f(x)=px+q$$

ヒント $y=px+q$

とおくと $p=0$ のときにはxについて解くことができません。このときには逆関数は存在しないのです。そして，$p\neq0$ のときは

$$x=\frac{y-q}{p}$$

$$\therefore\quad f^{-1}(x)=\frac{x-q}{p}$$

（答） $p=0$ のとき逆関数なし，

$p\neq0$ のとき $f^{-1}(x)=\dfrac{x-q}{p}$

注 なお $f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)$ で表しますが，$y=px+q$ の逆関数を求めよ，というときには $y^{-1}=\dfrac{x-q}{p}$ と書かず $y=\dfrac{x-q}{p}$ と書くのです。

* * *

逆関数の性質の主なものをとりあげてみましょう。第1は，$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフとは，**直線 $y=x$ について対称** だということです。では：——

練習 3. $y=x^2$ $(x\geqq0)$ の逆関数を求め，グラフをかけ。

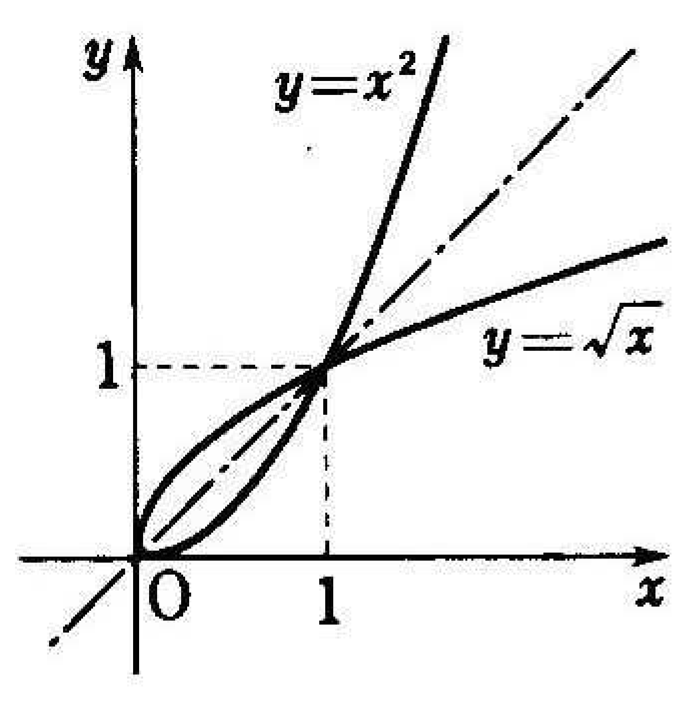
ヒント $y=x^2$ をxについて解けば

$$x=\sqrt{y}$$

ゆえに求める逆関数は

$$y=\sqrt{x}$$

である。



注 $x\geqq0$ をとり除いて $y=x^2$ の逆関数を求めよ，という問題があったとすると

$$x=\pm\sqrt{y}$$

これではyをきめてもxは2つ出てくる。これを $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$ とは書かない。

$f(x)=x^2$ $(x\geqq0)$ について $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=x^2$ $(x\leqq0)$ について $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$

なのです。

* * *

◆ 逆関数の第2の性質は

$$\boldsymbol{f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x}$$

が成り立つということです。

■練習 4. $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x+1}$ のとき $f(f^{-1}(x))$ を求めよ。

（ヒント） $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$ とおき，x について解くと

$$x=\frac{-y+3}{2y-4}$$

ですから，

$$f^{-1}(x)=\frac{-x+3}{2x-4}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(f^{-1}(x))&=\frac{4f^{-1}(x)+3}{2f^{-1}(x)+1}\\&=\frac{4\cdot\dfrac{-x+3}{2x-4}+3}{2\cdot\dfrac{-x+3}{2x-4}+1}\\&=\frac{-4x+12+6x-12}{-2x+6+2x-4}\\&=\frac{2x}{2}=x\end{aligned}$$

答　x

3/15

■練習 5. $f(x)=\sqrt{2x+8}$ のとき $f^{-1}(f(x))$ を求めよ。

（ヒント） $y=\sqrt{2x+8}$ とおいて，両辺を2乗しますと

$$y^2=2x+8\quad(y\geqq 0)$$

$$\therefore\quad x=\frac{y^2-8}{2}\quad(y\geqq 0)$$

ゆえに

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-4\quad(x\geqq 0)$$

となります。そこで，

$$\begin{aligned}f^{-1}(f(x))&=\frac{1}{2}(f(x))^2-4\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2x+8})^2-4\\&=\frac{1}{2}(2x+8)-4=x\end{aligned}$$

答　x

（注） $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$

だということは，この記号の便利さを示しています。というのも

$$f(f^{-1}(x))=ff^{-1}(x)=(x)=x$$

などとやってはいけないが，形式的には，それが成立するということだからです。

*　*　*

◆ では，終わりに逆関数についていくつかやってみませんか。

3/15

■練習 6. $f(x)=\dfrac{x+4}{2x+3}$ のとき，$f(g(x))=x$ となるような関数 $g(x)$ を求めよ。

（解）

$$f(g(x))=\frac{g(x)+4}{2g(x)+3}=x$$

$$\therefore\quad g(x)+4=2xg(x)+3x$$

$$\therefore\quad (2x-1)g(x)=-3x+4$$

$$\therefore\quad g(x)=\frac{-3x+4}{2x-1}$$ ……答

（注） これでよいのですが実は $f(g(x))=x$ というのですから $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数になるハズ。と，すれば，はじめから，逆関数の定義にしたがって求めていいわけです。このやり方は次の問題が威力を発揮する!!

■練習 7. $f(x)=\dfrac{x+4}{2x+3}$ のとき $g(f(x))=x$ となるような関数 $g(x)$ を求めよ。

（ヒント） $f(x)$ の逆関数を求めればいいでしょう。

$$y=\frac{x+4}{2x+3}$$

とおいて，x について解くと

$$x=\frac{-3y+4}{2y-1}$$

ゆえに $g(x)=\dfrac{-3x+4}{2x-1}$ とすればよいわけです。

*　*　*

◆ 逆関数に関する問題では対数関数や指数関数に関するものがありますが，それは基礎解析の範囲に入ります。計算のめんどうさはともかく，大切なことはこれで終わりです。

○逆関数と定義域

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆関数の定義域が与えられると逆関数の問題は急にマギラワシクなる。といっても，それは逆関数の直接の問題ではないのだが。

◆ ここでは定義域が与えられたときの逆関数の問題に焦点をあてることにしましょう。まず1次関数から：——

9/15

練習 1. $f(x)=3x+2,\ x\geqq 0$ の逆関数を求めよ。

ヒント　$y=3x+2$

とおいて x について解くと

$$x=\frac{y-2}{3}$$

（サア，イヨイヨ，x ヲ y トカキナオシ，y ヲ x トカキカエル段ニナッタ。ココデ，定義域ヲ使ウノダ）

$x\geqq 0$ の条件より

$$\frac{y-2}{3}\geqq 0 \qquad \therefore\quad y\geqq 2$$

したがって求める逆関数は

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}\quad (x\geqq 2)$$

となる。ではもうひとつ：——

3/15

練習 2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $(x\geqq 0)$ の逆関数を求めよ。

ヒント　上のとおりやってみますよ。

$$y=\frac{2x-1}{x+1}$$

とおくと

$$yx+y=2x-1$$

$$(y-2)x=-y-1$$

$$\therefore\quad x=\frac{-y-1}{y-2}$$

ここで $x\geqq 0$ より

$$\frac{-y-1}{y-2}\geqq 0$$

$$\therefore\quad (y-2)(y+1)\leqq 0$$

$$\therefore\quad -1\leqq y<2\quad (\because\ y\neq 2)$$

ゆえに，求める逆関数は

$$f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-2}\quad (-1\leqq x<2)$$

となります。では，張り切って，もうひとつ：

練習 3. $y=x^2+x+1$ $(x\geqq 1)$ の逆関数を求めよ。

ヒント　x について解くわけだから

$$x^2+x+(1-y)=0$$

解の公式を使って解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{4y-3}}{2}$$

（オヤ，困ッタゾ，「±」ハドウショウカ。考エル余地ハアルマイ，$x\geqq 1$ ナンダゼ。アア，ソウカ，デハ「−」ハ棄テヨウ）

$$x=\frac{-1+\sqrt{4y-3}}{2}$$

$x\geqq 1$ であるから

$$\frac{-1+\sqrt{4y-3}}{2}\geqq 1\quad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad \sqrt{4y-3}\geqq 3$$

$$\therefore\quad 4y-3\geqq 9$$

$$\therefore\quad y\geqq 3$$

さては，求める逆関数は

$$y=\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}\quad (x\geqq 3)$$

となるわけだな。

注　実は$(*)$の不等式を解くまでもない。もとの関数のグラフをかいてみると，すぐわかるのだったが……

*　*　*

◆ では，もう少し複合された問題についてやってみませんか。

練習 4. $f(x)=2x+|x-1|$ の逆関数を求めよ。3/25

(ヒント)

$$f(x)=\begin{cases}x\geqq 1 : 2x+(x-1)=3x-1\\ x<1 : 2x-(x-1)=x+1\end{cases}$$

そこでまず

$$y_1=3x-1 \quad (x\geqq 1)$$

の逆関数を求めてみましょう。

$$x=\frac{y_1+1}{3}\geqq 1$$

より

$$y_1\geqq 2$$

したがって $f_1(x)=3x-1$ の逆関数は

$$f_1^{-1}(x)=\frac{x+1}{3} \quad (x\geqq 2)$$

となります。次に：——

$$y_2=x+1 \quad (x<1)$$

の逆関数を求めてみましょう。

$$x=y_2-1<1$$

より

$$y_2<2$$

したがって $f_2(x)=x+1$ の逆関数は

$$f_2^{-1}(x)=x-1 \quad (x<2)$$

となります。これから求める答は

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}2\leqq x : \dfrac{x+1}{3}\\ x<2 : x-1\end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

であることがわかりました。

(注) これで逆関数は求められたのですが，どうでしょう。これをひとつの式で表すことはできないものでしょうか。つまり

$$f^{-1}(x)=a|x-2|+bx+c$$

といった形に書ければいいのですが。

ともかく，やってみましょう。

$$a|x-2|+bx+c$$
$$=\begin{cases}2\leqq x : (a+b)x+(-2a+c)\\ x<2 : (-a+b)x+(2a+c)\end{cases}$$

ですから，

$$a+b=\frac{1}{3},\ -2a+c=\frac{1}{3}$$
$$-a+b=1,\ 2a+c=-1$$

となってくれればよい。解いてみると

$$a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3},\ c=-\frac{1}{3}$$

おっ，うまくいったぜ。

$$f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}|x-2|+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\cdots\cdots(**)$$

(*)よりは(**)の方がいいことは，いうまでもありません。

* * *

練習 5. $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ $(ad\neq bc)$ の逆関数が $f(x)$ であるための条件を求めよ。

(解) $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ とおくと

$$(ay-c)x=-by+d$$

$ad\neq bc$ の条件から $ay-c\neq 0\cdots\cdots(*)$

$$\therefore\quad x=\frac{-by+d}{ay-c}$$

$$\therefore\quad f^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

そこで

$$\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

が恒等的に成り立つための条件を求めればよい。

分母を払って変形すれば

$$(b+c)\{ax^2+(b-c)x+d\}=0$$

これが恒等的に成り立つための条件は

$b=-c$ あるいは $a=d=0$ かつ $b=c$

であることがわかる。

(注) ところでキミ，上の解で(*)のところの意味わかったかい。

* * *

◆ 逆関数の大切な性質のひとつは

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

ということです。これを知っていると，次のような問題にはスゴク便利です。

練習 6. $f(x)=\dfrac{x+3}{2x+1}$ のとき

$$g(f(x))=x$$

を満足する $g(x)$ を求めよ。

(ヒント) $g(x)$ の関数形がわからないからこまる。しかし，上のことから $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であることはたしか。かくて，できてしまうのです。

⑪ 奇関数の性質

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆奇関数とは何か，$f(-x)=-f(x)$ となる関数である。なるほど，数学的だ。しかし，もっとおだやかに，グラフが原点について……

◆ $y=x^3-3x$ はどんなグラフになるでしょうか。x に $-1,\ -2,\ -3,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を入れて描いてみるとすぐわかるように，原点について対称です。一般的には

関数 $f(x)$ について

$$f(-x)=-f(x)$$

ならば，$f(x)$ を 奇関数 といい，

$y=f(x)$ のグラフは 原点について対称

となります。では，さっそくながら：——

3/5

■練習 1. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が奇関数であるための条件を求めよ。

ヒント 奇関数ということは $f(-x)=-f(x)$ ということだったね。さては：——

$$a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d$$
$$=-ax^3-bx^2-cx-d$$

つまり

$$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$$

が恒等的に成り立つこと。つまり

$$2(bx^2+d)=0$$

が恒等的に成り立つこと。つまり

$$b=0,\ d=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

注 このように，多項式からなる関数が奇関数であるための条件は，**奇数乗の項のみからなること**，なんです。つまり偶数乗の項がなくなることなんです。ついでながら，偶数乗のみの項から成り立つのが **偶関数** で，そのグラフは y 軸について対称なのです。

■練習 2. $f(x)=x^3+ax^2+3x+b$ が奇関数であるための条件を求めよ。

ヒント いうまでもなし。　答 $a=b=0$

*　*　*

◆ 奇関数で数Ⅰに入ってくる大物は何といっても $\sin x$ でしょう。

■練習 3. $f(x)=a\sin x+b\cos x+c$ が奇関数であるための条件を求めよ。

ヒント $f(x)$ が奇関数であるための条件は

$$f(-x)=-f(x)$$

したがって，

$$a\sin(-x)+b\cos(-x)+c$$
$$=-\{a\sin x+b\cos x+c\}$$
$$\therefore\ -a\sin x+b\cos x+c$$
$$=-a\sin x-b\cos x-c$$
$$2(b\cos x+c)=0$$
$$\therefore\ b=0,\ c=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ さあ，奇関数の意味はおわかりでしょう。では，奇関数に関する定理に進みましょう。

■練習 4. $f(x)=x^4+3x^2+2x+4$ を偶関数と奇関数の和で表せ。

ヒント 何を今さら，ホトトギス!!

$$f(x)=(x^4+3x^2+4)+(2x)$$

と分けると，x^4+3x^2+4 は偶関数，$2x$ は奇関数じゃありませんか。

3/5

■練習 5. 任意の関数 $f(x)$ を偶関数と奇関数の和で表せ。

ヒント
$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

と書けるでしょう。ところが

$$F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ とおくと}$$
$$F(-x)=F(x)$$
$$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \text{ とおくと}$$
$$G(-x)=-G(x)$$

(注) 奇関数と偶関数の和といっても，奇関数そのものはダメですし，偶関数そのものもダメです。例えば，$f(x)=x^3$ なら

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{x^3+(-x)^3}{2}=0$$

といったぐあい。

*　　*　　*

◆ では，奇関数についての諸問題を扱うことにしようではありませんか。

■練習 6. $f(x)=a^x$ $(a>1)$ を奇関数と偶関数の和で表せ。

(ヒント) $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

そして

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2} \text{ は偶関数}$$

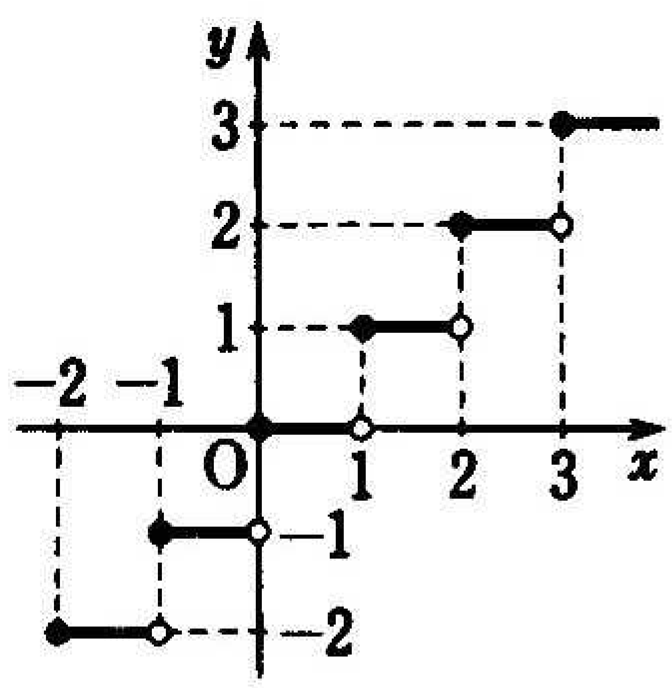
$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{a^x-a^{-x}}{2} \text{ は奇関数}$$

ゆえに，……

5/20

■練習 7. 実数 x を越えない最大の整数を $[x]$ で表すとき，$f(x)=[x]$ は奇関数か。

(ヒント) グラフをかいてみると，右のようになります。明らかに原点について対称ではないから奇関数ではない。グラフをかくまでもない。



$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

なのですから，奇関数ではないのです。しかし，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ というように整数値を入れると誤解のもとになります。

7/20 **■練習 8.** 奇関数と奇関数の和は奇関数で，奇関数と奇関数の積は偶関数であることを証明せよ。

(ヒント) $f(x)$，$g(x)$ を 2 つの奇関数とすると

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$$

なる関係が成り立ちます。

いま，　$F(x)=f(x)+g(x)$

とおくと

$$\begin{aligned} F(-x)&=f(-x)+g(-x)\\ &=\{-f(x)\}+\{-g(x)\}\\ &=-\{f(x)+g(x)\}\\ &=-F(x) \end{aligned}$$

ゆえに $F(x)$，すなわち，奇関数の和は奇関数であることがわかります。

次に，　$G(x)=f(x)\cdot g(x)$

としますと

$$\begin{aligned} G(-x)&=f(-x)\cdot g(-x)\\ &=\{-f(x)\}\{-g(x)\}\\ &=f(x)g(x)\\ &=G(x) \end{aligned}$$

ゆえに $G(x)$，すなわち奇関数の積は偶関数であることがわかりました。

*　　*　　*

◆ 奇関数の応用はいろいろありますが，例えば，**点対称の証明に有効** です。では 1 つの例をやってみませんか。

■練習 9. $y=x^3-12x^2+4x-1$ は点対称の中心をもつことを示せ。

(ヒント) 点対称の中心を $(\alpha,\ \beta)$ とし，座標軸を平行移動して，新しい原点を $(\alpha,\ \beta)$ にもってくると，変換公式は

$$x=x'+\alpha,\quad y=y'+\beta$$

したがって，新しい座標系に関する方程式は

$$\begin{aligned} &y'+\beta\\ &=(x'+\alpha)^3-12(x'+\alpha)^2+4(x'+\alpha)-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ y'=x'^3+(3\alpha-12)x'^2+(3\alpha^2-24\alpha+4)x'\\ +(-\beta+\alpha^3-12\alpha^2+4\alpha-1) \end{aligned}$$

これが原点について対称であることが必要かつ十分な条件です。つまり，奇関数であることが必要かつ十分です。

$$\therefore\ 3\alpha-12=0$$

かつ　$-\beta+\alpha^3-12\alpha^2+4\alpha-1=0$

これを解いて点対称の中心は $(4,\ -113)$ です。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

① 偶関数の性質

◆偶関数や奇関数は，ふつう知らないでもすむが，しかし，知っているとスゴク便利なことが多いのです。

◆ 偶関数については，

関数 $f(x)$ に対して

$$f(-x)=f(x)$$

が成り立てば，$f(x)$ を偶関数といい，

$y=f(x)$ のグラフは y 軸について対称

となります。多項式の場合であれば **偶数乗の項だけのもの**，ともいえます。では，とりあえず，次の練習をやってみませんか。

4/1

■練習 1. $y=x^2-2|x|$ は偶関数であることを示せ。

(ヒント) $f(x)=x^2-2|x|$ と書くと

$f(-x)$

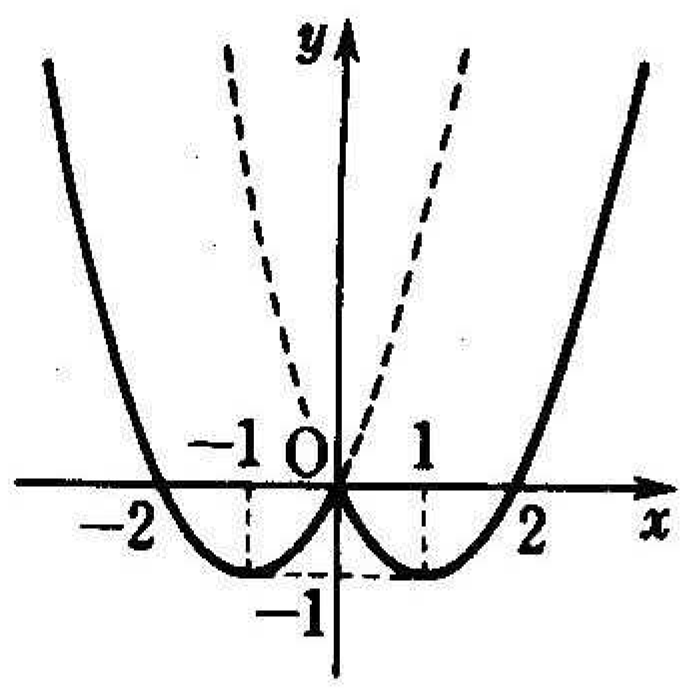
$=(-x)^2-2|-x|$

$=x^2-2|x|=f(x)$

ゆえに

$y=x^2-2|x|$

は偶関数である。なおグラフは右のように，y 軸について対称です。



■練習 2. 関数

4/2

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

が偶関数であるための条件を求めよ。

(ヒント) $f(-x)=a(-x)^4+b(-x)^3$

$\qquad +c(-x)^2+d(-x)+e$

$\qquad =ax^4-bx^3+cx^2-dx+e$

ですから $f(x)=f(-x)$ となるためには

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
$$=ax^4-bx^3+cx^2-dx+e$$

が恒等的に成り立たなければなりません。これを変形して

$$2(bx^3+dx)=0$$

$$\therefore\ \ b=0,\ d=0$$

なるほど，奇数乗の項がなくならなければならないわけだ（なお，定数項は x^0 の項で，0は偶数として扱いますから，特別扱いをする必要はありません）。

4/2

■練習 3. $f(x)=a\sin x+b\cos x+cx\sin x$ が偶関数であるための条件を求めよ。

(解) $f(-x)=a\sin(-x)+b\cos(-x)$

$\qquad +c(-x)\sin(-x)$

$=-a\sin x+b\cos x+c(-x)(-\sin x)$

$=-a\sin x+b\cos x+cx\sin x$

であるから $f(x)=f(-x)$ を変形すると

$$2a\sin x=0$$

これが恒等的に成り立つのは $a=0$ のときである。ゆえに，求める条件は $a=0$

答 $a=0$

* * *

◆ 次に偶関数の性質の中から，やや理論的なものをとりあげてみましょう。

4/2

■練習 4. $f(x)=|x-1|$ を偶関数と奇関数の和で表せ。

(ヒント) $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

$\qquad +\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

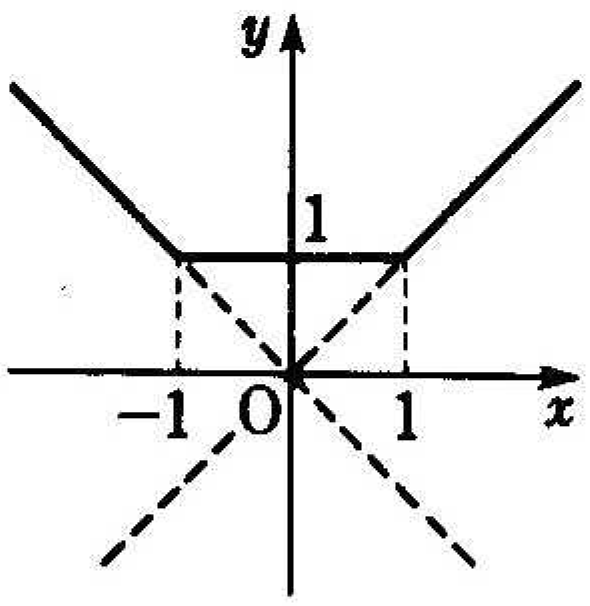
と書けます。そして $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ は偶関数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ は奇関数ですから，なるほど，任意の関数は偶関数と奇関数の和で表せます。そして，この場合には

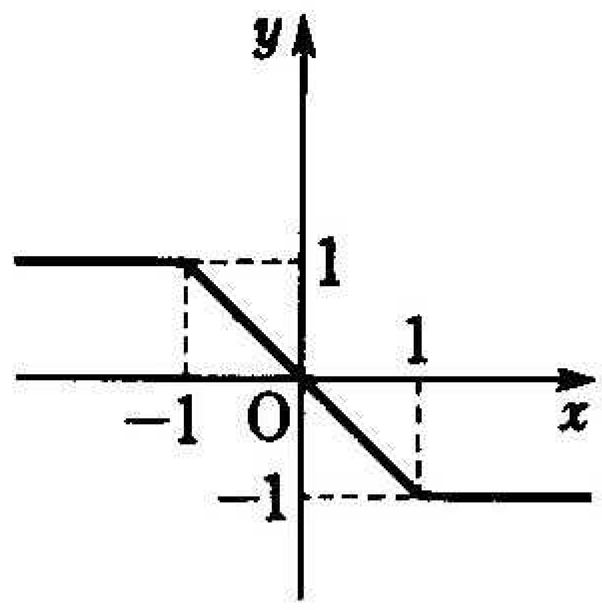
$$f(-x)=|-x-1|=|x+1|$$

ですから

$$f(x)=\frac{|x-1|+|x+1|}{2}+\frac{|x-1|-|x+1|}{2}$$

と書けます。右辺の第1項および第2項を別別にグラフで表してみると，次のようです。





■練習 5. グラフが y 軸に関して対称な関数 $f(x)$ は偶関数であることを示せ。

(解) $y=f(x)$ のグラフが y 軸に関して対称であるとすると，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がこのグラフ上にあれば y 軸に関する対称点 $\mathrm{P}'(-x,\ y)$ もこのグラフ上にある。すなわち

$$y=f(-x)$$

が成り立つ。ゆえに

$$f(x)=f(-x)$$

したがって，$f(x)$ は偶関数である。

*　*　*

◆ 関数 $f(x,\ y)$ が x についても，y についても偶関数であれば $f(x,\ y)=0$ のグラフは x 軸についても，y 軸についても対称になりますから，第1象限の部分だけかいて，あとは両軸について折り返せばよいハズ。では，次の練習をやってみませんか。

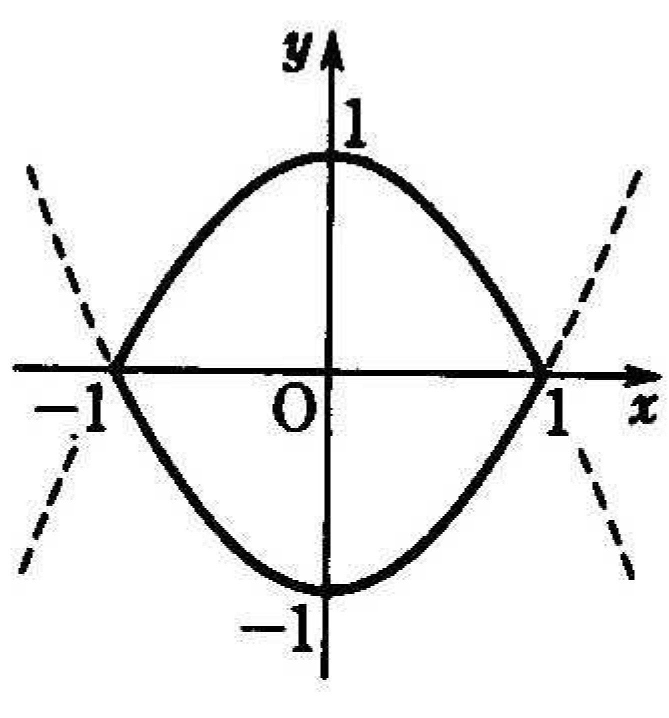
■練習 6. $|y|+x^2=1$ のグラフをかけ。

(ヒント) x の代わりに $-x$ を代入しても，y の代わりに $-y$ を代入しても左辺は変わらない。ゆえにグラフは両軸に関して対称。そこで，第1象限を考えますと

$$y+x^2=1$$

$$\therefore\quad y=-x^2+1$$

したがって，このグラフを両軸に関して折り返して右のようなグラフが得られます。



では，もう1つやってみませんか。

■練習 7. $|x|+2|y|=4$ のグラフをかけ。

*　*　*

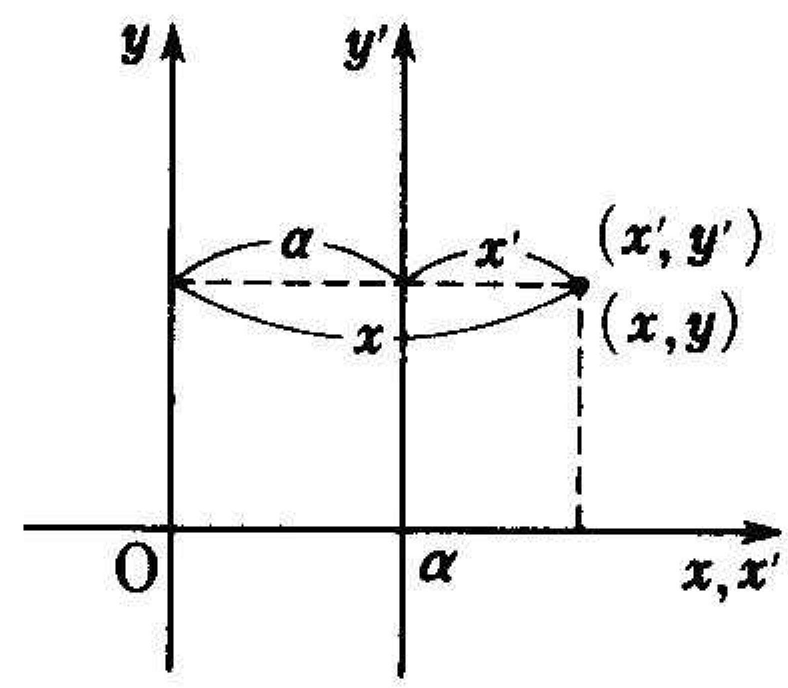
◆ 偶関数の応用例を1つ当たっておきましょう。

■練習 8. $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ が y 軸に平行な対称軸をもつための必要十分な条件を求めよ。　　(東京工大)

(ヒント) y 軸に平行な対称軸を $x=\alpha$ とし，座標軸を x 方向に平行移動して，y 軸を $x=\alpha$ に重ねたとしましょう。このとき，変換公式は

$$x=x'+\alpha$$

$$y=y'$$



ですから，新しい座標軸に関する方程式は次のようになります。

$$y'=a(x'+\alpha)^4+b(x'+\alpha)^3+c(x'+\alpha)^2$$
$$+d(x'+\alpha)+e$$

これが新座標系について縦軸に関して対称であるための条件は偶関数であることですから，x' の奇数乗の項がなくなることが必要かつ十分です。さて，それは

$$x'^3 \text{ の係数}=4a\alpha+b=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$x' \text{ の係数}=4a\alpha^3+3b\alpha^2+2c\alpha+d=0 \qquad \cdots\cdots②$$

です。しかし，ここでやめてはいけません。

$x=\alpha$ について対称というのであれば，この2つが必要十分条件です。しかし，単に y 軸に平行な，というだけですから α が入っていてはいけません。① と ② から α を消去したものが求めるものなのです。さて，① より $\alpha=-\dfrac{b}{4a}$，これを ② に代入して

$$4a\left(-\frac{b}{4a}\right)^3+3b\left(-\frac{b}{4a}\right)^2+2c\left(-\frac{b}{4a}\right)+d=0$$

$$\therefore\quad b^3-4abc+8a^2d=0$$

これが求める条件です。

このような対称性の問題には偶関数はきわめて有用であることをオボエテおくこと。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○1次関数のグラフ

◆1次関数のグラフは直線です。だからといって，簡単だと思ってはいけません。簡単であればこそ，複雑に装われる。

◆ $y=ax+b$ のグラフは点 $(0,\ b)$ を通り傾き a の直線です。だから，$a>0$ ならば，右上り，$a<0$ なら右下り，そして，$a=0$ なら x 軸に平行です。

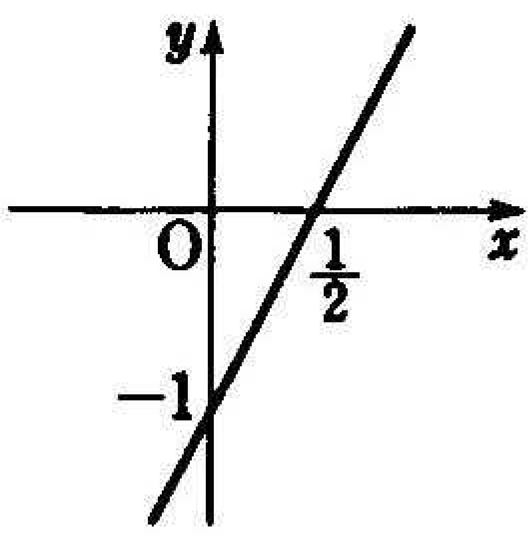
直線のグラフをかくには，ふつう，傾きなど考えずに，その上の2点を求めて結んだほうがいいのです。では：——

練習 1. $y=2x-1$ のグラフをかけ。

ヒント　$x=0$ とすると　$y=-1$

$y=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2}$

ゆえに2点 $(0,\ -1)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る直線を引けばよい。



練習 2. $y=mx$ のグラフは何か。

解　原点を通り，傾き m の直線である。

練習 3. $y=2x+a$ のグラフは何か。

解　点 $(0,\ a)$ を通り，傾き2の直線である。

練習 4. $y=mx+(1-m)$ のグラフは何か。

解　$y=mx+(1-m)$

を変形すると

$$(x-1)m+(1-y)=0$$

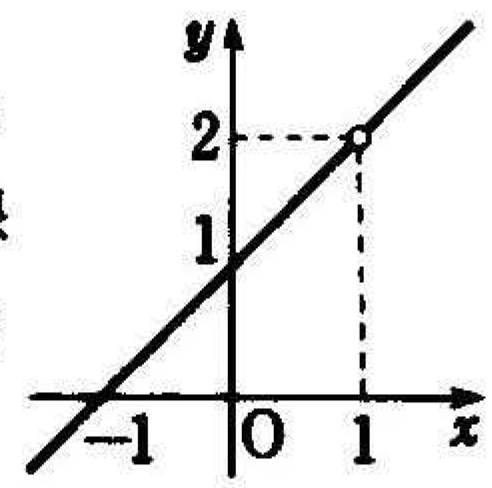
ゆえに，この直線は点 $(1,\ 1)$ を通る。また，傾きは m に等しいから，点 $(1,\ 1)$ を通り，傾き m の直線である。

