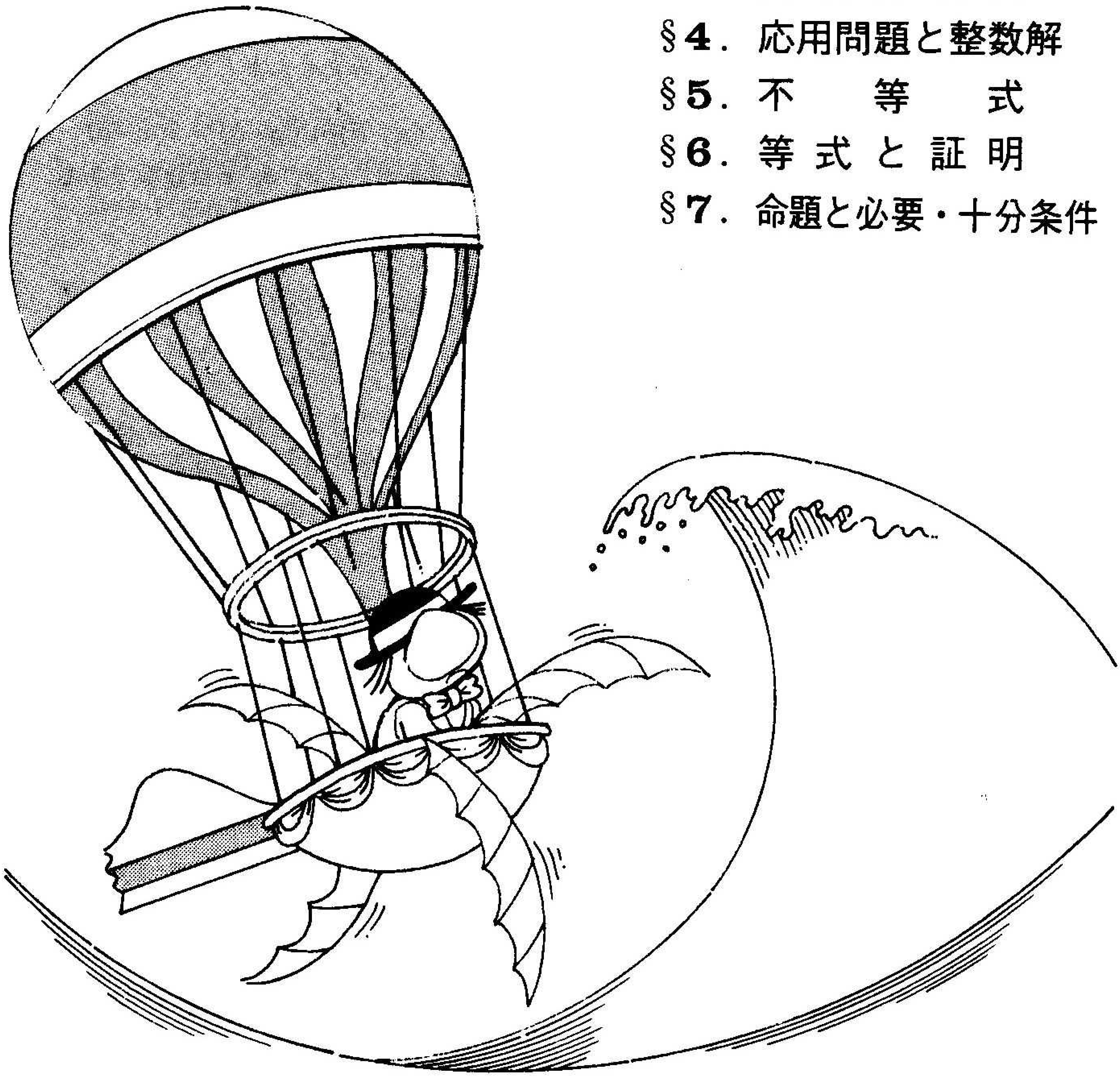
第２章

方程式と不等式



○1元1次方程式の解き方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆なにごともはじめがカンジン。初心忘るべからずというのはここからでている。しかし，はじめとは何か，と考えるとさらに混迷。

◆　1元1次方程式はすでに中学でやってある。何を今さら，などと，いうことなかれ。すべてはここにはじまる。では，さっそく，練習から：——

7/22 **練習 1.** $ax=b$ を解け。

ヒント　$a\neq 0$ のとき　$x=\dfrac{b}{a}$

$a=0$, $b=0$ のとき　不定（つまり x は任意の数でよい）

$a=0$, $b\neq 0$ のとき　不能（あるいは解なし，といってもよい）

上の3つを書いてはじめて解なのです。それなのに

答　$x=\dfrac{b}{a}$　$(a\neq 0)$

などと書いている人のいかに多いか？

7/22 **練習 2.** $(a^2-3a+2)x=a-1$ を解け。

ヒント　$a^2-3a+2=(a-1)(a-2)$ ですから

$$(a-1)(a-2)x=a-1$$

そこで，

$a\neq 1, 2$ のとき　$x=\dfrac{1}{a-2}$

$a=1$ のとき　不定

$a=2$ のとき　不能

となるのです。

練習 3. $(a^2-4a+3)x=a^2-5a+4$ を解け。

解　$a^2-4a+3=(a-1)(a-3)$

$a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$

であるから，与えられた方程式は

$$(a-1)(a-3)x=(a-1)(a-4)$$

ゆえに $a\neq 1, 3$ のとき　$x=\dfrac{a-4}{a-3}$

$a=1$ のとき　不定

$a=3$ のとき　不能

答　$a\neq 1, 3$: $x=\dfrac{a-4}{a-3}$

$a=1$　：不定

$a=3$　：不能

*　*　*

◆　以上で，1元1次方程式の大切なことは終わりです。次には，ややめんどうそうな形のものをやってみませんか。

4/22 **練習 4.** $(x-a)^2+(x-b)^2=2(x-c)^2$ を解け。ただし，a, b, c は定数である。

ヒント　展開すれば

$$x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2$$
$$=2x^2-4cx+2c^2$$
$$\therefore\ 2(a+b-2c)x=a^2+b^2-2c^2$$

したがって

$a+b\neq 2c$ のとき：$x=\dfrac{a^2+b^2-2c^2}{2(a+b-2c)}$

$a+b=2c$ かつ $a^2+b^2=2c^2$ のとき不定

$a+b=2c$ かつ $a^2+b^2\neq 2c^2$ のとき不能

どうです。できましたか。しかし，実はこれでは不十分です。なぜなら：——

《$a+b=2c$ かつ $a^2+b^2=2c^2$》という条件は次のようにもっとカンタンな形に書き直せるからです。つまり

$$b=2c-a \quad \cdots\cdots(*)$$

を $a^2+b^2=2c^2$ に代入すると

$$a^2+4c^2-4ac+a^2=2c^2$$
$$\therefore\ a^2-2ac+c^2=0$$
$$\therefore\ (a-c)^2=0 \qquad \therefore\ a=c\cdots\cdots(**)$$

$(*)$と$(**)$とから

$$a=b=c$$

そこで解は次のようにまとめられます。

答 $a+b \neq 2c$: $x=\dfrac{a^2+b^2-2c^2}{2(a+b-2c)}$

$a=b=c$ ：不定

$a+b=2c$ かつ $a \neq b$: 不能

練習 5. $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=0$

を a について解け。

ヒント a のついたのとつかないのとに分けてみますと

$$(bc+b+c+1)a+(bc+b+c+1)=0$$

おや，おや，因数分解できるではないか。

$$(bc+b+c+1)(a+1)=0$$

まだできるぜ。

$$(b+1)(c+1)(a+1)=0$$

かくして

$b \neq -1$, $c \neq -1$ のとき

$$a+1=0 \qquad \therefore \quad a=-1$$

$b=-1$ または $c=-1$ のとき

a は不定

答 $b \neq -1$ かつ $c \neq -1$ のとき $a=-1$

$b=-1$ または $c=-1$ のとき不定

*　　*　　*

◆ 不定というのは上にもみたように x がなんであっても成り立つということです。これを x についての恒等式（コウトウシキ）ともいいます。つまり：

$$ax+b=0$$

が x のすべての値について成り立つとき，これを《x についての恒等式》というのです。

では：——

練習 6. $ax+b=0$ が x について恒等式であるための条件を求めよ。

ヒント x がなんであっても成り立つのであるから $x=0$ でも成り立たなければならない。

$$\therefore \quad a \cdot 0+b=0 \qquad \cdots\cdots①$$

また，$x=1$ でも成り立たなければならない。

$$\therefore \quad a \cdot 1+b=0 \qquad \cdots\cdots②$$

①より $b=0$ したがって②より $a=0$

すなわち $a=b=0$ でなければならない。

逆に $a=b=0$ ならば x がなんであっても $ax+b=0$ が成り立つ。

ゆえに求める条件は $a=b=0$ である。

答 $a=b=0$

*　　*　　*

◆ ここでひとつ重要なことがあります。いわゆる条件付の証明問題では，もし，条件式が**《ある文字について1次式》であれば，その文字について解いて代入すれば必ずできる**ものなのです。例えば，これです。

練習 7. $a+b+c=0$ のとき

$$a^3+b^3+c^3=3abc \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明せよ。

ヒント 条件式は a についての1次式ですから，a について解けば

$$a=-b-c$$

そこで，左辺$=(-b-c)^3+b^3+c^3$

$=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+b^3+c^3$

$=-3b^2c-3bc^2$

また，右辺$=3(-b-c)bc$

$=-3b^2c-3bc^2$

なるほど，等しいことがわかった。

Q.E.D.

ところでひとことご注意：——

次のように答案を書いてはいけませんよ。

$a=-b-c$ を$(*)$に代入して

$$(-b-c)^3+b^3+c^3=3(-b-c)bc$$

$$\therefore \quad -b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+b^3+c^3=-3b^2c-3bc^2$$

$$\therefore \quad 0=0$$

ゆえに成り立つ。

これではまるで $0=0$ を証明したようではありませんか。

必ず左辺は左辺，右辺は右辺，別々に計算して等しいことを示すべきです。わかっているのに答案の書き方が悪いため0点になる人がいかに多いか，よく心にとめておいて下さい。

① 連立1次方程式の解き方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆連立1次方程式の中心課題は不定・不能の吟味の仕方にある。そして，それは，うまいことをしないのがコツなんです。

◆ 連立1次方程式を解くには，うまいことをしないで，文字を1つ1つ消去していくのがよいのです。

練習 1. 次の連立方程式を解け。　（天理大）

$$\begin{cases} x+y=29 & \cdots\cdots① \\ y+z=32 & \cdots\cdots② \\ z+x=33 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

ヒント　マトモにやると，②，③から z を消去するために ③－② を作ると

$$x-y=1 \qquad \cdots\cdots④$$

$\dfrac{①+④}{2}$ より　$x=15$　　$\therefore\ y=14$

したがって②より　　$z=18$

答　$x=15,\ y=14,\ z=18$

もっとエレガントにやってみましょうか。

(①＋②＋③)÷2 を作ると

$$x+y+z=47 \qquad \cdots\cdots⑤$$

⑤－②，⑤－③，⑤－① を作ると

$$x=15,\ y=14,\ z=18$$

が得られます。

*　*　*

◆ 多少の上手，下手があっても，上のような問題はべつにめんどうはありません。しかし，未知数の数が方程式の数より多いとすぐとまどってしまう。そんなものなんです。

練習 2. 連立1次方程式

$$\begin{aligned} 3x-2y-z+w&=2 & \cdots\cdots① \\ -x-y+2z+3w&=10 & \cdots\cdots② \\ -3x+y+2z+2w&=6 & \cdots\cdots③ \end{aligned}$$

を解け。　（慶大）

ヒント　未知数が4つあるのに，方程式が3つしかない。このようなときは，1つはわかっているとし，移項してしまうのです。どれでもいい。例えば w を k とおいて移項しましょう。そうすると

$$\begin{aligned} 3x-2y-z&=2-k & \cdots\cdots①' \\ -x-y+2z&=10-3k & \cdots\cdots②' \\ -3x+y+2z&=6-2k & \cdots\cdots③' \end{aligned}$$

さあ，これを x，y，z について，k で表すことにしようではありませんか。

①′×2＋②′ を作ると

$$5x-5y=14-5k \qquad \cdots\cdots④$$

②′－③′ を作ると

$$2x-2y=4-k \qquad \cdots\cdots⑤$$

y を消去するために ④×2－⑤×5 を作ると，

コレハオドロイタ!!

$$0=8-5k \qquad \therefore\ k=\frac{8}{5}$$

こうして予定に反して，k すなわち w の値 $\dfrac{8}{5}$ が出てきてしまった。そして，④または⑤から

$$y=x-\frac{6}{5}=l-\frac{6}{5} \quad (\text{ただし，}x=l)$$

が得られた。これを①′に代入して

$$3l-2\left(l-\frac{6}{5}\right)-z=2-\frac{8}{5}$$

$$\therefore\ z=l+2$$

が得られた。かくて，求める解は

$$x=l,\ y=l-\frac{6}{5},\ z=l+2,\ w=\frac{8}{5}$$

である。ここに l は任意の数である。

*　*　*

◆ もしこれが理解に手まどるようであったら，きょうは保留として，次の練習3.にいこうじゃありませんか。こんどは文字の入った連立方程式です。

■練習 3. 次の連立 1 次方程式を解け。

$$x+ay=2 \quad \cdots\cdots①$$
$$ax+y=2 \quad \cdots\cdots②$$

ヒント　①－②×a

$$(1-a^2)x=2(1-a) \quad \cdots\cdots③$$

$a \neq \pm1$ のとき

$$x=\frac{2}{1+a}$$

これを②に代入すると

$$y=2-a\cdot\frac{2}{1+a}=\frac{2}{1+a}$$

次に $a=1$ のときには，①，②はいずれも $x+y=2$ となって **不定**（ふてい）です。

最後に $a=-1$ のときには③の左辺は 0，右辺は 4 で不成立。つまり x は存在しない。これを **解なし**，とか **不能**（ふのう）といいます。

答 $\begin{cases} a \neq \pm1 \text{ のとき} \quad x=y=\dfrac{2}{1+a} \\ a=1 \text{ のとき} \quad \text{不定}\ (x+y=2) \\ a=-1 \text{ のとき} \quad \text{不能} \end{cases}$

2/23

■練習 4. 次の連立方程式の解が不定となるように a，b の値を定めよ。　（埼玉大）

$$\begin{cases} 6x+(b+1)y+12=0 & \cdots\cdots① \\ (a+6)x-2y+8=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

ヒント　①×2＋②×$(b+1)$ を作ると

$$(ab+a+6b+18)x=-8(b+4)$$

となる。したがって不定となるための条件は

$$ab+a+6b+18=0 \text{ かつ } -8(b+4)=0$$

$$\therefore \quad a=-2,\ b=-4 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 5. 連立方程式

$$\begin{cases} 5x+3y-z=0 & \cdots\cdots① \\ 2x+y+3z=l & \cdots\cdots② \\ x+4y+kz=10 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の解が不定となるように定数 k，l の値を定めよ。　（東大）

ヒント　上の練習 4. とまったく同じにやってみましょう。

③×5－①：　$17y+(5k+1)z=50$ ……④

③×2－②：　$7y+(2k-3)z=20-l$ …⑤

次に，

④×7－⑤×17 を作りますと

$$(k+58)z=10+17l$$

ゆえに不定となるためには

$$k+58=0 \quad \text{かつ} \quad 10+17l=0$$

$$\therefore \quad k=-58,\ l=-\frac{10}{17} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 不定や不能の扱い方もほぼわかったことでしょう。そこで，最後にもう 1 つ。未知数の数より方程式の数が多い場合を 1 つだけやっておきましょう。

■練習 6. 次の関係をみたす x，y，z，u，v の値を求めよ。　（都立大）

$$3x+5y=v \quad \cdots\cdots①$$
$$11x+2y=v \quad \cdots\cdots②$$
$$3z+11u=v \quad \cdots\cdots③$$
$$5z+2u=v \quad \cdots\cdots④$$
$$x+y=z+u=1 \quad \cdots\cdots⑤$$