*　*　*

◆ 次は，絶対値がついたり，分数形になっているものについて考えてみましょう。

練習 5. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ のグラフをかけ。

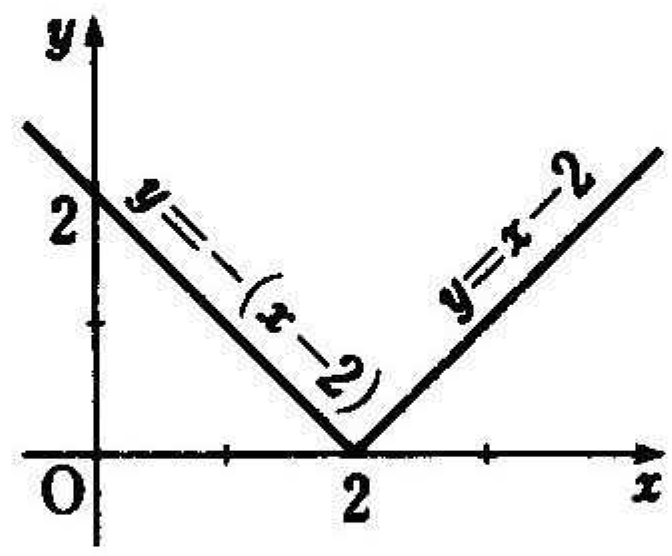
ヒント　$x \neq 1$ のとき $y=x+1$ ですから，求めるグラフは右のように，直線 $y=x+1$ から点 $(1,\ 2)$ を除いたものである。



練習 6. $y=|x-2|$ のグラフをかけ。

ヒント　$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ -(x-2) & (x<2 \text{ のとき}) \end{cases}$

であるから，求めるグラフは右のようになります。



練習 7. $y=2|x|+|x-2|$ のグラフをかけ。

ヒント　絶対値をとらなければなりません。

$x>2$ のときには

$$y=2x+(x-2)=3x-2$$

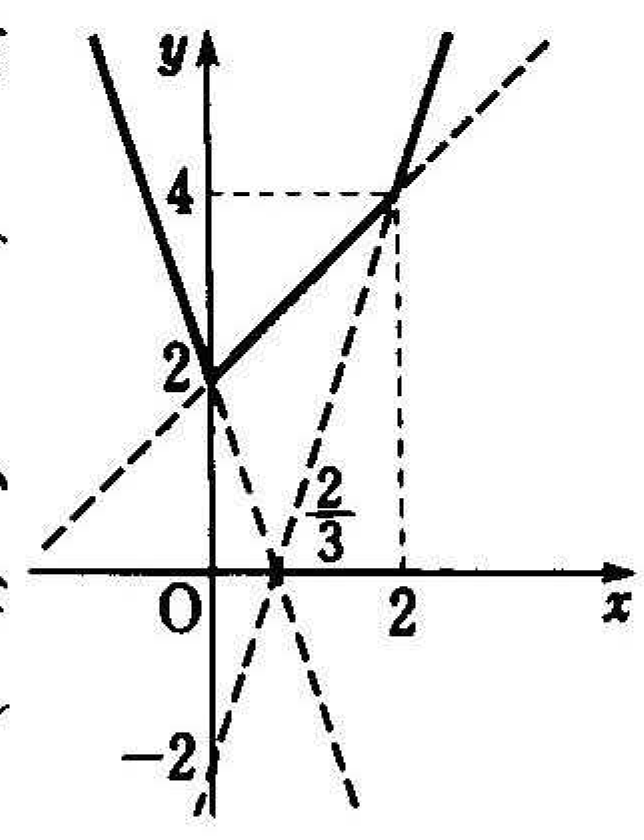
$0 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$y=2x-(x-2)=x+2$$

$x<0$ のとき

$$y=-2x-(x-2)=-3x+2$$

これからグラフは右のようになります。



これで1次関数のグラフのかき方はわかりましたね。そこで，いよいよ次は，総合的な問題にとりかかるとしましょう。

では，がんばってくださいよ。

練習 8. $y=f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$

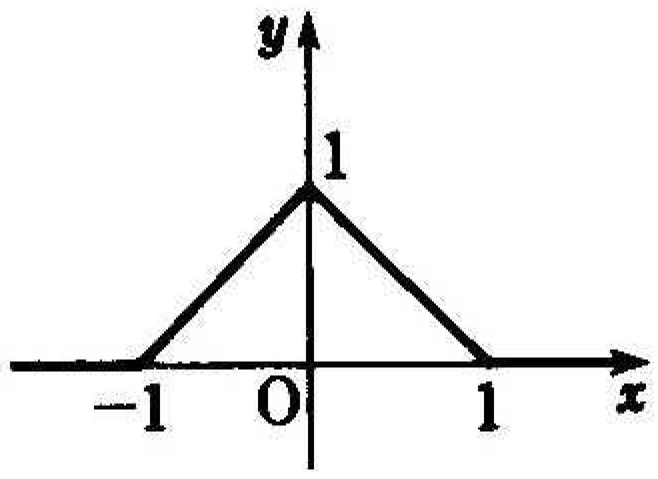
のグラフをかけ。（茨城大）

（ヒント）$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$y=1+x$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$y=1-x$

$x<-1$ または $x>1$ のとき　$y=0$

ゆえに，グラフは右のようです。

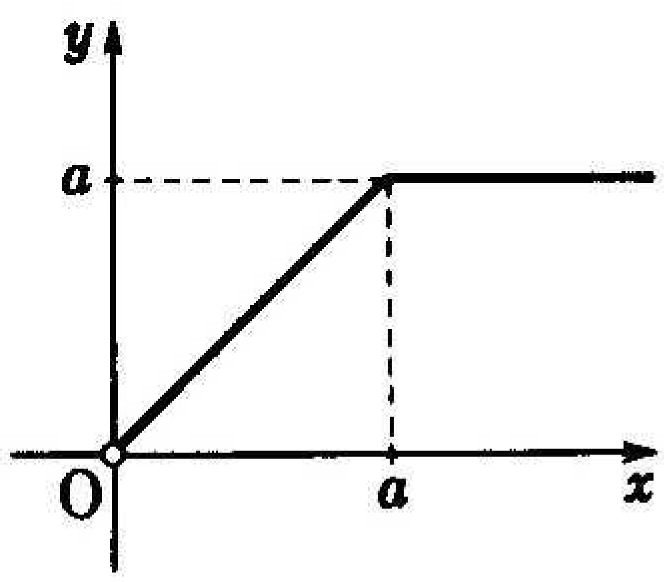


練習 9. $f(x,\ z)$ は x，z のうちで大でない数を表すものとする。a を正の定数とするとき，x の関数 $y=f(x,\ a)$ のグラフを，$x>0$ の範囲でえがけ。（鹿児島大）

（解）$0<x<a$ のとき　$f(x,\ a)=x$

$a\leqq x$ のとき　$f(x,\ a)=a$

よって，求めるグラフは右の図のようになる。



（注）このグラフを使うと，例えば次のことが証明できます。「a，b，c が三角形の3辺の長さを表すとき，任意の正の数 x に対して

$$f(x,\ b)+f(x,\ c)>f(x,\ a)」$$

練習 10. $t\geqq 0$，$x=3\sqrt{t}-1$，

$$y=\sqrt{9t+2x+3}+\sqrt{9t-4x}$$

なる関係を保ちながら変化する3つの量 t，x，y があるとき，x を y で表せ。また，そのグラフをかけ。（新潟大）

（解）$x=3\sqrt{t}-1$

$$\therefore\quad \sqrt{t}=\frac{1}{3}(x+1)$$

$\sqrt{t}\geqq 0$ より　$x\geqq -1$

また，$t=\dfrac{1}{9}(x+1)^2$ であるから

$$9t+2x+3=(x+1)^2+2x+3=(x+2)^2$$

同様に　$9t-4x=(x-1)^2$

$$\therefore\quad y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$$

$$=|x+2|+|x-1|$$

ゆえに，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$y=(x+2)-(x-1)$

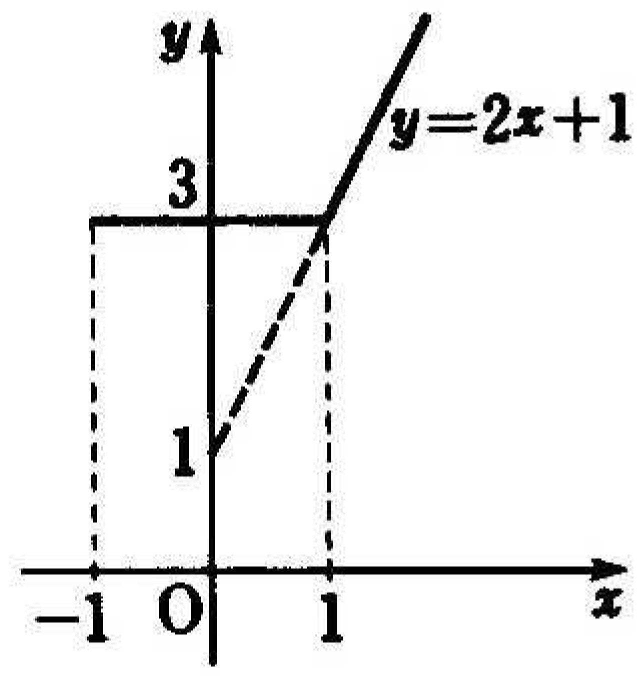
$=3$

$1\leqq x$ のとき

$y=(x+2)+(x-1)$

$=2x+1$

したがって，グラフは右のようになる。



＊　＊　＊

◆ 1次関数は簡単です。簡単ですが，そのためかえって妙な理論的とみえるものもよく出題されるのです。例えば，こんなぐあい。

練習 11. $y=ax+b$ という形の式では表されない直線の方程式は何か。（金沢大）

（ヒント）$x=c$ なんです。おわかり？

練習 12. $y=m(x-a)$ のグラフにおいて，$a=2$ として m にいろいろな値を与えたとき，このグラフはどんな図形の集まりになるか。また，$m=1$ として，a にいろいろな値を与えたときはどうか。（静岡大）

（ヒント）$a=2$ のとき，直線 $y=m(x-2)$ は m の値が何であっても点 $(2,\ 0)$ を通る。ただし，直線 $x=2$ を表すことはできない。

$m=1$ のとき，y 軸との切片が $-a$，傾き1の直線を表します。それは，傾き1の直線をすべて表せるのです。

練習 13. 直線 $ax+by+c=0$ は $ab>0$，$ac<0$ のとき，どの象限を通らないか。（一橋大）

（ヒント）$ab>0$ だから　$b\neq 0$

$$\therefore\quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

そして

$$-\frac{a}{b}<0,\quad -\frac{c}{b}>0$$

ゆえに，……　〔答〕第3象限

◑1次の分数関数のグラフ

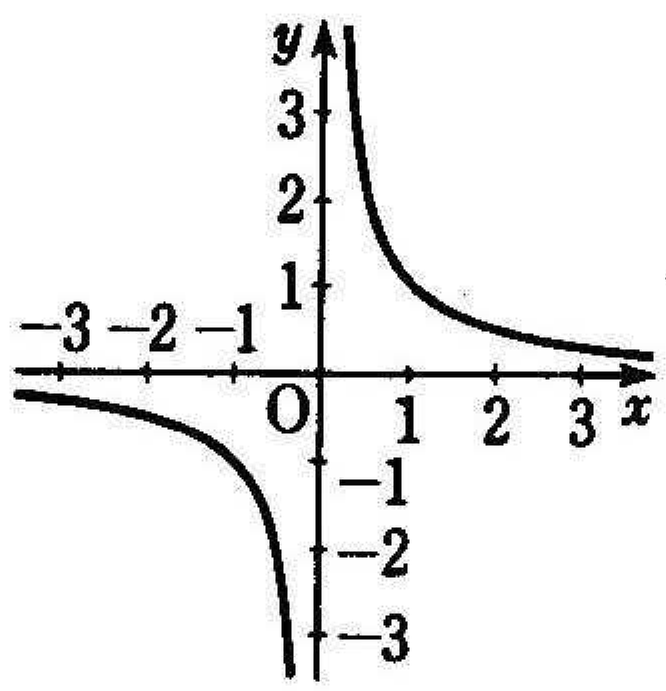
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆1次の分数関数を手軽にかけるなら，どのように便利であろう。それがかけないためにいかに苦労していることか。

◆ $y=\frac{1}{x}$ のグラフはおわかりですか？

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$-0.33\cdots$	-0.5	-1	1	0.5	$0.33\cdots$	0.25

といったぐあい。そのグラフをかいてみると図のようになります。



この曲線は x 軸および y 軸に近づいていきます。このように，ある曲線がある直線に近づいていくとき，この直線を **漸近線** といいます。これは **ぜんきんせん** と読みます。ザンキンセンと読んではいけません。

ところで，一般に

$$y=\frac{cx+d}{ax+b}$$

のグラフは上の曲線を平行移動したものになります。では，それを次に考えてみましょう。

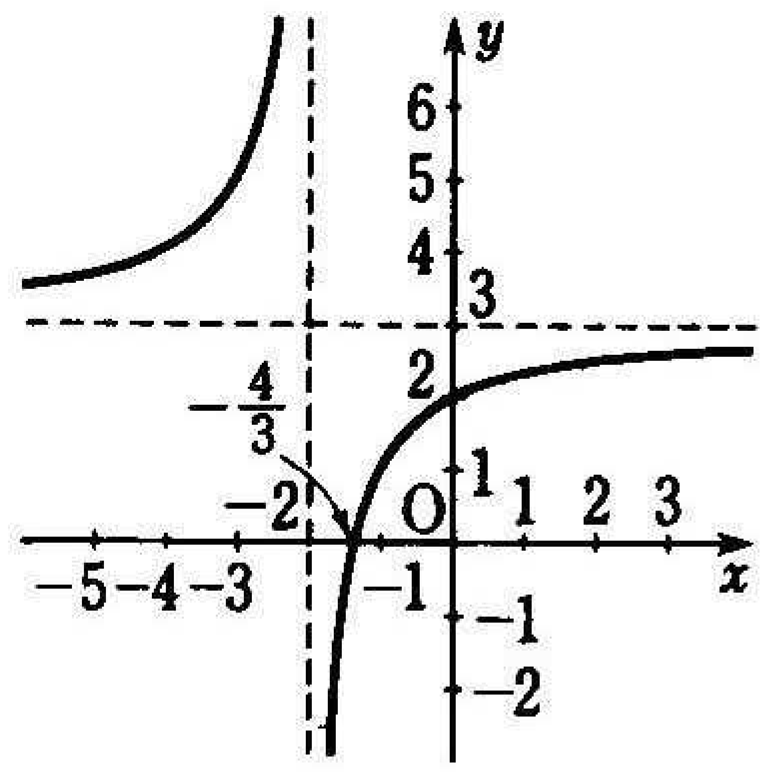
練習 1. 曲線 $y=\frac{3x+4}{x+2}$ の概形をかけ。

（広島大）

ヒント　$y=\frac{3x+4}{x+2}$ のグラフをかくに当たって大切なことは3つあります。

第1は漸近線です。**分母を0とおいて得られる** $x=-2$ が1つの漸近線です。分母が0になるか，などといってはいけません。オボエ方をいっているのですから。

もう1つ y 軸に平行な漸近線は $y=3$ です，といってもピンとこないかもしれませんが，$y=\frac{cx+d}{ax+b}$ において，$\boldsymbol{y=\frac{c}{a}}$ **は漸近線**だということです。



さあ，こうして，2つの漸近線は求まりました。次には，軸との交点を求めればいい。$x=0$ とおいてみると $y=2$，だから点 $(0,\ 2)$ を通ります。あるいは，$y=0$ とおいてみると $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$ となります。これだけそろえばグラフがかけるハズ。上をみてください。

練習 2. $y=\frac{x}{2x-1}$ のグラフの概形をかけ。

（広島大）

ヒント　分母を0とおくと

$$2x-1=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}$$

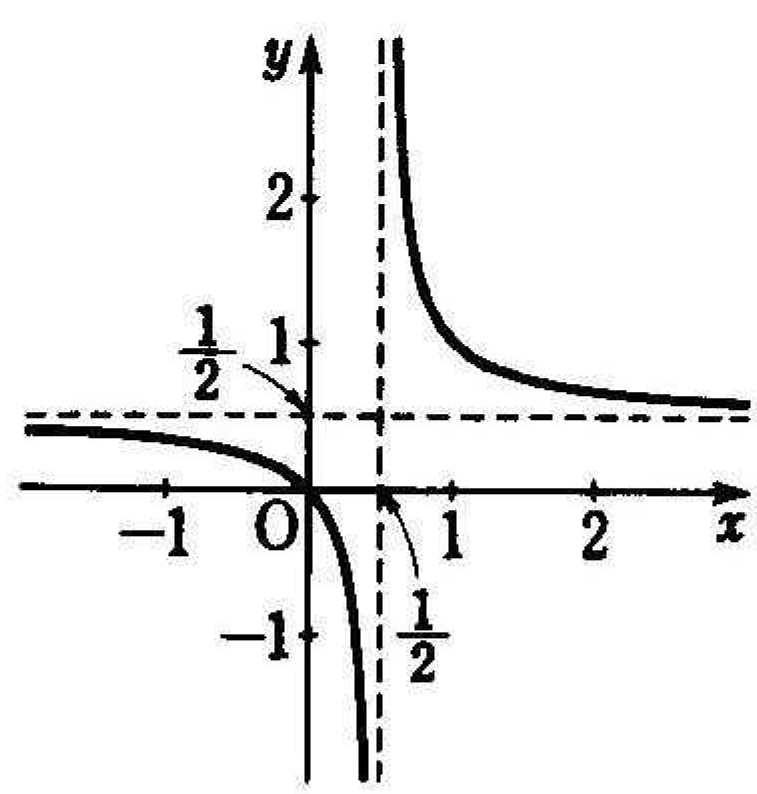
これが1つの漸近線です。

もう1つ，y 軸に平行な漸近線は

$$y=\frac{1}{2}$$

その上で原点を通ることは確かです。

こんなわけで，求めるグラフは下のようになります。



さあどうです。このようにして，グラフを簡単にかくことができるようになりますと，いよいよ応用ということ

になりましょう。それが次の課題です。

*　　*　　*

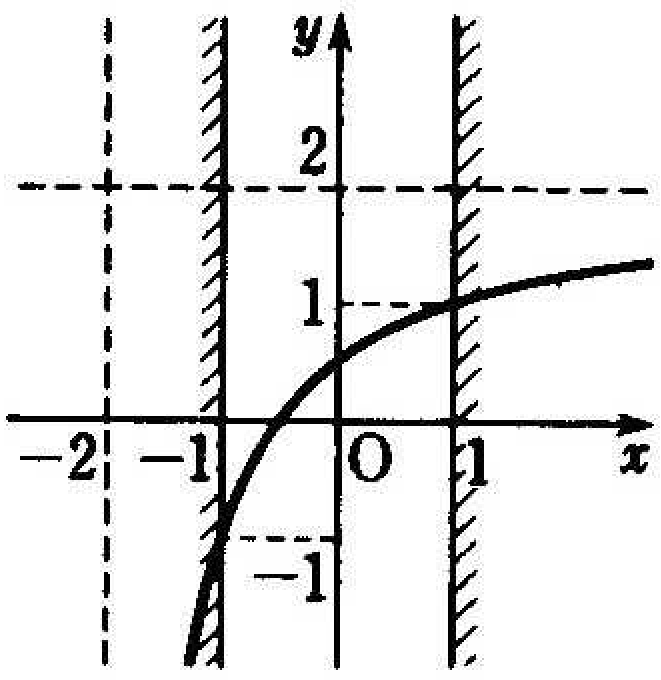
◆ では，分数関数のグラフの応用の中から大切なものをとりあげてやってみましょう。

練習3. $y=\dfrac{2\sin\theta+1}{\sin\theta+2}$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　$\sin\theta=x$ とおくと

$$y=\frac{2x+1}{x+2}\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

そこで，グラフをかいてみると右の通り。



さては最大値は 1，最小値は −1 であろう。

注　もちろん，グラフを使わなくてもできますよ。例えば，

$$y=\frac{2\sin\theta+1}{\sin\theta+2}$$

を $\sin\theta$ について解くと

$$\sin\theta=\frac{-2y+1}{y-2}$$

$$\therefore\quad -1\leqq\frac{-2y+1}{y-2}\leqq 1$$

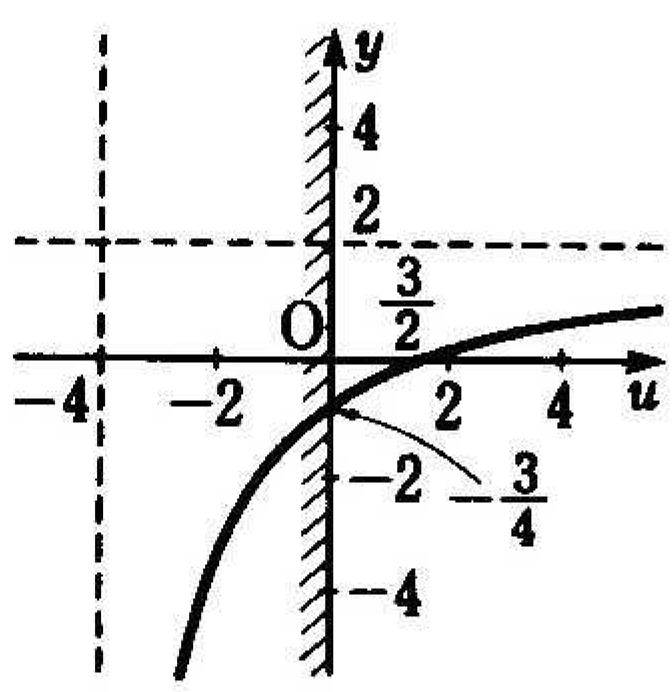
この不等式を解けば y のとりうる値の範囲がでます。しかし，上のやり方に比べて，めんどうなること，数十倍!!（は，ちと，大ゲサかな）

練習4. $y=\dfrac{2x^2-3}{x^2+4}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

ヒント　$x^2=u$　とおくと

$$y=\frac{2u-3}{u+4}\quad(u\geqq 0)$$

このグラフをかいてみると右の通り。これからわかるように



$$-\frac{3}{4}\leqq y<2$$

が答です。

*　　*　　*

◆ もう一段めんどうにしよう。

練習5. $y=\dfrac{1+2x}{1-x}$ とするとき　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ を満足する任意の x の値に対して，

$$1+bx\leqq y\leqq 1+ax\quad(a,\ b\ は実数)$$

がつねに成り立つような a の最小値，b の最大値を求めよ。　（京都教育大）

ヒント　このままでもいいが，

$$bx\leqq y-1\leqq ax$$

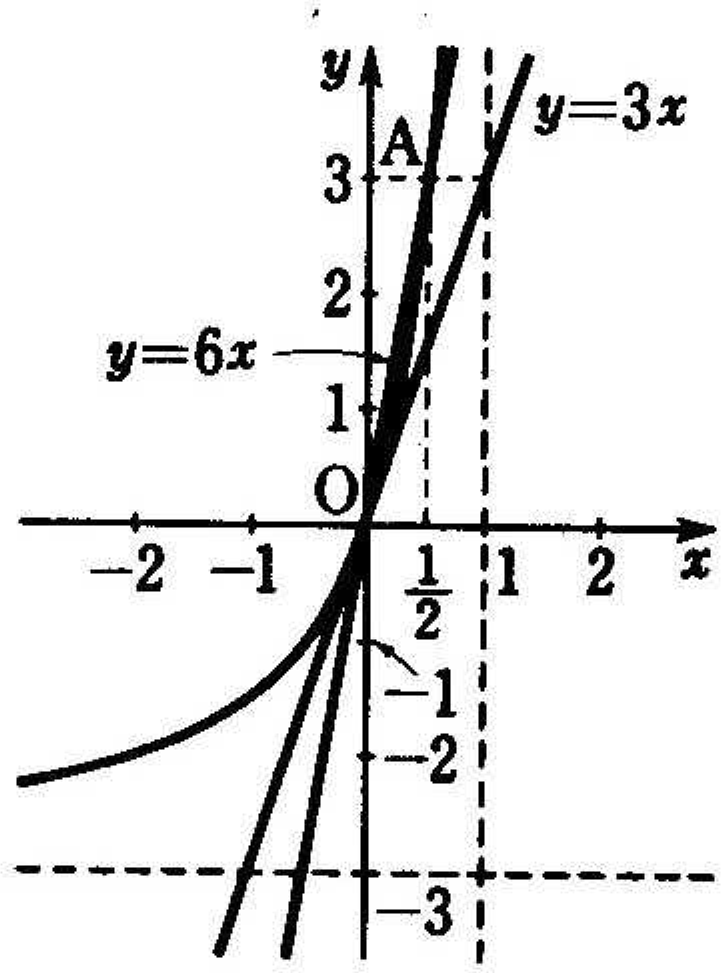
あるいは　$y=\dfrac{1+2x}{1-x}$ を代入して

$$bx\leqq\frac{3x}{1-x}\leqq ax$$

を満足する a，b を考えればいいだろう。

$$y=\frac{3x}{1-x}$$

のグラフをかいてみると右の通り。



ところで，原点と点 $A\left(\dfrac{1}{2},\ 3\right)$ を通る直線の傾きは 6 ですから $y=ax$ $(a\geqq 6)$ は確かに曲線 $y=\dfrac{3x}{1-x}$ より上にあって

$$\frac{3x}{1-x}\leqq ax$$

を満足します。

次に原点における接線の傾きを m とすると

$$y=mx\quad と\quad y=\frac{3x}{1-x}$$

から y を消去して $mx=\dfrac{3x}{1-x}$ が得られ，分母をはらって整理すると

$$mx^2+(m-3)x=0$$

これが重複解をもつ条件から，判別式を D とすると

$$D=(m-3)^2-4m\cdot 0=0\qquad\therefore\quad m=3$$

つまり $y=3x$ より傾きの小さいものは曲線より下になります。

答　$a=6$，$b=3$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

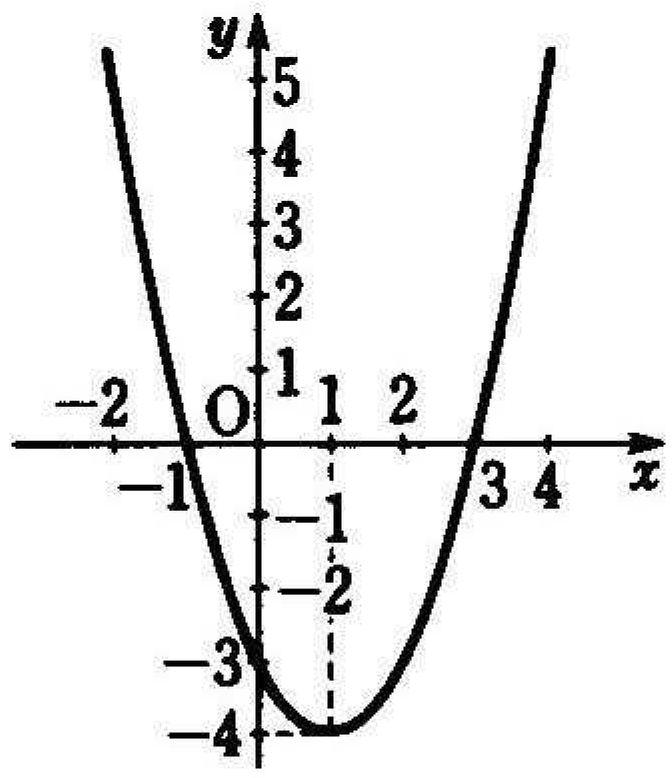
○2次関数のグラフ

◆2次関数のグラフを，まるで4次関数のようにかく人がある。いや，もっとひどい人もある。花弁のように，だ。

◆ $y=x^2+x+1$ のグラフといえば，すぐ，$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ と変形する人がある。そこへ努力を傾注するものだから，あとはデタラメ，というのでは困ります。やはり $x=-2$, -1, 0, 1, 2 くらいは代入して，その上でなめらかに結ぶ，そのときには息をとめてかかないとぐにゃぐにゃ曲がったりする。何のためにグラフをかくか，忘れてしまうとこんなことになるのです。それはさておき，答案としては頂点をキチンと押えておきたいものです。では，次の練習をやってみませんか。

■練習1. $y=x^2-2x-3$ のグラフをかけ。

ヒント　$y=(x-1)^2-4$ と変形できるから，軸は $x=1$, 頂点は $(1,\ -4)$ であることがわかります。



また，

$y=(x-3)(x+1)$

と書けるから x 軸との交点は $(3,\ 0)$ と $(-1,\ 0)$ で，y 軸との交点は $(0,\ -3)$ です。放物線の対称性から点 $(2,\ -3)$ を通ることもいうまでもなし。したがって，グラフは上のようになります。

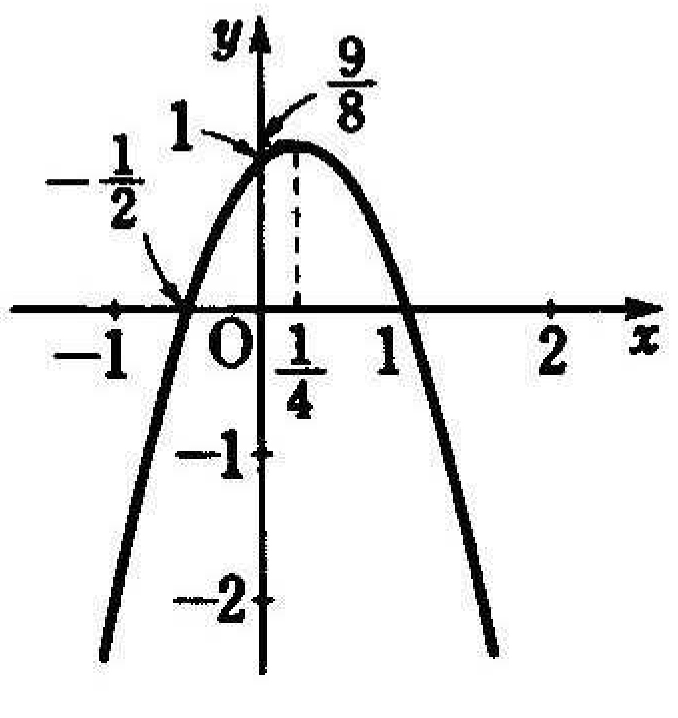
■練習2. $y=-2x^2+x+1$ のグラフをかけ。

解　y

$=-2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)$

$+\frac{9}{8}$

$=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$



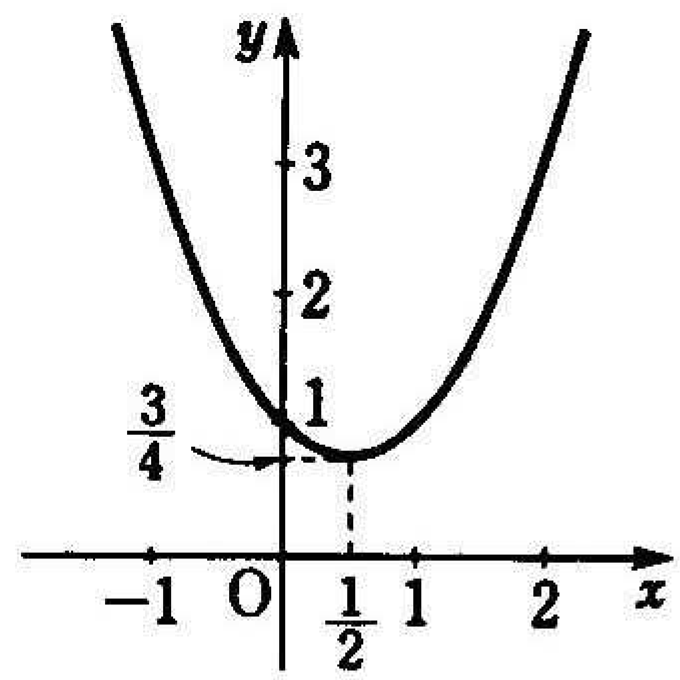
ゆえに，求めるグラフは軸が $x=\frac{1}{4}$, 頂点 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{9}{8}\right)$ で x 軸と2点 $(1,\ 0)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ で交わる 放物線 である。

注　答案としては上のようでいいが，解答としては $x=-1$, 0, 1, 2 くらい入れて y の値を求めるべきだ，ということをお忘れなく。

■練習3. $y=x^2-x+1$ のグラフをかけ。

4/3

ヒント　$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ から，頂点は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ とわかる。頂点の y 座標は $\frac{3}{4}(>0)$ で，下に凸だから x 軸には交わらない。こういうのがいちばん仕末に困るもの。



結局，$x=-1$, 0, 1, 2 などを入れてかくと図のようになります。

■練習4. $x=y^2-2y-3$ のグラフをかけ。

ヒント　練習1.と同じこと。ただ，x, y が入れかわっているだけです。だから，同じ流儀でやればいいのですが，ふしぎと，マチガイが圧倒的に多くなるのです。端的にいえば，**$y=x$ について折り返せばいい** のです。

*　*　*

◆ 以上で2次関数のグラフの重要事項は終わりですが，少し一般的なことをあげるとしましょう。

まず $y=ax^2+bx+c$ の a は何を表すかということです。これは2つのことを表しています。1つは符号が放物線の向きを表します。すなわち

$a>0$ ならば　下に凸

$a<0$ ならば　上に凸

もう1つは，$|a|$ はこの **放物線の形状をきめる** ということです。いや，このいい方はよくないな。$|a|$ が等しければ合同だ，ということです。（ここでいいなおした意味わかりますか。実はすべての放物線は相似ですから，形は同じだというべきなのです。いいなおしたとき，ハハーンとすぐ気がついたとしたら，よくわかっている，といってよい）

第2に c です。$y=ax^2+bx+c$ において，$x=0$ とおくと $y=c$ となります。つまり，y 軸との交点の y 座標が c なんです。だから，c を変えると，曲線はこのまま上下します。

第3に b です。これがめんどう。

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

ですから，a と共同して頂点や軸をきめるといってもよいが，b だけでは？　ときかれて答えられる人は少ないのです。

実は，y 軸との交点における接線の傾きが b なのです。では，次をやってみませんか。

1/3

練習 5. $y=ax^2+bx+c$ と y 軸との交点における接線の傾きを求めよ。

（解）y 軸との交点 $(0,\ c)$ における接線の傾きを m とすると

$$y=mx+c$$

これが $y=ax^2+bx+c$ と接するように m をきめればよい。y を消去して

$$ax^2+(b-m)x=0$$

判別式を D とすると

$$D=(b-m)^2-4\cdot a\cdot 0=0$$

$$\therefore\quad b=m$$

答　b

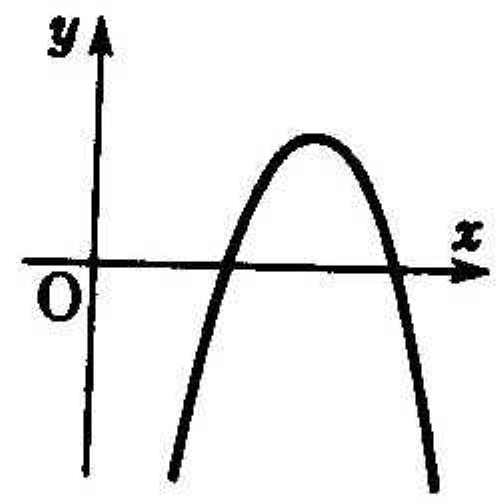
（注）ここで判別式をとるのはやや大ゲサのそしりをまぬがれない。

$$ax^2+(b-m)x=0$$

$$\therefore\quad x=0,\ -\frac{b-m}{a}$$

重複解条件から　$-\dfrac{b-m}{a}=0$　$\therefore$　$m=b$　と出るからです。しかし，私は判別式をとるほうがスキです。なぜなら，一般的だから，……。