ヒント　方程式は 6 個，未知数は 5 個，このようなときは 1 つを除いて，他のもので解く。その上で，保留分を満足するかどうか調べるのが定石。すなわち

$$\begin{aligned} 3x+5y \qquad\qquad\quad -v&=0 \\ 11x+2y \qquad\qquad\quad -v&=0 \\ 3z+11u-v&=0 \\ 5z+2u-v&=0 \\ x+y \qquad\qquad\qquad\quad &=1 \\ z+u \qquad &=1 \end{aligned}$$

さあ，あとはやってみてください。

$$x=\frac{3}{11},\ y=\frac{8}{11},\ z=\frac{9}{11},\ u=\frac{2}{11},\ v=\frac{49}{11}$$

…… 答

*　*　*

◆ どうやら大切なことは終わり。それにしても連立方程式はやりがいがあるなあ。

① 1元2次方程式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆1つの文字xについての2次方程式を解くには因数分解によるか，解の公式によるか，条件によっては解と係数の関係を使う。

◆ 2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解を求めるには，2つの方法があります。

因数分解するか，解の公式を使うか

です。では，何はともあれ，因数分解でいくとしようか。

練習 1. $x^2-6x-27=0$ を解け。

(解)　$x^2-6x-27=0$

$\therefore\ (x-9)(x+3)=0$

$\therefore\ x=9,\ -3$ ……答

練習 2. 次の方程式を解け。

$$4x^2=9x$$

(ヒント) よく次のようにやる人があります。両辺をxで割って

$$4x=9$$

$$\therefore\ x=\frac{9}{4}$$

これはとんでもないマチガイ。

$$4x^2-9x=0$$

$$x(4x-9)=0$$

$\therefore\ x=0,\ \dfrac{9}{4}$ ……答

練習 3. $a(x^2+1)=x(a^2+1)$ を解け。

(ヒント) 左辺のaとxを交換したのが右辺だから移項すれば$x-a$で割りきれるハズ。つまり因数分解できるハズ。さて，どうかな？

$$ax^2+a-a^2x-x=0$$

$$\therefore\ ax(x-a)-(x-a)=0$$

$$\therefore\ (x-a)(ax-1)=0$$

$a\neq0$ のとき

$$x=a,\ \frac{1}{a}$$

$a=0$ のとき

$$x=0$$

答 $\begin{cases} a\neq0: & a,\ \dfrac{1}{a} \\ a=0: & 0 \end{cases}$

練習 4. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ を解け。

(ヒント) バラバラにしてa，b，cについてまとめると，

$$a(x^2-1)-b(x^2-x)-c(x-1)=0$$

$$\therefore\ (x-1)\{a(x+1)-bx-c\}=0$$

$$\therefore\ (x-1)\{(a-b)x+(a-c)\}=0$$

ゆえに

$a\neq b$ のとき　$x=1,\ -\dfrac{a-c}{a-b}$

$a=b$ のとき　$a\neq c$ ならば　$x=1$

　　　　　　$a=c$ ならば　不定

答 $\begin{cases} a\neq b: & 1,\ -\dfrac{a-c}{a-b} \\ a=b\neq c: & x=1 \\ a=b=c: & 不定\ (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$

*　*　*

◆ 解の公式を使う場合を次にやろう。

練習 5. $6x^2-x-35=0$ を解け。

(ヒント) 解の公式によると

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot6\cdot35}}{2\cdot6}=\frac{1\pm\sqrt{841}}{12}$$

$$=\frac{1\pm29}{12}=\frac{5}{2},\ -\frac{7}{3}$$

答 $\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{7}{3}$

練習 6. 2次方程式

$$(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$$

を解け。(一橋大)

(解)　$(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

両辺に $(\sqrt{2}-1)$ を掛けて

$$x^2+(1-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-(1-2\sqrt{2})}{2}$$

$$\pm\frac{\sqrt{(1-2\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}{2}$$

$$=\cdots\cdots$$

答　$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}-1$

＊　＊　＊

◆ 係数に虚数がついているときでも解の公式は使えます。その前に，これを：——

練習 7. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式を導け。　（広島大）

ヒント　$ax^2+bx+c=0$

$a \neq 0$ であるから，両辺を a で割って

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

両辺を平方に開くと

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となります（ここでは $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ は b^2-4ac の平方根を表します）。

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

注　上の解で a，b，c が実数でなければならない，ということはまったく使ってありません。ただ，上のカッコの中で注意したように $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ という記号は b^2-4ac が虚数のときでもその平方根を表す，と約束してあることだけです。そこで，次の問題へ。

練習 8. 2 次方程式 $x^2+ix+1=0$ を解け。

解　解の公式を使って

$$x=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{-5}}{2}$$

$$=\frac{-i\pm\sqrt{5}i}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}i$$

答　$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}i$

練習 9. $x^2+(1+i)x-3(2-i)=0$ を解け。

ヒント　$x=p+qi$（p，q は実数）とおいてもできる（☞ p. 119）し，因数分解することもできますが，解の公式を使ってみましょう。

$$x=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2+4\cdot 3(2-i)}}{2}$$

根号内は

$$1+2i+i^2+24-12i=24-10i$$

そこで，

$$\sqrt{24-10i}=u+vi\quad (u,\ v \text{ は実数})$$

とおいて，両辺を平方すると

$$24-10i=(u^2-v^2)+2uvi$$

$$\therefore\quad u^2-v^2=24 \qquad \cdots\cdots①$$

$$uv=-5 \qquad \cdots\cdots②$$

② より $v=-\dfrac{5}{u}$，① に代入して

$$u^2-\frac{25}{u^2}=24 \qquad \therefore\quad u^4-24u^2-25=0$$

$$\therefore\quad (u^2-25)(u^2+1)=0$$

$$\therefore\quad u=\pm 5 \qquad \therefore\quad v=\mp 1 \quad (\text{複号同順})$$

$$\therefore\quad \sqrt{24-10i}=\pm(5-i)$$

（虚数ノ平方根デスカラ必ズ±ヲ忘レヌヨウ，ゴ用心!!）

$$\therefore\quad x=\frac{-(1+i)\pm(5-i)}{2}=-3,\ 2-i$$

答　-3，$2-i$

もちろん，

$$x^2+(1+i)x-3(2-i)=0$$

の左辺は

$$(x+3)\{x-(2-i)\}=0$$

$$\therefore\quad x=-3,\ 2-i$$

とすぐ出ます。

1	$+3$
1	$-(2-i)$
3	$-2+i$

しかし，すべてがこんなにうまくいくわけではありません。その点上の解の公式を使う方法は **必ずできる** という利点があります。だから，上のようにして求めておいて，結果がわかってから，因数分解でアッサリ解答を書くという知能犯的解答もできないわけではありませんが……。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○複素数とは何か

◆虚数というといかにもあり得べからざる感じ，imaginary number というのは想像上の数というわけ。complex number，ウーン。

◆ 数とは何か。これは大問題です。1とか2とか自然数は素直に受け入れられた。そして，有理数も割合すんなり数として認められたらしい。しかし，無理数となるともう大変だったらしい。やがて，負数が，そして虚数が入ってくる。虚数は imaginary number (想像上の数)の訳ですが，よくこの間の気持ちを示しています。それを complex number，いうなれば複合数としたのはなかなかのことだったのです。それを，複素数と訳している。しかし，素数とは何の関係もありませんよ。

一般に

$a+bi$ (a，b は実数) を 複素数

といい，とくに

bi ($b \fallingdotseq 0$ の実数) を 純虚数

といいます。ここで，i は2乗して -1 となる数で，i を **虚数単位** といいます。

＊　＊　＊

◆ 複素数について大切なことは3つあります。複素数とは何か，と考えるよりも，この3つの問題を処理できるか，ということが本質的と申せましょう。さて，それは：——

第1に複素数の計算です。

■練習 1. $(5+4i)+(8+2i)$ を計算せよ。

(解) $(5+4i)+(8+2i)$

$=(5+8)+(4+2)i=13+6i$ ……答

■練習 2. $\dfrac{1}{i}$ を $a+bi$ (a，b は実数) の形に表せ。

(解) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i$

$=0+(-1)i$ ……答

■練習 3. $(1+i)(1-i)$ を計算せよ。

(解) $(1+i)(1-i)=1-i^2$

$=1-(-1)=2$ ……答

■練習 4. $\dfrac{2-i}{1+i}$ を $a+bi$ (a，b は実数) の形に表せ。

(解) $\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{2-3i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{2-3i-1}{2}=\dfrac{1-3i}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{3}{2}\right)i$ ……答

(注) 分母を実数にすることを有理化という人が多い。しかし，これはおかしい。といって，実数化というコトバも一般的でないし，仕方がないから「分母を実数にする」とでもいうか……。

もう少し，めんどうなものになると，

■練習 5. 実数 a，b に対して

$(a+b)+(a-b)i=1+2i$ $(i^2=-1)$

ならば，a，b の値を求めよ。

(解) $a+b=1$，$a-b=2$

これを解いて

$a=\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$ ……答

■練習 6. $\dfrac{1}{2+3i}+\dfrac{1}{\square}=\dfrac{4}{13}$ $(i=\sqrt{-1})$

の $\square$ に適当な数を入れよ。

(解) $\dfrac{1}{2+3i}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{13}$

とおくと

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{13}-\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{4}{13}-\dfrac{2-3i}{13}=\dfrac{2+3i}{13}$

$\therefore$ $x=\dfrac{13}{2+3i}=\dfrac{13(2-3i)}{13}=2-3i$

答 $2-3i$

2/23

■練習 7. $z=1+2i$ のとき

$$z^4+2z^3+z^2+3z+4$$

の値を求めよ。

(ヒント)　$z=1+2i$

$\therefore\quad z-1=2i$

両辺を 2 乗すると

$$z^2-2z+1=-4$$

$\therefore\quad z^2-2z+5=0$

ところで，$z^4+2z^3+z^2+3z+4$ を z^2-2z+5 で割ると

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & & 1 & 4 & 4 & & \\ 1 & -2 & 5 & \big) 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ & & & 1 & -2 & 5 & & \\ \hline & & & & 4 & -4 & 3 & \\ & & & & 4 & -8 & 20 & \\ \hline & & & & & 4 & -17 & 4 \\ & & & & & 4 & -8 & 20 \\ \hline & & & & & & -9 & -16 \end{array}$$

$\therefore$　与式

$=(z^2-2z+5)(z^2+4z+4)+(-9z-16)$

ところが　$z^2-2z+5=0$

$\therefore$　与式$=-9z-16=-9(1+2i)-16$

$=-25-18i$　……(答)

■練習 8. $f(x)=\dfrac{1}{x+i}$ のとき$f(f(f(2)))$ の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。　（埼玉大）

(解)　$f(2)=\dfrac{1}{2+i}$

$$\therefore\quad f(f(2))=\frac{1}{\frac{1}{2+i}+i}=\frac{2+i}{1+i(2+i)}$$

$$=\frac{2+i}{2i}$$

$$\therefore\quad f(f(f(2)))=\frac{1}{\frac{2+i}{2i}+i}$$

$$=\frac{2i}{(2+i)+i(2i)}$$

$$=\frac{2i}{i}=2$$　(答) 2

＊　＊　＊

◆ 第2は，複素数の平方根を求めること。4の平方根とは，何ヲ2乗スレバ4ニナルカ，ということ。複素数でも同じです。ただ，ちょっと，……，では：——

2/23

■練習 9. 2乗して $-1+\sqrt{3}i$ となる複素数を求めよ。　（中央大）

(ヒント)　$-1+\sqrt{3}i$ の平方根を求めよ，というのと同じです。求めるものは実数でないことは確かですから，これを $x+yi$ (x, yは実数) とおきますと

$$(x+yi)^2=-1+\sqrt{3}i$$

$\therefore\quad (x^2-y^2)+2xyi=-1+\sqrt{3}i$

$\therefore\quad x^2-y^2=-1$　……①

$2xy=\sqrt{3}$　……②

②より $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$，これを①に代入して

$$x^2-\frac{3}{4x^2}=-1$$

$\therefore\quad 4x^4+4x^2-3=0$

$(2x^2+3)(2x^2-1)=0$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 2 & -1 \\ \hline 6 & -2 \end{array}$$

xは実数ですから　$2x^2+3\neq 0$

$\therefore\quad 2x^2-1=0$

$\therefore\quad x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\quad y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(複号同順)

(答)　$\pm\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)$

これについて詳しくは（☞ p. 120）。

■練習 10. 複素数 $z=x+yi$ (x, yは実数) が次の(1)または(2)をみたすように，x, yを定めよ。

(1)　$z^2=i$

(2)　$z^2-4zi+(-4+2i)=0$　（京大）

(ヒント)　$z=x+yi$ を代入して x，yを求める。

(答) $\begin{cases} (1)\quad x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (2)\quad x=y=1\ ;\ x=-1,\ y=3 \end{cases}$

＊　＊　＊

◆ 第3は写像の問題です。

8/1

⑩ iの入った計算

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆虚数単位 i の計算をイヤガッテはいけません。みんなにキラワレル1つの原因は，虚数（キョスウ）という名前にあるのかな。

◆ **虚数単位** i はアイと読みます。書くときは，ふつうの文字 i とは区別したいところだが，虚数の出てくる分野では，i は虚数単位以外に使わないようにすればよい。

ところで，i の重要な性質は

$$i^2=-1$$

だということです。このほかには何もありません。では，これを：──

練習 1. $1+i+i^2+i^3$ を計算せよ。

(ヒント) $i^2=-1$ ですから　$i^3=i^2\cdot i=-i$ です。したがって

$$与式=1+i-1-i=0 \quad \cdots\cdots 答$$

練習 2. $\dfrac{1}{i}$ を $\square+\square i$ の形に書け。

(解) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i=0+(-1)i$

答　$0+(-1)i$

(注) 分母に虚数が入っているとき，このように実数になおしておくことがしばしば必要になります。たいていの人は，これを「有理化する」といいますが，もちろん，まちがったいい方です。しかし，「実数化」というコトバも一般的でないので，いちいち分母・分子に～を掛けて，といったいい方をすることになりましょう。

練習 3. $\dfrac{1+5i}{3-2i}$ を $a+bi$（a，b は実数）の形に書け。　（広島女大）

(解) 分母，分子に $3+2i$ を掛けると

$$与式=\frac{(1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3+2i+15i+10i^2}{9-4i^2}$$
$$=\frac{3+17i-10}{9+4}=\frac{-7+17i}{13}$$
$$=\left(-\frac{7}{13}\right)+\frac{17}{13}i \quad \cdots\cdots 答$$

練習 4. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$ を簡単にせよ。　（福岡大）

(解) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{2})^4}=\dfrac{(1+i)^4}{4}$

ところが

$$分子=(1+2i+i^2)^2$$
$$=(2i)^2=4i^2=-4$$
$$\therefore\quad 与式=\frac{-4}{4}=-1$$

答　-1

*　*　*

◆ 虚数単位 i の入った計算で大切なものが2つあります。1つは，高次式の計算です。

では，まず，これをやってみませんか。

練習 5. $z=1+2i$ のとき z^4+z^3+z+2 の値を求めよ。

(ヒント)
$$z=1+2i$$
$$\therefore\quad z-1=2i$$

この両辺を2乗すると　$z^2-2z+1=-4$

$$\therefore\quad z^2-2z+5=0 \quad \cdots\cdots ①$$

そこで，z^4+z^3+z+2 を z^2-2z+5 で割ってみますと下の通り。

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 3 & 1 & & \\
\hline
1\ \ -2\ \ 5) & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & 1 & -2 & 5 & & \\
\hline
 & & 3 & -5 & 1 & \\
 & & 3 & -6 & 15 & \\
\hline
 & & & 1 & -14 & 2 \\
 & & & 1 & -2 & 5 \\
\hline
 & & & & -12 & -3
\end{array}$$

つまり

$$与式=(z^2-2z+5)(z^2+3z+1)$$
$$+(-12z-3)$$

ここで ① を使って

$$与式=-12z-3=-12(1+2i)-3$$
$$=-15-24i$$

となります。　答　$-15-24i$

◆ 4次式や5次式なら，これでいいのですが10次式にでもなると，割ってやるのはなかなかめんどうです。このときには **次数を下げる** のがいいのです。

練習 6. $z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき z^{123} の値を求めよ。

ヒント　$z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$　　$\therefore\ 2z=1+\sqrt{3}\,i$

$$\therefore\ 2z-1=\sqrt{3}\,i$$

両辺を2乗すると

$$4z^2-4z+1=-3$$

$$\therefore\ z^2=z-1 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned}\therefore\ z^{123}&=z^{122}\cdot z=(z^2)^{61}z\\&=(z-1)^{60}(z^2-z)\\&=(z^2-2z+1)^{30}(-1)\\&=(z-1-2z+1)^{30}(-1)\\&=-(-z)^{30}=-(z-1)^{15}\\&=-(z-1)^{14}(z-1)\\&=-(z^2-2z+1)^7(z-1)\\&=-(-z)^7(z-1)\\&=z^6(z^2-z)\\&=(z-1)^3(-1)\\&=-(z^2-2z+1)(z-1)\\&=-(-z)(z-1)\\&=z^2-z=-1\end{aligned}$$

実は，もっと簡単にできますが，ムリに定石通り，モタモタやったのです。それでも割ることのできないのに目をつけてください。

実際は

$$z^2-z+1=0$$

の両辺に $z+1$ を掛けると

$$z^3+1=0 \qquad \therefore\ z^3=-1$$

$$\therefore\ z^{123}=(z^3)^{41}=(-1)^{41}=-1$$

とすぐ出ます。しかし，どんなのでも，こんなふうにうまくいくとは限りません。

*　*　*

◆ 次に，i の入った計算で大切なのは平方根を求めることです。

練習 7. 2乗して $3+4i$ になる複素数を求めよ。（岡山大）

解　求める複素数を $a+bi$（a，b は実数）としますと

$$(a+bi)^2=3+4i$$

$$\therefore\ (a^2-b^2)+2abi=3+4i$$

$$\therefore\ a^2-b^2=3\cdots\cdots①,\qquad ab=2\cdots\cdots②$$

② より

$$b=\frac{2}{a}$$

これを ① に代入して

$$a^2-\frac{4}{a^2}=3$$

$$\therefore\ a^4-3a^2-4=0$$

$$\therefore\ (a^2-4)(a^2+1)=0$$

a は実数ですから　$a^2+1\fallingdotseq 0$

$$\therefore\ a=\pm 2$$

$$\therefore\ b=\pm 1\ （複号同順）$$

ゆえに，求める複素数は

$$\pm 2\pm 1\cdot i=\pm(2+i) \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 8. $z^2-4iz+(-4+2i)=0$ を解け。（京大）

解　$z=a+bi$（a，b は実数）とおいて代入すると

$$(a+bi)^2-4i(a+bi)+(-4+2i)=0$$

$$\therefore\ (a^2-b^2+2abi)-(4ai-4b)+(-4+2i)=0$$

$$\therefore\ (a^2-b^2+4b-4)+(2ab-4a+2)i=0$$

$$\therefore\ a^2-b^2+4b-4=0 \qquad\cdots\cdots①$$

かつ

$$ab-2a+1=0 \qquad\cdots\cdots②$$

① より

$$a^2-(b-2)^2=0$$

$$\therefore\ \{a+(b-2)\}\{a-(b-2)\}=0$$

$$\therefore\ a=2-b\quad あるいは\quad a=b-2$$

これを ② に代入して解くと

$$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases},\quad\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$$

ゆえに，求める解は $-1+3i$ と $1+i$ である。　$\boxed{答}$ $-1+3i,\ 1+i$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑複素数の平方根の求め方

◆複素数の平方根を求めることはときに重要です。だから，その求め方と，使い方をマスターしておきたいのデス。

◆　$(1+2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i$
は誰でもできますね。しかし，$-3+4i$ の平方根を求めよ，といえば，なかなかできない人も多いでしょう。それは，次のようにやるのです。では：――

■練習 1. $-3+4i$ の平方根を求めよ。

ヒント　求める平方根を $a+bi$（a，bは実数）としますと

$$(a+bi)^2=-3+4i$$

$$\therefore \quad (a^2-b^2)+2abi=-3+4i$$

$$\therefore \quad \begin{cases} a^2-b^2=-3 & \cdots\cdots ① \\ ab=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

さて，この実数解を求めればよいのですが，やり方はいろいろあるでしょう。ここでは②から b を求めて①に代入するとしようか。

②より　$b=\dfrac{2}{a}$　……③

これを①に代入して

$$a^2-\frac{4}{a^2}=-3$$

$$\therefore \quad a^4+3a^2-4=0$$

$$\therefore \quad (a^2+4)(a^2-1)=0$$

$$\therefore \quad a=\pm 1 \quad (a\text{は実数})$$

ゆえに③より

$$b=\pm 2$$

$$\therefore \quad a+bi=\pm 1+(\pm 2)i=\pm(1+2i)$$

答　$\pm(1+2i)$

2/14

■練習 2. i の平方根を $x+yi$ の形で書け。ただし，x，y は実数とする。（一橋大）

ヒント　$(x+yi)^2=i$ とおいてみるのはいうまでもない。そして，そして，……

解　$(x+yi)^2=i$

$$\therefore \quad (x^2-y^2)+2xyi=i$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2xy=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より

$$x^2=y^2 \qquad \therefore \quad x=\pm y$$

$x=y$ ならば，②に代入して

$$2x^2=1 \qquad \therefore \quad x^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{複号同順})$$

$x=-y$ ならば，②に代入して

$$-2x^2=1 \qquad \therefore \quad x^2=-\frac{1}{2} \quad (\text{不適})$$

ゆえに，求める平方根は $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ である。

オヤ，これはまずい。問題には，ワザワザ $x+yi$ の形に書け，とあるのだから，これではまずいだろう。上の1行を削除して，次のように書く。

ゆえに

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

が求めるものである。

答　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i$

■練習 3. 2乗して $3+4i$ となる複素数を求めよ。（阪大）

答　$\pm(2+i)$

*　*　*

◆　これで大事なことは終わりです。なーんだ。ずいぶんやさしいんだなあ，などといってはいけません。次のようなのもあるのですから。とはいっても，これは無理数の計算が

めんどうなだけです。ムリにやることもありませんが，……。

■練習 4. a，b を実数とし，$b \neq 0$ とするとき，$a+bi$ の平方根を求めよ。（大阪府大）

ヒント　x，y を実数として

$$(x+yi)^2=a+bi$$

とおくと

$$\begin{cases} x^2-y^2=a & \cdots\cdots① \\ 2xy=b & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より

$$y=\frac{b}{2x} \qquad \cdots\cdots③$$

ここで $x=0$ のときどうするかなどと心配する必要はありません。なぜかって，仮定により $b \neq 0$　∴　$x \neq 0$ だからです。

③を①に代入して

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a$$

$$\therefore\quad 4x^4-4ax^2-b^2=0$$

$x^2>0$ ですから，

$$x^2=\frac{2a+\sqrt{4a^2+4b^2}}{4}=\frac{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}{4}$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}{2} \qquad \cdots\cdots④$$

次に，④を③に代入して

$$y=\frac{b}{\pm\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \cdots\cdots⑤$$

これでやめては，まさに，九仞の功を一簣に欠く，というものだ。$b>0$ ならば

$$y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$=\pm\sqrt{\frac{b^2(2a-2\sqrt{a^2+b^2})}{4a^2-4(a^2+b^2)}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{b^2(-2a+2\sqrt{a^2+b^2})}{4b^2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}{2}$$

ゆえに $b>0$ のとき，求める平方根は

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}+\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right)$$

となります。次に $b<0$ のときには

$$b\sqrt{2}=\sqrt{2b^2}$$

ではありませんよ。

$$b\sqrt{2}=-\sqrt{2b^2}$$

なんです。だから⑥の $\pm$ が $\mp$ に変わって

$$y=\mp\sqrt{\frac{b^2}{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$=\cdots\cdots=\mp\frac{\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}{2}$$

かくして，$b<0$ のとき，求める平方根は

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right)$$

となります。このように b の符号で 2 つに分けることが必要です。

しかし，これは，平方根を求めることがめんどうなのではなく，あくまでも無理数の計算がめんどうだっただけです。

*　　*　　*

◆　では，応用例を 1 つ。ムリにやることもありませんが，気が向いたらやってください。

■練習 5.　$x^2-(3+2i)x+(8-6i)=0$ を解け。

ヒント　2 次方程式の解の公式を作る手順を調べてみるとわかるように，係数に虚数があっても使うことができます。ただ，根号は平方根を表すことに注意のこと。

さて，公式を使って解くと

$$x=\frac{(3+2i)\pm\sqrt{(3+2i)^2-4(8-6i)}}{2}$$

$$=\frac{(3+2i)\pm\sqrt{-27+36i}}{2}$$

ところが

$$\sqrt{-27+36i}=3\sqrt{-3+4i}=\pm3(1+2i)$$

$$\therefore\quad x=\frac{(3+2i)\pm3(1+2i)}{2}=3+4i,\ -2i$$

もし，ヤル気があったら，次も。

■練習 6. $x^2-(1+3i)x+(-2+2i)=0$ を解け。　　答　$1+i$，$2i$

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

① 1の虚数立方根ωの性質

◆ωをwと書いてはいけません。オメガはギリシア文字の最後の文字，バイブルに曰く「われはアルファなり，オメガなり」と。

◆ ナニを3乗したら1になるか？　これが**1の立方根**です。1の立方根をzとしますと

$$z^3=1 \qquad \therefore\ z^3-1=0$$

$$\therefore\ (z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$$

つまり，1の立方根は3つあって，1つは1，他の2つは虚数です。これを**1の虚数立方根**，あるいは**虚立方根**というのです。

*　*　*

◆ さて，1の虚数立方根は，ふつうωで表します。2つあるのに，ωで表すのは次のような事情からです。

1の虚数立方根は2つありますが，一方を2乗すると他方に等しくなります。すなわち

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-3-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-3+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

だから，一方をωで表すと，他の1つはω^2で表せる!!　そこで，1の立方根は1，ω，ω^2だといえるわけです。

練習1. 8の立方根を求めよ。

ヒント　$z^3=8$ とおくと

$$\frac{z^3}{8}=1 \qquad \therefore\ \left(\frac{z}{2}\right)^3=1$$

ゆえに，1の虚数立方根をωとすると

$$\frac{z}{2}=1,\ \omega,\ \omega^2$$

$$\therefore\ z=2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$$

と書けます。答としては，ただし，ωは1の虚数立方根と説明しておくことを忘れまい。

練習2. iの立方根を求めよ。ただし，iは虚数単位である。

ヒント　**虚数単位**とは，2乗して-1に等しくなるものです。

さて，iの立方根をzとすると

$$z^3=i$$

ところが

$$(-i)^3=-i^3=-i^2\cdot i=-(-1)i=i$$

ですから

$$z^3=(-i)^3$$

$$\therefore\ \left(\frac{z}{-i}\right)^3=1$$

ゆえに1の虚数立方根をωとすると

$$\frac{z}{-i}=1,\ \omega,\ \omega^2$$

$$\therefore\ z=-i,\ -i\omega,\ -i\omega^2$$

ということになります。

*　*　*

◆ 1の虚数立方根をωとすると，もちろん

$$\omega^3=1$$

$$\therefore\ \omega^3-1=0$$

$$\therefore\ (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

ωは虚数ですから，もちろん $\omega-1\neq0$

$$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$$

このことは直接計算しても出てきます。

$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\quad(\text{複号同順})$$

$$\therefore\ 1+\omega+\omega^2$$

$$=1+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$$

この関係はきわめて大切で，ωについての難問はほとんどこれに帰着するのです。では次の練習3.をやってみませんか。

2/24

練習 3. 1の虚数立方根をωとするとき
$$(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$
$$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
となることを証明せよ。（早大）

ヒント　左辺$=x^2+y^2\omega^3+z^2\omega^3$
$$+xy(\omega+\omega^2)+yz(\omega^2+\omega^4)+zx(\omega+\omega^2)$$
$$=x^2+y^2+z^2+xy(-1)+yz(-1)+zx(-1)$$
$$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

Q. E. D.

ここで，$\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$ を使ったのですが，おわかりでしたか。では，次へ。

練習 4. 1の虚数立方根をωとするとき，
$$x=a+b,\quad y=a+b\omega,\quad z=a+b\omega^2$$
ならば $x^3+y^3+z^3$ を a，b で表せ。

（早大）

ヒント　$x^3+y^3+z^3$
$$\begin{aligned}&=(a+b)^3+(a+b\omega)^3+(a+b\omega^2)^3\\&=\ \ a^3+3a^2b\ \ +3ab^2\ \ +b^3\\&\quad+a^3+3a^2b\omega\ +3ab^2\omega^2+b^3\omega^3\\&\quad+a^3+3a^2b\omega^2+3ab^2\omega^4+b^3\omega^6\\&=3(a^3+b^3)\end{aligned}$$
なぜなら $1+\omega+\omega^2=0$，$1+\omega^2+\omega^4=0$ だからですよ。

＊　＊　＊

◆　1の虚数立方根をωとすれば，もちろん
$$\boldsymbol{\omega^3=1}$$
です。だからω^nはnが3の倍数か，3で割った余りが1か，余りが2かでちがってきます。つまり，
$$\omega^n=\begin{cases}n=3k\ \text{のとき}&\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1^k=1\\n=3k+1\ \text{のとき}&\omega^{3k+1}=\omega^{3k}\cdot\omega=\omega\\n=3k+2\ \text{のとき}&\omega^{3k+2}=\omega^{3k}\cdot\omega^2=\omega^2\end{cases}$$
といったことになります。

ωの関係した難問はほとんどこの応用ですから，お忘れなく。

さて，次の練習5. をやってみませんか。

2/27

練習 5. $x^2+x+1=0$ のとき，整数nに対して $\dfrac{x^n+1}{x^{2n}}$ の値を求めよ。（奈良県医大）

ヒント　$x^2+x+1=0$ の解はωとω^2ですから

$n=3k$（kが整数）のとき $x=\omega$ ならば
$$\frac{x^n+1}{x^{2n}}=\frac{\omega^{3k}+1}{\omega^{6k}}=\frac{1+1}{1}=2$$
$n=3k+1$ のとき
$$\frac{x^n+1}{x^{2n}}=\frac{\omega^{3k+1}+1}{\omega^{6k+2}}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$
$n=3k+2$ のとき
$$\frac{x^n+1}{x^{2n}}=\frac{\omega^{3k+2}+1}{\omega^{6k+4}}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$
$x=\omega^2$ のときはやる必要のないことはωの性質からオワカリでしょう。

＊　＊　＊

◆　ωのいま1つ大切な性質は
$$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\ \text{ならば}\ \omega^2=\frac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}$$
（複号同順）なんですから
$$\boldsymbol{\overline{\omega}=\omega^2,\quad \overline{\omega^2}=\omega}$$
だということです。ここに$\overline{\omega}$はωの共役複素数を表しています。

なお，複素数 $z=a+bi$（a，bは実数）と $\overline{z}=a-bi$ とは **互いに共役である** といいます。あるいは$\overline{z}$はzの **共役複素数** ともいいます。そして

[redacted]

で，$\sqrt{a^2+b^2}$ を $|z|$ で表します。

練習 6. ωを $\omega^2+\omega+1=0$ を満足する1つの複素数とする。$\alpha=a+b\omega$（a，bは実数）に対し，$f(\alpha)=(a+b\omega)\{a-b(\omega+1)\}$ とおくとき，$f(\alpha)$ は負でない実数であることを示せ。（東京学芸大）

解　$-(\omega+1)=\omega^2=\overline{\omega}$ であるから
$$\begin{aligned}f(\alpha)&=(a+b\omega)(a+b\overline{\omega})\\&=(a+b\omega)(\overline{a+b\omega})\\&=|a+b\omega|^2\geqq0\end{aligned}$$

Q. E. D.

1の虚数立方根ωは直接間接いろいろ重要な役割を演ずるのですから，基礎的な性質をよくつかんで使いこなせるようにしておきたいものです。

○判別式とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆discriminant：訳して判別式，という。ところで discriminate はと辞書をみると，識別する，差別待遇する，とあった。

◆ 高校で判別式といえば，2次方程式の場合しか考えないのですが，実は3次方程式でも4次方程式でも，それはあるのです。

サハ，サリナガラ，2次方程式から：——

実係数の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式をDとすると

$$D=b^2-4ac$$

です。それは，どんな意味があるのか？

*　*　*

◆ 第1に判別式は，判別する式，なんです。何を判別するのか？

$D>0$ のとき　相異なる2実数解
$D=0$ のとき　相等しい2実数解
$D<0$ のとき　共役な複素数解

をもつのです。

■練習1. 2次方程式 $x^2-ax-2=0$ は2つの異なる実数解をもつことを示せ。ただし a は実数である。

ヒント　判別式をDとすると

$$D=a^2-4\cdot1(-2)=a^2+8>0$$

よって証明された。

-1?