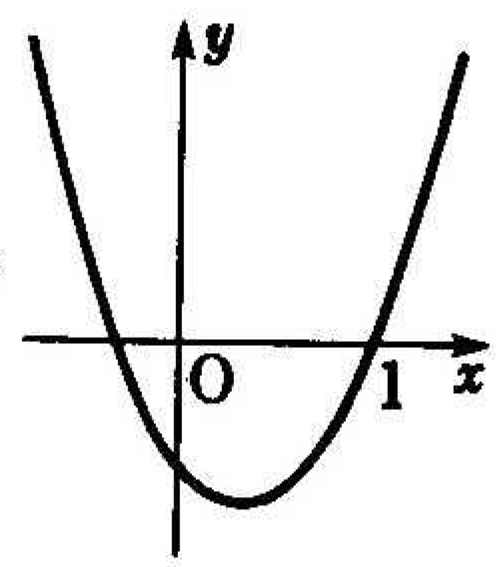
練習 6. 右の図において曲線は $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。a, b, c および b^2-4ac は正，0，負のいずれであるか。



（立教大）

（ヒント）上に凸だから $a<0$，x 軸の下で y 軸と交わるから $c<0$，また b は y 軸における接線の傾きで正。b^2-4ac はもちろん正。

練習 7. $y=ax^2-bx+c$ のグラフが下の図のようであるとき，次の各数値は，正，0，負のいずれであるか判別せよ。



(イ)　a

(ロ)　b

(ハ)　c

(ニ)　b^2-4ac　　(ホ)　$a+b+c$

(ヘ)　$a-b+c$　　(ト)　$4a+2b+c$　（東海大）

（ヒント）下に凸だから $a>0$，y 軸との交点における接線の傾きが負だから $b>0$，x 軸の下で y 軸に交わっているから　$c<0$

また，x 軸と2点で交わっているから，判別式 >0，つまり　$b^2-4ac>0$

また，$a+b+c$ は　ax^2-bx+c　において $x=-1$ を代入したもの。これは正であることは確かです（なぜかって，x 軸と $x=1$ で交わっている，しかも，頂点は y 軸に関して正の側にあるから）。

$a-b+c$ は $x=1$ のときの y の値ですから0です。最後に，$4a+2b+c$ は $x=-2$ のときの値，いうまでもなく正です。

＊　＊　＊

◆　2次関数のグラフには，このほかに絶対値のついたのやら，ガウス記号のついたのがありますが，そのほうを参照してください。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

⑪ 絶対値のついたグラフ

◆絶対値の扱い方は実数と虚数で大きくちがいます。そして，実数では大切なことは2つ，いや，細かくいうと3つです。

◆ 絶対値のついたグラフのかき方とその応用について研究しておこう，これが目的です。

さて，大切なことは，これです。

x が実数のとき

(1) $|x|^2=x^2$

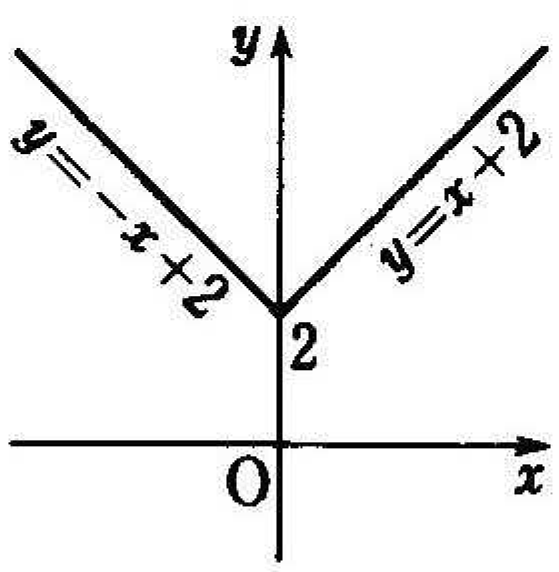
(2) $|x|=\begin{cases} x\geqq 0 \text{ のとき } & x \\ x<0 \text{ のとき } & -x \end{cases}$

では，ともあれ，これをやってみませんか。

■練習 1. $y=|x|+2$ のグラフをかけ。

ヒント　$|x|=|-x|$ ですから，xの符号を変えても $|x|+2$ は変わらない。これが偶関数の条件でした。そして，偶関数は y 軸に関して対称なのでした。

したがって第1象限でグラフをかいて，y 軸について対称にすれば，つまり，折り返せばいいでしょう。



4/4

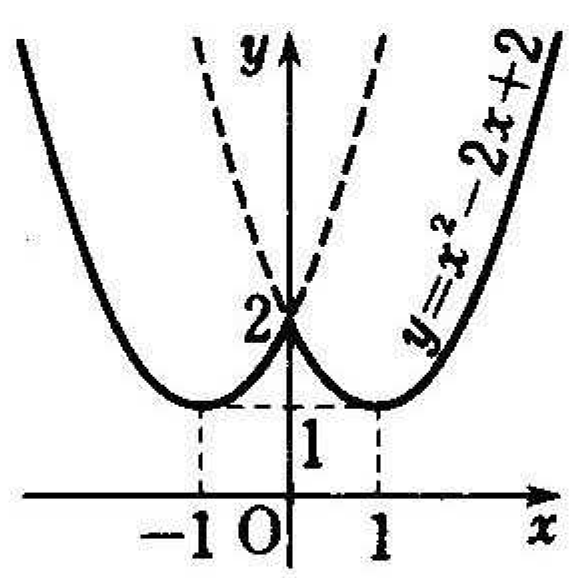
■練習 2. $y=x^2-2|x|+2$ のグラフをかけ。

解　グラフは明らかに y 軸に関して対称である。$x\geqq 0$ に対して

$$y=x^2-2x+2$$

$$\therefore\quad y=(x-1)^2+1$$

ゆえに求めるグラフは右のようになる。



*　*　*

◆ 次は，$|x|^2=x^2$ を使うもの。では，これを：

4/4

■練習 3. $|y-x|=|y|$ のグラフをかけ。

ヒント　$y\geqq x$，$y\geqq 0$；$y\geqq x$，$y\leqq 0$；$y\leqq x$，$y\geqq 0$；$y\leqq x$，$y\leqq 0$ と4つに分けてもいいのですが，それよりは，両辺を2乗しても同値であることに目をつけて，

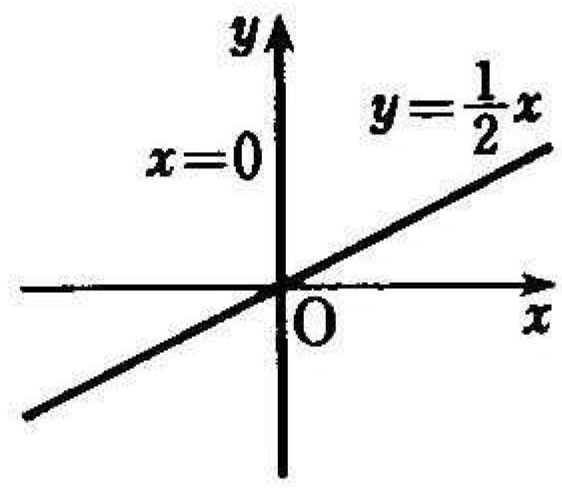
$$|y-x|^2=|y|^2$$

$$\therefore\quad (y-x)^2=y^2$$

$$\therefore\quad y^2-2yx+x^2=y^2$$

$$\therefore\quad x(2y-x)=0$$

$$\therefore\quad x=0,\ 2y=x$$



どうです。このほうがぐっと楽でしょう。

4/4

■練習 4. $|y-x^2|=|x-y^2|$ のグラフをかけ。

解　両辺を2乗しても同値であるから

$$(y-x^2)^2=(x-y^2)^2$$

$$\therefore\quad (y-x^2)^2-(x-y^2)^2=0$$

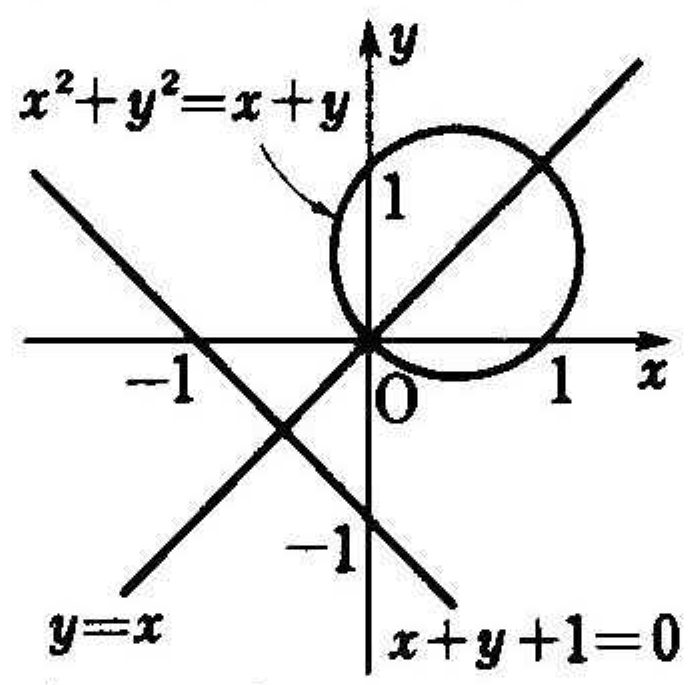
$$\therefore\quad \{(y-x^2)+(x-y^2)\}\times\{(y-x^2)-(x-y^2)\}=0$$

$$\therefore\quad (x^2+y^2-x-y)(x-y)(x+y+1)=0$$

ゆえに

$$\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ y=x \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

求めるグラフは右のようになる。



*　*　*

◆ いよいよ，第3は絶対値をとって考えるものです。

4/4

■練習 5. $y=x|x|$ のグラフをかけ。

ヒント　$x\geqq 0$ のとき $|x|=x$

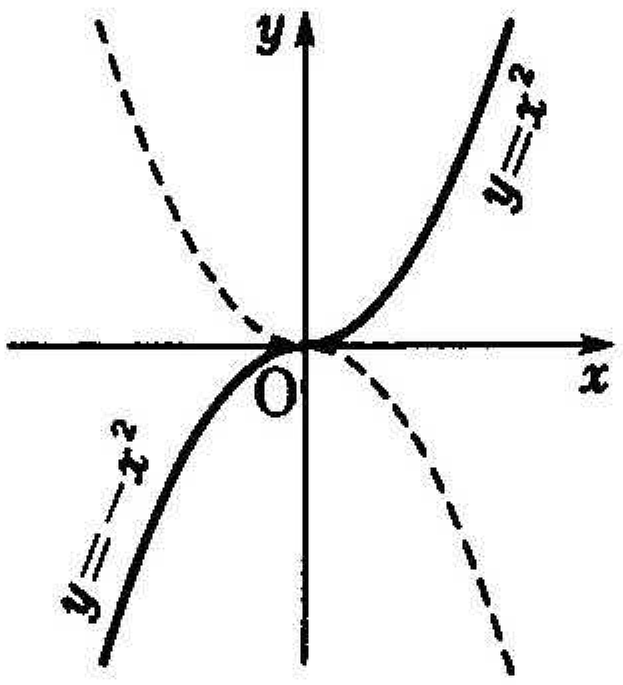
$x<0$ のとき $|x|=-x$

ですから

$$y=\begin{cases} x\geqq 0 \text{ のとき } & x^2 \\ x<0 \text{ のとき } & -x^2 \end{cases}$$

ですから，グラフは図のようになります。

練習1. と練習2. で偶関数の性質を使いましたが，ここでは奇関数(☞ p. 214)の性質を使うこともできます。しかし，それは，“雞を割くに牛刀を用いる”というべきか。



4/4

■練習 6. $y=|x^2-2x|-(x^2-2x)$ のグラフをかけ。

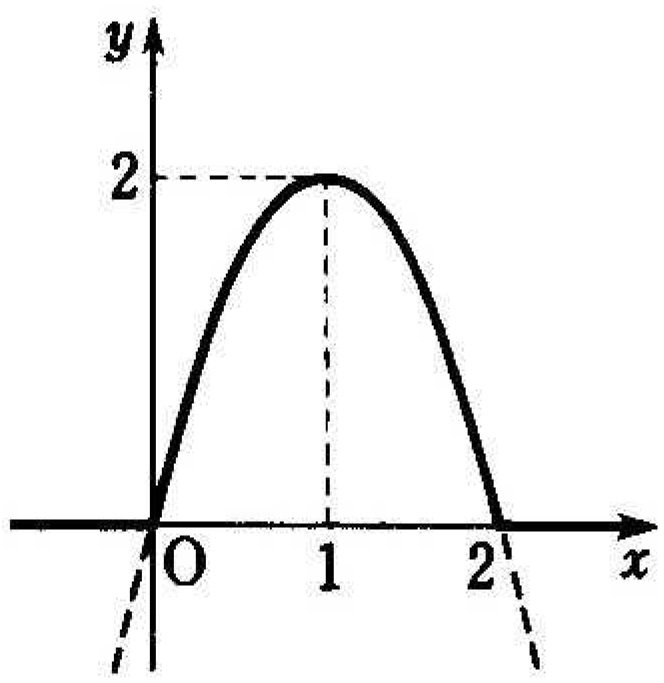
ヒント　$x \geqq 2$ あるいは $x \leqq 0$ のとき

$$y=(x^2-2x)-(x^2-2x)=0$$

$0<x<2$ のとき

$$y=-(x^2-2x)-(x^2-2x)$$
$$=-2(x^2-2x)$$

したがって，グラフは右の通りです。



これで，大体大事なことは終わりです。では，絶対値のついたグラフの応用問題に当たってみましょう。

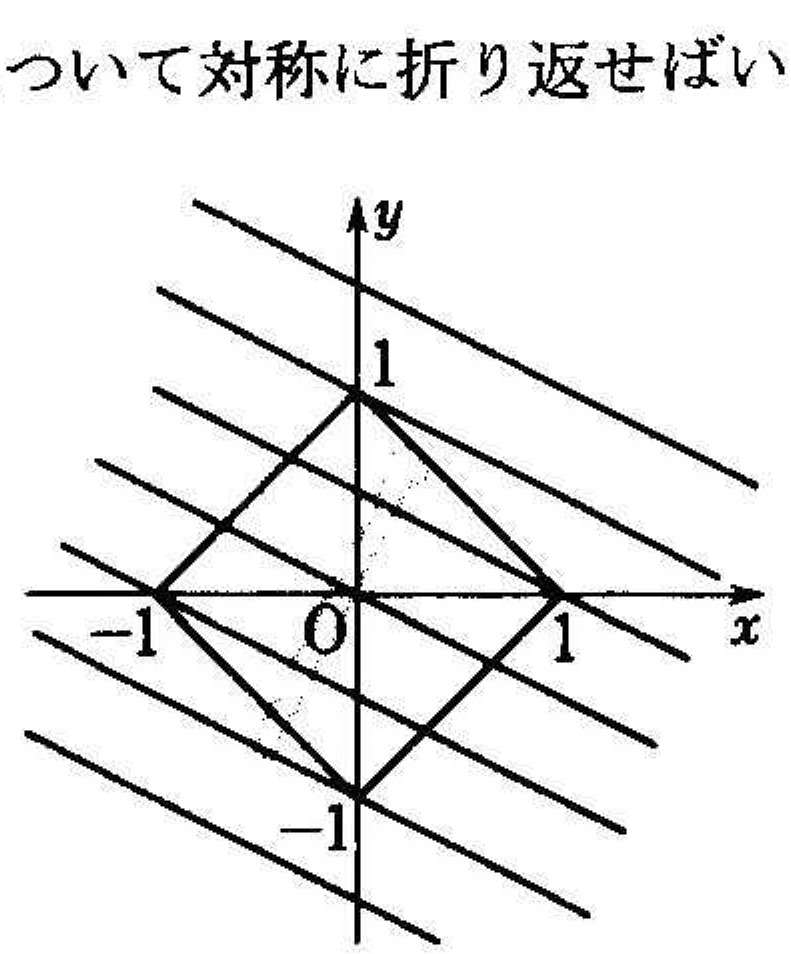
■練習 7. $|x|+|y|=1$ のとき $x+2y$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　$|x|+|y|=1$ は x の符号を変えても変わらないし，y の符号を変えても変わらない。だから，x 軸についても y 軸についても対称です。してみると，第1象限だけかいて，x 軸，y 軸について対称に折り返せばいいでしょう。

こうして，右のグラフが得られたのです。そこで，

$k=x+2y$

とおいて，k の値をいろいろ変えてグラフをかいてみると，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の平行直線が得られます。そして k の値の大きくなるにつれて，太い矢印のほうに平行移動します。かくて，点 $(0,\ 1)$ で最大値 2 をとり，点 $(0,\ -1)$ で最小値 -2 をとることがわかります。



4/4

■練習 8. 方程式 $|x^2-x-2|+x-a=0$ の実数解の数を吟味せよ。

ヒント　グラフを使うのが定石。

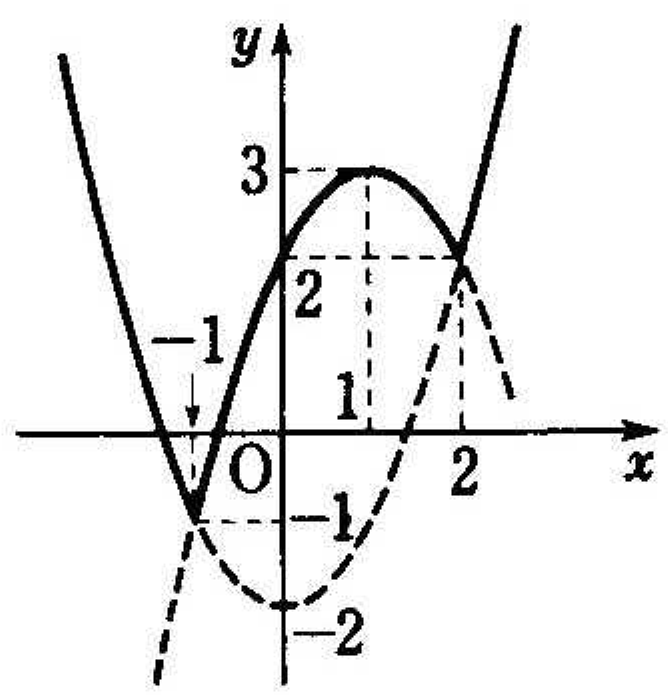
$|x^2-x-2|=-x+a$ と変形し，

$$y=|x^2-x-2| \quad と \quad y=-x+a$$

のグラフの共通点を調べる人が多い。それでいいのですが，$y=-x+a$ のグラフは傾き -1 で斜めに走っているのがまずい。次のように a だけを孤立させるほうがラク。

さて，　$|x^2-x-2|+x=a$

左辺$=f(x)$ のグラフは右のように放物線をつないだものになります。



また，$y=a$ のグラフは x 軸に平行ですから，解の数は

$a>3$	のとき	2個
$a=3$	のとき	3個
$2<a<3$	のとき	4個
$a=2$	のとき	3個
$-1<a<2$	のとき	2個
$a=-1$	のとき	1個
$a<-1$	のとき	0個

注　$a=3$ のとき接しているから，解の個数は4個で，うち2個は重複解であるとする人があるかもしれません。しかし，重複解というのは，整方程式，つまり，多項式$=0$ とおいた方程式についていうのがふつうです。このように絶対値がついていたり，分数方程式だったり，というときには重複解といわないのが常識といっていいのです。もっとも，ふつうは，相異なる実数解の数を調べよ，といった形になっています。

⑪ ガウス記号のついたグラフ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ガウス記号は何となく抵抗を感じませんか。しかし，[　]のついたグラフをいくつかかいてみると，ふしぎに抵抗感が失せる。

ガウス記号［　］を〔　〕と書いてはいけません。これはカギカッコといわれるもの。あの角度は90°なんです。91°ではいけない，という気持が大切。ところで

ガウス記号［x］はxを越えない最大の整数を表す記号

ですから，

$[4.6]=4$，$[12]=12$，$[\pi]=3$，
$[0.4]=0$，$[8.02]=8$

といったぐあい。これから，うっかり小数部分をとればいいのだと考えてはいけません。というのは，$[-5.2]=-5$ ではなくて

$$[-5.2]=-6$$

です。$[-0.2]=-1$ だからです。

一般に［x］をみたら

$$[x]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\leqq x<3 &: \ 2 \\ 1\leqq x<2 &: \ 1 \\ 0\leqq x<1 &: \ 0 \\ -1\leqq x<0 &: -1 \\ -2\leqq x<-1 &: -2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

とおきかえて考えるのがコツです。詳しくは（☞ p. 106）を参照してください。

*　*　*

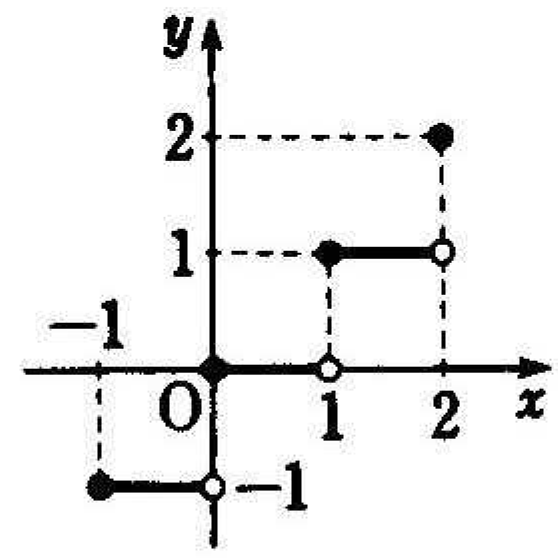
◆ さて，ここではガウス記号［　］のついたグラフについて考えてみよう，というわけ。

4/5
■練習1. $y=[x]$（ただし，$-1\leqq x\leqq 2$）のグラフをかけ。

ヒント

$$[x]=\begin{cases} x=2 &: \ 2 \\ 1\leqq x<2 &: \ 1 \\ 0\leqq x<1 &: \ 0 \\ -1\leqq x<0 &: -1 \end{cases}$$

ですから，グラフは右図のようになります。



■練習2. $y=\left[\dfrac{x}{2}\right]$ のグラフをかけ。

4/5

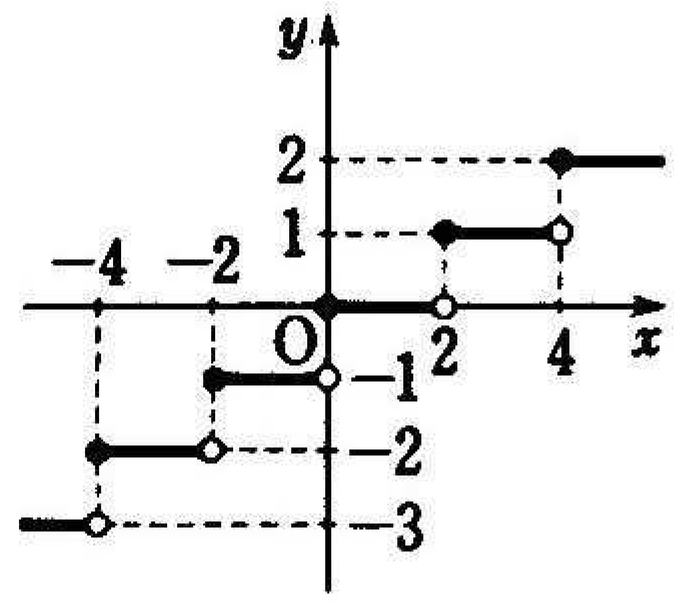
ヒント

$$\left[\frac{x}{2}\right]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\leqq \dfrac{x}{2}<2 &: \ 1 \\ 0\leqq \dfrac{x}{2}<1 &: \ 0 \\ -1\leqq \dfrac{x}{2}<0 &: -1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ですから，

$$y=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\leqq x<4 &: \ 1 \\ 0\leqq x<2 &: \ 0 \\ -2\leqq x<0 &: -1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

となります。よってグラフは右のようになります。



もう1つやってみませんか。

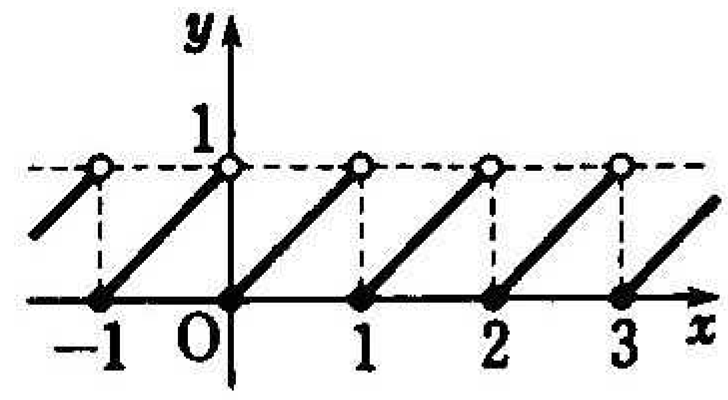
■練習3. $y=x-[x]$ のグラフをかけ。

ヒント 4/5

$$[x]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\leqq x<2 &: \ 1 \\ 0\leqq x<1 &: \ 0 \\ -1\leqq x<0 &: -1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\therefore\quad x-[x]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\leqq x<2 &: \ x-1 \\ 0\leqq x<1 &: \ x-0=x \\ -1\leqq x<0 &: \ x+1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

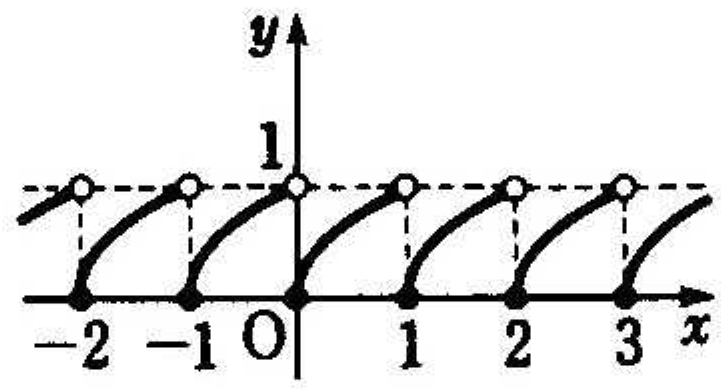
したがってグラフは右のようになります。



もう1つやってみましょう。

■練習 4. $y=\sqrt{x-[x]}$ のグラフをかけ。

(解) 右図。



*　　*　　*

◆ さあ，これでガウス記号[ ]のついたグラフのかき方はわかったでしょう。そこで，次には，やや，めんどうな問題にとり組んでみませんか。

■練習 5. $[x]+[y]=4$ を満足する点 (x, y) の存在範囲を求めよ。ただし $0\leqq x\leqq 5$, $0\leqq y\leqq 5$ である。

(ヒント) $[x]$ も $[y]$ も整数ですから

$[x]=0$ かつ $[y]=4$

$[x]=1$ かつ $[y]=3$

$[x]=2$ かつ $[y]=2$

$[x]=3$ かつ $[y]=1$

$[x]=4$ かつ $[y]=0$

の場合があります。そして，それは

$0\leqq x<1$ かつ $4\leqq y<5$

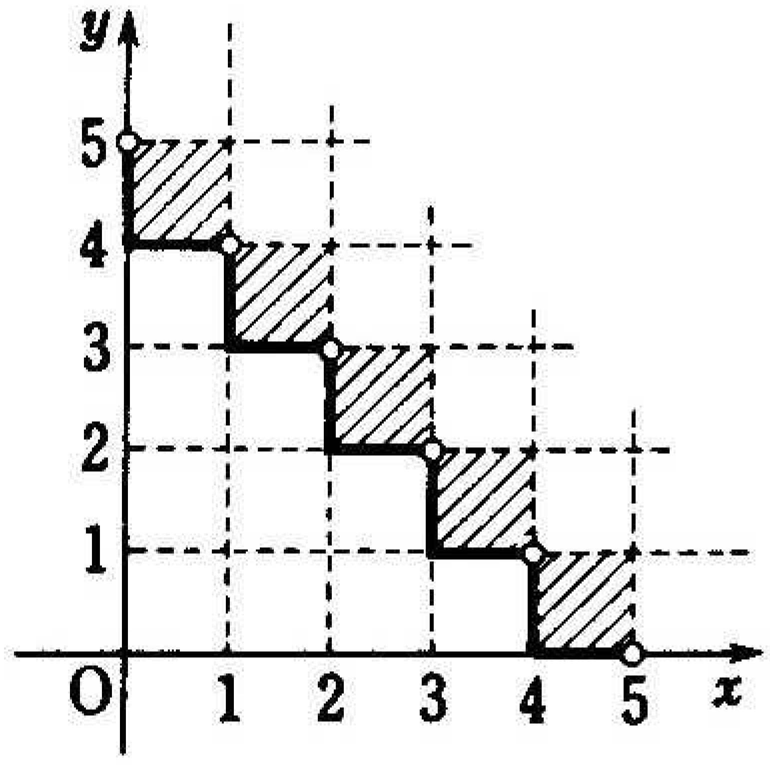
$1\leqq x<2$ かつ $3\leqq y<4$

$2\leqq x<3$ かつ $2\leqq y<3$

$3\leqq x<4$ かつ $1\leqq y<2$

$4\leqq x<5$ かつ $0\leqq y<1$

ということですから，求める範囲を右図の斜線部のようです。境界は実線部分のみを含む。



*　　*　　*

◆ ガウス記号の入った方程式のグラフは方程式の解法などにも役に立ちます。その前に，まず，これです。

■練習 6. $[x]=3$, $[y]=0$, $[z]=1$ とすれば $[x+y-z]$ の値はいくらか。（都立大）

(ヒント) $[x]=3$ 　$\therefore$ $3\leqq x<4$ ……①

$[y]=0$ 　$\therefore$ $0\leqq y<1$ ……②

$[z]=1$ 　$\therefore$ $1\leqq z<2$

$\therefore$ $-2<-z\leqq -1$ ……③

①＋②＋③ より

$$1<x+y-z<4$$

ゆえに

$$[x+y-z]=2,\ 3$$

答 2, 3

■練習 7. $[x]^2-3[x]+2=0$ を解け。

(ヒント) $([x]-1)([x]-2)=0$

$\therefore$ $[x]=1,\ 2$

$\therefore$ $1\leqq x<2,\ 2\leqq x<3$

$\therefore$ $1\leqq x<3$ …… 答

*　　*　　*

◆ 次に，グラフを使うべきものの例を1つあげておきましょう。

■練習 8. 方程式 $2x+2[x-1]=3$ を解け。

(ヒント) $2x+2[x-1]=3$

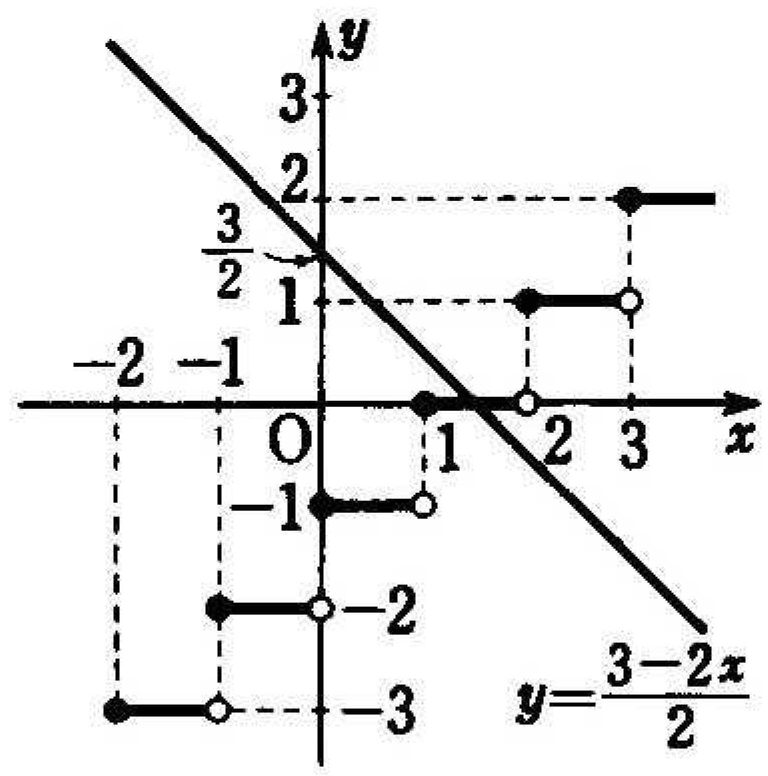
$\therefore$ $[x-1]=\dfrac{3-2x}{2}$

と変形して両辺のグラフをかいてみると下のようになる。

これからみて明らかに共通点は

$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

で，求める解は $x=\dfrac{3}{2}$ とわかります。



答 $\dfrac{3}{2}$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○無理関数のグラフ

◆無理関数のグラフは，めんどうなものは要りません。しかし，その代わり，基本的なものは，しっかりつかんでおくことが大切!!

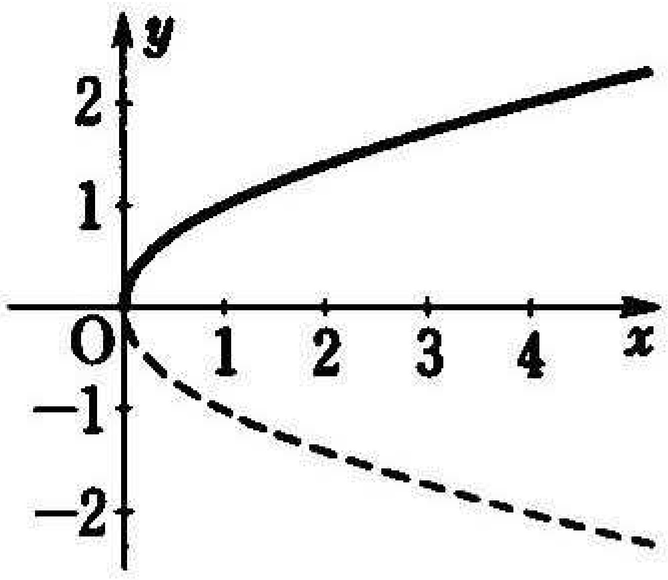
◆ 無理関数のグラフをかけ，という問題は少ないのです。しかし，道具として考えると，これは大切な分野なんですよ。とくに重要なものだけでいい。しっかりとらえておくことが大切です。では，ともあれ，これを。

■練習 1. $y=\sqrt{x}$ のグラフをかけ。

(ヒント)　$y=\sqrt{x}$ の両辺を2乗しますと

$$y^2=x \qquad \cdots\cdots ①$$

ただし，$\sqrt{x}\geqq 0$ ですから $y\geqq 0$，したがって①のグラフのうち $y\geqq 0$ の部分だけを採用すればいい。つまり右のようになります。



■練習 2. 次の関数のグラフをかけ。

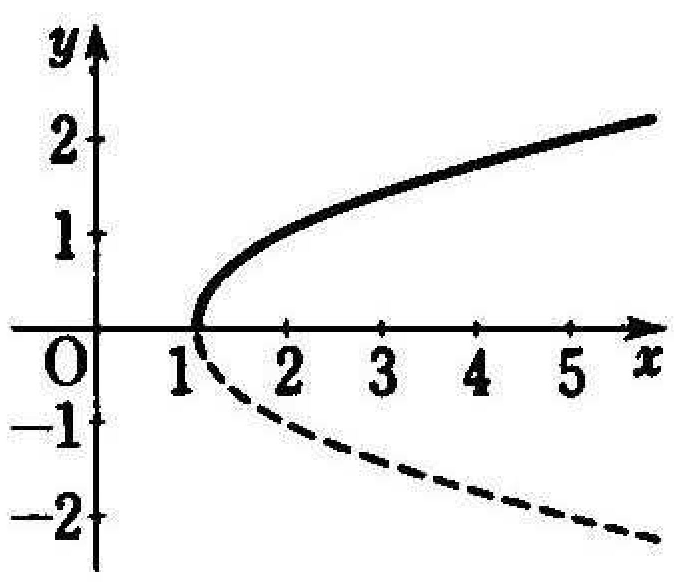
$$y=\sqrt{x-1} \qquad \text{(奈良教育大)}$$

(ヒント)　$y=\sqrt{x-1}$

$\therefore\ y^2=x-1\quad (y\geqq 0)$

$\therefore\ x=y^2+1$

yにいろいろ数値を入れてグラフをかき $y\geqq 0$ の部分だけ採用すると，右のようになります。



■練習 3. $y=\sqrt{x(1-x)}$ のグラフをかけ。

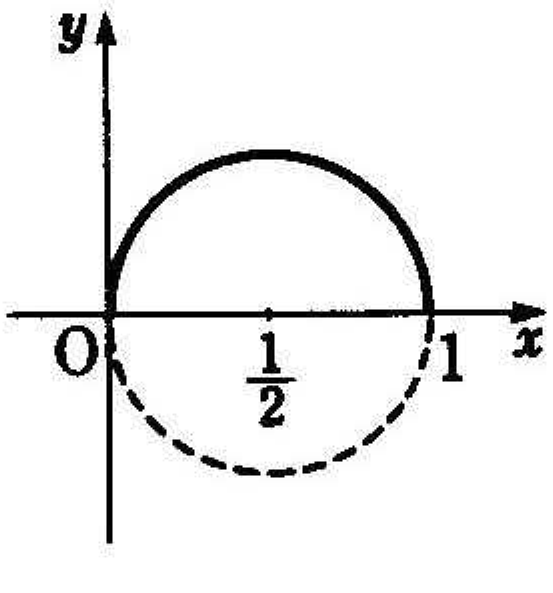
(阪大)

(解)　$y=\sqrt{x(1-x)}$

$\therefore\ y^2=x(1-x)$

$(y\geqq 0)$

$\therefore\ y^2=x-x^2$



$\therefore\ x^2-x+y^2=0$

$\therefore\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ①$

ゆえに，円①の $y\geqq 0$ の部分が求めるグラフである。

■練習 4. $y=-x+\sqrt{1-x^2}$ のグラフの概形をかけ。

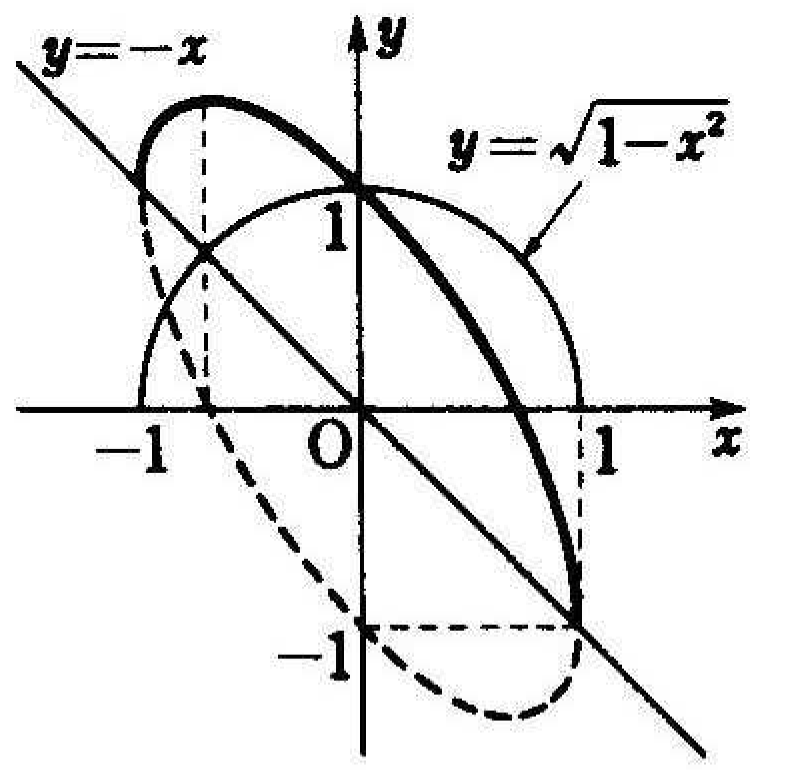
(ヒント)　$y=-x$ のグラフと $y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフを合成すればいい。つまり右の図で

$y=-x$

のグラフと

$y=\sqrt{1-x^2}$

のグラフ(半円)とを合成するとだ円の半分が得られます。(とはいっても，合成しただけでだ円とわかるわけではありません。だ円らしいな，というだけのこと)



*　*　*

◆ では，無理関数のグラフの変わり種を2，3やっておこうではありませんか。

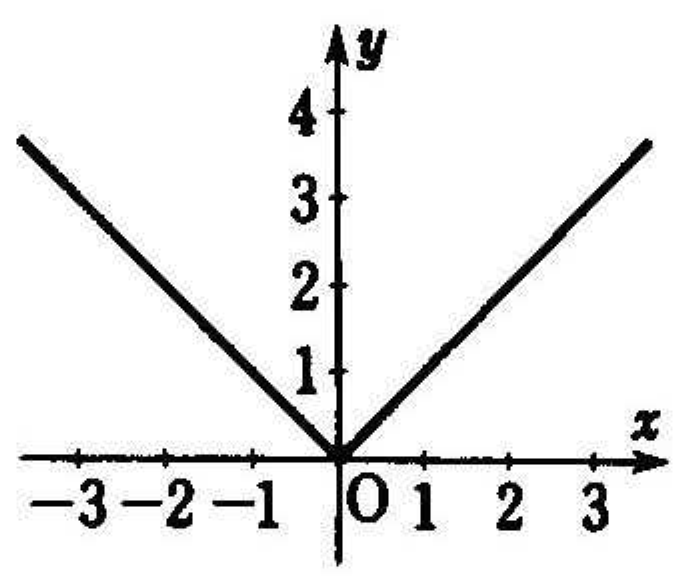
■練習 5. $y=\sqrt{x^2}$ のグラフをかけ。(九大)

(ヒント)　$y=\sqrt{x^2}=|x|$

ですから

$$y=\begin{cases} x\geqq 0: & x \\ x<0: & -x \end{cases}$$

ですから，グラフは右の通り。



■練習 6. $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ のグラフをかけ。(京大)

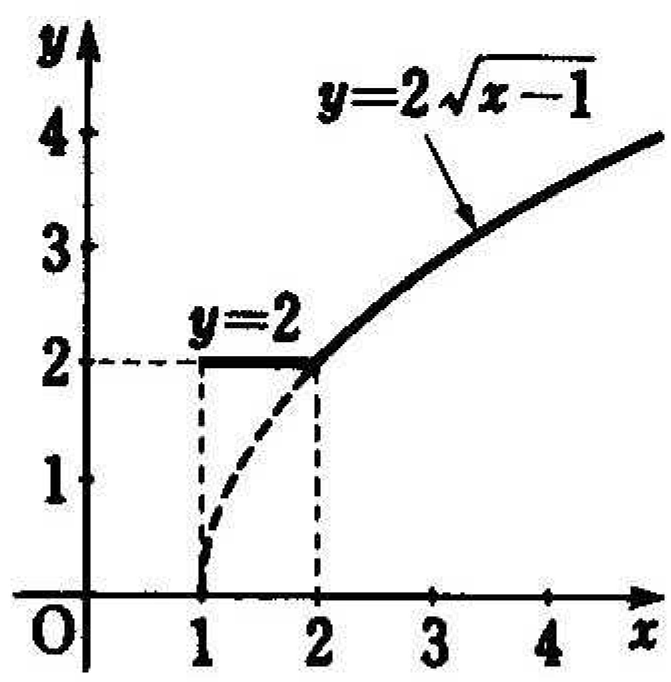
(ヒント)　$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}$，$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{1}$ でした。あれをそのまま使えばいい。$(x-1)$ と 1 の大小を考えて

$$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1}$$
$$+\begin{cases} x\geqq 2: & \sqrt{x-1}-\sqrt{1} \\ 2>x\geqq 1: & \sqrt{1}-\sqrt{x-1} \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x\geqq 2: & 2\sqrt{x-1} \\ 2>x\geqq 1: & 2 \end{cases}$$

かくして，グラフは次のようになります。

ところがたいていの人は，いきなり両辺を2乗したりして，ひどくめんどうにするものです。まさに，盲点というべきもの。



*　　*　　*

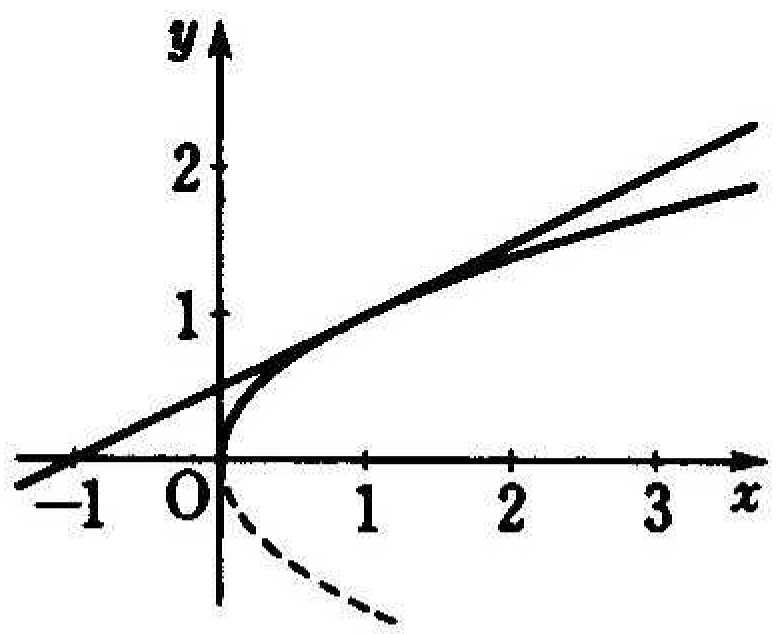
◆ 無理関数のグラフは，まさに，その応用にあります。では，いくつかの重要な応用例をあげておきましょう。

練習 7. グラフをかいて，次の方程式の実根の数を吟味せよ。

$$\sqrt{x}=a(x+1)$$ (福岡大)

ヒント $y=\sqrt{x}$ のグラフは右の図に示すような放物線です。

また，$y=a(x+1)$ のグラフは定点



$(-1,\ 0)$ を通り，傾き a の直線ですから，$y=\sqrt{x}$ のグラフとは共通点をもたないか，接するか，2点で交わるか，3つの場合が起こるわけです。

さて，接するのは原式の両辺を2乗して

$$x=a^2(x^2+2x+1)$$
$$\therefore\quad a^2x^2+(2a^2-1)x+a^2=0$$

判別式を D とすると

$$D=(2a^2-1)^2-4a^2\cdot a^2=0$$

$$a=\frac{1}{2}\quad\left(-\frac{1}{2}\ \text{は適さない}\right)$$

かくして

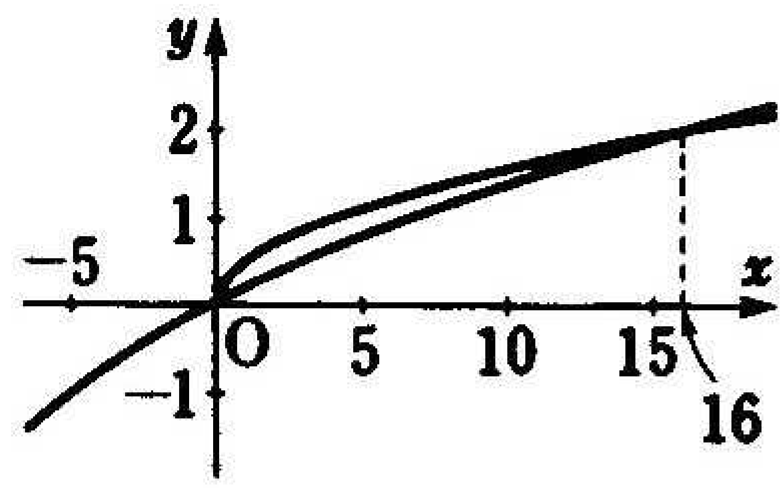
$$\left.\begin{array}{ll} a>\frac{1}{2} & \text{のとき　解なし} \\ a=\frac{1}{2} & \text{のとき　1個} \\ 0<a<\frac{1}{2} & \text{のとき　2個} \\ a=0 & \text{のとき　1個} \\ a<0 & \text{のとき　解なし} \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

練習 8. $\sqrt{9+x}-3>\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ を解け。(一橋大)

ヒント $y=\sqrt{9+x}-3$ と $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ のグラフをかくと右のようになります。これから

$x>16$ …… 答

となります。



練習 9. $y=5-\sqrt{3+2x-x^2}$ の最大値・最小値を求めよ。 (一橋大)

ヒント　$y=5-\sqrt{4-(x-1)^2}$

$\therefore\quad y-5=-\sqrt{4-(x-1)^2}$ ……①

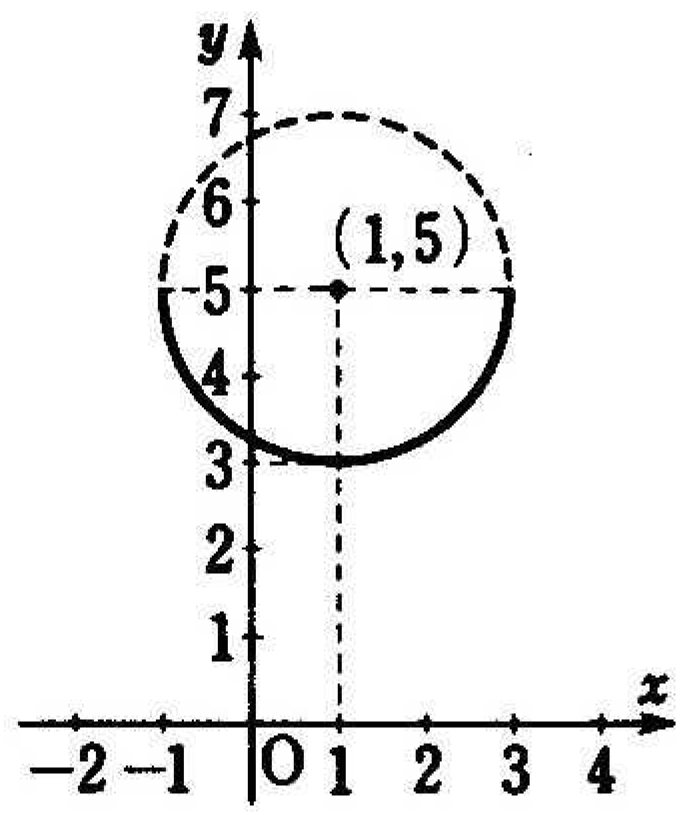
$\therefore\quad (x-1)^2+(y-5)^2=4$ ……②

ただし，①からわかるように $y-5\leqq 0$ です。

そこでグラフをかくと右のようになります。この図から明らかなように

$3\leqq y\leqq 5$

ゆえに求める最大値は5で，最小値は3です。



練習 10. $0\leqq x\leqq 2a$ のとき

$$y=x+\sqrt{x(2a-x)}$$

の値域を求めよ。 (明治大)

ヒント グラフをかいてみるといいでしょう。答は $0\leqq y\leqq(1+\sqrt{2})a$ です。

⑩ 値域の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆値域（チイキ）は関数域ともいう。どんな範囲の値をとるか，といえば抵抗を感じないが値域を求めよ，といわれるとイヤな感じ。

◆ 関数の値が変化するとき，どんな値をとるか，どんな範囲にあるか，最大値・最小値を求めよ，とり得ない値の範囲はどうか，といろいろあるが，値域もその1つです。

とはいうものの，最大値・最小値がないときでも値域はある，といったぐあいで，多少具体的な内容が変わってくる，といったことがあるのです。それはさておき：——

＊　＊　＊

◆ 関数 $f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲，つまり，変域を関数 $f(x)$ の **定義域** といい，これに対して，$f(x)$ のとり得る値の範囲を関数 $f(x)$ の **値域** といいます。では，練習を。

■練習 1. 関数 $f(x)$ の定義域が D，それに対する値域を V であると，記号的には

$$V=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

と書ける。

次の関数について D と V を求めよ。

(i) $y=2x+1$　(ii) $y=x^2$

(iii) $y=\dfrac{1}{x}$　(iv) $y=2^x$

(v) $y=\log x$　(vi) $y=\sin x$

（解）

	D	V
(i)	R	R
(ii)	R	$\{y \mid y\geqq 0\}$
(iii)	$\{x \mid x\neq 0\}$	$\{y \mid y\neq 0\}$
(iv)	R	$\{y \mid y>0\}$
(v)	$\{x \mid x>0\}$	R
(vi)	R	$\{y \mid -1\leqq y\leqq 1\}$

ここに R は実数の集合である。

115

■練習 2. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ の値域を求めよ。

（ヒント） $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ とおいて，分母をはらうと

$$yx^2+yx+(y-1)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

x の実数条件から，判別式を D とすると

$$D=y^2-4y(y-1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y\{y-4(y-1)\}\geqq 0$$

$$\therefore\quad y(-3y+4)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y\left(y-\frac{4}{3}\right)\leqq 0$$

$$\therefore\quad 0\leqq y\leqq \frac{4}{3}$$

これを答とする人が多い。注意が肝心。

$y=\dfrac{4}{3}$ を ① に代入して x を求めると $-\dfrac{1}{2}$ となるが，$y=0$ を代入しても x は求まらない。つまり $y=0$ にはなれないのです。実は，上のようにやらないほうがよかった。

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad \frac{3}{4}\leqq x^2+x+1<+\infty$$

$$\therefore\quad 0<\frac{1}{x^2+x+1}\leqq\frac{4}{3}$$

なるほど，0にはなれないわけだ。

答　$0<f(x)\leqq\dfrac{4}{3}$

416

■練習 3. 関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+a}$ の値域が実数全体となるように a の範囲を求めよ。

（ヒント） $y=\dfrac{x}{x^2+x+a}$ とおき，分母をはらって整理しますと，$y=0$ になれることはすぐわかります。

$$yx^2+(y-1)x+ay=0$$

$y\neq 0$ のとき，判別式を D とすると

$$D=(y-1)^2-4y\cdot(ay)\geqq 0$$

$$\therefore\quad (y-1)^2-4ay^2\geqq 0$$

$a\leqq 0$ ならばすべての y に対して成り立つが

$a>0$ のときは

$$\{(y-1)+2\sqrt{a}\,y\}\{(y-1)-2\sqrt{a}\,y\}\geqq 0$$

$$\therefore\quad \{(2\sqrt{a}+1)y-1\}\times\{(1-2\sqrt{a})y-1\}\geqq 0$$

ここで3つに分かれる。

$0<a<\dfrac{1}{4}$ のときには

$$y\geqq\frac{1}{1-2\sqrt{a}}\quad あるいは\quad y\leqq\frac{1}{1+2\sqrt{a}}$$

$a=\dfrac{1}{4}$ のときには

$$y\leqq\frac{1}{1+2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$$

$\dfrac{1}{4}<a$ のときには

$$\{(1+2\sqrt{a})y-1\}\{(2\sqrt{a}-1)y+1\}\leqq 0$$

となり，したがって

$$\frac{-1}{2\sqrt{a}-1}\leqq y\leqq\frac{1}{1+2\sqrt{a}}$$

となります。いずれにしてもすべての y について成り立つわけではありません。

（もちろん，答案としてはここまで詳しく書くことはいりません。要するにすべての y について成り立つのではないことをいえば十分です。）

かくして求める解は $a\leqq 0$ です。

答　$a\leqq 0$

練習 4. $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ $(x>0)$ の値域が $(-\infty,\ \infty)$ となるための条件を求めよ。

ヒント　$b=0$ のとき適しないことは明らかである。$b\neq 0$ のとき

$$y=ax+\frac{b}{x}$$

とおき分母を払って変形すれば

$$ax^2-yx+b=0$$

$a=0$ のときは $y=\dfrac{b}{x}$ となり

$b>0$ ならば $0<y<\infty$

$b<0$ ならば $-\infty<y<0$

となって適しない。

$a\neq 0$ のときは x の実数条件から，判別式を D とすると

$$D=y^2-4ab\geqq 0$$

したがって $-\infty<y<\infty$ となるためには $ab<0$ が求める条件。

注　グラフをかいてみると明白です。

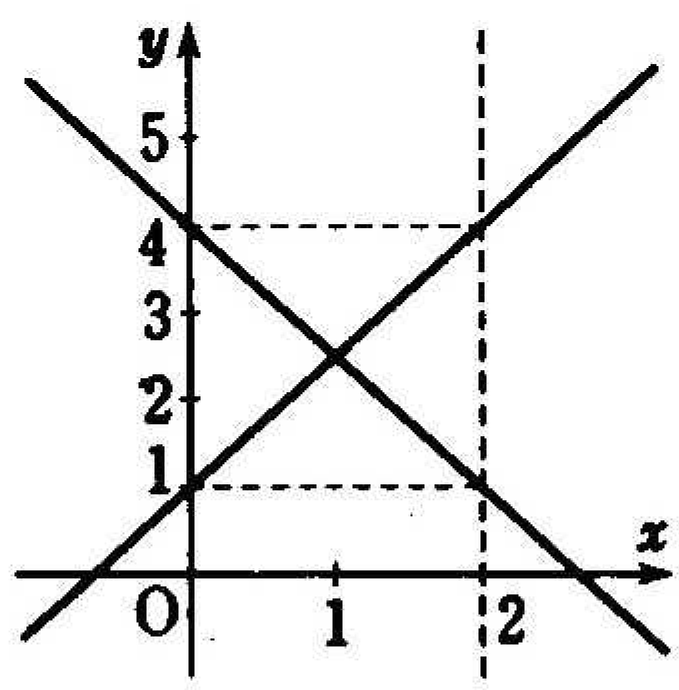
*　*　*

◆ 値域を与えて関数に対する条件を定める問題は一般にめんどうです。

練習 5. 写像 $f:x\longrightarrow ax+b$ は，集合 $A=\{x\,|\,0\leqq x\leqq 2\}$ から，集合 $B=\{y\,|\,1\leqq y\leqq 4\}$ の上への1対1写像であるという。このとき，a，b の値を求めよ。

ヒント　$y=ax+b$　$(0\leqq x\leqq 2)$

は線分で，右の図に示すように，2つの場合があります。



1つは，$y=ax+b$ が2点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 4)$ を通るとき，このとき

$$b=1,\quad a=\frac{3}{2}$$

であるし，もう1つは $y=ax+b$ が2点 $(0,\ 4)$，$(2,\ 1)$ を通るとき，このとき

$$b=4,\quad a=-\frac{3}{2}$$

答　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=1$ と $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=4$

練習 6. $0\leqq x\leqq 2$ のとき $0\leqq ax+1\leqq 2$ となるように a の範囲を定めよ。

解　$a\geqq 0$ のとき

$$1\leqq ax+1\leqq 2a+1$$

$$\therefore\quad 0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

$a<0$ のとき

$$2a+1\leqq ax+1\leqq 1$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2}\leqq a$$

以上をまとめて

$$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots\ 答$$

○最大・最小問題とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈最大値や最小値を求める問題は数Ⅰのあらゆるテクニックを使うという意味で，きわめて大切。いうなれば，数Ⅰ攻略の橋頭堡。

◆ 虚数の関数でも，大小がないというわけではありません。例えば，zが複素数でも

$$z+\frac{1}{z}$$

が実数を表すことがあります。また，一般の複素数でも $z\bar{z}$ は実数ですから，大小があります。しかし，ふつう，最大値を求めよ，とか，最小値を求めよ，とかいう問題では，とくに断らない限り，実数と考えるのが常識と心得てください。

＊　＊　＊

◆ さて，最大・最小問題は大きく分けて3つになります。第1は条件のないもの，第2は条件のあるもの，第3は条件のかくれているもの，です。順次，説明しましょう。

まず第1は，条件のないもの。これは6つあります。

4/8

練習 1. $x^2-4x+10$ の最小値を求めよ。

ヒント　　与式$=(x-2)^2+6$

ですから，$x=2$ で最小値6をとる。

4/8 **練習 2.** $y=\dfrac{x^2+6x+6}{x^2+x+1}$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　分母をはらって整理すると

$$(y-1)x^2+(y-6)x+(y-6)=0$$

xは実数ですから，判別式をDとすると

$$D=(y-6)^2-4(y-1)(y-6)\geqq 0$$

$$\therefore\quad (y-6)\{(y-6)-4(y-1)\}\geqq 0$$

$$\therefore\quad (y-6)(3y+2)\leqq 0$$

$$\therefore\quad -\frac{2}{3}\leqq y\leqq 6$$

ゆえに，最大値は6，最小値は $-\dfrac{2}{3}$ です。詳しくは（☞ p. 236）を参照してください。

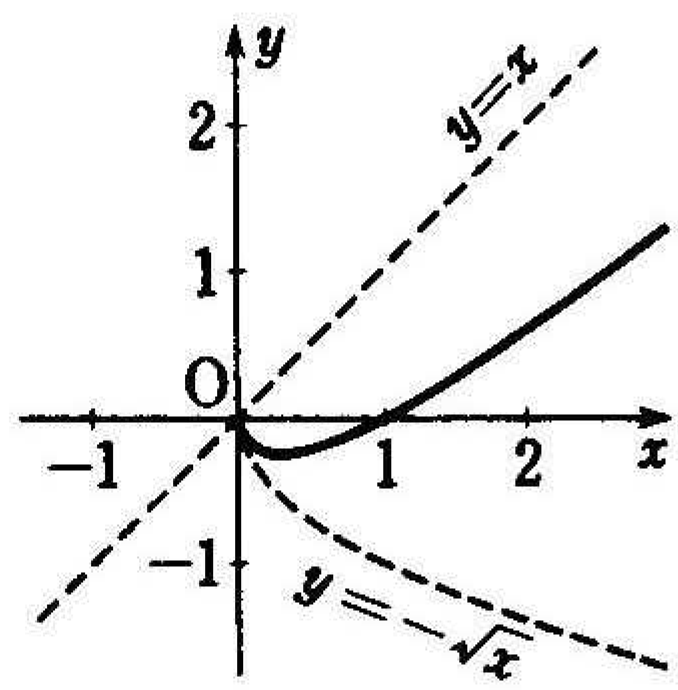
4/10

練習 3. $y=x-\sqrt{x}$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　このように無理関数の入っているときは **グラフをかいて考える** か，**おきかえる** のがふつうです。

$$y=x+(-\sqrt{x})$$

とし $y=x$ のグラフと $y=-\sqrt{x}$ のグラフを合成してみると右のようになって，最小値はあるが最大値のないことがわかります。そこで



$$y-x=-\sqrt{x}$$

の両辺を2乗すると

$$y^2-2yx+x^2=x$$

$$\therefore\quad x^2-(2y+1)x+y^2=0$$

判別式をDとすると，実数条件から

$$(2y+1)^2-4\cdot y^2\geqq 0$$

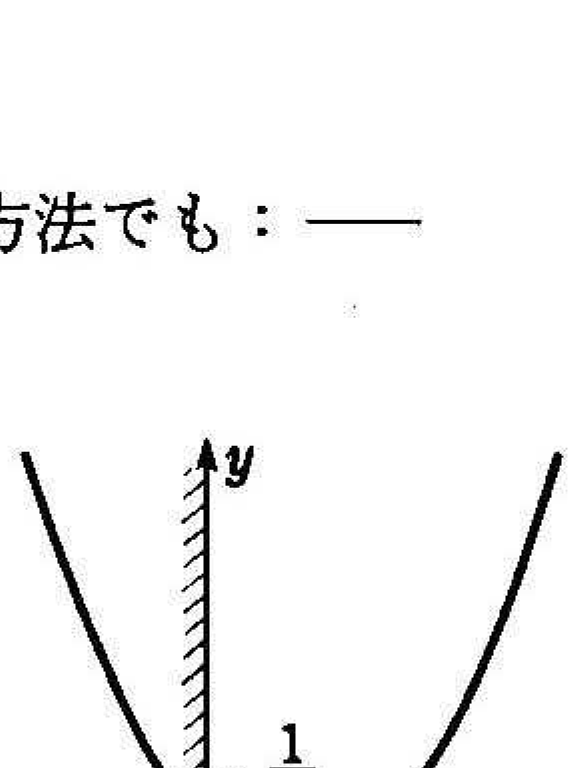
$$\therefore\quad y\geqq -\frac{1}{4}$$

なるほど，最小値は $-\dfrac{1}{4}$ であったのか，というわけ。

ついでに，おきかえる方法でも：――
$\sqrt{x}=u$ とおきますと

$$y=u^2-u\quad (u\geqq 0)$$

そこで $y=u^2-u$ のグラフをかいて $u\geqq 0$ の部分を考えてみますと，右の通り。



なるほど，最小値は $-\dfrac{1}{4}$ であったか。

条件なし，1変数のときはこれでオワリ。

次に2変数のときで，これも整式のとき，分数のとき，無理関数のとき，とあるわけ。これらについては（☞ p. 238）を参照。

＊　＊　＊

◆ 次は条件付のものです。条件が等式か不等式かでちがいます。条件が等式のときには5通りあります。

4/8

■練習 4. $2x+y=2$ のとき x^2+y の最大値または最小値を求めよ。

（ヒント） 条件式から　$y=2-2x$

$$\therefore\quad x^2+y=x^2+(2-2x)$$
$$=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

ゆえに $x=1$ のとき最小値1をとる。最大値はありません。

4/8

■練習 5. $x^2+y^2=2$ のとき $x-y$ の最大値・最小値を求めよ。

（ヒント） $x-y=k$ とおくと　$y=x-k$

これを $x^2+y^2=2$ に代入して

$$x^2+(x-k)^2=2$$
$$\therefore\quad 2x^2-2kx+(k^2-2)=0$$

xが実数であるから，判別式をDとすると

$$D=(2k)^2-4\cdot2\cdot(k^2-2)\geqq0$$
$$\therefore\quad k^2\leqq4\qquad\therefore\quad -2\leqq k\leqq2$$

ゆえに最大値は2，最小値は -2 であることがわかります。

このほかのタイプや，このほかの方法についてはそれぞれの項目を参照してください。

条件式が不等式のときというのは≪$-1\leqq x\leqq1$ のとき x^2+1 の最大値・最小値を求めよ≫とか≪$0\leqq x$，$0\leqq y$，$x+2y\leqq2$ のとき $x+y$ の最大値・最小値を求めよ≫といったたぐい。これらについてはグラフをかく，あるいは領域を使う，というのがコツ。それらについては（☞ p. 244）を参照してください。

そして，最後は条件のかくれている場合なのです。では，それを：——

＊　＊　＊

◆ 条件のかくれているもの，というのは，おきかえによって条件の出てくるものです。

4/8

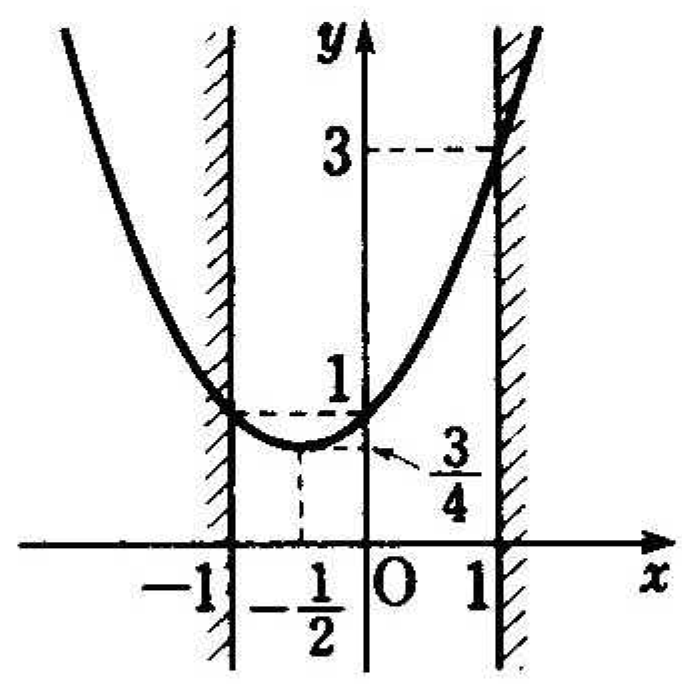
■練習 6. $\sin^2\theta+\sin\theta+1$ の最大値・最小値を求めよ。（ただし $0\leqq\theta<2\pi$）

（解） $\sin\theta=x$ とおくと，$-1\leqq x\leqq1$ で，

$$y=x^2+x+1$$

したがって

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$



そこで，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ を，$x=1$ のとき最大値3をとる。

ゆえに，$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，および $\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとり，$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値3をとる。

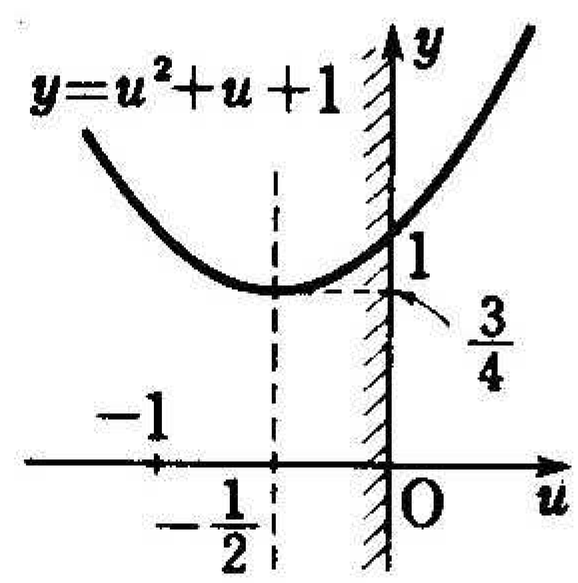
■練習 7. $y=x^4+x^2+1$ の最大値・最小値を求めよ。

（解） $x^2=u$ とおくと

$$y=u^2+u+1,\ u\geqq0\qquad\cdots\cdots(*)$$

変形して

$$y=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$



ゆえに $u=0$，すなわち $x=0$ のとき最小値1をとる。最大値なし。

（答） $x=0$ で最小値1をとる。最大値はない。

（注） 練習6. や練習7. についてグラフを使わないでできないか，とよくいわれる。できないことはありませんよ。練習7. であれば，(＊)を変形して，2次方程式

$$u^2+u+(1-y)=0$$

を作り，これが少なくとも1つ負でない実数解をもつための条件を求めればいいのです。しかし，ムダな努力というものです。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