■練習2. 2次方程式 $x^2+2(k+1)x+9=0$ が虚数解をもつよう k の整数値を求めよ。

ヒント　判別式をDとしますと

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-9<0$$

$$\therefore\quad (k+4)(k-2)<0$$

$$\therefore\quad -4<k<2$$

答　$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$

*　*　*

◆ 第2は曲線の交わる条件や接する条件を求めるのに使います。

■練習3. 2つの放物線 $y=x^2+ax-1$ と $y=-x^2+bx+2$ は2点で交わることを示せ。ただし，a，b は定数である。

ヒント　yを消去すると

$$2x^2+(a-b)x-3=0$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$$D=(a-b)^2-4\cdot2\cdot(-3)$$
$$=(a-b)^2+24>0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

*　*　*

◆ 未知数が2つ以上含まれた方程式の実数解を求めるのに使われます。

いい

■練習4. $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$ の実数解を求めよ。　（京都薬大）

ヒント　xについて整理しますと

$$x^2-2(2y-1)x+(5y^2-8y+5)=0 \quad \cdots\cdots①$$

判別式をDとしますと，xの実数条件から

$$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-(5y^2-8y+5)\geqq0$$

$$\therefore\quad -y^2+4y-4\geqq0$$

$$\therefore\quad y^2-4y+4\leqq0$$

$$\therefore\quad (y-2)^2\leqq0$$

実数 $y-2$ の2乗が負になることはない。だから

$$y-2=0 \qquad \therefore\quad y=2$$

これを①に代入して　$x^2-6x+9=0$

$$\therefore\quad (x-3)^2=0 \qquad \therefore\quad x=3$$

答　$x=3,\ y=2$

連立方程式でも同じことです。

■練習5. 連立方程式

$$x+y+z=3,\quad x^2+y^2+z^2=3$$

の実数解を求めよ。

ヒント まずzを消去しましょう。

$$z=3-x-y \quad \cdots\cdots①$$

を第2式に代入して

$$x^2+y^2+(3-x-y)^2=3$$

xについて整理して

$$x^2-(3-y)x+(y^2-3y+3)=0 \quad \cdots\cdots②$$

xは実数だから，判別式Dをとると，

$$D=(3-y)^2-4(y^2-3y+3)\geqq 0$$

$$\therefore\ (y-1)^2\leqq 0 \qquad \therefore\ y=1 \quad \cdots\cdots③$$

これを②に代入して

$$x^2-2x+1=0 \qquad \therefore\ (x-1)^2=0$$

$$\therefore\ x=1 \quad \cdots\cdots④$$

③，④を①に代入して

$$z=1$$

答 $x=y=z=1$

* * *

◆ 1つの式から1つの文字を消去するときに威力を発揮することが多い。

7/17

練習 6. $a>0$, $b>0$, $x>0$ で $\log ax\log bx+1=0$ のとき，$\dfrac{a}{b}$ のとりうる値の範囲を求めよ。 (東大)

ヒント $\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ，というのですから，解は $123<\dfrac{a}{b}<456$ といった形になるでしょう。してみると，**与えられた関係式からxを追い出す** と，こんなものが出るにちがいない。しかし，1つの式から，1つの文字をなくすことができるだろうか。ここで実数条件がものをいう。では：――

$$\log ax\log bx+1=0$$

$$\therefore\ (\log x+\log a)(\log x+\log b)+1=0$$

$\log x=u$ とおくと

$$u^2+(\log a+\log b)u+(\log a\log b+1)=0$$

uは実数だから，判別式をDとすると，

$$(\log a-\log b)^2-4\geqq 0$$

$$\therefore\ \left(\log\frac{a}{b}\right)^2\geqq 4 \quad \cdots\cdots①$$

$$\log\frac{a}{b}\geqq 2 \quad \text{あるいは} \quad \log\frac{a}{b}\leqq -2$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}\geqq 100 \quad \text{あるいは} \quad 0<\frac{a}{b}\leqq\frac{1}{100}$$

……答

注 ①までやってから

$$\log\frac{a}{b}\geqq\pm 2$$

とやる人のいかに多きことか。トンデモナイマチガイ!!

* * *

◆ 最大・最小の問題に重要です。詳しくはそのほう（☞ p. 232）をみてください。

練習 7. xを実数とするとき $x^2-6x+10$ の最小値を求めよ。

ヒント $y=x^2-6x+10$ とおくと

$$x^2-6x+(10-y)=0 \quad \cdots\cdots①$$

xは実数ですから，判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=3^2-(10-y)\geqq 0 \qquad \therefore\ y\geqq 1$$

$y=1$ を①に代入してxを求めると3となる。つまり，$x=3$ のときこの式は最小値1をとるのです。

7/17

練習 8. xを実数とするとき

$$\frac{3x^2+3x+1}{x^2+x+1}$$

の最大値，最小値を求めよ。

ヒント $y=\dfrac{3x^2+3x+1}{x^2+x+1}$ とおいて分母をはらって整理すると

$$(y-3)x^2+(y-3)x+(y-1)=0 \quad \cdots\cdots①$$

$y\neq 3$ のとき：判別式をDとすると

$$D=(y-3)^2-4(y-3)(y-1)\geqq 0$$

$$\therefore\ (y-3)(3y-1)\leqq 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}\leqq y<3 \quad (\because\ y\neq 3)$$

$y=\dfrac{1}{3}$ を①に代入すると，……

$y=3$ のとき：これを①に代入すると，……

答 最小値 $\dfrac{1}{3}$；最大値 なし

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○2次方程式の解の判別

◆解の判別といえば判別式，判別式といえば実数解，虚数解と連想されるのも妙なものです。判別というコトバの狭さ!!

◆ a，b，cが実数のとき，2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解が実数か虚数かを判別するために判別式

$$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$$

を使います。すなわち

$D>0$ のとき　相異なる実数解
$D=0$ のとき　相等しい実数解
$D<0$ のとき　相異なる虚数解

をもつのです。おや，おかしいな，相等しい虚数解というのがないじゃないか，と思うかもしれません。係数が実数のときは相等しい虚数解をもつことはないのです。

（注）$ax^2+2bx+c=0$ なら，判別式をDとすると

$$D=(2b)^2-4ac=4(b^2-ac)$$

つまり

$$\frac{D}{4}=b^2-ac$$

を使うほうが便利です。念のため。

*　*　*

◆ では，次の練習1.をやってみませんか。

練習1. 2次方程式 $x^2+ax-4=0$ はaの任意の実数値に対して相異なる実数解をもつことを示せ。

（解）判別式をDとすると

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(-4)=a^2+16>0$$

ゆえに，相異なる実数解をもつ。

練習2. 2次方程式 $x^2+2x+a=0$ が相異なる実数解をもつように実定数aの範囲を求めよ。

（解）判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot a>0 \qquad \therefore\ a<1 \cdots\cdots \boxed{答}$$

◆ 重複解をもつための条件は，**判別式$=0$** でしたね。では，これを：——

練習3. 2次方程式 $x^2+mx+m=0$ が重複解をもつように実数mを定めよ。

（解）判別式をDとすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot m=0$$
$$\therefore\ m(m-4)=0$$
$$\therefore\ m=0,\ 4 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習4. 2次方程式 $ax^2-(a-1)x+a=0$ が重複解をもつように実定数aの値を求めよ。

（解）判別式をDとすると

$$D=(a-1)^2-4\cdot a\cdot a=0$$
$$\therefore\ (a-1)^2-(2a)^2=0$$
$$\therefore\ \{(a-1)+2a\}\{(a-1)-(2a)\}=0$$
$$(3a-1)(a+1)=0$$
$$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ -1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 最後は虚数解をもつ条件，**判別式<0** です。では，それを：——

練習5. 2次方程式 $x^2+x+1=0$ は虚数解をもつことを示せ。

（解）判別式をDとすると

$$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

よって証明された。

練習6. 2次方程式 $x^2+2(m+1)x+9=0$ が虚数解をもつように実定数mの範囲を定めよ。

（解）判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-9<0$$

$\therefore\ (m+4)(m-2)<0$

$\therefore\ -4<m<2$ ……答

＊　＊　＊

◆ 以上で大切なことは終わりです。だから，解の判別でめんどうな問題というのは，因数分解がめんどうであったり，係数に入っている三角関数の扱い方がよくわかっていなかったり，というくらいのものなんです。

では，これをやってみませんか。

1/17

■練習 7. 2つの2次方程式

$(x+1)^2=2a+1$ ……①

$(x+2)^2=2ax$ ……②

のうち，少なくとも1つは実数解をもつことを証明せよ。ただし，aは実数である。

(熊本大)

ヒント 両方とも虚数解をもつ条件を求めてみればいいでしょう。

①が虚数解をもつのは判別式をとるまでもない，$2a+1<0$ ですね。つまり

$$a<-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

次に，②を変形して

$$x^2-2(a-2)x+4=0$$

が虚数解をもつのは，判別式をDとして

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-4<0$$

$\therefore\ a(a-4)<0$

$\therefore\ 0<a<4$ ……④

③，④を共に満足する a はない。よって証明された。

■練習 8. 実係数の3つの2次方程式

$$\begin{cases} ax^2+2bx+c=0 \\ bx^2+2cx+a=0 \\ cx^2+2ax+b=0 \end{cases}$$

のうち，少なくとも1つは実数解をもつことを証明せよ。

(広島大)

ヒント 背理法でやればいいでしょう。いずれも虚数解をもつとすると

$$b^2-ca<0,\ c^2-ab<0,\ a^2-bc<0$$

が成り立つハズ。これが不合理であることを示せばいいわけです。

1つの方法は，この3つを辺々相加えますと，

$$(b^2-ca)+(c^2-ab)+(a^2-bc)<0$$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}<0$

これは確かに不合理です。ついでにもう1つの方法をあげておきましょう。

3つの不等式を変形して

$$b^2<ca,\ c^2<ab,\ a^2<bc$$

両辺正ですから，辺々掛けても成り立つ。

$\therefore\ b^2c^2a^2<(ca)(ab)(bc)$

$\therefore\ a^2b^2c^2<a^2b^2c^2$

これは不合理です。　Q. E. D.

■練習 9. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ が重複解をもつための条件を求めよ。ただし，$a,\ b,\ c$ は実数ですべて異なるものとする。

解 判別式をDとすると

$$D=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$$

$\therefore\ (b-c)^2-4\{-a^2+(b+c)a-bc\}=0$

$\therefore\ 4a^2-4(b+c)a+(b+c)^2=0$

$\therefore\ \{2a-(b+c)\}^2=0$

$\therefore\ 2a=b+c$

ゆえに求める条件は a が b と c の相加平均であることである。

注 $f(x)=(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)$ とすると

$$f(1)=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

ゆえに，$x=1$ は1つの解です。とすると，重複解をもつには他の解αも1であればいいでしょう。解と係数の関係から

$$1\cdot\alpha=\frac{c-a}{a-b}$$

ゆえに，求める条件は $\dfrac{c-a}{a-b}=1$ で，この式の分母をはらって

$$c-a=a-b$$

$\therefore\ 2a=b+c$

○2次方程式の重複解条件

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆判別式をふつうDで表す。なぜか。それは判別式の頭文字がDではじまるからなんです。なんだって!!　判別式ならHでは，……

◆ $x^2+6x+9=0$ は $(x+3)^2=0$ と書けますから，解としては -3 が2つあることになります。このように，同じ解があるとき，これを **重複解**（あるいは **重解**，**重根**）といいます。ここでは重複解の求め方，重複解をもつ条件，その応用などについてやってみましょう。

さて，実係数の2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の判別式をDとしますと

$$D=b^2-4ac$$

で与えられ，

$D>0$ のとき　相異なる2実数解
$D=0$ のとき　相等しい2実数解
$D<0$ のとき　共役な2つの虚数解

をもちます。

■練習 1. $x^2+2x+a=0$ が重複解をもつように実定数aの値を求めよ。

(ヒント) 判別式をDとしますと

$$D=2^2-4\cdot1\cdot a=0$$

$$\therefore\quad 4-4a=0\qquad\therefore\quad a=1$$

(注) 2次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の判別式をDとすると

$$D=(2b)^2-4ac$$

ですから，

$$\frac{D}{4}=b^2-ac$$

となります。上の練習も

$$x^2+2\cdot1x+a=0$$

と考えて，次のようにやったほうがラクです。

$$\frac{D}{4}=1-a=0\qquad\therefore\quad a=1$$

■練習 2. 2次方程式

$$x^2+2(m-1)x+m(m+1)=0$$

が重複解をもつように，実定数mの値を求めよ。

(ヒント) 判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-m(m+1)=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

2/17

■練習 3. 2次方程式

$$3x^2+x+1+k(x^2+2x+2)=0$$

が重複解をもつように，実定数kの値を求めよ。
（奈良教育大）

(解) xについて整理して

$$(3+k)x^2+(1+2k)x+(1+2k)=0$$

判別式をDとすると

$$D=(1+2k)^2-4(3+k)(1+2k)=0$$

$$\therefore\quad (2k+1)(2k+11)=0$$

$$\therefore\quad k=-\frac{1}{2},\ -\frac{11}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式によると

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ですから，

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重複解をもつときには，

判別式は　$D=b^2-4ac=0$

重複解は　$x=-\dfrac{b}{2a}$

であることがわかります。では，これを：――

■練習 4. 2次方程式

$$x^2-x\log(a+1)(3-a)$$
$$+\log(a+1)\cdot\log(3-a)$$
$$-\log(a^2-4ab+5b^2)+2\log b=0$$

7/18

が重複解をもつとき x, a, b を求めよ。

（慶大）

ヒント 判別式をDとすると

$$D=\{\log(a+1)(3-a)\}^2-4\log(a+1)\times\log(3-a)+4\log(a^2-4ab+5b^2)-8\log b=0 \quad \cdots\cdots①$$

はじめの２つの項は

$$\{\log(a+1)+\log(3-a)\}^2-4\log(a+1)\times\log(3-a)=\{\log(a+1)-\log(3-a)\}^2$$

と変形できましょう。あとの２つは

$$4\{\log(a^2-4ab+5b^2)-\log b^2\}$$
$$=4\log\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\left(\frac{a}{b}\right)+5\right\}$$
$$=4\log\left\{\left(\frac{a}{b}-2\right)^2+1\right\}\geqq 4\log 1=0$$

$$\therefore\quad D=\{\log(a+1)-\log(3-a)\}^2+4\log\left\{\left(\frac{a}{b}-2\right)^2+1\right\}=0$$