ⓓ 2次関数の最大・最小を求めること

◆2次関数の最大値・最小値を求める方法は2つあります。1つは，平方を完成すること，1つは判別式を使うこと。

◆ ここでは2次関数の最大・最小を求める問題を扱うのですが，主として総合的な問題に手をつけることにしましょう。

その前に，まず復習から。

練習 1. $f(x)=x^2-4x+10$ の最小値を求めよ。

ヒント　2つのやり方があります。1つは平方を完成する仕方，つまり

$$f(x)=x^2-4x+10=(x-2)^2+6$$

ですから，$x=2$ のとき最小値6をとることがわかります。

次に，$x^2-4x+10=k$ とおきますと

$$x^2-4x+(10-k)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

xが実数だから，判別式をDとすると，

$$\frac{D}{4}=2^2-(10-k)\geqq 0 \qquad \therefore\ k\geqq 6$$

ゆえに，kの最小値は6です。そして，このとき，①は

$$x^2-4x+4=0$$

$$\therefore\ (x-2)^2=0,\ x=2$$

つまり，$x=2$ のとき最小値6をとるのです。

4/10
練習 2. $f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$ の最小値を求めよ。

ヒント　$f(x)=3x^2-2(a+b+c)x$
$+(a^2+b^2+c^2)$

$$=3\left\{x^2-\frac{2}{3}(a+b+c)x\right\}+(a^2+b^2+c^2)$$

$$=3\left\{x-\frac{1}{3}(a+b+c)\right\}^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$$

$$=3\left\{x-\frac{1}{3}(a+b+c)\right\}^2+\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

ゆえに $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$ のとき，最小値

$$\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

をとる。

*　*　*

◆ では，総合問題第1号：――

4/10
練習 3. 関数 $y=x^2-2mx+2m^2-m+1$ の最小値をmで表せば$\boxed{}$となる。さらに，この最小値を最小にするにはmの値を$\boxed{}$とすればよい。　（福島大）

ヒント　$y=x^2-2mx+2m^2-m+1$
$=(x-m)^2+(m^2-m+1)$

よって最小値は m^2-m+1 です。

次に，$m^2-m+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

となりますから，$m=\frac{1}{2}$ のとき，最小値が最小値 $\frac{3}{4}$ をとるのです。

答 （順に）$m^2-m+1,\ \frac{1}{2}$

4/10
練習 4. 定点 $(0,\ 1)$ を通り，定直線 $y=x$ に接する放物線 $y=ax^2+bx+c$ がある。

(1) この放物線の頂点のx座標を x_0 とするとき，x_0 をbのみ用いて表せ。

(2) x_0 が最大値をとるときの $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。　（北大）

ヒント　(1) 放物線が点 $(0,\ 1)$ を通るから

$$c=1 \qquad \cdots\cdots①$$

次に，この放物線が $y=x$ に接することから

$$(b-1)^2-4ac=0 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より $(b-1)^2-4a=0 \qquad \cdots\cdots③$

放物線の頂点の x 座標は　$x_0=-\dfrac{b}{2a}$　であるから，③によって

$$x_0=-\frac{2b}{(b-1)^2}\qquad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

(2)は，もはや問題なし。(☞ p. 236)

$\boxed{答}$　$a=1,\ b=-1,\ c=1$

練習 5. $f(x)$ は2次関数であって，2つの条件

$$f(x+1)-f(x)=2x,\quad f(0)=1$$

をみたすとき

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。　　（福井大）

解　(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ とおけば

$f(0)=1$ より　　$c=1$

また，$f(x+1)-f(x)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)$

$=2ax+a+b$

これが $2x$ に等しいというのだから

$$2a=2,\quad a+b=0$$

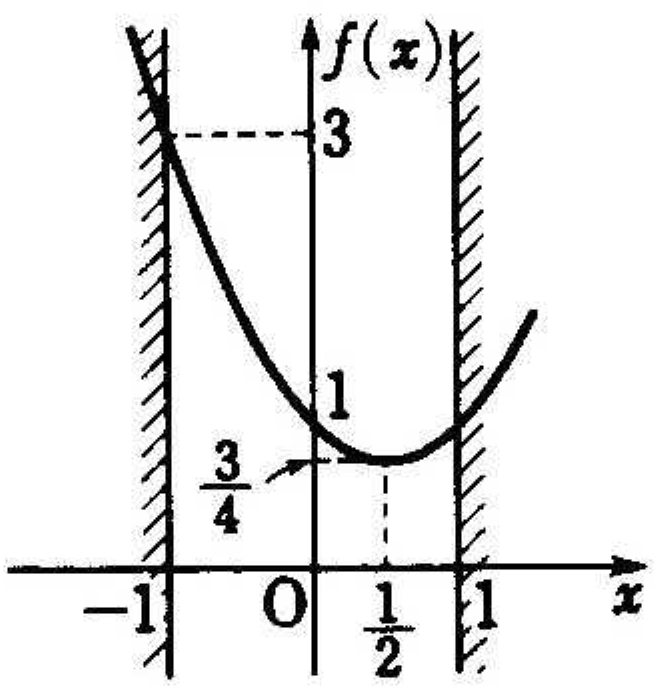
$$\therefore\ a=1,\ b=-1$$

$$\therefore\ f(x)=x^2-x+1\qquad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

(2)　$f(x)$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

したがって $f(x)$ のグラフは右のようで，これから $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値は 3，最小値は $\dfrac{3}{4}$ である。



$\boxed{答}$ $\begin{cases}\text{最大値}\quad 3\quad (x=-1)\\ \text{最小値}\quad \dfrac{3}{4}\quad \left(x=\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$

＊　　＊　　＊

◆ 次には応用問題をいくつかやってみませんか。べつにめんどうはありませんが，とかく好かれない。

練習 6. 周の長さ一定の長方形のうち隣り合う2辺の3乗の和が最小となるものは，どのような形になるか。　　（お茶の水女大）

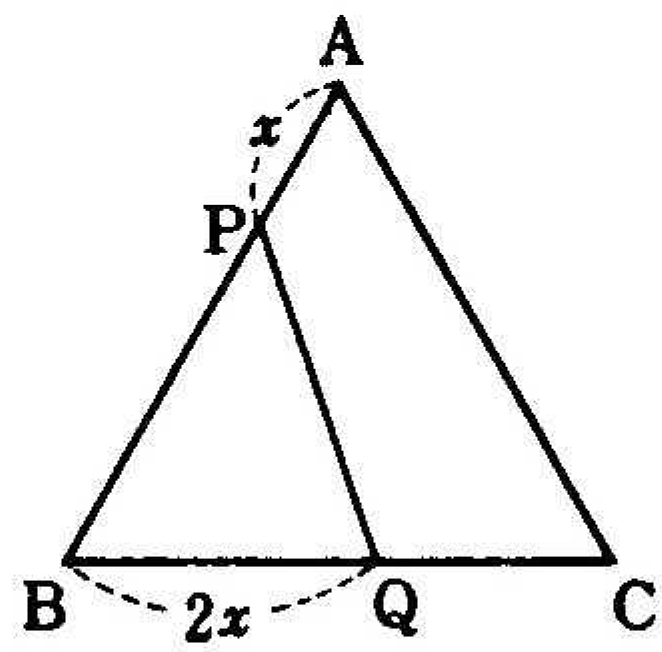
ヒント　長方形の周の長さを $2a$，1辺の長さを x としますと，隣り合う2辺の3乗の和は，……

$\boxed{答}$　正方形

練習 7. 1辺の長さ a なる正三角形 ABC の辺 AB，BC の上にそれぞれ P，Q を BQ=2AP なるようにとって，線分 PQ の長さをできるだけ小さくしたい。どこに点 P をとればよいか。　　（静岡大）

ヒント　AP$=x$　とおくと BQ$=2x$ です。$\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$

いま，△PBQ に余弦定理を適用して



$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2$

$-2\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}\cos B$

$=(a-x)^2+(2x)^2-2(a-x)(2x)\cos 60°$

$=7x^2-4ax+a^2=7\left(x-\dfrac{2}{7}a\right)^2+\dfrac{3}{7}a^2$

ゆえに，$x=\dfrac{2}{7}a$ のとき PQ は最小になることがわかります。なお，余弦定理については (☞ p. 326) を参照。

練習 8. $f(x)$，$g(x)$ は共に2次式であって，$f(x)-g(x)=5x^2-2x+4$ なる関係がある。また，$f(x)$ は $x=\alpha$ $(\alpha<0)$ のとき最小になり，$f(\alpha)=-2$，$g(\alpha)=-13$ である。さらに，$g(x)$ は最大値5をとることもわかっているとき，

(1)　α の値を求めよ。

(2)　$g(x)$ の式を求めよ。　　（早大）

ヒント　　$f(\alpha)-g(\alpha)=-2-(-13)=11$

また　　$f(\alpha)-g(\alpha)=5\alpha^2-2\alpha+4$

$\therefore\ 5\alpha^2-2\alpha+4=11$，これから　$\alpha=-1$

次に，$f(x)=a(x+1)^2-2$ $(a>0)$ とおくことができ，これから，

$g(x)=a(x+1)^2-2-(5x^2-2x+4)=\cdots\cdots$

$\boxed{答}$　$\alpha=-1,\ g(x)=-2x^2+8x-3$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

⑩ 分数関数の最大・最小を求めること

◆分数関数の最大・最小をマトモにやることは微積の領域に入るばかりでなく，かなりめんどうです。かえって数Ⅰでやるほうがラク。

◆ 分数関数の最大値・最小値を求めるといっても本質的には分数でないのもあるし，おきかえると分数でなくなるのもあります。まず，そのほうからやってみましょう。

練習 1. xが実数のとき

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

の最大値を求めよ。

ヒント　$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4}$

ゆえに $f(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{4}{3}$ をとります。

練習 2. xが実数のとき

$$y=\frac{1}{\sqrt{px^2+x+1}}$$

が最大値をもつならばpの値はどんな範囲にあればよいか。　（慶大）

ヒント　$\sqrt{px^2+x+1}$ が0でない最小値をもてばいい。そのためには px^2+x+1 が正の最小値をもてばよい。

さて，$p>0$ であることはもちろんでしょう。さらに

$$px^2+x+1=p\left(x^2+\frac{1}{p}x\right)+1$$
$$=p\left(x+\frac{1}{2p}\right)^2+1-\frac{1}{4p}$$

ですから

$$1-\frac{1}{4p}>0 \qquad \therefore\ p>\frac{1}{4}\ \cdots\cdots 答$$

練習 3. $x>0$ のとき $x+\frac{1}{x}$ の最小値が2であることを示せ。

ヒント　相加平均・相乗平均の定理を使うと簡単です。つまり

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq 1 \qquad \therefore\ x+\frac{1}{x}\geqq 2$$

等号は $x=\frac{1}{x}$ のとき，したがって $x=1$ のとき成り立つのです。つまり，$x=1$ のとき最小値2をとる。　Q. E. D.

*　*　*

◆ さて，いよいよ本論です。

練習 4. xが実数のとき

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

の最大値・最小値を求めよ。　（東海大）

ヒント　$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

とおいて，分母をはらいますと

$$yx^2+yx+y=x^2-x+1$$
$$\therefore\ (y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0 \quad \cdots\cdots①$$

判別式をDとしますと，xが実数ですから

$$D=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqq 0$$
$$\therefore\ \{(y+1)+2(y-1)\}\times\{(y+1)-2(y-1)\}\geqq 0$$
$$\therefore\ (3y-1)(-y+3)\geqq 0$$
$$\therefore\ (3y-1)(y-3)\leqq 0$$
$$\therefore\ \frac{1}{3}\leqq y\leqq 3$$

ゆえに最大値は3で，最小値は $\frac{1}{3}$ です。

注　上の解にはちょっと欠点があります。①において，xが実数だから，判別式$\geqq 0$ とやりましたが，$y=1$ なら，2次方程式でない。判別式が使えないじゃないか，ということです。厳密にはそこを考慮して次のようにやるべきです。

（解）　$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$　……①

分母をはらって整理すると

$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$ ……②

（i）　$x=0$ のとき，①より $y=1$ となるから，yは1なる値をとりうる。

（ii）　次に，$y\neq 1$ のときには②はxについての2次方程式で，xは実数であるから，判別式をDとすると

$$D=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqq 0$$

これを解いて

$$\frac{1}{3}\leqq y\leqq 3\quad (\text{ただし } y\neq 1)$$

（i）と（ii）とから

$$\frac{1}{3}\leqq y\leqq 3$$

で，$x=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}$ を，$x=-1$ のとき最大値3をとる。

練習5. xが実数のとき $\dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ の最大値・最小値を求めよ。　（中央大）

ヒント　$y=\dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$

分母をはらって整理すると

$$yx^2+(y-3)x+(y-2)=0$$

xの実数条件から，判別式をDとすると

$$D=(y-3)^2-4y(y-2)\geqq 0$$

これを解いて

$$\frac{1-2\sqrt{7}}{3}\leqq y\leqq\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$$

が得られ，求める最大値は $\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}$，最小値は $\dfrac{1-2\sqrt{7}}{3}$ です。

4/10

練習6. $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　$y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

とおいて分母をはらい，変形すると

$$yx^2+(y-1)x+y=0$$

判別式をDとすると

$$D=(y-1)^2-4y^2\geqq 0$$

これを解いて

$$-1\leqq y\leqq\frac{1}{3}$$

ゆえに，最大値 $\dfrac{1}{3}$，最小値 -1 をとることがわかります。

（注）　上の練習5. および練習6. でも，厳密には練習4. と同様の注意が必要です。いずれも $y=0$ の場合について別に考えなければなりません。

*　*　*

◆　大事なことはこれで終わりましたが，次のような問題もあります。

練習7. x，y を実数とするとき $\dfrac{4x+2y}{x^2+y^2+1}$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　$k=\dfrac{4x+2y}{x^2+y^2+1}$ とおいて分母をはらいますと

$$k(x^2+y^2+1)=4x+2y$$

（i）　$k\neq 0$ のとき

$$x^2-\frac{4}{k}x+y^2-\frac{2}{k}y+1=0$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{2}{k}\right)^2+\left(y-\frac{1}{k}\right)^2=\frac{5}{k^2}-1$$

$$\therefore\quad \frac{5}{k^2}-1\geqq 0$$

$$\therefore\quad k^2-5\leqq 0$$

$$\therefore\quad -\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}\quad (k\neq 0)$$

（ii）　$k=0$ となりうることは明らか（$y=-2x$ のとき）。

（i），（ii）をまとめて

$$-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$$

ゆえに，求める

最大値は $\sqrt{5}$ $\left(x=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ で，

最小値は $-\sqrt{5}$ $\left(x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

であることがわかります。

◎2変数の多項式の最大・最小

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆2変数の多項式の最大・最小の問題は，ほかの分野と混合してよく出題されるから迷惑である。例えば，定積分や不等式などと，だ。

◆ 例えば，これです。

練習1. x，yが任意の実数値をとって変わるとき，$x^2+2xy+2y^2-2x-4y+4$ の最小値を求めよ。

ヒント　2つの方法があります。1つは判別式を使う方法，1つは，平方の和を作る方法です。では，2つの方法でやってみるとしましょう。

(第1の方法) $k=x^2+2xy+2y^2-2x-4y+4$ とおき，xについて整理しますと

$$x^2+2(y-1)x+(2y^2-4y+4-k)=0$$

判別式をDとすると，xの実数条件から

$$\frac{D}{4}=(y-1)^2-(2y^2-4y+4-k)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -y^2+2y-(3-k)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y^2-2y+(3-k)\leqq 0$$

この不等式を満足するyの実数値が存在するための条件は，2次関数 $f(y)=y^2-2y+(3-k)$ のグラフがx軸と共有点をもつことですから，その判別式を D' とすると

$$\frac{D'}{4}=1^2-(3-k)\geqq 0\qquad\therefore\quad k\geqq 2$$

よって求める最小値は2です。

(第2の方法)

$$\begin{aligned}&x^2+2xy+2y^2-2x-4y+4\\&=x^2+2(y-1)x+(2y^2-4y+4)\\&=\{x+(y-1)\}^2+(y^2-2y+3)\\&=(x+y-1)^2+(y-1)^2+2\end{aligned}$$

ゆえに $x+y-1=0$ かつ $y-1=0$ のとき，すなわち，$x=0$，$y=1$ のとき最小値2をとることがわかります。

こうしてみると，どうやら，平方の和を作るほうがラクなようですね。

では，もう1つやってみませんか。

4/10

練習2. x，yが実数のとき

$$x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10$$

の最小値を求めよ。

解 1.　$k=x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10$ とおき，xについて整理すれば

$$x^2-2(2y+3)x+(5y^2+6y+10-k)=0\qquad\cdots\cdots①$$

判別式をDとすると，xの実数条件から

$$\frac{D}{4}=(2y+3)^2-(5y^2+6y+10-k)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -y^2+6y-(1-k)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y^2-6y+(1-k)\leqq 0\qquad\cdots\cdots②$$

この不等式を満足するyの実数値があるための条件は，判別式を D' として

$$\frac{D'}{4}=3^2-(1-k)\geqq 0\qquad\therefore\quad k\geqq -8$$

ゆえに求める最小値は -8 である。そして，このとき，②より

$$y^2-6y+9\leqq 0\qquad\therefore\quad (y-3)^2\leqq 0$$

$$\therefore\quad y=3$$

したがって，①より

$$x^2-18x+81=0\qquad\therefore\quad (x-9)^2=0$$

$$\therefore\quad x=9$$

ゆえに $x=9$，$y=3$ のとき最小値 -8 をとる。

解 2.

$$\begin{aligned}&x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10\\&=x^2-2(2y+3)x+(5y^2+6y+10)\\&=\{x-(2y+3)\}^2+(y^2-6y+1)\\&=(x-2y-3)^2+(y-3)^2-8\end{aligned}$$

ゆえに，$x=9$，$y=3$ のとき最小値 -8 をとる。

練習 3. x, y, z が実数で $x+y+z=1$ のとき $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

ヒント $z=1-(x+y)$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\{1-(x+y)\}^2$

$=x^2+y^2+\{-x+(1-y)\}^2$

$=2x^2-2(1-y)x+(2y^2-2y+1)$

$=2\{x^2-(1-y)x\}+(2y^2-2y+1)$

$=2\left(x-\dfrac{1-y}{2}\right)^2+(2y^2-2y+1)-\dfrac{(1-y)^2}{2}$

$=2\left(x-\dfrac{1-y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$

ゆえに $x-\dfrac{1-y}{2}=0$ かつ $y-\dfrac{1}{3}=0$ のとき，したがって $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとるのです。

実はシュワルツの不等式（☞ p. 178）を使うとカンタン。すなわち，

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

において $a=b=c=1$ とおくと

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$

ところが $x+y+z=1$ であるから

$3(x^2+y^2+z^2)\geqq1$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2\geqq\dfrac{1}{3}$

そして，等号が成り立つのは

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

のときであるから，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のときで最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとることがわかります。

* * *

◆ 分数のこともありますが，扱い方はまったく同様です。

練習 4. x, y が実数のとき $\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント $=k$ とおいて，分母をはらいますと

$kx^2+ky^2+k=2x$

$\therefore\ x^2+y^2+1-\dfrac{2}{k}x=0$

$\therefore\ \left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{k^2}-1$

左辺$\geqq0$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{k^2}-1\geqq0$

$\therefore\ k^2\leqq1 \quad \therefore\ -1\leqq k\leqq1$

よって最大値は 1 で，最小値は -1 です。

さて，いくつか問題がある。k で割ったが 0 のときは割れないじゃないか。最大値，最小値をとるときの x, y の値は何かなど。そこで次の解答をみてください。

解 $$k=\frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad\cdots\cdots①$$

(i) $x=0$ のとき $k=0$ となる。

(ii) $x\neq0$ のときには $k\neq0$ であるから，①を変形して

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\frac{1}{k^2}-1 \quad\cdots\cdots②$$

$\therefore\ \dfrac{1}{k^2}-1\geqq0$

$\therefore\ -1\leqq k\leqq1 \quad (k\neq0)$

ゆえに上の(i), (ii)をまとめて

$$-1\leqq k\leqq1 \quad\cdots\cdots③$$

また $k^2=1$ のとき

$x=\dfrac{1}{k}$, $y=0$

ゆえに $x=1$, $y=0$ のとき最大値 1 をとり，$x=-1$, $y=0$ のとき最小値 -1 をとる。

答 $\begin{cases}\text{最大値}\ \ 1\ (x=1,\ y=0)\\ \text{最小値}\ -1\ (x=-1,\ y=0)\end{cases}$

練習 5. $y=\dfrac{x}{x^2+x-2}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

ヒント 分母をはらって整理すると

$yx^2+(y-1)x-2y=0$

判別式をDとすると

$D=(y-1)^2+8y^2\geqq0$

オヤオヤ，これはいったい，何のことだ。困ることはない。yが何でもあっても成り立つ，つまり，どんな値でもとりうる。yには最大値も最小値もないのだ。

条件式が1次のときの最大・最小

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆条件式が1次式のときの最大・最小問題の扱い方はいろいろありますが，必ずできます。そして，もっとも有効なのは1文字の消去。

◆ 条件のついた最大・最小問題は大きく分けて2つになります。

1つは条件が等式のもの，1つは条件が不等式のものです。そして，条件が等式のものは，条件が1次式か2次式かでちがってきます。ここでは条件が1次式で与えられている場合を考えてみることにしましょう。

では，これをやってみませんか。

4/10

練習 1. $x+y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。（三重大）

ヒント 条件式 $x+y=1$ というのがありますね。しかも，1次式です。さて，この問題はいろいろな扱い方があります。しかし，もっともオーソドックスなやり方は，1つの文字，例えば，yを消去することです。すなわち，

$$y=1-x$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$$
$$=2(x^2-x)+1$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

ゆえに $x=\frac{1}{2}$，したがって $y=\frac{1}{2}$ のときに最小値をとり，その値は $\frac{1}{2}$ です。

答 $\frac{1}{2}$

練習 2. $2x-3y=17$ のとき x^2+y^2 の最小値を求めよ。

ヒント $2x-3y=17$ から

$$y=\frac{2x-17}{3}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=x^2+\frac{(2x-17)^2}{9}$$
$$=\frac{1}{9}(13x^2-68x+289)$$
$$=\frac{1}{9}\left\{13\left(x-\frac{34}{13}\right)^2+289-\frac{34^2}{13}\right\}$$

ヤレヤレ，コレハヒドイコトニナッタ。タイテイアキラメルトコロダ。しかし，ここが大事なところ。

$x=\frac{34}{13}$，したがって $y=-\frac{51}{13}$ のとき，最小値 $\frac{289}{13}$（≒22.2）をとる。

答 $\frac{289}{13}$

4/10

練習 3. $x+y=1$ のとき xy のとりうる値の範囲を求めよ。（和歌山大）

ヒント $y=1-x$ を xy に代入して

$$u=xy=x(1-x)$$
$$=-(x^2-x)$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

ゆえに $x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

答 $xy\leqq\frac{1}{4}$

*　*　*

◆ 文字が入ってくると，場合分けなどの必要が出てめんどうになってきます。では，これをやってみませんか。

4/10

練習 4. $x+y=1$ のとき，$x^2+axy+y^2$ の最小値が0であるならば，定数aの値を求めよ。（福島大）

ヒント まず最小値を求めよ，という問題だとしましょう。

$x+y=1$ から　$y=1-x$

$$\therefore\quad u=x^2+axy+y^2$$
$$=x^2+ax(1-x)+(1-x)^2$$
$$=(2-a)x^2-(2-a)x+1$$

$a=2$ なら，$u=1$（一定）となり，最小値0とはなりませんから　$a \neq 2$

$a>2$ なら x^2 の係数は負で，最大値はあるが最小値はありません。

$a<2$ のときには

$$u=(2-a)(x^2-x)+1$$
$$=(2-a)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{a+2}{4}$$

で，最小値 $\frac{a+2}{4}$ をとります。これが0になってほしい。さてこそ，

$$\frac{a+2}{4}=0 \qquad \therefore \quad a=-2$$

これは確かに $a<2$ なる条件を満足します。

答　$a=-2$

練習 5. $x-1=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{2}$ のとき $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

(解)　$x-1=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{2}=k$

とおくと

$$x=k+1,\quad y=3k+5,\quad z=2k-1$$

$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2$$
$$=(k+1)^2+(3k+5)^2+(2k-1)^2$$
$$=14k^2+28k+27$$
$$=14(k+1)^2+13$$

ゆえに $k=-1$ のとき，したがって

$$x=0,\quad y=2,\quad z=-3$$

のとき，最小値 13 をとる。

答　13

*　*　*

◆ これで，大切なことは一応終わったわけですが，次には，上のやり方とちがったやり方を紹介しておきましょう。ムリにやることもありませんが，できればなお結構というわけです。

練習 6. $x+2y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(解) 1.　$x=1-2y$ であるから

$$x^2+y^2=(1-2y)^2+y^2$$
$$=5y^2-4y+1$$
$$=5\left(y-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$$

ゆえに $y=\frac{2}{5}$，したがって $x=\frac{1}{5}$ のとき最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

(注) これはこれまでやってきたオーソドックスな方法なんですよ。

(解) 2.　**シュワルツの不等式**（☞ p. 178）

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

において，$a=1$，$b=2$ とおいて

$$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geqq (1\cdot x+2y)^2$$

ゆえに，$x+2y=1$ ならば

$$5(x^2+y^2) \geqq 1$$

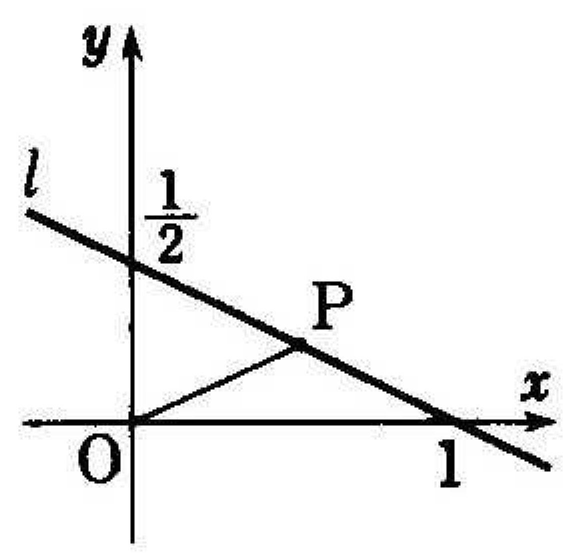
$$\therefore \quad x^2+y^2 \geqq \frac{1}{5}$$

等号は $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}$，$x+2y=1$ のとき，すなわち

$x=\frac{1}{5}$，　$y=\frac{2}{5}$ のとき。

ゆえに，求める最小値は $\frac{1}{5}$ である。

(解) 3.　$x+2y=1$ のグラフは右の図に示すような直線 l で，その上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $x^2+y^2=\overline{\mathrm{OP}}^2$ です。



したがって，x^2+y^2 が最小になるのは，$\overline{\mathrm{OP}}$ が最小になるとき，それは $\mathrm{OP} \perp l$ のときです。

点Oから l に下した垂線の長さの公式から（☞ p. 274），求める最小値は

$$\left(\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2=\frac{1}{5}$$

で与えられます。

(解) 4.　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$　$(r \geqq 0)$

とおきますと

$$r\cos\theta+2\cdot r\sin\theta=1$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=r^2=\left(\frac{1}{2\sin\theta+\cos\theta}\right)^2$$

ここまでくればできるハズ（☞ p. 320）。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◐条件式が2次のときの最大・最小

◆条件式が2次のときの最大・最小問題というのは，およそ，数Ⅰ的テクニックのすべてを駆使するといってもいいすぎではない。

◆ さっそく，具体的な問題に入るとしましょう。条件式が2次のときの第1のタイプはこれです。

■練習 1. $x^2+y^2=1$ のとき $x+y$ の最大値・最小値を求めよ。ただし，x，y は実数である。

ヒント いろいろの方法がありますが，ここではもっともオーソドックスな方法をあげましょう。それは，

$x+y=k$ とおいて x か y を消去する

のです。どっちでもかまいませんが，ここでは y を消去するとしましょう。

$$y=k-x \quad \cdots\cdots①$$

これを $x^2+y^2=1$ に代入して

$$x^2+(k-x)^2=1$$

$$\therefore \quad 2x^2-2kx+(k^2-1)=0 \quad \cdots\cdots②$$

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2\cdot(k^2-1)\geqq 0$$

$$\therefore \quad k^2\leqq 2$$

$$\therefore \quad -\sqrt{2}\leqq k\leqq \sqrt{2}$$

そして $k=\sqrt{2}$ のとき②に代入して解くと $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，したがって①より $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が得られるし，$k=-\sqrt{2}$ のときは同様にして $x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となります。

答 $\begin{cases} 最大値 \quad \sqrt{2} \left(x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 最小値 \quad -\sqrt{2} \left(x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$

■練習 2. x，y が実数で，

$x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+6=0$ のとき $x+y$ の最小値を求めよ。（横浜国大）

ヒント $x+y=k$ とおいて y を消去すると x についての2次式が得られます。あとは実数条件から 判別式$\geqq 0$，これから $k\geqq 3\sqrt{2}$ が得られます。 答 $3\sqrt{2}$ $\left(x=y=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

*　　*　　*

◆ 第2のタイプは求める式も2次式であるが，1つの文字を消去できるときなのです。

■練習 3. x，y が実数で $x^2+4y^2=1$ のとき，$x+5y^2$ の最大値・最小値を求めよ。

（弘前大）

ヒント これは y^2 を消去できますね。すなわち，条件式から

$$y^2=\frac{1-x^2}{4} \quad \cdots\cdots①$$

これを $u=x+5y^2$ に代入して

$$u=x+5\cdot\frac{1-x^2}{4}=-\frac{5}{4}x^2+x+\frac{5}{4}$$

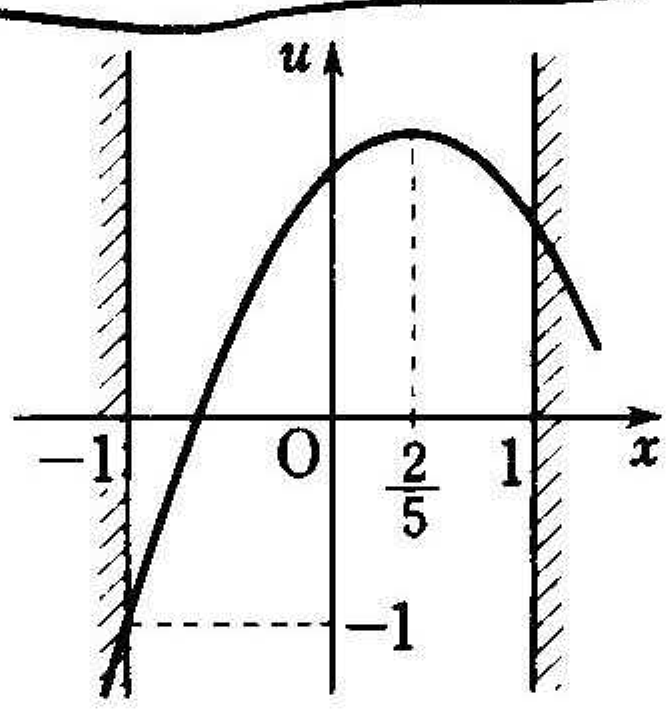
ところが，このあとがいけない。たいていこんなふうにやる。

$$u=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{29}{20}$$

ゆえに $x=\dfrac{2}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{29}{20}$ をとる。最小値なし。

条件式が2次で，求める式も2次のとき，必ず残った文字のとりうる値の範囲を求めなければなりません。この場合であれば，①より $y^2\geqq 0$ だから $\dfrac{1-x^2}{4}\geqq 0$

$$\therefore \quad -1\leqq x\leqq 1$$



あとは右上図で考えてみてください。

■練習 4. $x^2+2y^2=1$ のとき $3x^2-2y$ の最大値・最小値を求めよ。　　(早大)

(ヒント)　$x^2+2y^2=1$　……①

$u=3x^2-2y$　……②

とすると，①より

$x^2=1-2y^2\geqq 0$　……③

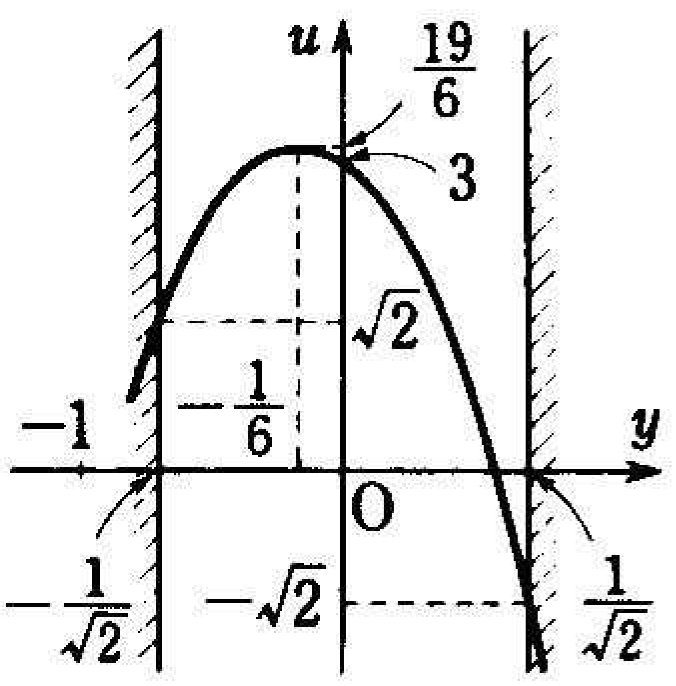
$\therefore\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq y\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　……④

③を②に代入して変形すれば

$$u=3(1-2y^2)-2y$$

$$=-6\left(y+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{19}{6}\quad\cdots\cdots⑤$$

ゆえに④の条件の下で u の最大値・最小値を求めればよい。そこで⑤のグラフをかくと右の図のようになり，最大値は $\dfrac{19}{6}$ であり，最小値は $-\sqrt{2}$ である。



*　　*　　*

◆　ところが，文字を消去できないことがあります。これは，たいてい解けない。しかし，必ず解けるタイプが2つあります。1つは，条件式も，求めるべき2次式も同次式のときです。

4/11

■練習 5. $x^2+y^2=1$ のとき

$\sqrt{3}x^2+2xy-\sqrt{3}y^2$

の最大値・最小値を求めよ。　　(北大)