第１項，２項とも $\geqq 0$ ですから，$=0$ となるためには

$$\log(a+1)-\log(3-a)=0 \quad \cdots\cdots②$$

かつ

$$\log\left\{\left(\frac{a}{b}-2\right)^2+1\right\}=0 \quad \cdots\cdots③$$

でなければなりません。②より

$$a+1=3-a \qquad \therefore\quad a=1$$

③より

$$\frac{a}{b}-2=0 \qquad \therefore\quad b=\frac{1}{2}$$

そして，その重複解は

$$\frac{1}{2}\log(a+1)(3-a)=\frac{1}{2}\log 4=\log 2$$

答　$a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $x=\log 2$

この問題はなかなかの難問です。①のところでどうにもならなくなってしまうでしょう。しかし，それは重複解の問題としてのめんどうさではなく，対数の入った式の変形になかなか気がつかない，ということなのです。難問というのは，だいたいそうしたものなのです。

練習 5. $a \neq b$ のとき，２次方程式

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$

が重複解をもてば $b+c=2a$ であることを示せ。ただし，a, b, c は実数。（横浜市大）

解 判別式をDとすると

$$D=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$$
$$\therefore\quad (b-c)^2+4a^2-4(b+c)a+4bc=0$$
$$\therefore\quad 4a^2-4(b+c)a+(b+c)^2=0$$
$$\therefore\quad \{2a-(b+c)\}^2=0$$
$$\therefore\quad 2a=b+c$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ 重複解条件はいろいろな場合に必要になります。接線であるための条件，完全平方式となるための条件など。次に，その練習を。

練習 6. 円 $x^2+y^2=4$ と，これに接する傾き３の直線との接点を求めよ。（法政大）

解 傾き３の直線を $y=3x+b$ とすると，これが円 $x^2+y^2=4$ と接するための条件は

$$x^2+(3x+b)^2=4$$

が重複解をもつことである。これを変形して

$$10x^2+6bx+(b^2-4)=0$$

判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(3b)^2-10(b^2-4)=0$$

これから　$b=\pm 2\sqrt{10}$

また，接点は

$$x=-\frac{6b}{2\cdot 10}=\mp\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore\quad y=3\left(\mp\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)\pm 2\sqrt{10}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$$

7/18 答　$\left(\pm\frac{3\sqrt{10}}{5},\ \mp\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$（複号同順）

練習 7. x^2+4x+a が完全平方式となるように定数 a の値を求めよ。

ヒント 判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=2^2-a=0 \qquad \therefore\quad a=4 \cdots\cdots 答$$

なお，接線については（☞ p. 282）を，完全平方式については（☞ p. 18）を参照。

8/20

2次方程式の解と係数の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆解と係数との関係は実に美しい。方程式の理論の中でも，とくに目につく。とはいっても，まったく，目に入らぬ人もあろうか。

◆　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β としますと

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

が恒等的に成り立ちます。右辺を展開すると

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$$

ですから，両辺の係数を比較して

$$b=-a(\alpha+\beta),\quad c=a\alpha\beta$$

したがって，

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

これが，**2次方程式の解と係数の関係**といわれるものです。では：——

■練習 1. 2次方程式 $3x^2+x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

（解）　解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{1}{9}-\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$$

答　$\dfrac{7}{9}$

■練習 2. 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とするとき $a^2(\alpha-\beta)^2$ を a，b，c で表せ。

（早大）

（解）　解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\quad a^2(\alpha-\beta)^2=a^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

$$=a^2\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)\right\}$$

$$=a^2\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right)=b^2-4ac\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 3. $2x^2-2x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき $\dfrac{\alpha^2}{\beta}-\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ の値を求めよ。

（広島大）

（ヒント）　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

は，いいでしょう。ところが，

$$\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}}{\alpha\beta}$$

ですから，$\alpha-\beta$ が困る。これには2つの方法があります。1つは

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4\left(-\frac{1}{2}\right)=3$$

とするもの。他の1つは，解の公式から

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\quad \text{かつ}\quad \beta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\quad \text{かつ}\quad \beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ですから

$$\alpha-\beta=\sqrt{3}\quad \text{あるいは}\quad \alpha-\beta=-\sqrt{3}$$

とするもの。いずれにもせよ，

$$\alpha-\beta=\pm\sqrt{3}$$

かくして，

$$\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}=\pm\sqrt{3}\cdot\frac{1^2-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\mp3\sqrt{3}$$

答　$\pm3\sqrt{3}$

（注）　上の解で複号同順で $\mp3\sqrt{3}$ としましたが，答では，どちらでもいいとはいいながら，$\pm3\sqrt{3}$ のほうがいいにきまっている。答にきてもまだ $\mp3\sqrt{3}$ と固執する人が多い。

＊　＊　＊

◆ さて，上で扱ったのは解の関係式を係数で表したものですが，1 歩進んで，解の条件から値を求める問題も多いのです。さあ，やってみましょう。

■**練習 4.** 方程式 $x^2+(m-5)x+18=0$ の 2 つの解の比が 2：1 であるように m の値を定めよ。

ヒント 2 つの解を 2α，α としていいでしょう。解と係数の関係から

$$2\alpha+\alpha=-(m-5) \quad \cdots\cdots①$$
$$2\alpha\cdot\alpha=18 \quad \cdots\cdots②$$

② より　$\alpha=\pm3$

$\alpha=3$ のとき ① より　$m=-4$

$\alpha=-3$ のとき ① より　$m=14$

答 -4，14

2/28

■**練習 5.** 方程式 $x^2-(k-1)x+2k=0$ の 2 つの解の差が 5 であるように k の値を定めよ。（熊本大）

ヒント 2 つの解を α，$\alpha+5$ としていいでしょう。そうすると，解と係数の関係から

$$\alpha+(\alpha+5)=k-1 \quad \cdots\cdots①$$
$$\alpha(\alpha+5)=2k \quad \cdots\cdots②$$

① より　$\alpha=\dfrac{k-6}{2}$

これを ② に代入して

$$\frac{k-6}{2}\cdot\frac{k+4}{2}=2k$$

$\therefore\ k^2-10k-24=0$

$\therefore\ (k+2)(k-12)=0$

$\therefore\ k=-2,\ 12$ ……答

*　*　*

◆ 一般に解に何か条件が与えられて，何かを求める，といったタイプの問題は必ずといっていいくらい解と係数の関係を使えばできるものなのです。

2/29

■**練習 6.** 2 次方程式 $x^2+(a-6)x+a=0$ の 2 つの解が整数であるように a を求めよ。（下関市大）

ヒント 2 つの解を α，β としますと

$$\alpha+\beta=-(a-6) \quad \cdots\cdots①$$
$$\alpha\beta=a \quad \cdots\cdots②$$

①，② から a を消去しますと

$$\alpha\beta+\alpha+\beta-6=0$$

これの整数解を求めることになりました。これはきまっているタイプ（☞ p. 162）です。

β について解きますと

$$\beta=\frac{-\alpha+6}{\alpha+1}=-1+\frac{7}{\alpha+1}$$

β は整数ですから $\dfrac{7}{\alpha+1}$ も整数，ゆえに

$\alpha+1$ は 7 の約数

$\therefore\ \alpha+1=\pm1,\ \pm7$

$\therefore\ \alpha=0,\ -2,\ 6,\ -8$

それぞれの値に対して

$\beta=6,\ -8,\ 0,\ -2$

$\therefore\ a=0,\ 16$ ……答

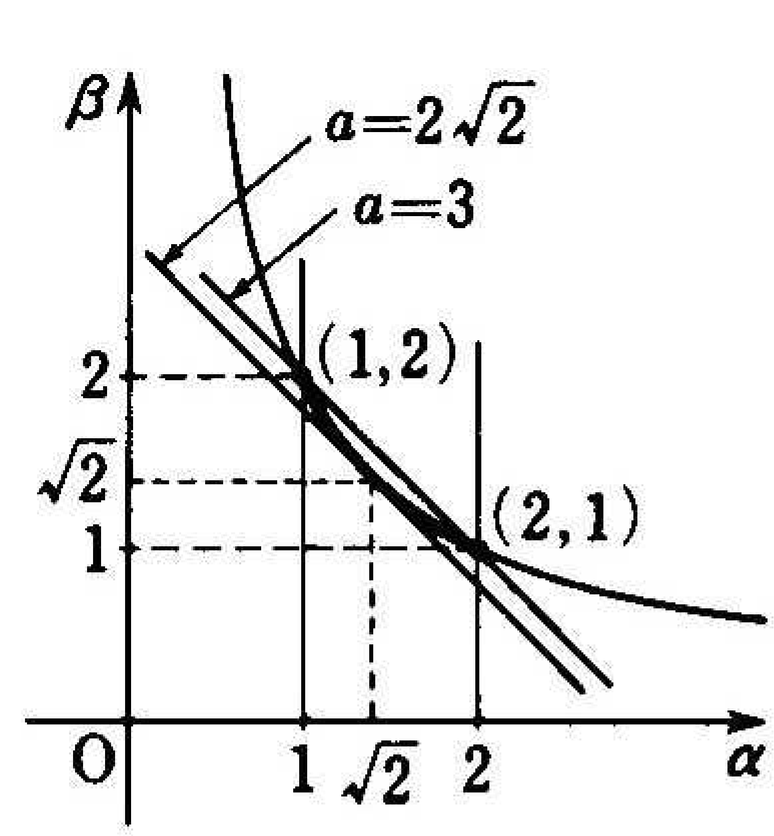
（注） 実は下関市大の問題では $a\neq0$ とあったので，そのときは 16 だけですが，ここではその条件をとったので，解が 2 つになりました。

■**練習 7.** 2 次方程式 $x^2-ax+2=0$ の 1 つの解 α が $1\leqq\alpha\leqq2$ を満足するとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

ヒント 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=2$$

ゆえに点 $(\alpha,\ \beta)$ は右のような双曲線 $\alpha\beta=2$ 上にあります。



これから，他の解 β も

$1\leqq\beta\leqq2$

であることがわかるし，$\alpha+\beta=a$ が 3 と $2\sqrt{2}$ の間（両端を含む）の値をとることもわかるでしょう。

このように解と係数の関係は思わぬところで役に立つものなのです。なお，逆に a に条件を与えられたときも同様にできます。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

●2次方程式の解のべき乗の和

◆２次方程式の解と係数が関係した問題にもいろいろあるが，べき乗の和は，まさにその花形といってよい。

◆　２次方程式の解を α，β とするとき
$\alpha+\beta$，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$，……，$\alpha^n+\beta^n$
のようなもの，一般に $\alpha^n+\beta^n$ を解のべき乗の和といいます。これを求めるのが，この項の目的です。まず，具体的な問題から入るとしましょう。

なお，その前に２次方程式の解と係数の関係は知っておいてください。それは

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

です（☞ p. 130）。では：——

練習 1. ２次方程式 $x^2+2x+3=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

ヒント　解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=3$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot 3$$
$$=4-6=-2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

2/5

練習 2. ２次方程式 $2x^2+3x+2=0$ の２つの解を α，β とするとき $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ。

ヒント　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
$=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

ところが解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\quad \alpha\beta=\frac{2}{2}=1$$

$$\therefore\quad \alpha^3+\beta^3=\left(-\frac{3}{2}\right)\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot 1\right\}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}-3\right)=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8}$$

$\boxed{答}$ $\dfrac{9}{8}$

2/27

練習 3. ２次方程式 $x^2+4x+k=0$ の２つの解の４乗の和が 32 のとき，k の値を求めよ。（芝浦工大）

ヒント　２つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-4,\quad \alpha\beta=k$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(-4)^2-2k=16-2k$$
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$$
$$=(16-2k)^2-2k^2$$
$$=2k^2-64k+256$$

これが 32 に等しいというのですから

$$2k^2-64k+256=32$$
$$\therefore\quad k^2-32k+112=0$$
$$\therefore\quad (k-4)(k-28)=0$$
$$\therefore\quad k=4,\ 28 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 4. $x^2-2x+3=0$ の２つの解を α，β とするとき $\alpha^5+\beta^5$ の値を求めよ。（法政大）

ヒント　$\alpha^5+\beta^5$ を因数分解して

$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$$

これを使ってもいいが，それよりは

$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^2\beta^3+\alpha^3\beta^2)$$

ですから $\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ を求め，さらに，$(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)$ を求めてから $\alpha^5+\beta^5$ を求めたほうがいいでしょう。　$\boxed{答}$ 2

このようにして，α，β のべき乗の和を求めることができますが，次のようにすると，機械的に扱うことができて便利です。

*　*　*

◆　$ax^2+bx+c=0$ の２つの解を α，β としますと，当然

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

が成り立ちます。両辺に α^n を掛けると

$$a\alpha^{n+2}+b\alpha^{n+1}+c\alpha^n=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

まったく同様にして

$$a\beta^{n+2}+b\beta^{n+1}+c\beta^n=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①＋② を作ると

$$a(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+b(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$
$$+c(\alpha^n+\beta^n)=0$$

となります。そこで

$$\alpha^n+\beta^n=f(n)$$

と書くと

$$af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

これを使えば $f(1)$, $f(2)$ から $f(3)$ が求められ，$f(2)$, $f(3)$ から $f(4)$ が求められ，というように順次求められることになります。では，次の練習をやってみませんか。

■練習 5. 2 次方程式 $x^2+2x+2=0$ の 2 つの解を α, β とするとき $\alpha+\beta$, $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^4+\beta^4$, $\alpha^5+\beta^5$ を求めよ。

13

(解)　$x^2+2x+2=0$ の解が α, β だから

$$\alpha^2+2\alpha+2=0$$

$$\therefore\quad \alpha^{n+2}+2\alpha^{n+1}+2\alpha^n=0$$
$$\beta^{n+2}+2\beta^{n+1}+2\beta^n=0$$
$$\therefore\quad f(n+2)+2f(n+1)+2f(n)=0$$

ここに $f(n)=\alpha^n+\beta^n$ である。

$$\therefore\quad f(n+2)=-2\{f(n+1)+f(n)\} \qquad (n\geqq 0)$$

しかるに　$f(1)=\alpha+\beta=-2$, $f(0)=2$

$$\therefore\quad f(2)=-2(-2+2)=0$$
$$\therefore\quad f(3)=-2(0+(-2))=4$$
$$\therefore\quad f(4)=-2(4+0)=-8$$
$$\therefore\quad f(5)=-2((-8)+4)=8$$

[答]　-2, 0, 4, -8, 8

*　*　*

◆ 上のやり方はべき乗の差や，そのほかべき乗の 1 次式にも使うことができます。こういっただけではピンとこないでしょう。では次の具体例をやってみましょう。しかし，この種のものはムリにやるほどのこともありませんが，……。しかし，基解や微積の数列の問題などではずいぶん役に立つのですよ。

■練習 6. $x^2+4x+1=0$ の大きい解を α，小さい解を β とするとき $\alpha^5-\beta^5$ の値を求めよ。

(ヒント)　α は $x^2+4x+1=0$ の解であるから

$$\alpha^{n+2}+4\alpha^{n+1}+\alpha^n=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

同様にして

$$\beta^{n+2}+4\beta^{n+1}+\beta^n=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①－② を作れば

$$(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})+4(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$$
$$+(\alpha^n-\beta^n)=0$$

$\alpha^n-\beta^n=f(n)$ と書くと

$$f(n+2)=-\{4f(n+1)+f(n)\} \qquad (n\geqq 0)$$

ところが　$f(0)=\alpha^0-\beta^0=0$

$$f(1)=(-2+\sqrt{3})-(-2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

ですから

$$f(2)=-\{4f(1)+f(0)\}=-8\sqrt{3}$$

$f(3)=\cdots\cdots$　　[答]　$418\sqrt{3}$

9

■練習 7. $x^2+x+2=0$ の 2 つの解を α, β とするとき $2\alpha^3+3\beta^3$ の値を求めよ。

(ヒント)　α, β は $x^2+x+2=0$ の解ですから

$$\alpha^2+\alpha+2=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\beta^2+\beta+2=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①×2＋②×3 を作ると

$$(2\alpha^2+3\beta^2)+(2\alpha+3\beta)+10=0$$
$$\therefore\quad 2\alpha^2+3\beta^2=-(2\alpha+3\beta)-10 \qquad \cdots\cdots ③$$

①×(2α)＋②×(3β) を作ると

$$(2\alpha^3+3\beta^3)+(2\alpha^2+3\beta^2)+2(2\alpha+3\beta)=0$$
$$\therefore\quad 2\alpha^3+3\beta^3=-(2\alpha^2+3\beta^2)-2(2\alpha+3\beta)$$

③を代入して

$$2\alpha^3+3\beta^3=(2\alpha+3\beta)+10-2(2\alpha+3\beta)$$
$$=-(2\alpha+3\beta)+10$$

ところが $x^2+x+2=0$ を解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そこでどっちを α, β とするかで 2 つの値が出るのです。

2次方程式の解の符号

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆２次方程式の解が正か負か，といった問題の扱い方をマスターすることは，２次方程式の理論の入口です。

◆ 係数が実数の２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解については，判別式をDとして

$D=b^2-4ac>0$：相異なる実数解

$D=b^2-4ac=0$：相等しい実数解

$D=b^2-4ac<0$：相異なる虚数解

というのでした。これは基本事項。さらに，

実数解をもつ（$b^2-4ac\geqq0$）とき

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$ のとき 同符号で，

かつ

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}>0$ のとき 共に正

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}<0$ のとき 共に負

また，

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<0$ のとき 異符号

です。ただし，$\alpha\beta<0$ のときには判別式を考える必要はありません。というのも $\dfrac{c}{a}<0$ のとき，

$$D=b^2-4ac$$

において $ac<0$ となるから，当然 $D>0$ となる。つまり $\alpha\beta<0$ で $D<0$ ということはないからです。では，さっそく次の練習をやってみませんか。

■練習 1. $x^2+x-3=0$ の２つの解の符号はどうか。

ヒント　$\alpha\beta=-3<0$ ですから，１つは正，１つは負です。

■練習 2. $x^2-2x-4=0$ の２つの解の符号と絶対値の大小はどうか。

ヒント　$\alpha\beta=-4<0$　……①

$\alpha+\beta=2>0$　……②

①によって１つは正，１つは負であることがわかります。さらに，②により 和>0 ですから正のほうの絶対値のほうが大であることがわかります。

*　*　*

◆ 次には，ややめんどうな問題を扱ってみましょう。

■練習 3. ２次方程式

$$mx^2+(1-5m)x+4m=0$$

の２つの解が負であるための条件を求めよ。

解　判別式をDとすると

$$\begin{aligned}D&=(1-5m)^2-4m\cdot4m\\&=(5m-1)^2-(4m)^2\\&=\{(5m-1)+4m\}\{(5m-1)-4m\}\\&=(9m-1)(m-1)\geqq0\end{aligned}$$

$\therefore$　$m\geqq1$　あるいは　$m\leqq\dfrac{1}{9}$　……①

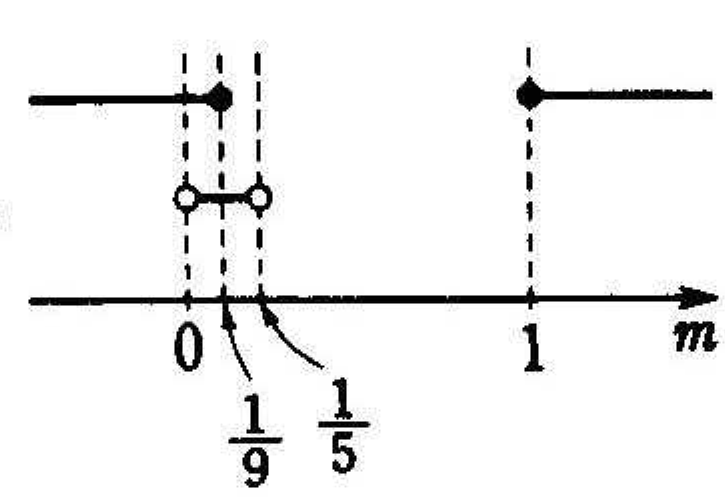
次に，２つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{1-5m}{m}=\frac{5m-1}{m}<0$$

$$\alpha\beta=\frac{4m}{m}=4>0$$

より

$0<m<\dfrac{1}{5}$ …②



①，②を満足するmの値は

$0<m\leqq\dfrac{1}{9}$　……答

■練習 4. ２次方程式 $x^2-2ax+1=0$ の解が共に正であるための条件を求めよ。

(解)　判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\geqq 0,\ (a+1)(a-1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad a\geqq 1 \quad \text{あるいは} \quad a\leqq -1 \quad \cdots\cdots ①$$

次に 2 つの解を α, β とすると

$$\alpha\beta=1>0,\ \alpha+\beta=2a>0$$

より

$$a>0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ② より求める条件は

$$a\geqq 1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

3/16

練習 5. x の 2 次方程式

$$x^2+2ax+1-b^2=0$$

の 2 つの解が共に正のとき a, b の関係を求めよ。ただし，a, b は実数。　(九大)

(解)　2 つの解を α, β とすると，$\alpha>0$, $\beta>0$ であるための条件は

$$\text{判別式}=(2a)^2-4(1-b^2)\geqq 0$$

$$\therefore\quad a^2+b^2\geqq 1$$

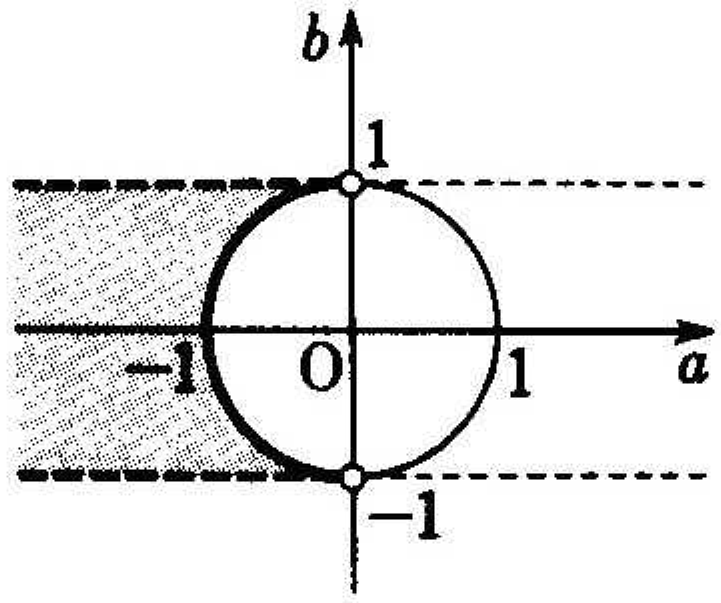
$$\alpha+\beta=-2a>0 \qquad \therefore\quad a<0$$

$$\alpha\beta=1-b^2>0 \qquad \therefore\quad -1<b<1$$

よって求める条件は

$$a^2+b^2\geqq 1,\ a<0,\ -1<b<1 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(注)　上の関係を図示してみますと，右のようになります。ただし，境界線は実線の部分を含み，破線の部分は含みません。



*　　*　　*

◆　方程式の中に含まれるパラメーターの変化にともなって解の符号がどう変わるか調べる問題もあります。このときには，判別式$\geqq 0$の部分について 2 つの解の積と和の符号を図に表して調べるのがいちばん手軽で便利です。では，次の練習をやってみませんか。

練習 6. xについての 2 次方程式

$$x^2-2(m+2)x+m^2-1=0$$

が実数解をもつとき，mの変化にともなって解の符号はどう変化するか。　(熊本大)

(ヒント)　まず，何はともあれ，実数条件です。判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2-1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad m\geqq -\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ①$$

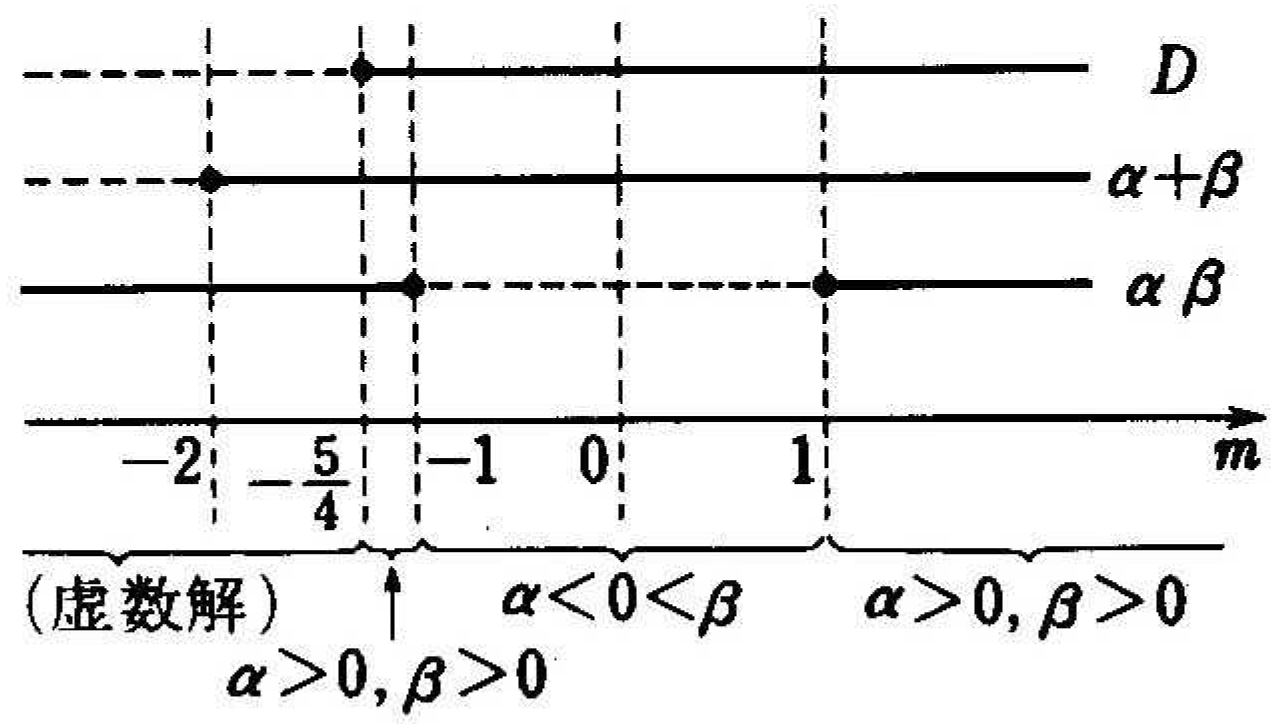
2 つの解を α, β $(\alpha\leqq\beta)$ とすると

$$\alpha+\beta=2(m+2) \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\alpha\beta=m^2-1 \qquad \cdots\cdots ③$$

ですから，m の変化にともなう D, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ の符号の変化を図示してみましょう。

ここで，実線は正を，破線は負を，・は 0 を表しています。



上の図からわかるように

$$m=-\frac{5}{4}:\quad 0<\alpha=\beta$$

$$-\frac{5}{4}<m<-1:\quad 0<\alpha<\beta$$

$$m=-1:\quad 0=\alpha<\beta$$

$$-1<m<1:\quad \alpha<0<\beta$$

$$m=1:\quad 0=\alpha<\beta$$

$$1<m:\quad 0<\alpha<\beta$$

となります。

ついでながら絶対値の大小が問題となるのは $-1<m<1$ のときですが，$\alpha+\beta>0$ ですから $|\alpha|<\beta$ です。

このように符号を調べるほかに，

$$y=x^2-2(m+2)x+m^2-1$$

のグラフがx軸とどこで交わるか調べる方法もあります。

しかし，多くの場合あまり便利ではありません。グラフの使い方は (☞ p. 136) 参照してください。

2次方程式の解と数の大小

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆２次方程式の２つの解が１より大であるとか，１と３の間にあるとか，いわゆる解の分離の問題は数Ｉの最大の難関です。

◆ 解の分離の扱い方は，大体５つあります。しかし，全部をマスターすることはとても困難。不可能に近い，のです。２つ，ものにしておけばいいでしょう。すなわち，解を１つの数と比べるときは解と係数の関係を使う，２つ以上の数と比べるときはグラフを使う，のです。こういっただけではピンとこないでしょう。何はともあれ，具体的にやってみようではありませんか。

＊　＊　＊

◆ 第１はこれです。

練習 1. $mx^2+(1-5m)x+4m=0$ の２つの実数解が１より大であるように定数mの範囲を求めよ。

（ヒント） まず，何はともあれ，実数解をもつことから $m\neq 0$ で，判別式をDとすると

$$D=(1-5m)^2-4\cdot m\cdot 4m\geqq 0$$
$$\therefore\ (5m-1)^2-(4m)^2\geqq 0$$
$$\therefore\ (m-1)(9m-1)\geqq 0$$
$$\therefore\ m\geqq 1\ \text{あるいは}\ m\leqq\frac{1}{9}$$

次に，実数解を α，β とすると

$$\alpha>1,\ \beta>1$$
$$\therefore\ \alpha-1>0\ \text{かつ}\ \beta-1>0$$
$$\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)>0$$
$$\text{かつ}\ (\alpha-1)+(\beta-1)>0$$

ところが，

$$\alpha\beta=4,\ \alpha+\beta=-\frac{1-5m}{m}=\frac{5m-1}{m}$$
$$\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$
$$=4-\frac{5m-1}{m}+1=\frac{1}{m}>0$$
$$\therefore\ m>0$$

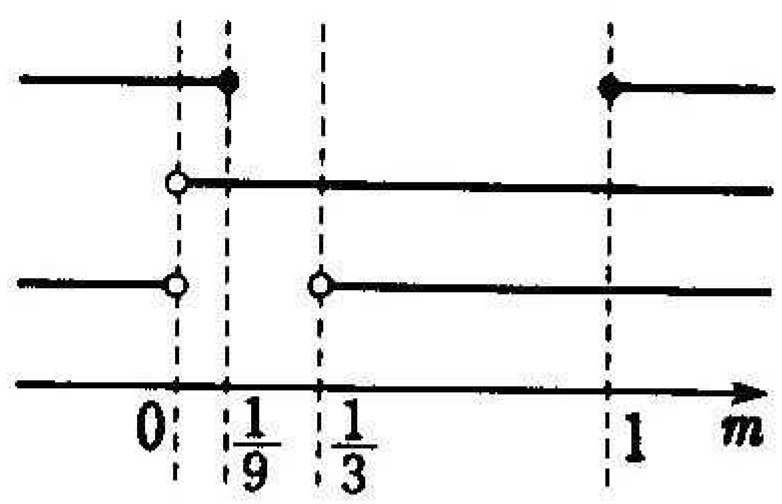
また，

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2$$
$$=\frac{5m-1}{m}-2=\frac{3m-1}{m}>0$$
$$\therefore\ m(3m-1)>0$$
$$\therefore\ m>\frac{1}{3}\ \text{あるいは}\ m<0$$

以上の結果をまとめると右のようになり

$$m\geqq 1$$

が求めるものである。



（注） $\alpha>1,\ \beta>1$
ということから
$\alpha\beta>1$ かつ $\alpha+\beta>2$
とやる人がスゴク多い。しかし，逆に $\alpha\beta>1$，$\alpha+\beta>2$ だからといって $\alpha>1$，$\beta>1$ とはならない。$\alpha=100$，$\beta=\frac{1}{10}$ としてみれば，明らかでしょう。くれぐれも注意すること。

練習 2. $mx^2+(1-5m)x+9m=0$ の２つの実数解が２より大のとき，定数mの範囲を求めよ。

（解） 実数解をもつ条件から，判別式をDとすると

$$D=(1-5m)^2-4\cdot m\cdot 9m$$
$$=(5m-1)^2-(6m)^2$$
$$=(-m-1)(11m-1)\geqq 0$$
$$\therefore\ (m+1)(11m-1)\leqq 0$$
$$\therefore\ -1\leqq m\leqq\frac{1}{11}\quad\cdots\cdots①$$