(ヒント)　$u=\sqrt{3}x^2+2xy-\sqrt{3}y^2$

$$=\frac{\sqrt{3}x^2+2xy-\sqrt{3}y^2}{1}$$

$x^2+y^2=1$ を分母に代入して

$$u=\frac{\sqrt{3}x^2+2xy-\sqrt{3}y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)-\sqrt{3}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1}$$

ここで $\dfrac{x}{y}=t$ とおくと，これはきまった形(☞ p.236)になります。

$$u=\frac{\sqrt{3}t^2+2t-\sqrt{3}}{t^2+1}$$

分母をはらって整頓しますと，

$$(u-\sqrt{3})t^2-2t+(u+\sqrt{3})=0$$

判別式を D として

$$\frac{D}{4}=1^2-(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})$$

$$=-u^2+4\geqq 0$$

$\therefore\quad u^2\leqq 4\qquad\therefore\quad -2\leqq u\leqq 2$

ゆえに，最大値は 2，最小値は -2 です。

チョット待ッテクダサイヨ。$y=0$ のとき割れないじゃありませんか。

そうなんです。$y=0$ のときを別に吟味するか，あるいは，y^2 で割らないで，分母をはらって変形すると

$$(u-\sqrt{3})x^2-2xy+(u+\sqrt{3})y^2=0$$

ここで，判別式を D とすると

$$D=(\cdots\cdots)y^2\geqq 0$$

ここで分けてもいいのです。それからもう1つ，$u=\sqrt{3}$ なら2次方程式ではない。こんなことも(☞ p.236)を参照してください。

12/17 〜H 〜 12/19

*　　*　　*

◆　もう1つは，あまり重要ではありませんがおきかえて扱うのがあります。例えば，

■練習 6. $x^2+y^2=1$ のとき $xy+x+y$ の最大値・最小値を求めよ。

(ヒント)　$k=xy+x+y$ とおいて，グラフをかいて扱うこともできますが，次のほうがいいでしょう。

$$x+y=u,\quad xy=v,\quad k=xy+x+y$$

とおきますと，条件式から

$u^2-2v=1$　……①

x，y の実数条件から

$u^2-4v\geqq 0$　……②

条件①，②の下で

$$k=u+v$$

の最大値・最小値を求めればいいのです。ムリにやるほどのこともありません。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

条件式が不等式の最大・最小

◆条件式が不等式のときは，2つのタイプがあります。1つは独立変数が1コのとき，もう1つは2コのときなのです。

◆ 条件式が不等式で与えられた最大・最小問題の扱い方は

変数が1つのときは グラフ

変数が2つのときは 領域

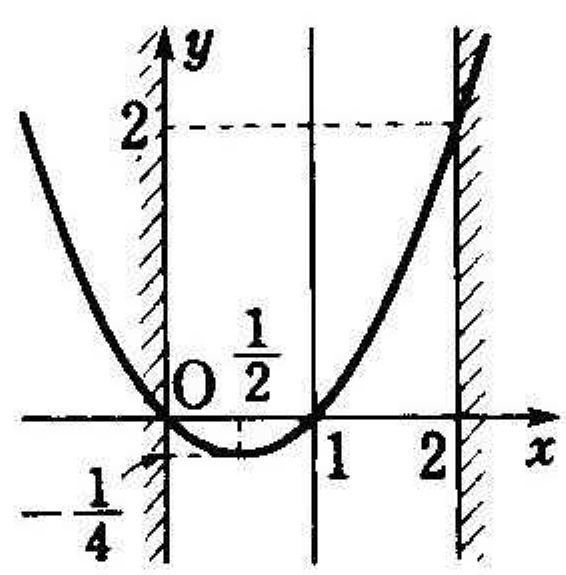
を使う，とオボエテおけば十分です。

4/13 **■練習 1.** $x^2-3x+2\leqq 0$ のとき x^2-x の最大値・最小値を求めよ。

(ヒント) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\leqq 0$

$$\therefore\quad 1\leqq x\leqq 2$$

ところで，$x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ ですから，そのグラフは右図。したがって，求める最大値は2で，最小値は0であることがわかります。

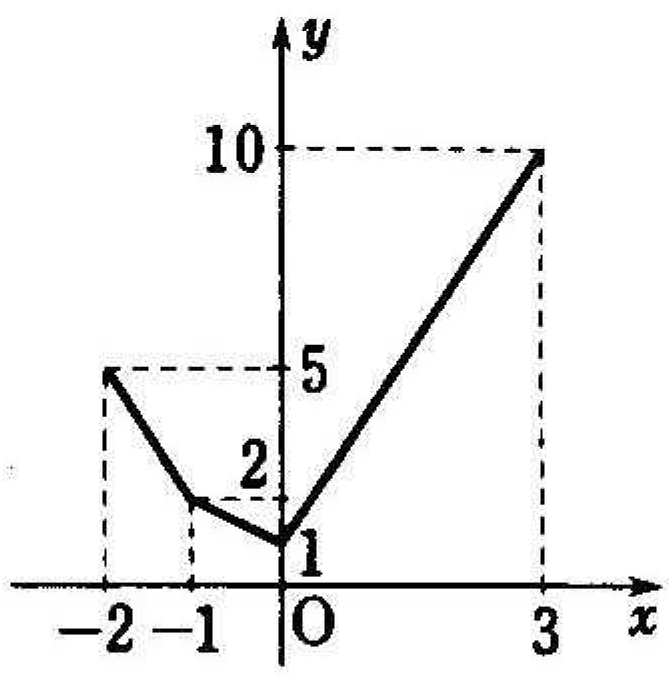


4/13 **■練習 2.** $-2\leqq x\leqq 3$ のとき $y=|x+1|+2|x|$ の最大値，最小値を求めよ。

(解) $y=|x+1|+2|x|$

$$=\begin{cases}-2\leqq x\leqq -1: & -3x-1\\ -1\leqq x\leqq 0: & -x+1\\ 0\leqq x\leqq 3: & 3x+1\end{cases}$$

したがって，$-2\leqq x\leqq 3$ の範囲でグラフは右のようになります。ゆえに，最大値は10で，最小値は1です。



(注) 上の y を調べるとき $-2\leqq x\leqq -1$，$-1\leqq x\leqq 0$，$0\leqq x\leqq 3$ と分けましたが，もちろん $-2\leqq x<-1$，$-1\leqq x<0$，$0\leqq x\leqq 3$ でもいいわけ。しかし，$-2\leqq x<-1$，$-1\leqq x\leqq 0$，$0\leqq x\leqq 3$ と分けたのでは不統一の非難はまぬがれないでしょう。

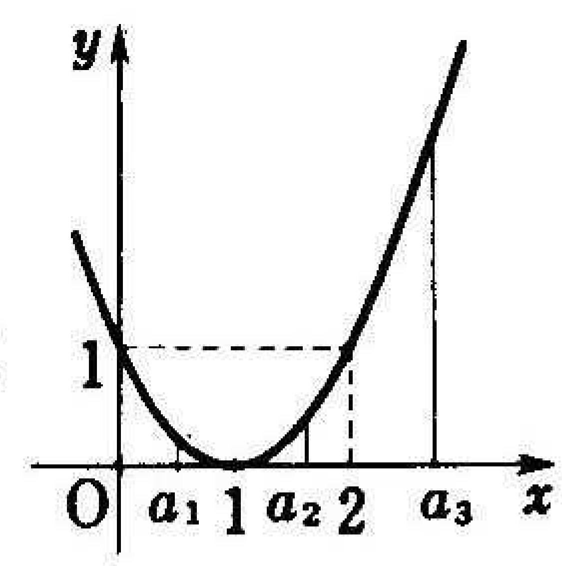
* * *

◆ 本質的には同じでも，文字が入るとめんどうになります。

4/13 **■練習 3.** $0\leqq x\leqq a$ のとき $y=(x-1)^2$ の最大値 M を a の関数と考えてグラフをかけ。ただし，$a>0$ である。

(ヒント) この種の問題は，まず $y=(x-1)^2$ のグラフをかく。その上で，a が0に近い場合からしだいに大きくしていくのです。

右の図で $a=a_1$ のとき最大値は 1，$a=a_2$ でも最大値は 1，しかし，$a=2$ になると，最大値1で，これが分岐点です。

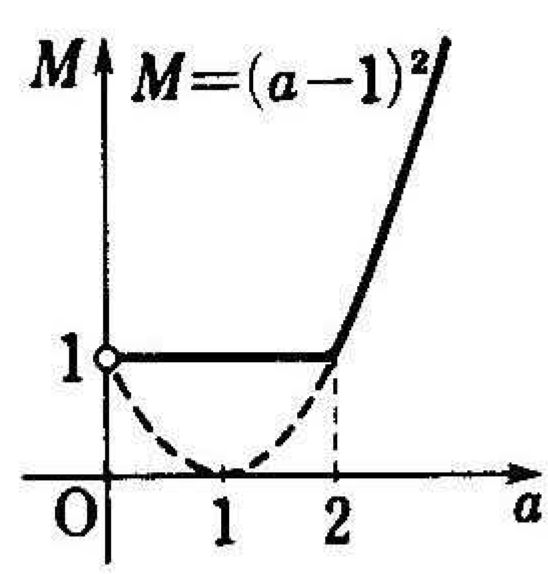


これより a が大きくなって，$a=a_3$ になると，もはやここで最大値をとるでしょう。こんなわけで

$0<a\leqq 2$ のとき　最大値 1

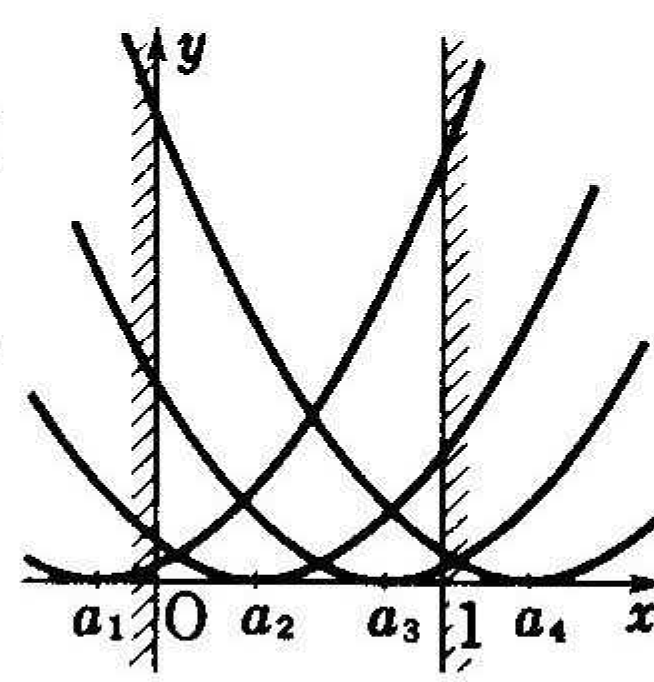
$2<a$ のとき　　最大値 $(a-1)^2$

そして，そのグラフは右のようになります。



■練習 4. $0\leqq x\leqq 1$ のとき $y=(x-a)^2$ の最大値 M を a の関数と考えてグラフをかけ。

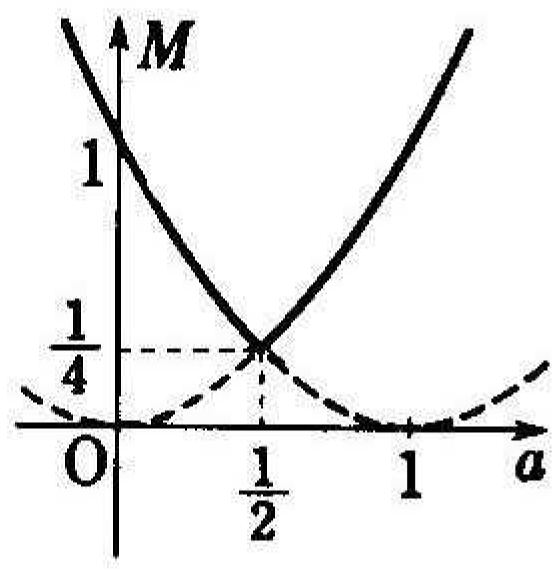
(ヒント) これは，上の練習のいわば裏返ししたもの。a の値が $-\infty$ から $+\infty$ まで変わるときどうか，と考えてみること。



$a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$M=(1-a)^2$

$\frac{1}{2}<a$ のとき　$M=a^2$

となりますから，結局右の図のようになります。

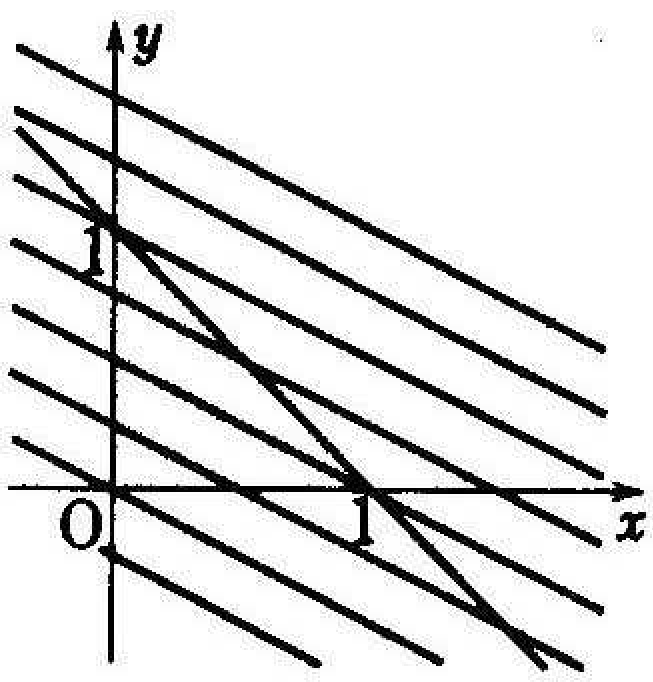


＊　＊　＊

◆ これで，1変数の場合は終わりとして，次は2変数の場合にいくとしましょう。4/13

■練習 5. $x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq1$ のとき，$x+2y$ の最大値・最小値を求めよ。

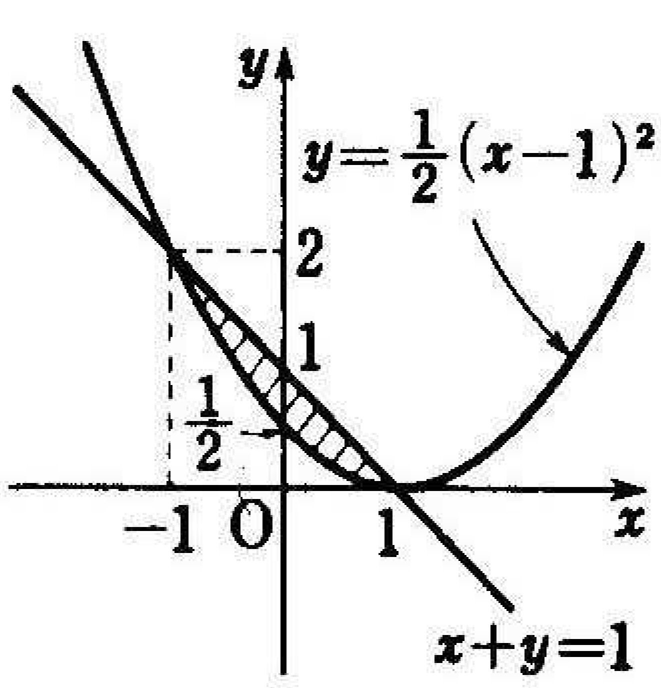
（ヒント）　$x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq1$ を満足する点 $(x,\ y)$ の存在範囲は右の図の陰影部分です。



ところで，$x+2y=k$ とおいて，kにいろいろの値を入れて，グラフをかくと，傾き $-\frac{1}{2}$ の直線で，kを大きくすると，太い矢印の方向に進みます。さては点 (0, 1) で最大値2をとり，点 (0, 0) で最小値 0 をとるであろう，というわけ。4/13

■練習 6. $x+y\leqq1,\ 2y\geqq(x-1)^2$ のとき x^2+y^2 の最大値を求めよ。（早大）

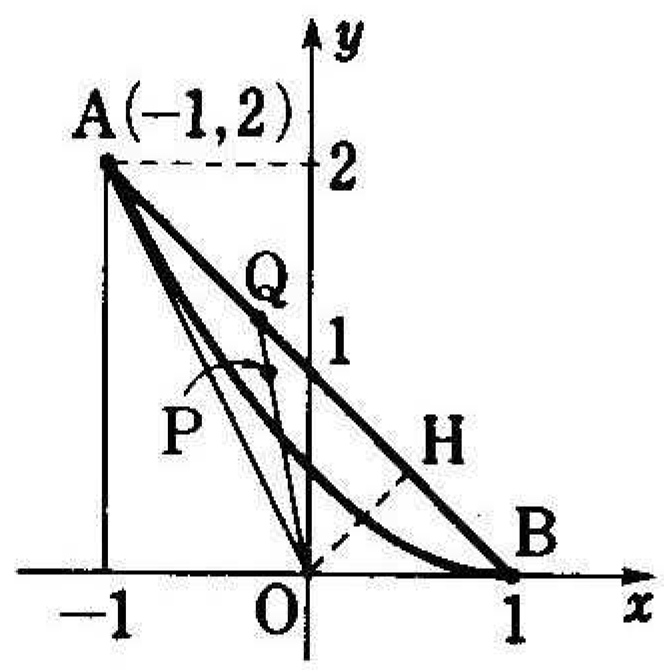
（解）与えられた条件式を満足する点 $(x,\ y)$ の存在範囲は右の図の斜線を引いた部分である（境界線上の点を含む）。x^2+y^2 が最大となるのは，この領域内の点で，原点からもっとも遠い点 $(-1,\ 2)$ においてで，その値は $(-1)^2+2^2=5$ である。



（注）上の場合，原点Oから最も遠い点の座標が $(-1,\ 2)$ というのが明らかでないという人がある。そのときには次のようにすればスッキリします。右の図で点 A$(-1,\ 2)$ における接線は原点を通ります。さて，考える領域内に1点Pをとり OP の延長が直線ABと交わる点をQ，OからABへの垂線の足をHとしますと

$$\mathrm{OP}\leqq\mathrm{OQ}\leqq\mathrm{OA}\quad(\because\ \mathrm{HA}>\mathrm{HB})$$

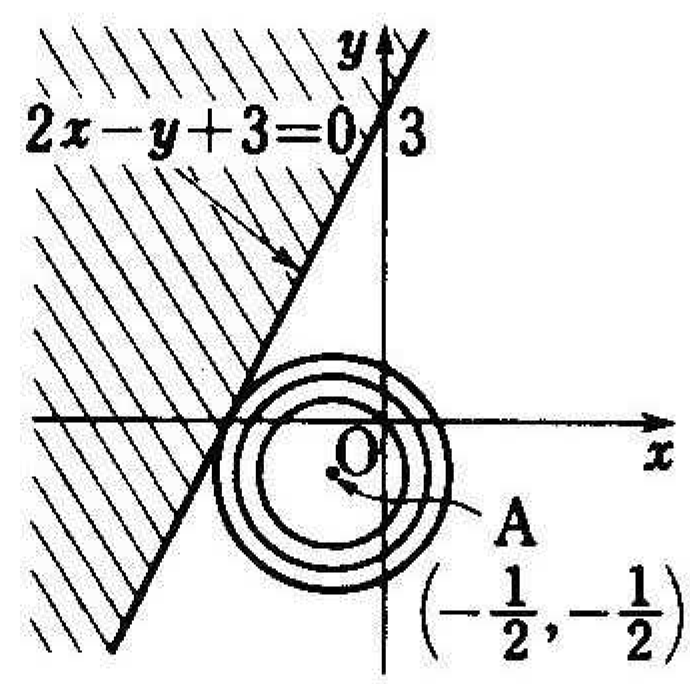
となるのです。では，もう1つ。



■練習 7. $y-2x\geqq3$ の範囲で x^2+y^2+x+y の値がとりうる範囲を求めよ。

（京都産業大）

（ヒント）　$y-2x\geqq3$ を満足する範囲は右の図の斜線を引いた部分です（境界線上の点も含む）。



ところで

$$x^2+y^2+x+y=k$$

とおきますと

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=k+\frac{1}{2}$$

これは点 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とし，半径 $\sqrt{k+\frac{1}{2}}$ の円ですから，kの値の等しい点は同じ円周上にあることになります。そこで最も小さい値をとるのは接するときです。

いいかえると，点 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ から直線 $y-2x=3$ に下した垂線の長さが，$\sqrt{k+\frac{1}{2}}$ の最小値ということになります。

ところで，その垂線の長さは公式（☞ p. 274）から

$$\frac{\left|2\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\quad k+\frac{1}{2}\geqq\frac{5}{4}\qquad\therefore\quad k\geqq\frac{3}{4}$$

（答）$x^2+y^2+x+y\geqq\frac{3}{4}$

◐置換して求める最大・最小

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆最大・最小問題は難しい。数学のあらゆる知識，テクニックを動員するからです。なかでも置換してやるのには難問が多い。

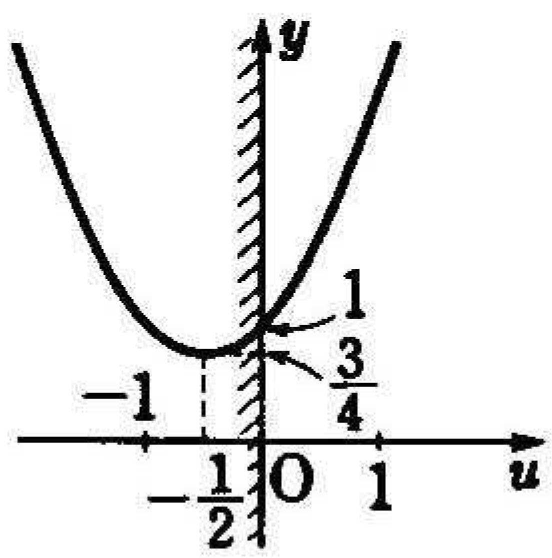
◆ まず，置換して最大・最小を求めるとは何のことか？　具体的な問題からはじめましょう。さあ，これはどうです。

4/16

■練習 1. $y=x^4+x^2+1$ の最小値を求めよ。ただし，xは実数である。

ヒント　$x^2=u$ とおきますと $u\geqq 0$，そして，

$$y=u^2+u+1$$
$$=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$



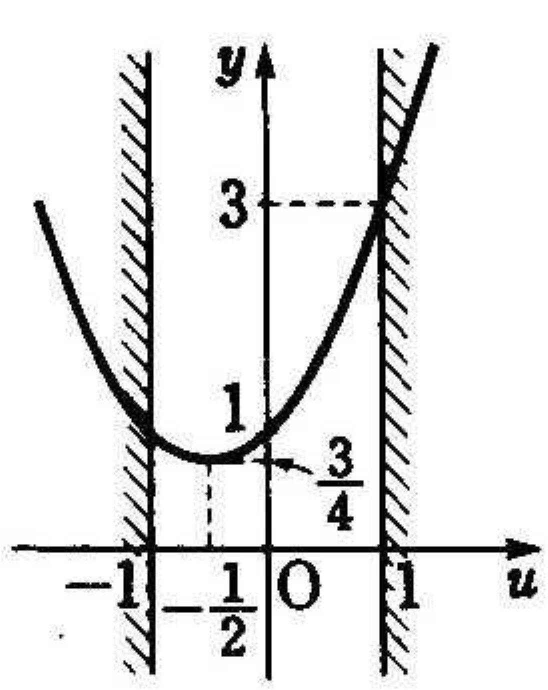
だから，yをuの関数と考えてグラフをかくと右のようになります。そして $u\geqq 0$ なのですから，$u=0$ で最小値1をとります。

しかし，答としては $u=0$ のときと書いてはいけません。あくまでもxにもどり，$x=0$ のとき最小値1をとる，というべきです。

■練習 2. $y=\sin^2 x+\sin x+1$ の最大値・最小値を求めよ。(ただし，$0\leqq x<2\pi$)

ヒント　$\sin x=u$ とおきますと

$$y=u^2+u+1$$



これは上と同じです。しかし，uの範囲がちがいます。いうまでもなく

$$-1\leqq u\leqq 1$$

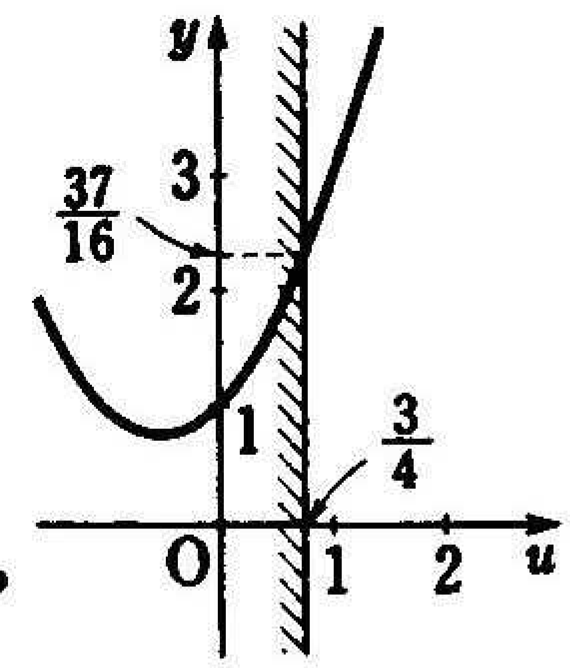
だから，グラフをかいて上の通り。これから最大値は 3 $\left(u=1，したがって\ x=\frac{\pi}{2}\ のとき\right)$で，最小値は $\frac{3}{4}$ $\left(u=-\frac{1}{2}，したがって\ x=\frac{7}{6}\pi\ および\ x=\frac{11}{6}\pi\ のとき\right)$ です。

4/16

■練習 3. $y=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)+1$ の最小値を求めよ。ただし，xは実数である。

ヒント　$x^2+x+1=u$ とおきますと

$$y=u^2+u+1$$



これは練習1.，練習2.と同じです。

しかし，uの範囲がちがいます。すなわち，

$$u=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4}$$

ですから，上の図のようになって，$u=\frac{3}{4}$ のとき，したがって $x=-\frac{1}{2}$ のとき，yが最小値をとり，それは

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)+1=\frac{37}{16}$$

なのです。

*　　*　　*

◆ これで，置換することの意味がわかったでしょう。しかし，もっとめんどうなのもあります。例えば，これです。

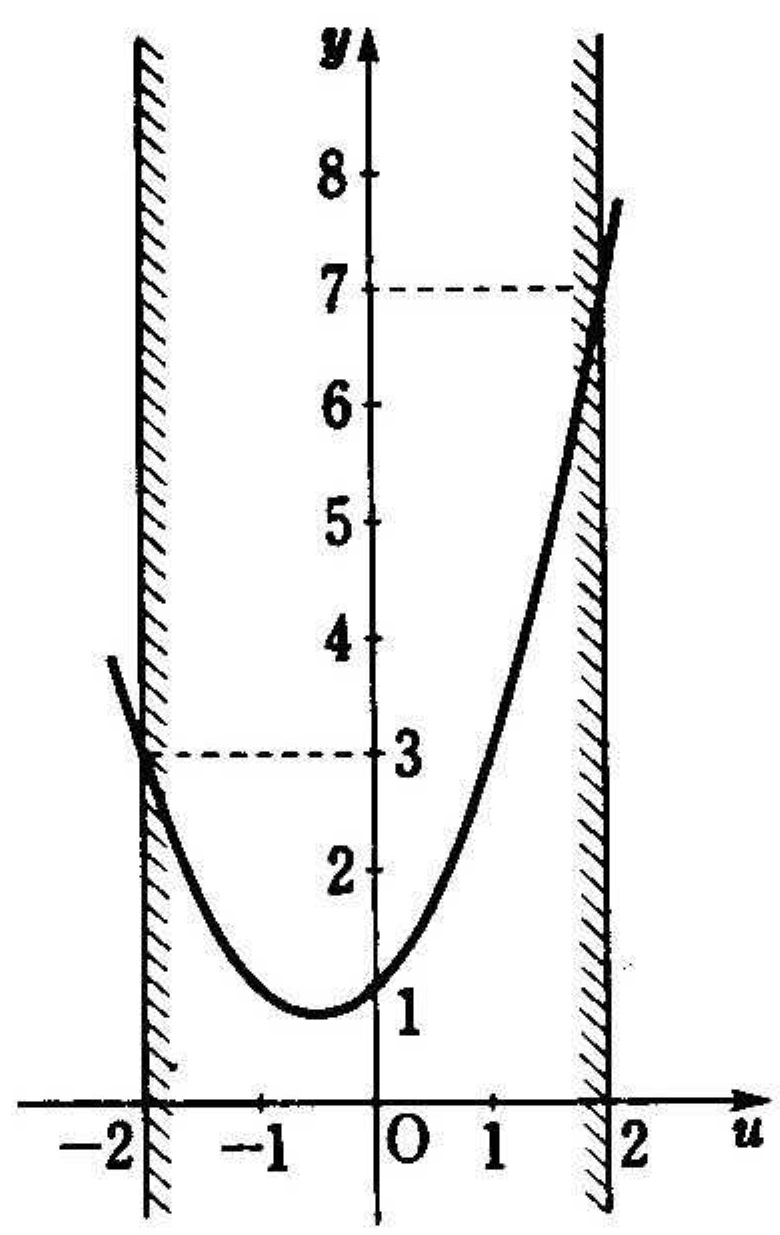
4/16

■練習 4. $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$ の最小値を求めよ。ただし，xは0でない実数である。

ヒント　$x+\frac{1}{x}=u$ とおくと　$y=u^2+u+1$ で，上と同じです。しかし，uの範囲がちがいます。$x+\frac{1}{x}=u$ の分母をはらって

$x^2-ux+1=0$，実数条件から判別式をDとすると $D=u^2-4\geqq 0$　$\therefore\ u\geqq 2,\ u\leqq -2$

となります。したがって，最小値は3で，それは $u=-2$ のとき，つまり，$x=-1$ のときなのです。



(注) それにしても，右の図はまずいですね。肝心のところが，両端にちょっと表れているだけではありませんか。もっとうまく表すことも大切なことです。いうなれば，これはまずい図の見本です。

＊　＊　＊

◆ 2つのおきかえを必要とすることもあります。例えば，これです。しかし，ムリにやることはありません。

練習 5. $x^2+y^2=1$ のとき，$x+y+xy$ の最大値・最小値を求めよ。ただし，x，y は実数である。

(ヒント) $x+y=u$，$xy=v$ とおきますと

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v=1$$

で，$x+y+xy=u+v$ となります。そこで，ウッカリ

≪$u^2-2v=1$ のとき $u+v$ の最大値・最小値を求めよ≫

という問題と同じだと誤解してしまう人が多いのです。実は **x，y が実数だということから，u，v に条件がついてくる** のです。すなわち，

$$x+y=u \qquad \cdots\cdots①$$

$$xy=v \qquad \cdots\cdots②$$

ですから，x，y は解と係数の関係から2次方程式

$$t^2-ut+v=0$$

の2つの解で，実数解をもつ条件から，判別式をDとすると

$$D=u^2-4v\geqq 0$$

が必要なのです。つまり，こうです。

≪$u^2-4v\geqq 0$ かつ $u^2-2v=1$ のとき
$k=u+v$ の最大値・最小値を求めよ≫

を解かなければなりません。さて，

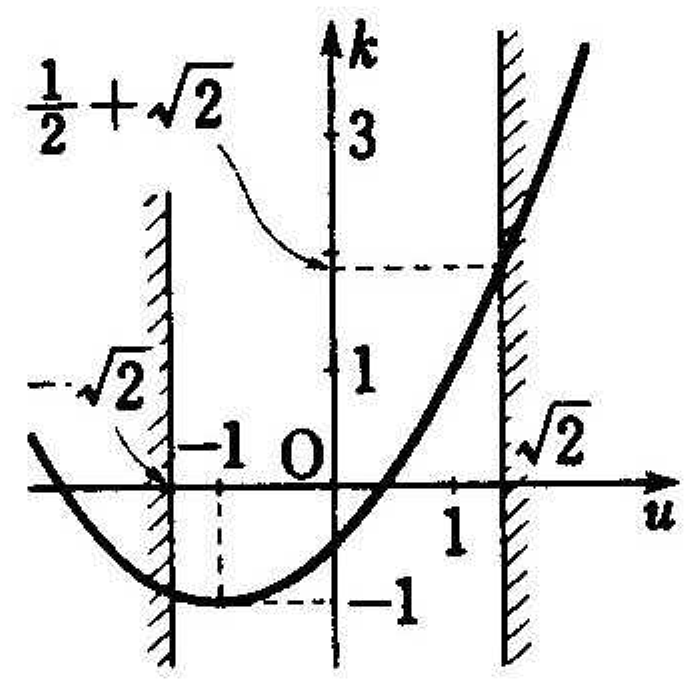
$$v=\frac{1}{2}(u^2-1)$$

ですから，

$u^2-4v\geqq 0$ より

$$u^2-4\cdot\frac{1}{2}(u^2-1)\geqq 0$$

$$\therefore\ -\sqrt{2}\leqq u\leqq\sqrt{2}$$



そして，

$$k=u+v=u+\frac{1}{2}(u^2-1)$$

$$=\frac{1}{2}(u+1)^2-1$$

ですから，k の変化は上のグラフのようになり，結局，最大値は $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$，最小値は -1 であることがわかります。

ついでに別解を1つ。これもおきかえによるやり方ですが：——

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおきますと

$$x+y+xy=\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta\sin\theta$$

ここで $\cos\theta+\sin\theta=u$ とおきますと

$$(\cos\theta+\sin\theta)^2=u^2$$

$$\therefore\quad \cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=u^2$$

$$\therefore\quad \cos\theta\sin\theta=\frac{u^2-1}{2}$$

そして，$\cos\theta+\sin\theta$ の値が $-\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ の間にあることを使って，結局，上と同じことになります。なお，$\cos\theta+\sin\theta$ の値の範囲が上のようになることはシュワルツの不等式を使うとすぐ出ます。すなわち

$$(1^2+1^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$\geqq(1\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta)^2$$

$$\therefore\quad 2\geqq(\cos\theta+\sin\theta)^2$$

なお，**シュワルツの不等式** については (☞ p. 178) を参照。

ⓘ 無理関数の最大値・最小値を求めること

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆無理関数の最大・最小問題は微積の範囲に属するが，数Ⅰの範囲でも解けるものがある。これをマスターしておくことが肝心。

◆ 本問に入る前にグラフのかき方を復習しておくことにしよう。(詳しくは ☞ p. 228)