次に，２つの実数解を α，β とすると

$$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$$
$$=9+2\cdot\frac{1-5m}{m}+4=\frac{3m+2}{m}>0$$

$\therefore\quad m>0$ あるいは $m<-\dfrac{2}{3}$ ……②

また，$(\alpha-2)+(\beta-2)=(\alpha+\beta)-4$

$$=\frac{5m-1}{m}-4=\frac{m-1}{m}>0$$

$\therefore\quad m>1$ あるいは $m<0$ ……③

①，②，③より $-1\leqq m<-\dfrac{2}{3}$ …… 答

*　　*　　*

◆ 解を2つ以上の数と比べるときには，一般にグラフでやるほうが簡単です。

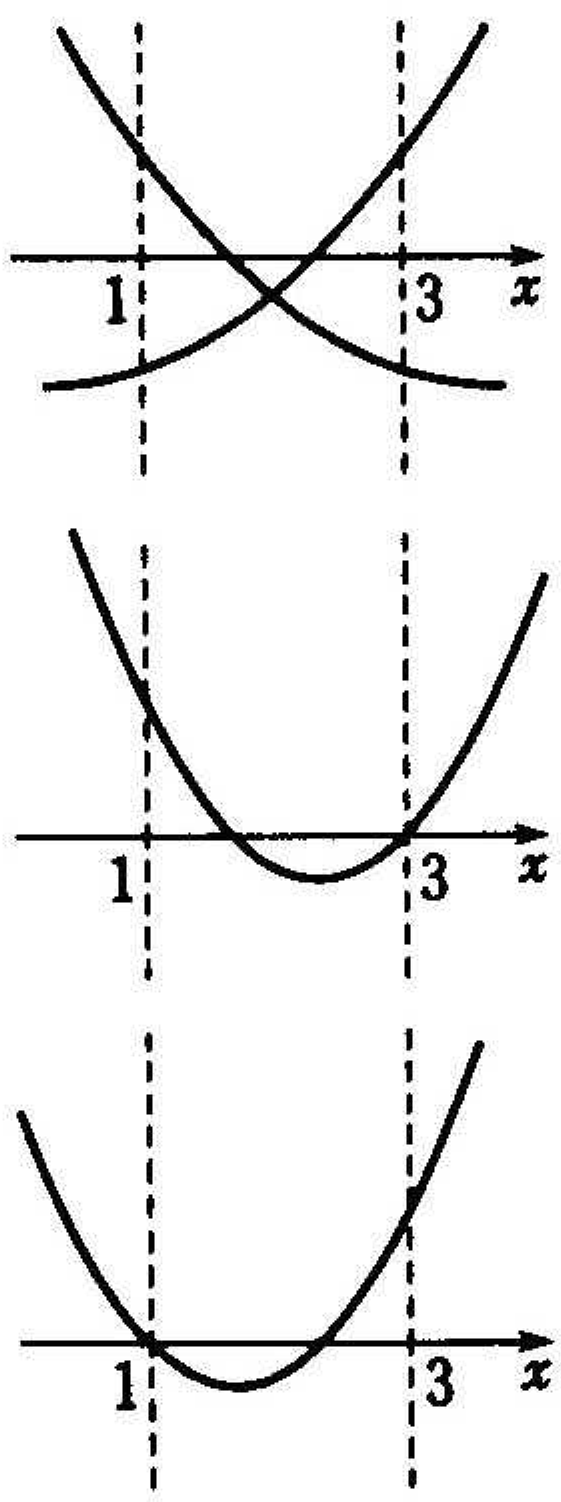
練習 3. 2次方程式

3/4 $2x^2-(2a+2)x+3a=0$

が区間 $1<x<3$ 内にただ1つの解をもつための条件を求めよ。（信州大）

ヒント $f(x)=2x^2-(2a+2)x+3a$

とおきますと，右の図から明らかなように3つの場合があります。



第1は

$f(1)f(3)<0$

$\therefore\quad a(a-4)>0$

$\therefore\quad a<0$

あるいは $4<a$

第2は $f(3)=0$ のときで，このとき $a=4$ ですから，与えられた方程式は

$x^2-5x+6=0$

つまり

$x=2,\ 3$

となって，$1<x<3$ にただ1つの解をもつことがわかります。

第3は $f(1)=0$ のときで，$a=0$ ですから，与えられた方程式は

$$x^2-x=0$$

このとき，$x=0,\ 1$ で，他の解0は1と3の間に入らないから不適。かくして，求める a の値は $a<0,\ a\geqq 4$ となります。

答 $a<0,\ a\geqq 4$

練習 4. $x^2+ax+b=0$ の実数解 $\alpha,\ \beta$ が -1 と1の間にあるとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求めよ。（岩手大）

解 実数条件から，判別式を D とすると

$D=a^2-4b\geqq 0$ ……①

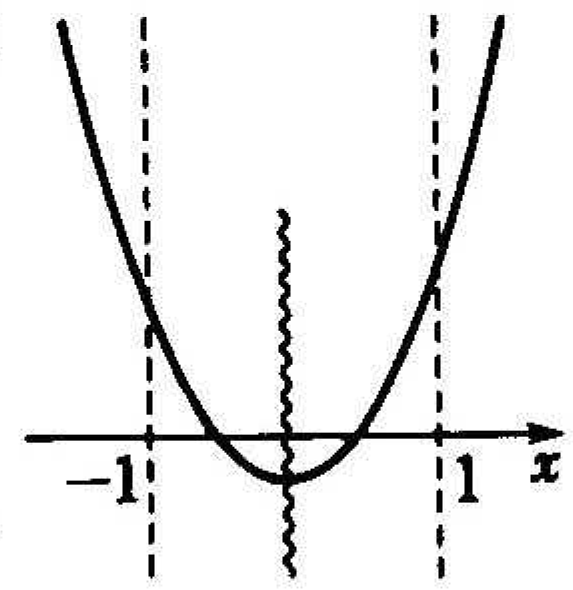
次に，$f(x)=x^2+ax+b$ とおくと，

$f(-1)=1-a+b>0$ ……②

$f(1)=1+a+b>0$ ……③

が必要である。さらに軸の方程式は

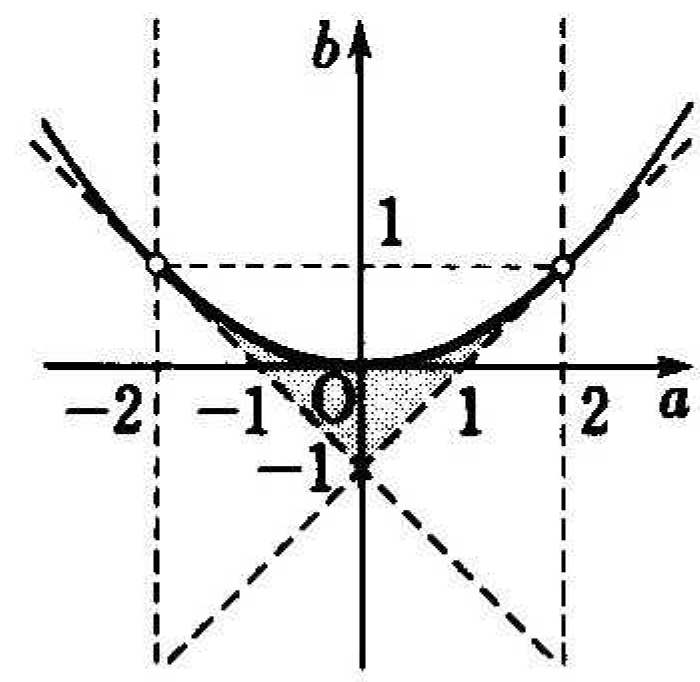
$$x=-\frac{a}{2}$$



これが $x=-1$ と $x=1$ の間になければならないから

$-1<-\dfrac{a}{2}<1\qquad\therefore\quad -2<a<2$ ……④

以上①～④を満足する点 $(a,\ b)$ は下の図の陰影の部分にある。ただし，太い実線上の点を含むが，破線上の点は含まない。



練習 5. 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とするとき $-1<\alpha<0<\beta<1$ ならば，点 $(a,\ b)$ はどんな範囲にあるか。

ヒント $f(x)=x^2+ax+b$ とおくと，

$f(-1)=1-a+b>0$

$f(0)=b<0$

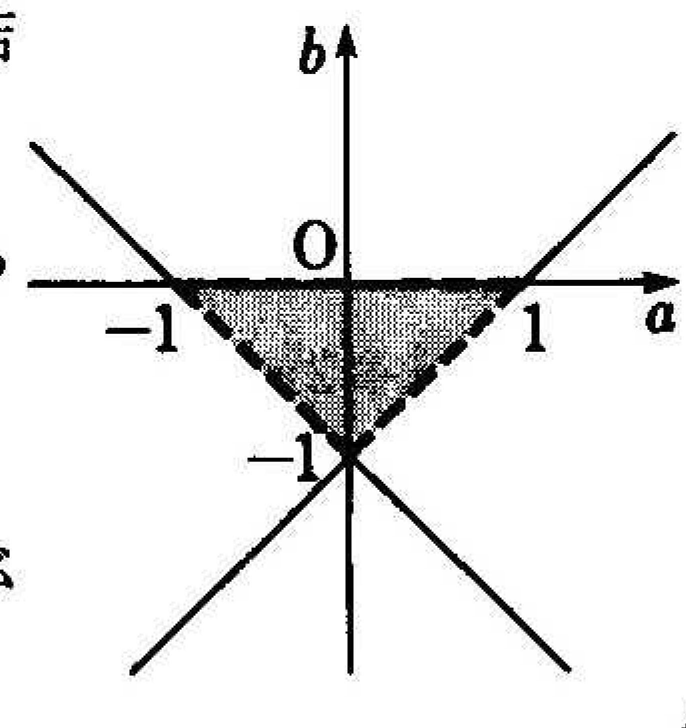
$f(1)=1+a+b>0$

これを満足する点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求めればいいでしょう。結果は右図。判別式は不要です。というのも

$f(-1)>0$

$f(0)<0$

の中に，判別式 $\geqq 0$ が含まれているから。



9/1

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

共通解の求め方

◆共通解を求めるものには3つのタイプがあります。しかし，とくに大切なのは1つだけなんです。

2つまたは3つ以上の方程式があるとき，それに共通な解があるとき **共通解** といいます。例えば，

$x^2+x-2=0$　の解は　1，-2

$x^2+2x-3=0$ の解は　1，-3

ですから，2つの共通解は1であることがわかります。いま，上の2つの方程式の左辺を因数分解しますと

$$(x-1)(x+2)=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$(x-1)(x+3)=0 \quad \cdots\cdots②$$

となりますから，①に t を②に s を掛けて加えると

$$(x-1)\{t(x+2)+s(x+3)\}=0$$

が得られ，共通因数 $x-1$ は依然として残っています。つまり，①と②にナニを掛けて加えても共通解は出てくるということなのです。だからといって逆は正しくありません。

$$x^2+x+1=0 \quad \cdots\cdots③$$

$$x^2+2x+4=0 \quad \cdots\cdots④$$

③と④の間に共通解はありません。④＋③×(-1) を作って

$$x+3=0 \qquad \therefore \quad x=-3$$

を求めても，共通解とは何の関係もないのです。このことをもとにして共通解の問題を扱ってみましょう。

＊　＊　＊

◆ 第1のタイプは2つの2次方程式の次のような場合です。

7/4 C

練習 1. 2つの2次方程式

$$x^2+2x+a=0,\ x^2+ax+2=0$$

が共通解をもつように定数 a の値を求めよ。

ヒント　共通解を α としますと

$$\alpha^2+2\alpha+a=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\alpha^2+a\alpha+2=0 \quad \cdots\cdots②$$

①−②：　$(2-a)\alpha+(a-2)=0$

$\therefore$　$(2-a)(\alpha-1)=0$

$\therefore$　$a=2$　あるいは　$\alpha=1$

(i)　$a=2$　のときは元の方程式にもどりますと，いずれも $x^2+2x+2=0$ となりますから，2つの解を共有します。もちろん，その解は $-1\pm i$ です。

(ii)　$\alpha=1$ は共通解の可能性はありますが，共通解とは限らない。そこで代入してみますと（どっちに代入しても同じ）

$$1+2+a=0 \qquad \therefore \quad a=-3$$

つまり，$a=-3$ のときに1なる共通解をもつことがわかります。

上の(i)と(ii)から $a=2$ のとき共通解 $-1\pm i$ を，$a=-3$ のとき共通解1をもつことがわかった，のです。

練習 2. 2つの方程式　$x^2+ax+b=0$，$x^2+bx+a=0$ がただ1つの共通解をもつとき，この共通解を求めよ。　（弘前大）

解　共通解を α とすると

$$\alpha^2+a\alpha+b=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\alpha^2+b\alpha+a=0 \quad \cdots\cdots②$$

①−②より　$(a-b)\alpha+(b-a)=0$

$\therefore$　$(a-b)(\alpha-1)=0$

$a=b$　ならば2つの解を共有するから適しない。

$\therefore$　$a\neq b$　また　$\alpha=1$

$\alpha=1$ を①に代入して

$$1+a+b=0$$

ゆえに，求める共通解は

1　$(a+b=-1,\ a\neq b$ のとき）

◆ これで大切なことは終わりました。

次は多少計算のめんどうなものをやってみましょう。例えば，これです。

3/4

練習 3. 2つの2次方程式

$$x^2+x\log 2a+\log(a+1)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x^2+x\log(a+1)+\log 2a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

が共通解をもつように，定数 a の値を求めよ。　　　(静岡大)

ヒント　共通解を α とすると

$$\alpha^2+\alpha\log 2a+\log(a+1)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\alpha^2+\alpha\log(a+1)+\log 2a=0 \quad \cdots\cdots ④$$

③−④を変形して

$$\{\log 2a-\log(a+1)\}(\alpha-1)=0$$

が得られます。

(i)　$\log 2a-\log(a+1)=0$ のときには

$$2a=a+1,\ a=1$$

このとき2つの解を共有します。

(ii)　$\alpha=1$ を③に代入して

$$1+\log 2a+\log(a+1)=0$$

$$\therefore\quad \log 2a(a+1)=-1$$

$$\therefore\quad 2a(a+1)=\frac{1}{10}$$

$$\therefore\quad a=\frac{-5\pm\sqrt{30}}{10}$$

$a>0$ より　$a=\dfrac{-5+\sqrt{30}}{10}$

つまり，このとき共通解1をもつわけです。

答　$a=1,\ \dfrac{-5+\sqrt{30}}{10}$

*　*　*

◆ 第2のタイプは3つの方程式が共通解をもつ問題です。これは，2つをまず扱って，などと考えるとスゴクめんどうになることが多いのです。**3つを同時に扱うのがコツ。**

例えば：——

練習 4. 3つの2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

$$bx^2+cx+a=0$$

$$cx^2+ax+b=0$$

が実数解を共有するという。実定数 $a,\ b,\ c$ の関係を求めよ。

ヒント　共通解を α としますと

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$b\alpha^2+c\alpha+a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$c\alpha^2+a\alpha+b=0 \quad \cdots\cdots ③$$

①+②+③より

$$(a+b+c)\alpha^2+(a+b+c)\alpha+(a+b+c)=0$$

$$\therefore\quad (a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

α は実数ですから

$$\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$\therefore\quad a+b+c=0 \quad \cdots\cdots ④$$

つまり $a+b+c=0$ であることが必要です。

次に $a+b+c=0$ ならば（これは①，②，③において $\alpha=1$ としたものだから）$\alpha=1$ なる実数の共通解をもつことは確かです。つまり十分条件であることがわかります。

答　$a+b+c=0$

3/4

練習 5. 3つの方程式

$$x^2+kx+1=0$$

$$x^2+x+2(k+1)=0$$

$$x^2-kx-(7+2k)=0$$

が共通解をもつように k の値を定めよ。

解　共通解を α とすれば

$$\alpha^2+k\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha^2+\alpha+2(k+1)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\alpha^2-k\alpha-(7+2k)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