4/16

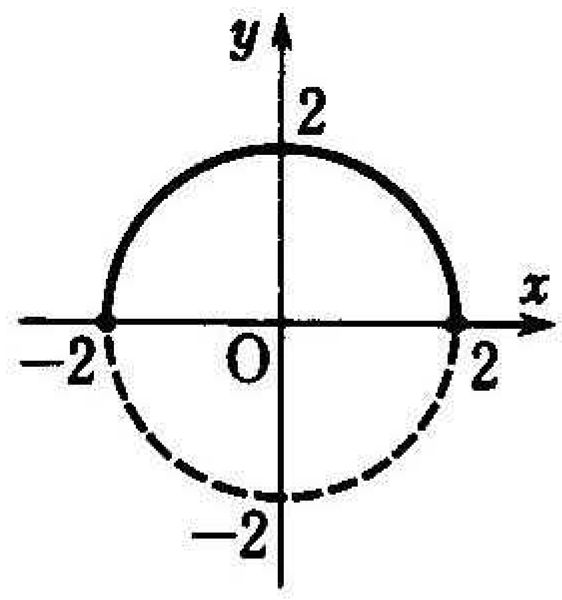
練習 1. $y=\sqrt{4-x^2}$ のグラフをかけ。

(解) $y=\sqrt{4-x^2}$ の両辺を2乗して

$$y^2=4-x^2$$

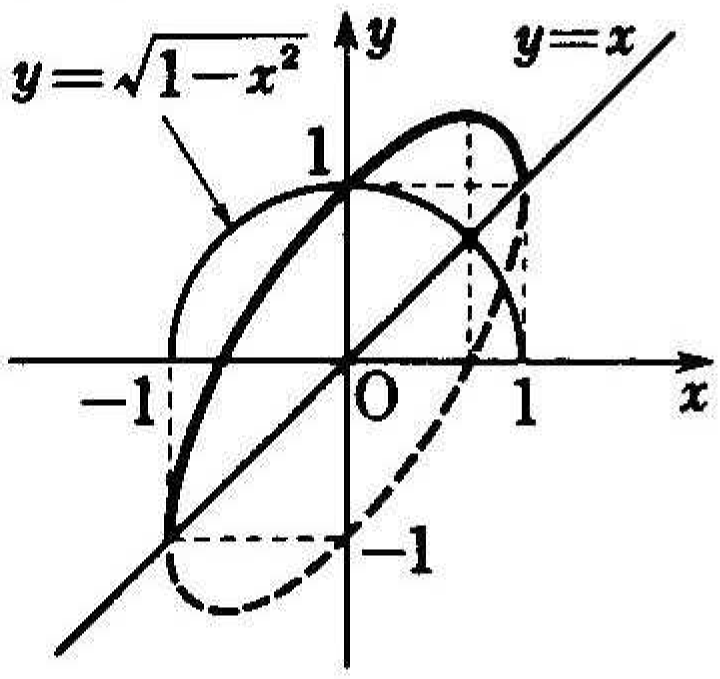
$$\therefore\quad x^2+y^2=4$$

ただし，$y\geqq 0$ であるからグラフは右のような半円である。



練習 2. $y=x+\sqrt{1-x^2}$ のグラフをかけ。

(ヒント) $y=x$ のグラフと $y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフを別々にかいて合成すること。結果は下の通り。



なお，これはだ円の半分です。

練習 3. $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ のグラフをかけ。

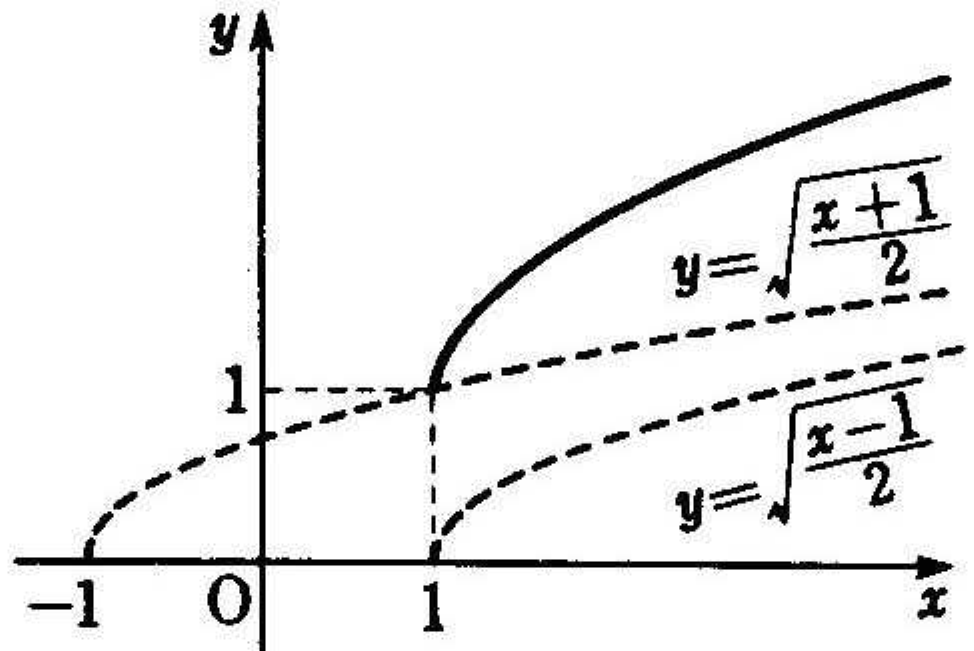
(ヒント) 二重根号の扱い方を思い出してくださいよ。(☞ p. 76)

$$y=\sqrt{\frac{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2}}$$

掛ケテ $(x+1)(x-1)$，足シテ $2x$ というのは，$x+1$ と $x-1$ ですから

$$y=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

さては，$y=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ と $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$ のグラフを別々にかいて，合成すればいいだろう。もちろん $x\geqq 1$ です。



＊　＊　＊

◆ ここまでくれば，いよいよ，本論です。

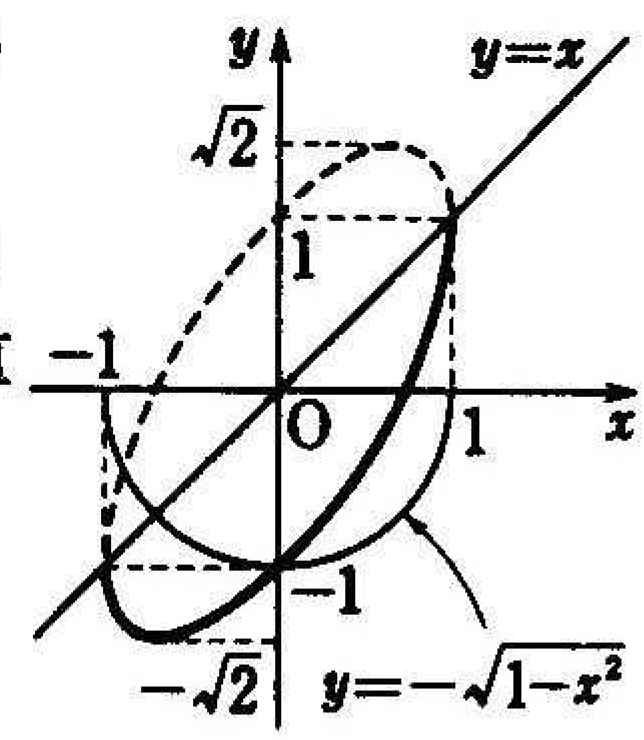
4/16

練習 4. xを実数とするとき，

$$y=x-\sqrt{1-x^2}$$

の最大値，最小値を求めよ。　(横浜国大)

(解) $y=x$ と $y=-\sqrt{1-x^2}$ のグラフを別別にかいて，合成すると，右のようになる。これから明らかなように $x=1$ のとき最大値1をとる。次に，



$$y-x=-\sqrt{1-x^2}$$

の両辺を2乗して

$$y^2-2yx+x^2=1-x^2$$

$$\therefore\quad 2x^2-2yx+(y^2-1)=0\quad\cdots\cdots①$$

xは実数であるから判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=y^2-2(y^2-1)\geqq 0\qquad\therefore\quad 2\geqq y^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\geqq y\geqq -\sqrt{2}$$

そして，$y=-\sqrt{2}$ を①に代入すると

$$2x^2+2\sqrt{2}x+1=0\quad\therefore\ (\sqrt{2}x+1)^2=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$ を

とる。

　　　　　　　　　　答　1，$-\sqrt{2}$

4/18

■練習5. $-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$$y=4x-3\sqrt{1-x^2}$$

の最大値，最小値を求めよ。　　　(広島大)

ヒント　練習4.と同じようにしてやることができますが，ここでは別解をやってみましょう。

$$x=u,\ \sqrt{1-x^2}=v$$

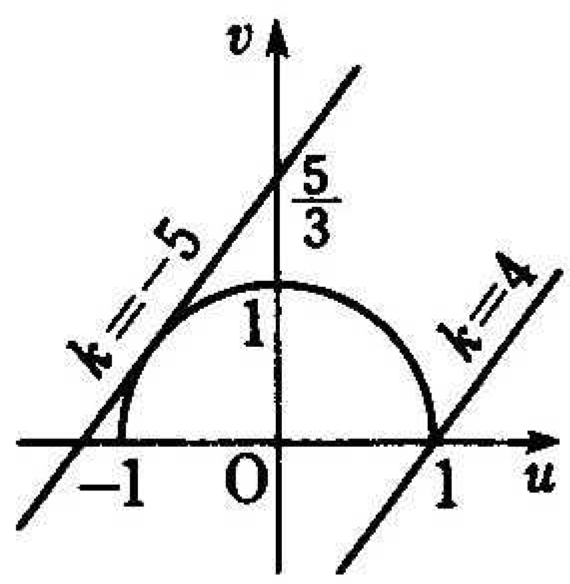
とおきますと

$$1-x^2=v^2$$

$$\therefore\ u^2+v^2=1\quad (v\geqq 0)\qquad \cdots\cdots①$$

すなわち，$u^2+v^2=1$ $(v\geqq 0)$ なる条件の下で $4x-3\sqrt{1-x^2}=4u-3v=k$ の最大値，最小値を求めればよい，ことになった。

さて，①のグラフは原点を中心とし，半径1の半円，$4u-3v=k$ のグラフは傾き $\dfrac{4}{3}$ なる直線であるから，点 $(1,\ 0)$ を通るとき最大値をとる。



また $4u-3v-k=0$ が円に接するための条件は判別式を使ってもいいが，それよりは原点 $(0,\ 0)$ から下した垂線の長さ (☞ p. 274) が1であることを使って

$$\frac{|4\cdot 0-3\cdot 0-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1\qquad \therefore\ |k|=5$$

$$\therefore\ k=-5\quad \left(\begin{array}{l}+5\text{ が適さないことは図か}\\\text{らすぐわかるでしょう。}\end{array}\right)$$

　　　　　　答　最大値 4，最小値 -5

4/16

■練習6. $2x+3y=5$ のとき $\sqrt{2x}+\sqrt{3y}$ の最大値を求めよ。ただし，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$.

　　　　　　　　　　　　　(千葉大)

ヒント　$\sqrt{2x}=u$，$\sqrt{3y}=v$ とおくと，$2x+3y=5$ より

$$u^2+v^2=5,\ u\geqq 0,\ v\geqq 0$$

で，この条件の下に $u+v$ の最大値を求めればいいわけです。

さて，$u+v=k$ とおくと

$$v=k-u\qquad \cdots\cdots①$$

これを $u^2+v^2=5$ に代入して

$$u^2+(k-u)^2=5$$

$$\therefore\ 2u^2-2ku+(k^2-5)=0\qquad \cdots\cdots②$$

判別式を D とすると，実数条件から

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-5)\geqq 0$$

$$\therefore\ 10\geqq k^2$$

$$\therefore\ -\sqrt{10}\leqq k\leqq \sqrt{10}$$

$k=\sqrt{10}$ のとき②より

$$2u^2-2\sqrt{10}u+5=0$$

$$\therefore\ u=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

ゆえに①より

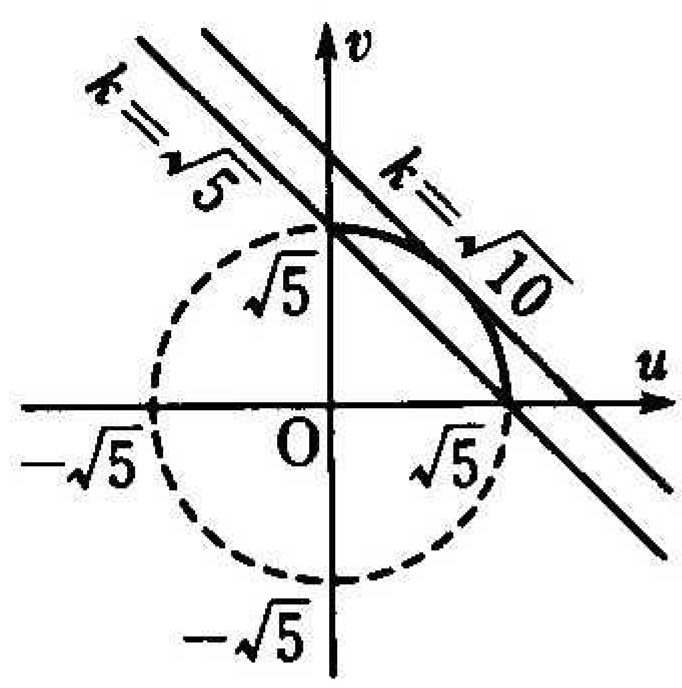
$$v=\sqrt{10}-\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

すなわち $u=v=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ のとき，したがって

$$x=\frac{5}{4},\ y=\frac{5}{6}$$

のとき最大値 $\sqrt{10}$ をとる。

注　千葉大の問題は最小値を求めよ，と書いてはないのでかまいませんが，最小値は $-\sqrt{10}$ にはなりません。実は，この問題も上のようにやらないでグラフを使うほうがラクです。右の図からわかるように最大値は $\sqrt{10}$，最小値は $\sqrt{5}$ なのです。



また，最大値を求めるだけなら，**コーシー・シュワルツの不等式**も有効です。(☞ p. 178 参照)

＊　＊　＊

◆ 最大値・最小値を求める問題はかなりめんどうですが，上に見てきたように，グラフを活用すると，割合ラクにいきます。いうなれば，グラフのかき方に主眼をおいて勉強すれば，最大・最小問題も自然にできるようになるハズ。

急がばまわれ，というコトワザもある。あせらずグラフの描き方を練習すべし。

○図形の変換とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平行移動・点対称移動・線対称移動・回転・反転といろいろあるが，しょせん，変換公式に命令されて，こっちからあっちへ。

◆ 点 $(x,\ y)$ と点 $(x',\ y')$ の間に何か関係式が与えられたとき，点 $(x,\ y)$ から点 $(x',\ y')$ に移されます。どうも，こんな抽象的ないい方は不愉快だ。もっと，具体的にやろうではないか。では，これだ!!

■練習 1. 点 $(x,\ y)$ が $x+2y=4$ 上を動くとき，点 $(x+y,\ x-y)$ はどのような直線上を動くか。

ヒント 「どのような直線上を動くか」というのだから，直線上を動くのはマチガイなさそうだ。さて，

$$x+y=u$$
$$x-y=v$$

とおくと，

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}$$

そこで，これを $x+2y=4$ に代入すると

$$\frac{u+v}{2}+2\cdot\frac{u-v}{2}=4$$

$$\therefore\quad 3u-v=8 \qquad \cdots\cdots①$$

つまり，点 $(x+y,\ x-y)=(u,\ v)$ は直線①上を動くことがわかった。

4/19

■練習 2. $f:(x,\ y)\longrightarrow(x+2,\ y-1)$ によって直線 $x+y=1$ はどのような図形に移されるか。

ヒント $u=x+2,\ v=y-1$

とおくと

$$x=u-2,\ y=v+1$$

これを $x+y=1$ に代入して

$$(u-2)+(v+1)=1$$
$$\therefore\quad u+v=2$$

ここで，$(u,\ v)$ を $(x,\ y)$ にかえて，直線 $x+y=2$ 上を動く，ということになります。

■練習 3. 変換

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(x+2,\ y-1)$$

によって，放物線 $y=x^2$ はどんな図形に移されるか。

ヒント $x+2=u,\ y-1=v$

とおくと

$$x=u-2,\ y=v+1$$

これを $y=x^2$ に代入して

$$v+1=(u-2)^2$$
$$\therefore\quad v=(u-2)^2-1$$

ここで，u，v を x，y にかえて

$$y=(x-2)^2-1$$

これが求める放物線です。

＊　＊　＊

◆ 上のように，変換式が数式で与えられることも多いのですが，これに限るわけではありません。つまり，幾何学的に与えられることも多いのです。例えば，**平行移動!!**

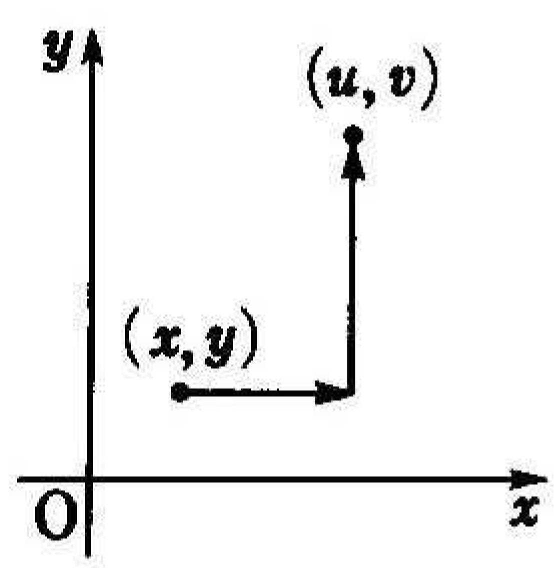
4/18

■練習 4. $y=x^2$ を x 軸の正の方向へ $+2$ だけ，y 軸の正の方向に $+3$ だけ平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ。

ヒント 明らかに

$$\begin{cases} x+2=u \\ y+3=v \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=u-2 \\ y=v-3 \end{cases}$$



$y=x^2$ に代入して

$$v-3=(u-2)^2$$
$$\therefore\quad v=(u-2)^2+3$$

ここで x，y にかえて

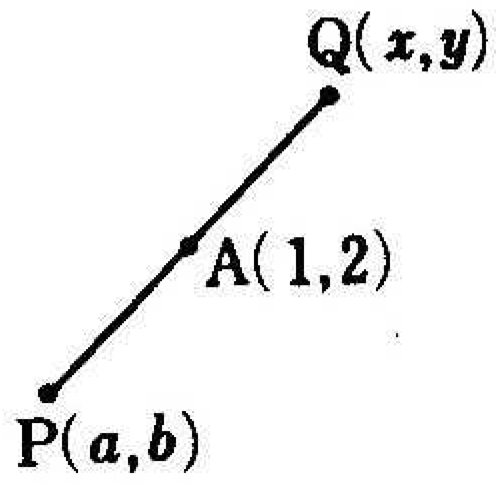
$$y=(x-2)^2+3 \qquad \cdots\cdots 答$$

＊　＊　＊

◆ 第2は **点対称移動** です。

練習 5. 点 A(1, 2) について，点 P(a, b) と対称な点 Q の座標を求めよ。

ヒント　点 Q の座標を (x, y) としますと，A は PQ の中点ですから



$$\frac{x+a}{2}=1,\quad \frac{y+b}{2}=2$$

$$\therefore\quad x=2-a,\quad y=4-b$$

だから，点 Q の座標は ($2-a$, $4-b$) です。

練習 6. 点 A(1, 2) について，放物線 $y=x^2$ と対称な曲線の方程式を求めよ。

ヒント　$y=x^2$ 上の点 P(x, y) に対応する点を Q(u, v) としますと

$$\frac{x+u}{2}=1,\quad \frac{y+v}{2}=2$$

$$\therefore\quad x=2-u,\quad y=4-v$$

これを $y=x^2$ に代入して

$$4-v=(2-u)^2$$

$$\therefore\quad v=-(u-2)^2+4$$

ここで，u，v を x，y に書きかえて

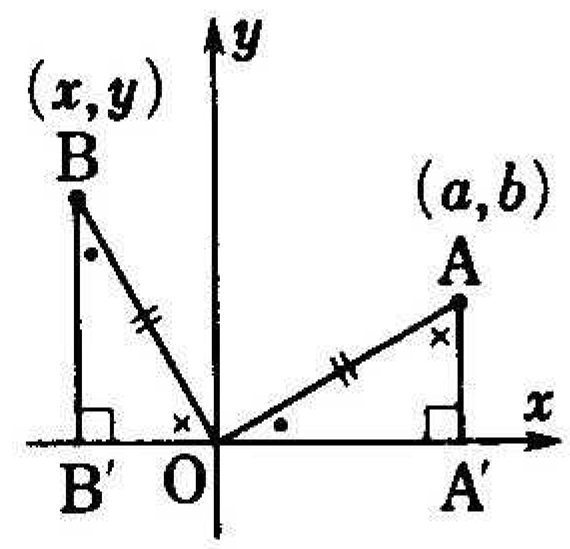
$$y=-(x-2)^2+4$$

が求めるものです。

*　　*　　*

◆ 第3は **回転** です。ここでは 90° 回転する場合を扱うことにします。

練習 7. 点 A(a, b) を原点のまわりに，正の方向に 90° 回転して得られる点を B とするとき，点 B の座標を求めよ。



ヒント　点 B の座標を (x, y) としましょう。A，B から，x 軸に下した垂線の足をそれぞれ A′，B′ とすると，△AOA′ と △OBB′ において

$$OA=OB,\quad \angle A'=\angle B'=\angle R$$

$$\angle AOA'=\angle OBB'$$

$$\therefore\quad \triangle AOA'\equiv\triangle OBB'$$

$$\therefore\quad y=B'B=OA'=a$$

$$-x=B'O=A'A=b$$

$$\therefore\quad x=-b,\quad y=a$$

ゆえに点 B の座標は ($-b$, a) です。

注　ここで $-x=$B′O というのに抵抗を感ずる人もあるでしょう。ここでは線分を有向線分として扱ったからです。

B′O は O の座標 0 から B′ の座標 x を引いて $-x$ となったのです。もし，ここのところがピンとこなかったら，長さ（絶対値）だけまず考えて，符号は別に吟味してみるとよいでしょう。

*　　*　　*

◆ 第4は **線対称** です。

練習 8. 直線 l : $x+2y=1$ について，点 P(2, 1) と対称な点 Q の座標を求めよ。

ヒント　点 Q の座標を (x, y) としましょう。PQ⊥l ですから，傾きの積は -1 でしたね。

$$\therefore\quad \frac{y-1}{x-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\qquad\cdots\cdots①$$

次に，PQ の中点は l の上になければならないのですから，点 $\left(\frac{x+2}{2},\ \frac{y+1}{2}\right)$ は直線 l の方程式を満足します。ゆえに，

$$\frac{x+2}{2}+2\cdot\frac{y+1}{2}=1\qquad\cdots\cdots②$$

①，②を連立させて解けばよい。

①より

$$2x-y=3$$

②より

$$x+2y=-2$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{5},\quad y=-\frac{7}{5}$$

答　$\left(\frac{4}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$

*　　*　　*

◆ 第5は **反転**（はんてん），これについては（☞ p. 258）を参照してください。

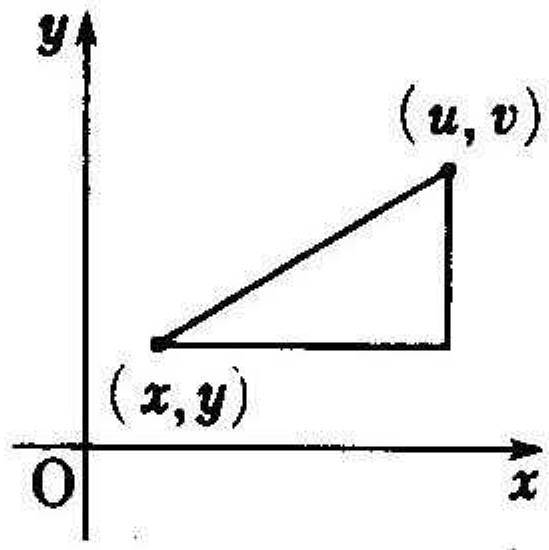
このような図形の変換によって，いろいろのめんどうな問題が楽に解けることも多いのです。日本の江戸時代の数学者たちも大いに活用したものでした。

○平行移動の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆図形変換の第1歩は平行移動です。これをマスターするのが図形変換征服のコツと心得るべし。

◆ 点 $(x,\ y)$ を x 軸に平行に正の方向に a だけ，y 軸に平行に正の方向に b だけ移動させたら，点 $(u,\ v)$ にきたとしましょう。



$$u=x+a,\ v=y+b$$

なる関係があります。これを

$$\boldsymbol{x=u-a,\ y=v-b}$$

と書いても，もちろんいいし，点 $(x,\ y)$ が点 $(u,\ v)$ つまり $(x+a,\ y+b)$ に移るのですから，平行移動を記号 f で表したとき

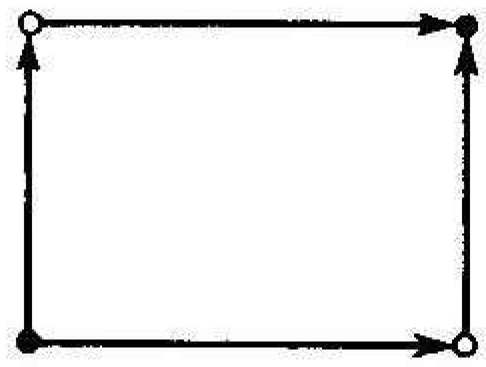
$$\boldsymbol{f:(x,\ y)\longrightarrow(x+a,\ y+b)}$$

といった表し方もします。

$$f_1:(x,\ y)\longrightarrow(x+a,\ y)$$
$$f_2:(x,\ y)\longrightarrow(x,\ y+b)$$

としますと，f_1 は点 $(x,\ y)$ を x 軸に平行に a だけ平行移動することを意味し，f_2 は点 $(x,\ y)$ を y 軸に平行に b だけ平行移動することを意味しています。

平行移動 f_1 を行ってから平行移動 f_2 を行うことを $f_2\circ f_1$ で表し，平行移動 f_2 を行ってから，さらに平行移動 f_1 を行うことを $f_1\circ f_2$ で表しますと



$$f_2\circ f_1=f_1\circ f_2$$

が成り立ちます。

つまり，交換可能です。

一般に2つの平行移動を続いて行う変換は交換可能です。

*　*　*

◆ さて，平行移動の具体的な問題に入るとしましょう。

■練習1. 放物線 $y=2x^2$ を平行移動して $y=2x^2+4x+3$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

ヒント　$y=2x^2$ も $y=2x^2+4x+3$ も，x^2 の係数が等しく2ですから合同です。しかも，下に凸ですから平行移動で重ね合わすことができます。そして，そのためには，対応する点に目をつければいいでしょう。そして，そのためにもっともいいのは頂点です。

$$\begin{aligned}y&=2x^2+4x+3\\&=2(x+1)^2+1\end{aligned}$$

ですから，その頂点は $(-1,\ 1)$ です。ゆえに，x 軸に平行に -1 だけ，y 軸に平行に $+1$ だけ，平行移動すればよい，といってもいいし，求める平行移動 f は

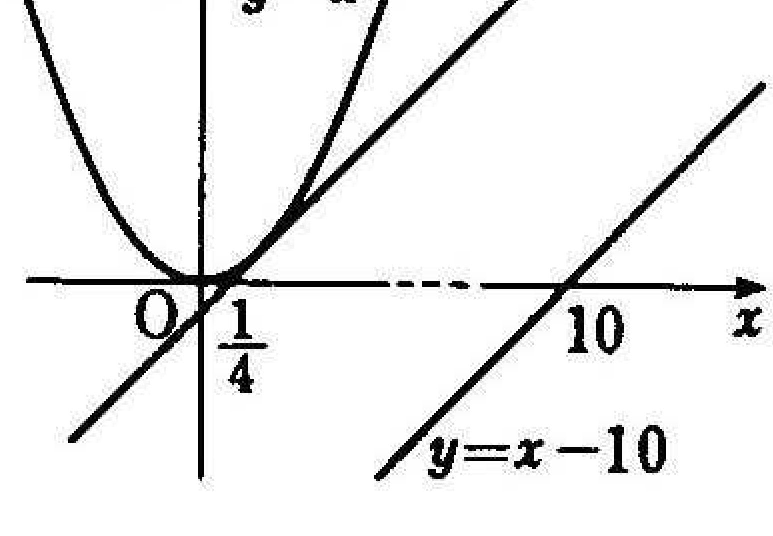
$$f:(x,\ y)\longrightarrow(x-1,\ y+1)$$

だ，といってもいいでしょう。

4/13

■練習2. 放物線 $y=x^2$ を x 軸に平行に移動して，直線 $y=x-10$ に接するようにしたい。どのように移動すればよいか。

ヒント　$y=x-10$ に平行な接線を使うと簡単です。すなわち，



$$y=x+a$$

と

$$y=x^2$$

と接するための条件は $x^2=x+a$，つまり $x^2-x-a=0$ が重複解をもつこと。すなわち，判別式を D とすると，

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a)=0$$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{4}$$

となって，接線は　　$y=x-\dfrac{1}{4}$

さては $y=x^2$ を x 軸に平行に $10-\dfrac{1}{4}=\dfrac{39}{4}$ だけ平行移動すればよい。

あるいは求める平行移動 f は

$$f:(x,\ y)\longrightarrow\left(x+\frac{39}{4},\ y\right)$$

である，といってもよいのです。

＊　＊　＊

◆ 次に少しめんどうな練習をやってみませんか。例えば，これです。

4/18

練習 3. 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ がある。$f(-1)=1$, $f(0)=1$ であって，最小値が -5 となるように a, b, c の値を求めよ。　　(広島大)

(ヒント) 最小値が -5 だというから，$a>0$ で $f(x)=a(x-\alpha)^2-5$ と書けるハズ。そこで，$f(-1)=1$, $f(0)=1$ なる条件から

$$\begin{cases} a(-1-\alpha)^2-5=1 \\ a(-\alpha)^2-5=1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad a(\alpha+1)^2=6 \qquad \cdots\cdots①$$

$$a\alpha^2=6 \qquad \cdots\cdots②$$

①÷② より

$$\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2}=1 \qquad \therefore\quad \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad a=24$$

$$\therefore\quad f(x)=24\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-5$$

$$=24x^2+24x+1$$

$$\therefore\quad a=24,\ b=24,\ c=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(注) 本問とその解答は平行移動と無縁なもののように見えるかもしれませんが，さにあらず。

$y=ax^2$ を平行移動すれば $y=ax^2+bx+c$ の形になることがキソにあるのです。次のはもっと直接的です。

4/18

練習 4. 点 $(-2,\ 6)$ を通る対称軸が y 軸に平行な放物線を右方へ4，下方へ5だけ平行移動すると，頂点が $x=1$ の点で x 軸に接するという。この放物線を求めよ。

(早大)

(解) 移動した放物線は点 $(1,\ 0)$ で x 軸に接しているから

$$y=a(x-1)^2$$

とおくことができる。また，点 $(-2,\ 6)$ を右へ4，下へ5だけ平行移動した点は $(2,1)$ で，この点を通るから

$$1=a(2-1)^2 \qquad \therefore\quad a=1$$

ゆえに，求める曲線の方程式は

$$y=1\cdot(x-1+4)^2+5$$

$$=(x+3)^2+5$$

$$=x^2+6x+14 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

4/18

練習 5. $y=-3x^2$ を平行移動して，点 $(-6,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ を通るようにするには，x 軸，y 軸に平行にそれぞれ，どれだけ平行移動すればよいか。

(解) x 軸に平行に -5, y 軸に平行に 3，平行移動すればよい。

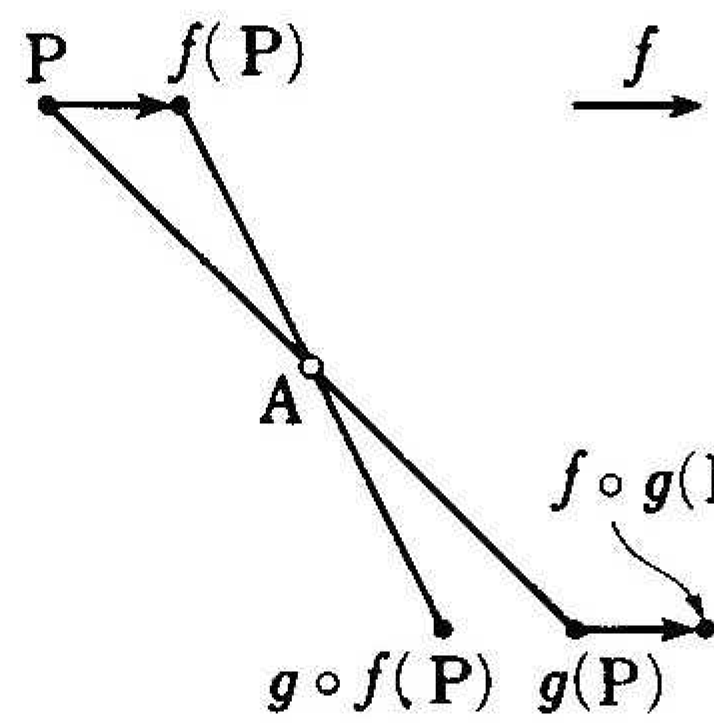
＊　＊　＊

◆ 平行移動と他の図形変換を合成することも当然問題となります。

練習 6. 平行移動を f，点対称移動を g で表すとき $f\circ g=g\circ f$ は成り立つか。

(ヒント) この種のものは，問題の意味がわからなくて手のつけようのないことが多いものです。さあ，キミはどうでした？

平行移動といったって，どんな平行移動かわからない，点対称移動といったって，その定点はどこなのかわからない，といったぐあい。しかし，それは，いけません。まず，自分で，これにしようときめるのです。



例えば，右の図の通り。

$f\circ g$ と $g\circ f$ と等しくないことは確か。

では答案にどうかくか，反例を1つあげればいいじゃありませんか。

点対称移動の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆図形の移動の中でもっとも簡単なのは点対称移動でありましょう。とはいってもバカにしてはいけません。報復される!!

◆ 点A，Bの中点をMとするとき，BはMについてAと対称である，または **点対称** である，といいます。ですから，点対称の扱い方は中点の扱い方と本質的に変わるところはありません。では，具体例を：——

4/19

練習1. 点 $(1,\ 2)$ について点 $(a,\ b)$ と対称な点を求めよ。

(解) 求める点を $(x,\ y)$ とすると，仮定により

$$\frac{x+a}{2}=1,\ \frac{y+b}{2}=2$$

$$\therefore\ x=2-a,\ y=4-b$$

答 $(2-a,\ 4-b)$

4/19

練習2. 原点に関して，2次曲線 $y=2x^2-4x+1$ と対称な曲線の方程式を求めよ。（東京学芸大）

(ヒント) 曲線上の点 $(x,\ y)$ と原点に関して対称な点を $(X,\ Y)$ としますと

$$\frac{X+x}{2}=0,\ \frac{Y+y}{2}=0$$

$$\therefore\ x=-X,\ y=-Y$$

これを $y=2x^2-4x+1$ に代入すると

$$-Y=2(-X)^2-4(-X)+1$$

$$\therefore\ Y=-2X^2-4X-1$$

このまま放っておかないで，必ず $X,\ Y$ を $x,\ y$ に書きかえておくことです。

$$y=-2x^2-4x-1$$ ……答

4/19

練習3. 原点に関して，曲線 $y=f(x)$ と対称な曲線の方程式を求めよ。（東京理大）

(解) $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ と原点について対称な点を $(X,\ Y)$ とすると

$$x=-X,\ y=-Y$$

これを $y=f(x)$ に代入すると

$$-Y=f(-X)$$

$$\therefore\ Y=-f(-X)$$

ゆえに，求める曲線の方程式は

$$y=-f(-x)$$

である。

答 $y=-f(-x)$

(注) このような一般的な問題はわからない人が多いものです。これこそ，**きまった手順をキチンと踏んでやること** が大切です。

＊　＊　＊

◆ 点 $(x,\ y)$ を点 $(a,\ b)$ に関して対称な点 $(2a-x,\ 2b-y)$ に移す写像 f を

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(2a-x,\ 2b-y)$$

と表します。この表現になれない人は

$$2a-x=X,\ 2b-y=Y$$

とおいて，点 $(X,\ Y)$ に目をつけるのがコツです。では：——

4/19

練習4. 点 $(a,\ b)$ に関して $f(x,\ y)=0$ と対称な曲線の方程式を求めよ。（三重大）

(ヒント) 点 $(a,\ b)$ について点 $(x,\ y)$ と対称な点を $(X,\ Y)$ とすると

$$x=2a-X,\ y=2b-Y$$

ゆえに，$f(x,\ y)=0$ に代入して

$$f(2a-X,\ 2b-Y)=0$$

ここで，$X,\ Y$ を $x,\ y$ で書きかえて

$$f(2a-x,\ 2b-y)=0$$

が求めるものです。しかし，上の記号になれると，点 $(a,\ b)$ に関する写像 f は

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(2a-x,\ 2b-y)$$

と書ける。ゆえに形式的に扱えるのです。

曲線 $f(x,\ y)=0$

$$\longrightarrow 曲線\ f(2a-x,\ 2b-y)=0$$

■練習 5. 放物線 $y=x^2+2x-3$ の点 (3, 1) に関する対称図形の方程式は何か。

（東京理大）

ヒント 点 (3, 1) に関する点対称 f は

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(6-x,\ 2-y)$$

ゆえに，求める方程式は

$$2-y=(6-x)^2+2(6-x)-3$$

$$\therefore\quad y=-x^2+14x-43\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

では，次には，ややめんどうな問題をやってみませんか。

4/19

■練習 6. xy 平面において，点 (1, 1) に関して曲線 $y=x^2+bx$ と対称な曲線がもとの曲線と異なる2点で交わるとき，b はどんな範囲にあるか。

（京大）

ヒント 点 (1, 1) に関する点対称 f は

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(2-x,\ 2-y)$$

で与えられるから，

$$y=x^2+bx\quad\cdots\cdots①$$

は

$$2-y=(2-x)^2+b(2-x)$$

すなわち

$$y=-x^2+(b+4)x-2(b+1)\quad\cdots\cdots②$$

に移されることがわかります。①と②が異なる2点で交わるための条件は，yを消去して得られる2次方程式

$$x^2-2x+(b+1)=0$$

の判別式が正になることです。判別式をDとすると，

$$\frac{D}{4}=1-(b+1)>0\quad\therefore\quad b<0$$

4/19

■練習 7. 2つの放物線 $y=x^2-6x+10$ と $y=-x^2+14x-50$ とがある点Aに関して対称であるとき，点Aの座標を求めよ。

ヒント $y=ax^2+bx+c$ のグラフは a が等しければ，b, c に関係なく合同です。aの符号がちがうだけでも合同です。ですから，この場合も1つは下に凸，1つは上に凸というちがいはありますが合同で，ある点について対称なのです。

さて，点対称の中心を求めるには，対応する点の中点を求めればよいのです。そして，その対応する点としては，頂点が便利でしょう。そんなわけで

$$y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$$

の頂点は (3, 1) で，

$$y=-x^2+14x-50=-(x-7)^2-1$$

の頂点は (7, −1) ですから，その中点は (5, 0) です。

$\boxed{答}$ (5, 0)

* * *

◆ 2つの写像を組み合わせると急にめんどうに感ずるものですが，分離して1つ1つ扱えば，何ということもないもの。

では，次をやってみませんか。

■練習 8. 3次曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ は点対称の中心をもつことを示せ。

ヒント 原点に関して対称なら

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

と $$-y=-ax^3+bx^2-cx+d$$

が一致しなければなりません。そのための条件は $b=0$, $d=0$ であることです。

さて，$y=ax^3+bx^2+cx+d$ の点対称の中心を $(\alpha,\ \beta)$ とし，点 $(\alpha,\ \beta)$ を原点にくるように曲線を平行移動しますと

$$(x,\ y)\longrightarrow(x-\alpha,\ y-\beta)$$

ですから，

$$y+\beta=a(x+\alpha)^3+b(x+\alpha)^2+c(x+\alpha)+d$$

つまり

$$y=ax^3+(3a\alpha+b)x^2+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x+(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta)$$

これが原点について対称であることが必要かつ十分条件です。

$$3a\alpha+b=0$$

かつ $$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta=0$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{-b}{3a},\quad \beta=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$$

が点対称の中心です。

h

① 線対称移動の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

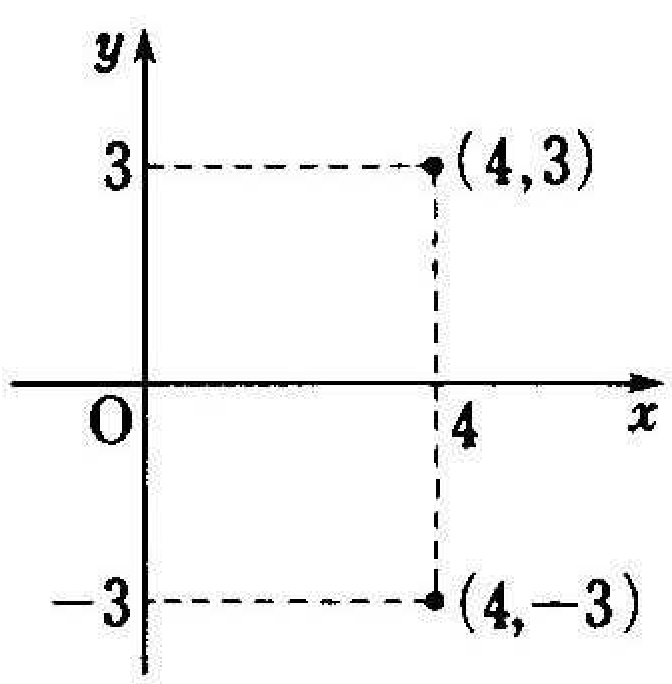
◆線対称移動は，図形変換の中でもっとも計算ミスの多いものです。写像の問題だと思わず，計算練習と観念するがよい。

◆　1つの直線について対称な図形を求める操作を **線対称移動** といいます。そして，1点について対称な図形を求める操作，点対称移動といっしょにして，単に **対称移動** ということもあります。さて，具体的な練習からはじめましょう。

4/1

練習 1. x軸について，点 $(4,\ 3)$ と対称な点の座標を求めよ。

ヒント　図をかいてみると明らかなように $(4,\ -3)$ です。すなわち，x座標は変わらないが，y座標は符号だけ変わります。



4/1

練習 2. y軸について，曲線 $y=f(x)$ と対称な曲線の方程式を求めよ。（東京理大）

解　$y=f(x)$ 上の任意の点を $P(x,\ y)$ とし，y軸に関して対称な点を $Q(X,\ Y)$ とすれば

$$x=-X,\ \ y=Y$$

したがって，この2式と $y=f(x)$ から x，y を消去すれば

$$Y=f(-X)$$

を得る。X，Y を，x，y と書きかえて求める方程式は

$$y=f(-x)$$

である。

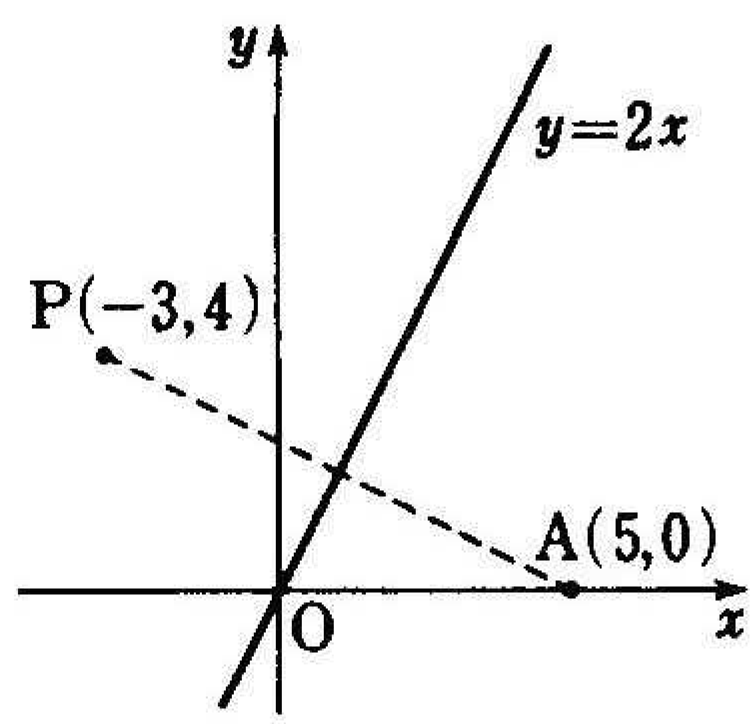
* * *

◆　x軸やy軸に関して対称な点や図形を求めることはラクですが，任意の直線について対称移動するのは，かなりやっかいです。ではやってみませんか。計算は必ず自分でやってみること。目で追っていって，アア，ナルホドソウカ，などとすましてはいけません。

4/1

練習 3. 直線 $y=2x$ に関して点 $A(5,\ 0)$ と対称な点の座標を求めよ。

ヒント　求める点を $P(u,\ v)$ としますと，AP の傾きは $\dfrac{v-0}{u-5}$ で，AP が $y=2x$ に垂直だから



$$\frac{v-0}{u-5}\cdot 2=-1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，AP の中点 $\left(\dfrac{u+5}{2},\ \dfrac{v+0}{2}\right)$ が $y=2x$ 上になければならないから

$$\frac{v+0}{2}=2\cdot\frac{u+5}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

そこで，①，②を連立して解けばいいでしょう。①より

$$u+2v=5 \qquad \cdots\cdots①'$$

②より

$$2u-v=-10 \qquad \cdots\cdots②'$$

①′，②′ より　$u=-3,\ v=4$

答　$(-3,\ 4)$

4/1

練習 4. $x^2-2y^2+3x-5y+1=0$ のグラフを直線 $x-y=0$ に関して対称に移すとき，その方程式を求めよ。（東京学芸大）

ヒント　直線 $x-y=0$ について点 $A(x,\ y)$ と対称な点を $P(u,\ v)$ としますと，

$$u=y,\ \ v=x$$

です。そこで x，y を消去して u，v の関係

を求めますと

$$v^2-2u^2+3v-5u+1=0$$

となります。改めて，u, v の代わりに x, y と書きますと

$$y^2-2x^2+3y-5x+1=0$$

となります。

答　$2x^2-y^2+5x-3y-1=0$

練習 5. 直線 $x+2y=1$ に関して，放物線 $y=2x^2$ と対称の位置にある放物線の方程式を求めよ。（小樽商大）

（解）直線 $x+2y=1$ について，点 A(x, y) と対称な点を P(u, v) としますと AP が与えられた直線に垂直であることから

$$\frac{v-y}{u-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \quad \cdots\cdots①$$

AP の中点 $\left(\frac{u+x}{2}, \frac{v+y}{2}\right)$ が，直線 $x+2y=1$ 上にあることから

$$\frac{u+x}{2}+2\cdot\frac{v+y}{2}=1 \quad \cdots\cdots②$$

①，②を解いて

$$x=\frac{1}{5}(3u-4v+2), \quad y=\frac{1}{5}(-4u-3v+4)$$

これを $y=2x^2$ に代入して u, v の関係を求め，さらに u, v を x, y に書きかえると

$$18x^2-48xy+32y^2+44x-17y-12=0$$

……答

（注）この計算は，とくにめんどうということはありませんが，なかなかできないものです。労をいとわず，できるまで必ずやってみること。

*　*　*

◆ 点 (x, y) が点 $(2x+y, x-y)$ に移されることを

$$(x, y) \longrightarrow (2x+y, x-y)$$

とも表します。いま，x 軸に関する対称移動を f と表しますと

$$f:(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

ですし，y 軸に関する対称移動を g で表しますと

$$g:(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

となります。点 P(x, y) を x 軸に関して対称に移動し，さらに，y 軸に関して対称に移動することを $g\circ f$ と書きます。あとにやるほうを左に書くことをマチガワナイように!!

$$g\circ f:(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$$

ところが，これは，原点に関する対称移動 h に同じもの。そこで

$$h=g\circ f$$

と書くことができます。このように，移動をくり返すことを合成するといいます。詳しくは関数とは何かの項（☞ p. 208）をみてください。

*　*　*

◆ 線対称と他の図形変換を合成することもよくとりあげられる問題です。

例えば，これをやってみませんか。

練習 6. 点 (x, y) を平行移動することを f で表し，原点に関して対称に移動することを g で表し，x 軸に関して対称に移動することを h で表すとき，$f\circ g$, $g\circ h$, $h\circ f$, $g\circ f$, $h\circ g$, $f\circ h$ の中に等しいものがあるか。

（ヒント）
$$f:(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$$
$$g:(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$$
$$h:(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

ですから，

$$f\circ g:(x, y) \longrightarrow (-x+a, -y+b)$$
$$g\circ h:(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$
$$h\circ f:(x, y) \longrightarrow (x+a, -y-b)$$
$$g\circ f:(x, y) \longrightarrow (-x-a, -y-b)$$
$$h\circ g:(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$
$$f\circ h:(x, y) \longrightarrow (x+a, -y+b)$$

こうしてみると，結局等しいのは

$$g\circ h=h\circ g$$

だけであることがわかります。

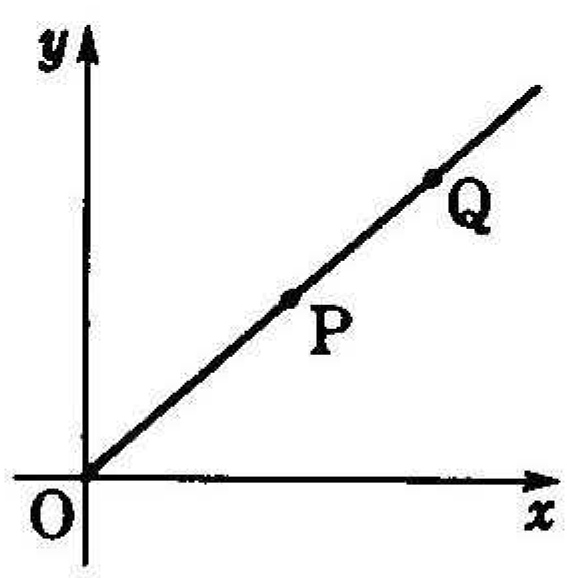
なお，グラフが対称軸をもつ問題も線対称の中に入れることもできますが，それは偶関数の項（☞ p. 216）を参照してください。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

●反転とは何か

◆反転（ハンテン）とも反形（ハンケイ）ともいいます。名前なんかどうでもいいが，図形変換の一大拠点である。

点 $P(x,\ y)$ に対して半直線 OP 上に点 Q を $OP \cdot OQ = a^2$ $(a \neq 0)$ なるようにとります。このとき，点Qの座標はどうなるでしょうか。



それは，あとの問題として，Q を P の **反転** といいます。また点 P がある曲線 C を描くとき，点Qは曲線 C′ を描くでしょう。このとき C′ をCの **反転** というのです。

ともあれ，次の問題にいきましょう。

4/25

練習 1. 座標平面上で，点 P(4, 3) に対して $OP \cdot OQ = 1$ なる点 Q を半直線 OP 上にとるとき，点 Q の座標を求めよ。

ヒント　$Q(u,\ v)$ とすると O, P, Q が 1 直線上にあることから

$$\frac{u}{4} = \frac{v}{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

また，

$$OP \cdot OQ = \sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{u^2 + v^2} = 1 \cdots\cdots ②$$

①より

$$u = 4k,\ \ v = 3k \quad (k > 0) \qquad \cdots\cdots ③$$

とおくことができる。また，②より

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{25} \qquad \cdots\cdots ④$$

③を④に代入して

$$16k^2 + 9k^2 = \frac{1}{25}$$

$$\therefore\ \ k^2 = \frac{1}{25^2} \qquad \therefore\ \ k = \frac{1}{25}\ (>0)$$

$$\therefore\ \ u = \frac{4}{25},\ \ v = \frac{3}{25}$$

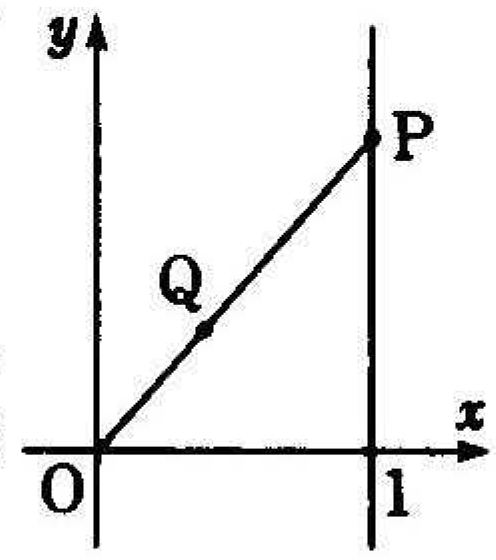
答　$\left(\dfrac{4}{25},\ \dfrac{3}{25}\right)$

4/24

練習 2. 直線 $x = 1$ 上の動点Pに対して

$OP \cdot OQ = 1$

なる点Qを半直線 OP 上にとるとき，点Qの軌跡の方程式を求め，グラフをかけ。



（東京工大）

ヒント　点 $Q(X,\ Y)$ とすると，O, P, Q が 1 直線上にあるから

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = k\ (>0) \qquad \cdots\cdots ①$$

また，

$$OP \cdot OQ = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{X^2 + Y^2} = 1 \cdots\cdots ②$$

①より

$$x = kX,\ \ y = kY \qquad \cdots\cdots ③$$

③を②に代入して

$$k(X^2 + Y^2) = 1$$

$$\therefore\ \ k = \frac{1}{X^2 + Y^2}$$

$$\therefore\ \ x = \frac{X}{X^2 + Y^2},\ \ y = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$$

ところが $x = 1$ ですから

$$\frac{X}{X^2 + Y^2} = 1 \qquad \therefore\ \ X^2 + Y^2 - X = 0$$

X, Y を x, y で書きかえて，求める方程式は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad ((0,\ 0)\ を除く)$$

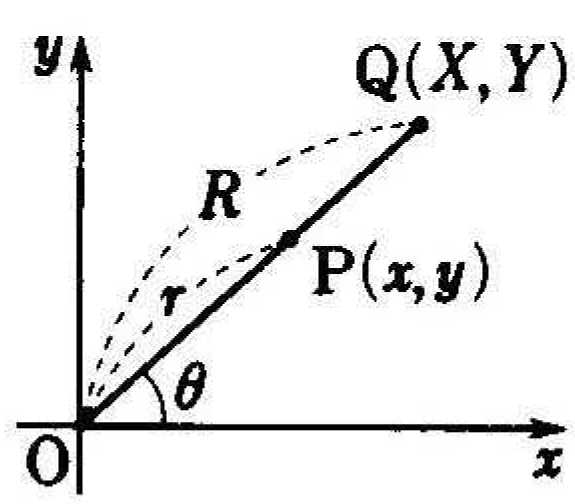
注　次のようにやると，少しエレガントにやれます。

右のように θ, r, R をとりますと

$OP \cdot OQ = 1$

$\therefore\ \ rR = 1$

$\therefore\ \ R = \dfrac{1}{r}$



$$\therefore \quad x=r\cos\theta=\frac{R\cos\theta}{R^2}=\frac{X}{X^2+Y^2}$$

$$y=r\sin\theta=\frac{R\sin\theta}{R^2}=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

*　*　*

◆ では，ややめんどうな問題を：——

練習 3. 2点 $P(x,\ y)$，$Q(X,\ Y)$ の座標の間に，$X=\frac{x}{x^2+y^2}$，$Y=\frac{-y}{x^2+y^2}$ の関係がある。点Pが，不等式

$$(4x+3y-5)(4x-3y+5)>0$$

で表される範囲を動くとき，Qの動く範囲を図に示せ。　（東大）

ヒント　$X=\frac{x}{x^2+y^2}$，$Y=-\frac{y}{x^2+y^2}$

を x，y について解いて代入すればよさそうだ，とは，だれしも思うのですが，解く勇気をもたない。そこで，では：——

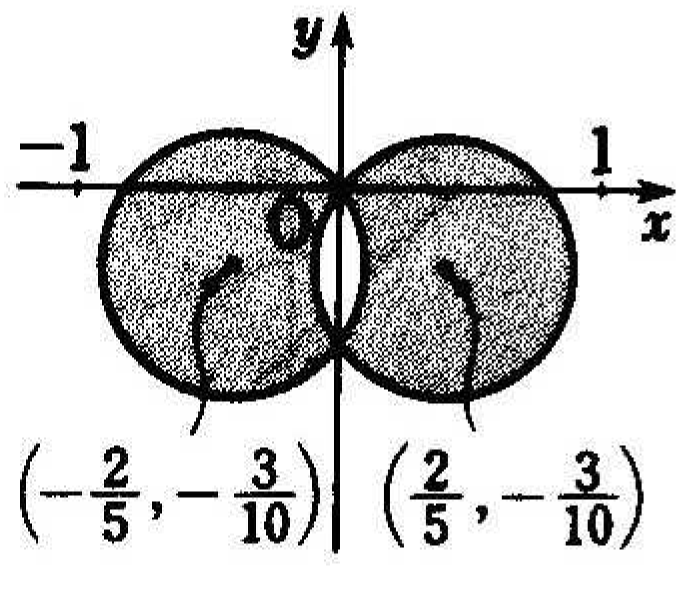
$$\frac{x}{x^2+y^2}=3,\quad \frac{-y}{x^2+y^2}=5$$

を解いてからやってみるんだな，というと，10人が10人ともできてしまう。そういうものなんです。ではやってみてください。答は，

$$\left\{\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{1}{4}\right)\Big\}$$

$$\times\left\{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}<0$$

で，図示すると右のようになります。



練習 4. 円周上の動点 P に対し，

$$OP\cdot OQ=a^2 \quad (a>0)$$

なる点Qを半直線 OP 上にとるとき，点Qの軌跡は一般に円になることを示せ。また，円にならないのはどんな場合か。

ヒント　与えられた円の方程式を

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad \cdots\cdots①$$

とする。点Pの座標を $(x,\ y)$，点Qの座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$$x=\frac{a^2X}{X^2+Y^2},\quad y=\frac{a^2Y}{X^2+Y^2} \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して

$$\frac{a^4X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{a^4Y^2}{(X^2+Y^2)^2}+A\frac{a^2X}{X^2+Y^2}$$

$$+B\frac{a^2Y}{X^2+Y^2}+C=0$$

$$\therefore \quad \frac{a^4(X^2+Y^2)}{(X^2+Y^2)^2}+A\frac{a^2X}{X^2+Y^2}+B\frac{a^2Y}{X^2+Y^2}$$

$$+C=0$$

$$\therefore \quad \frac{a^4}{X^2+Y^2}+\frac{Aa^2X}{X^2+Y^2}+\frac{Ba^2Y}{X^2+Y^2}+C=0$$

$$\therefore \quad C(X^2+Y^2)+Aa^2X+Ba^2Y+a^4=0$$

ゆえに $C\neq0$ ならば円を表し，$C=0$ のときは直線

$$AX+BY+a^2=0$$

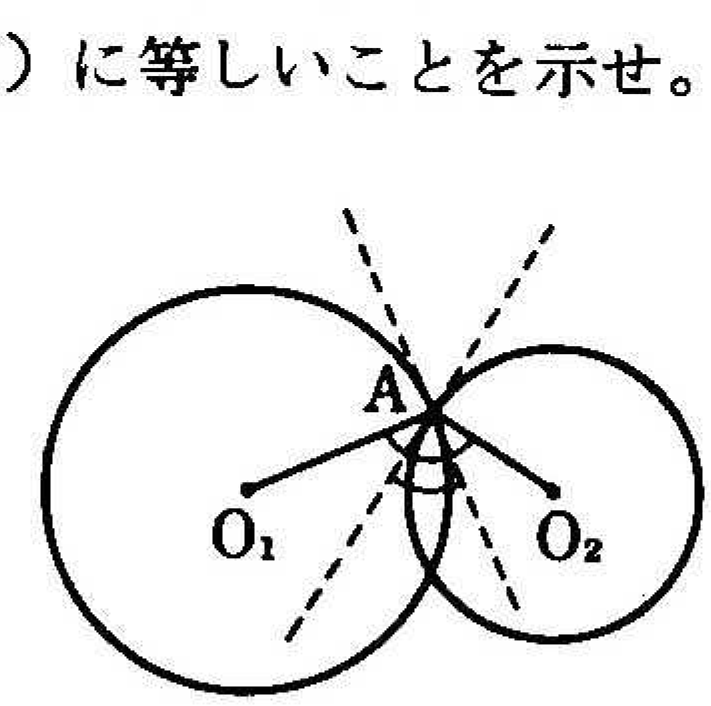
を表す。すなわち，原点を通る円は直線に移され，原点を通らない円は円に移されることがわかります。

*　*　*

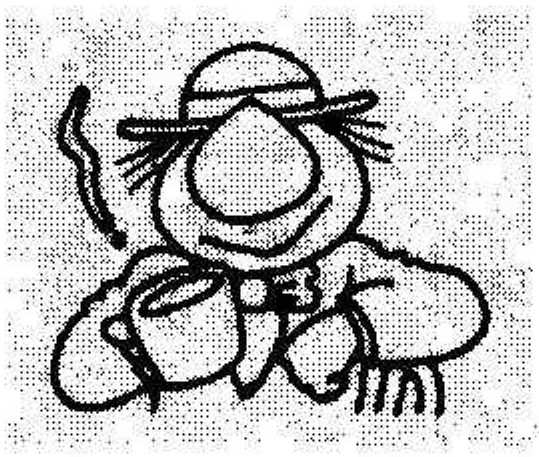
◆ 反転は数学において重要なばかりでなく，応用上も重要ですから，よく理解しておくことが必要です。反転のとくに重要な性質は2つの曲線の交角は反転しても変わらないことです。もしやる気があれば，次を：——

練習 5. 原点Oを通らない2直線 l_1，l_2 を反転して得る円を C_1，C_2 とすると，l_1，l_2 の交角は C_1，C_2 の交角（交点における円の接線のなす角）に等しいことを示せ。

ヒント　交点をA，円の中心を O_1，O_2 としますと，O_1A と O_2A のなす角は A における接線のなす角に等しく（といっても補角になっています）なりますので，それを使えばいいでしょう。



なお，反転は幾何学の証明問題にも役に立ちますから，興味のある人はそのほうの本を読んでみるといいのだが，……。



max, minの記号と蛇足

◆いろいろな新記号のある中で，よく使われるのが，max.と min.です。おそるべからず，あなどるべからず。

◆ 記号 $\max\{a,\ b\}$ は2つの実数 a，b のうち小さくない方を表します。また，おなじく，$\min\{a,\ b\}$ は2つの実数 a，b のうち大きくない方を表すのです。さあ，具体的な問題を扱ってみようか。

4/21

練習 1. $f(x)=\max\{x+1,\ 3x-1\}$ の最大値，最小値を求めよ。ただし，$-2\leqq x\leqq 2$ とする。

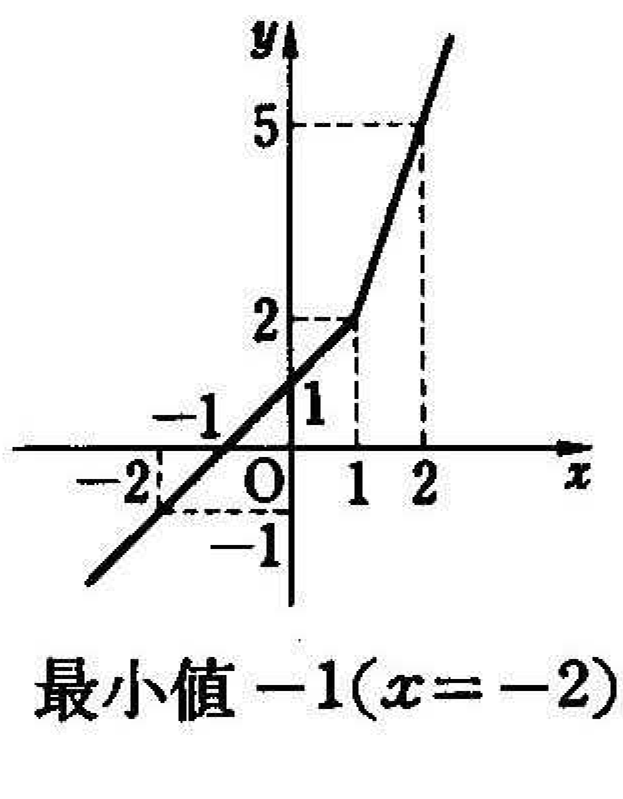
(ヒント) グラフをかいてみるのがよいでしょう。まず，$x+1$ と $3x-1$ の大小を調べるには

$$(x+1)-(3x-1)=-2x+2$$
$$=-2(x-1)$$

$\therefore$ $x\geqq 1$ のとき $f(x)=3x-1$

$x<1$ のとき $f(x)=x+1$

そこでグラフをかいてみると下のようになります。



ゆえに $x=2$ のとき最大値5をとり，$x=-2$ のとき最小値 -1 をとることがわかりました。

(答) 最大値 $5(x=2)$，最小値 $-1(x=-2)$

4/13

練習 2. $f(x)=\min\{x^2-1,\ x+1\}$ のグラフをかけ。

(ヒント) 上のように $(x^2-1)-(x+1)$

$=(x+1)\{(x-1)-1\}=(x+1)(x-2)$

の符号を調べると

$x\geqq 2$ あるいは $x\leqq -1$ のとき

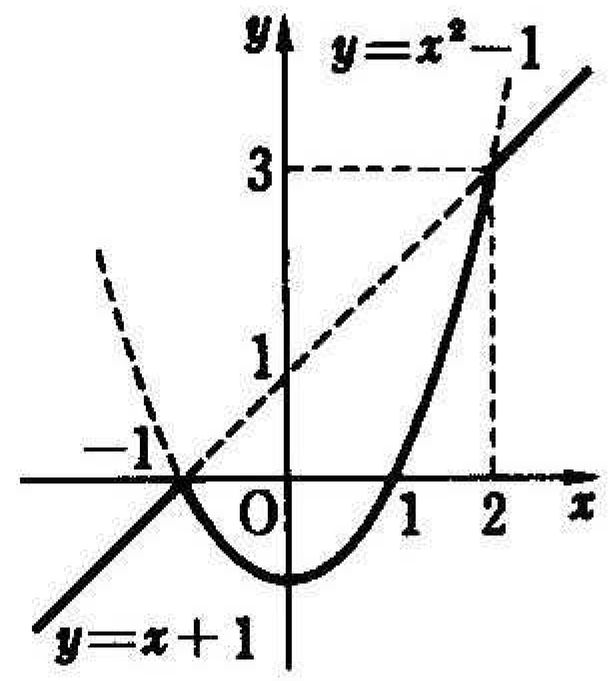
$$x^2-1\geqq x+1$$
$$\therefore\ f(x)=x+1$$

しかし，$-1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$f(x)=x^2-1$$

となります。これからグラフはすぐかけます。

しかし，次のようにやる方が簡単でしょう。つまり，$y_1=x^2-1$，$y_2=x+1$ のグラフをべつべつにかくと，下のようになる。



そこで，下の方にあるのを選んで太くかいていけばよいわけです。

◆ それでは最後に，もうひとつ：——

練習 3. $0\leqq x\leqq 6$ における関数

$$f(x)=\max\{|x-3|,\ -x^2+8x-11\}$$

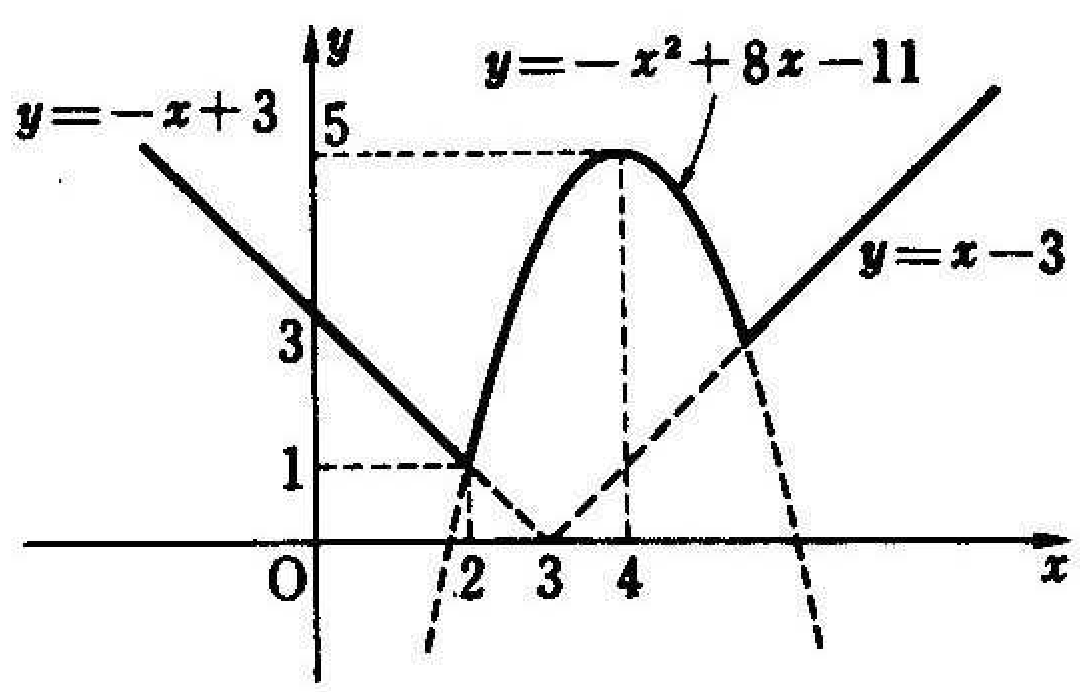
の最大値と最小値を求めよ。　（東大）

(解) $y=f(x)$ のグラフは

$y_1=|x-3|$

$y_2=-x^2+8x-11=-(x-4)^2+5$

のグラフの上側にある部分をとったもので，下の図における太い実線である。



ゆえに求める最大値は $5(x=4)$，最小値は $1\,(x=2)$ であることがわかる。

こうしてみると，人のキラウ max も min もとくにおそれることはあるまい。

そして，大小をしらべるときに，まず形式的に表現してしまう，このカンベンさ!!