①+②+③：　$3\alpha^2+\alpha-4=0$

$$\therefore\quad (\alpha-1)(3\alpha+4)=0$$

$$\therefore\quad \alpha=1 \ \text{あるいは}\ -\frac{4}{3}$$

$\alpha=1$ を①，②，③に代入して　$k=-2$

$\alpha=-\dfrac{4}{3}$ を①，②，③に代入すると，これを満足する k は存在しない。

よって，求める k は -2 である。

*　*　*

◆ もう1つは **ユークリッドの互除法** で，これは（☞ p. 46）を参照してください。

複素係数の方程式の実数解

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆複素数が係数についている2次方程式が実数解をもつ条件に判別式は役に立ちません。だって，複素数に大小がないから。

◆ ここで大切なことは，

複素数 $A+Bi$（A, B は実数）において

$A+Bi=0$ ならば $A=0$ かつ $B=0$

だけです。さっそく，問題に突入しようではありませんか。

練習 1. xに関する2次方程式

$$x^2+(i-a)x-3+(a+1)i=0$$

が1つの実数解をもつとする。実数 a の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

（島根大）

ヒント　実数解を α としますと

$$\alpha^2+(i-a)\alpha-3+(a+1)i=0$$

バラバラにして実数部分と虚数部分に分けますと

$$(\alpha^2-a\alpha-3)+(\alpha+a+1)i=0$$

ゆえに

$$\begin{cases} \alpha^2-a\alpha-3=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha+a+1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より

$$\alpha=-(a+1)$$

これを①に代入すると

$$(a+1)^2+a(a+1)-3=0$$
$$2a^2+3a-2=0$$
$$\therefore\ (2a-1)(a+2)=0$$
$$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ -2$$

$a=\frac{1}{2}$ のとき　$\alpha=-\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2}$

$a=-2$ のとき　$\alpha=-(-2+1)=1$

つまり実数解は $-\frac{3}{2}$ と1ということになりました。

答　$\frac{1}{2}$，-2

練習 2. xについての2次方程式

$$a(1+i)x^2+(1+a^2i)x+a^2+i=0$$

が実数解をもつように実数 a の値を定めよ。

（神戸大）

ヒント　実数解を α としますと

$$(a\alpha^2+\alpha+a^2)+i(a\alpha^2+a^2\alpha+1)=0$$

$$\begin{cases} a\alpha^2+\alpha+a^2=0 & \cdots\cdots① \\ a\alpha^2+a^2\alpha+1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

これが実数解を共有すればいい。共通解の求め方については（☞ p. 134）。

さて，①−② を作ると

$$(1-a^2)\alpha+(a^2-1)=0$$
$$\therefore\ (1-a^2)(\alpha-1)=0$$
$$\therefore\ a=1,\ a=-1,\ \alpha=1$$

この3つの場合を調べてみましょう。

$a=1$ なら①，②とも $\alpha^2+\alpha+1=0$ となって2つの解を共有するが，残念ながら虚数であるからダメ!!

$a=-1$ なら①，②とも

$$-\alpha^2+\alpha+1=0$$
$$\therefore\ \alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

つまり，もとの方程式は2つの実数解をもつわけです。

$\alpha=1$ を①に代入すると①，②とも

$$a^2+a+1=0$$

となって，aは虚数となって適しない。

結局，求める a の値は -1 です。

答　$a=-1$

練習 3. 2次方程式

$$(1+i)x^2-2(a+i)x+(5-3i)=0$$

が少なくとも1つの実数解をもつように，実定数 a の値を求めよ。

（静岡大）

(ヒント) 実数解を α として代入し，

$\alpha^2-2a\alpha+5=0$　かつ　$\alpha^2-2\alpha-3=0$

かくて，……　$a=\dfrac{7}{3},\ -3$

*　*　*

◆ まったく同じことなんですが，少しめんどうな問題を扱ってみましょう。めんどうといっても，計算がめんどうであったり，三角関数が入ってきて不愉快であったり，といったことなんです。では：——

3/5

練習 4. x の 2 次方程式

$$x^2+(a+bi)x+c=0$$

が，1 つの実数解と 1 つの虚数解をもつための必要十分条件を求めよ。ただし，a, b, c は実数。　(岡山大)

(解) 実数解を α とすると

$$\alpha^2+(a+bi)\alpha+c=0$$

$$\therefore\quad (\alpha^2+a\alpha+c)+b\alpha i=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\alpha^2+a\alpha+c=0 & \cdots\cdots①\\ b\alpha=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②より　$b=0$　あるいは　$\alpha=0$

$b=0$ ならば，与えられた方程式は実係数の 2 次方程式となるから，実数解と虚数解をもつことはない。したがって，$b\neq0$

$$\therefore\quad \alpha=0$$

したがって，①より　$c=0$

ゆえに $b\neq0$ かつ $c=0$ が必要条件である。

次に，$b\neq0$, $c=0$ ならば，与えられた方程式は

$$x^2+(a+bi)x=0$$

となり，したがって実数解 0 のほかに虚数解 $-a-bi$ をもつ。ゆえに $b\neq0$, $c=0$ は十分条件である。　答 $b\neq0$, $c=0$

練習 5. x についての 2 次方程式

$$(1+i)x^2+(\sin^2\theta-i\cos^2\theta)x-(1-i\tan^2\theta)=0$$

が実数解をもつとき，θ の値と x の値とを求めよ。　(岐阜薬大)

(ヒント) 実数解を α とすると

$$(1+i)\alpha^2+(\sin^2\theta-i\cos^2\theta)\alpha-(1-i\tan^2\theta)=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\alpha^2+\alpha\sin^2\theta-1=0 & \cdots\cdots①\\ \alpha^2-\alpha\cos^2\theta+\tan^2\theta=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①−② を作ると

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\alpha-(1+\tan^2\theta)=0$$

ところが

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

ですから

$$\alpha=\sec^2\theta \qquad \cdots\cdots③$$

③を①に代入すると

$$\sec^4\theta+\sec^2\theta\cdot\sin^2\theta-1=0$$

$\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ですから

$$\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1=0$$

$$\therefore\quad 1+\sin^2\theta\cos^2\theta-\cos^4\theta=0$$

$$\therefore\quad 1+(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta-\cos^4\theta=0$$

$$\therefore\quad 2\cos^4\theta-\cos^2\theta-1=0$$

$$\therefore\quad (2\cos^2\theta+1)(\cos^2\theta-1)=0$$

$$\therefore\quad \cos^2\theta=1 \qquad \cdots\cdots④$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi\quad (n\text{ は整数})$$

④と③から

$$x=1$$

答 $\theta=n\pi$ (n：整数)，$x=1$

(注) 実数解を α とする，とわざわざ断るものだから，結局同じ式をくり返し書くことになってムダじゃありませんか，という人があります。キミも内心そう思っていたのではありませんか。ところがちがうのです。2 つの方程式の x はちがうものなんです。このことをハッキリさせるには次のように書いてみるとわかるでしょう。

≪2 つの方程式

$$\begin{cases}u^2+u-2=0\\ v^2+3v-4=0\end{cases}$$

の共通解を求めよ≫

まさか第 1 式から，第 2 式を引く人はありますまい。共通解を α とすると

$$\begin{cases}\alpha^2+\alpha-2=0\\ \alpha^2+3\alpha-4=0\end{cases}$$

これなら引ける，というわけ。

8/2.

2つの2次方程式の解の大小

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆解の分離の問題といわれるものに2つのタイプがあります。第1は1つの方程式の場合，第2は2つの方程式の場合なのです。

◆ ここで扱うのは，たいていの人がほとんどわかっていない種類のもの。それは，2つの方程式の解の大小の問題です。具体的にやってみましょう。

3/K

■練習 1. 方程式 $x^2+ax+2=0$ の2つの解を α，β $(\alpha<\beta)$，$x^2+2x+a=0$ の2つの解を γ，δ $(\gamma<\delta)$ とするとき α，β，γ，δ の大小を吟味せよ。ただし，$a<-4$ とする。

ヒント　この種の問題を扱うのに2つの方法があります。第1は **終結式**（しゅうけつしき）といわれるものを使うもの。もう1つはグラフでやるもの，なんです。

終結式のことはあとでやるとして，ここではグラフで考えてみましょう。

$$y=x^2+ax+2 \quad \cdots\cdots ①$$

と

$$y=x^2+2x+a \quad \cdots\cdots ②$$

の交点を求めるために ①−② を作りますと

$$(a-2)x+(2-a)=0$$

$$\therefore \quad (a-2)(x-1)=0$$

$a \neq 2$ ですから

$$x=1$$

つまり交点の x 座標は a に関係なく1なのです。そして，y 座標は ① または ② より

$$y=a+3<0$$

ゆえに2つの放物線 ①，② は x 軸の下のほうで交わっています。次に，①，② の軸の位置を調べてみましょう。①，② はそれぞれ

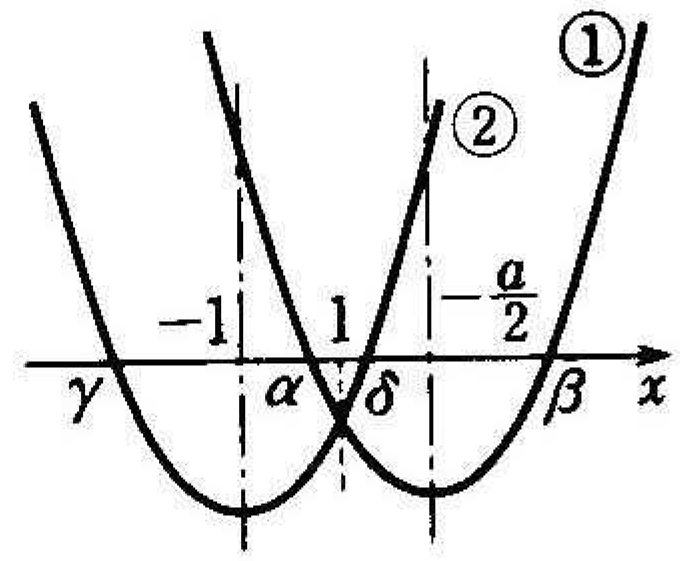
$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+2-\frac{a^2}{4}$$

$$y=(x+1)^2+(a-1)$$

と書けますから，軸の位置はそれぞれ

$$x_1=-\frac{a}{2} \quad と \quad x_2=-1$$

で，仮定より $-\frac{a}{2}>-1$ です。つまり，① の軸が ② の軸より右のほうにあることがわかります。



答案からいえば最初に書くべきですが，実数解の条件から，判別式をそれぞれ D_1，D_2 としますと

$$D_1=a^2-8>0 \quad (\because \ a<-4)$$

$$D_2=4-4a>0 \quad (\because \ a<-4)$$

以上のことから，2つの放物線の位置関係は上の図のようになりますから

$$\gamma<\alpha<\delta<\beta \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

ゴタゴタしていてピンとこなかったかもしれません。できれば，解答の形にキチンと書いてみるとよいのです。できそうもなかったら，次の練習2.をみてください。今度は解答ふうに書いてあります。

■練習 2. 2つの2次方程式 $x^2+ax+4=0$，$x^2+4x+a=0$ が相異なる2つの実数解 α，β $(\alpha<\beta)$；γ，δ $(\gamma<\delta)$ をもつとき，α，β，γ，δ の大小を吟味せよ。ただし，$-5<a<-4$ とする。

解　$x^2+ax+4=0$ の判別式を D_1 とすると $D_1=a^2-16>0$，また $x^2+4x+a=0$ の判別式を D_2 とすると $D_2=16-4a>0$ であるから，いずれも相異なる2つの実数解をもつ。次に，

$$y=x^2+ax+4 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=x^2+4x+a \quad \cdots\cdots ②$$

の交点を求めるために y を消去すると

$$(a-4)(x-1)=0$$

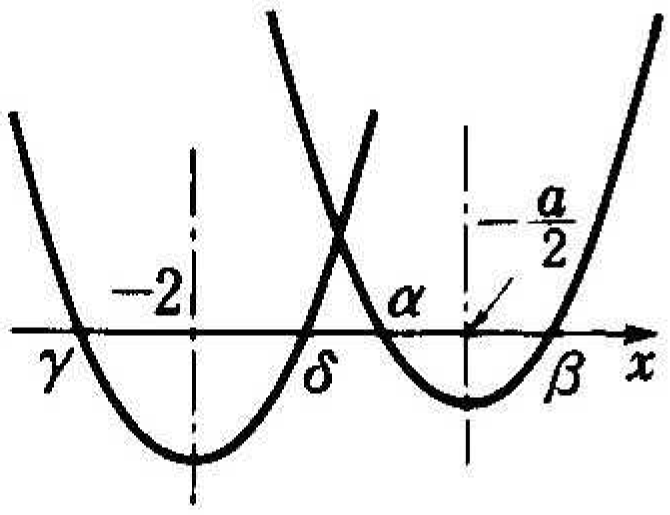
$$a\fallingdotseq 4 \qquad \therefore\ x=1$$

ゆえに，交点の y 座標は　$a+5>0$

また，放物線 ①，② の軸の位置はそれぞれ

$-\dfrac{a}{2}$ および -2 で

$$-\frac{a}{2}>-2$$



であるから，①，② の関係は右の図のようになる。

$$\therefore\ \gamma<\delta<\alpha<\beta \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆　$f(x)=ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β；$g(x)=px^2+qx+r=0$ の 2 つの解を γ，δ とするとき

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$$

を係数で表してみましょう。

$$=\{\alpha^2-(\gamma+\delta)\alpha+\gamma\delta\}\{\beta^2-(\gamma+\delta)\beta+\gamma\delta\}$$

$$=\left\{\left(\alpha^2+\frac{q}{p}\alpha+\frac{r}{p}\right)\left(\beta^2+\frac{q}{p}\beta+\frac{r}{p}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{p^2}\{p^2(\alpha\beta)^2+q^2(\alpha\beta)+r^2$$
$$+pq\alpha\beta(\alpha+\beta)+pr(\alpha^2+\beta^2)$$
$$+qr(\alpha+\beta)\}$$

$$=\frac{1}{p^2}\left\{p^2\cdot\frac{c^2}{a^2}+q^2\cdot\frac{c}{a}+r^2+pq\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\right.$$
$$\left.+pr\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)+qr\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{p^2a^2}(p^2c^2+r^2a^2+q^2ac+prb^2$$
$$-pqbc-qrab-2prac)$$

こんなわけで，

$$p^2a^2(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$$

を係数だけで表すことができ，したがってこの符号を求めることができます。

この式を**終結式** といい，R で表します。べつに終結式というコトバを覚える必要はありませんが，この計算はよく試験に出されています。

練習 3. $f(x)=x^2+x+a$，$g(x)=x^2+ax+1$ とする。$f(x)=0$，$g(x)=0$ の解をそれぞれ α，β；γ，δ とするとき

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$$

を a で表せ。

(解)　与式

$$=\{\alpha^2-(\gamma+\delta)\alpha+\gamma\delta\}\{\beta^2-(\gamma+\delta)\beta+\gamma\delta\}$$
$$=(\alpha^2+a\alpha+1)(\beta^2+a\beta+1)$$
$$=(\alpha\beta)^2+a^2(\alpha\beta)+1+a\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$+a(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=a^2+a^3+1+a^2(-1)+a(-1)+(1-2a)$$
$$=a^3-3a+2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 4. $a>0$ のとき，次の 2 つの方程式は，いずれも異なる 2 つの実数解をもつことを証明し，さらに ② の 2 つの解のうち，ちょうど 1 つだけが ① の 2 つの解の間にあることを示せ。

$$x^2-x-a=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+ax-1=0 \qquad \cdots\cdots ② \qquad (京大)$$

(ヒント)　① の解を α，β $(\alpha<\beta)$，② の解を γ，δ $(\gamma<\delta)$ とすると，グラフでやることもできるが，上の終結式を使うなら

$$\alpha<\gamma<\beta<\delta \quad または \quad \gamma<\alpha<\delta<\beta$$

が　$R=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)<0$

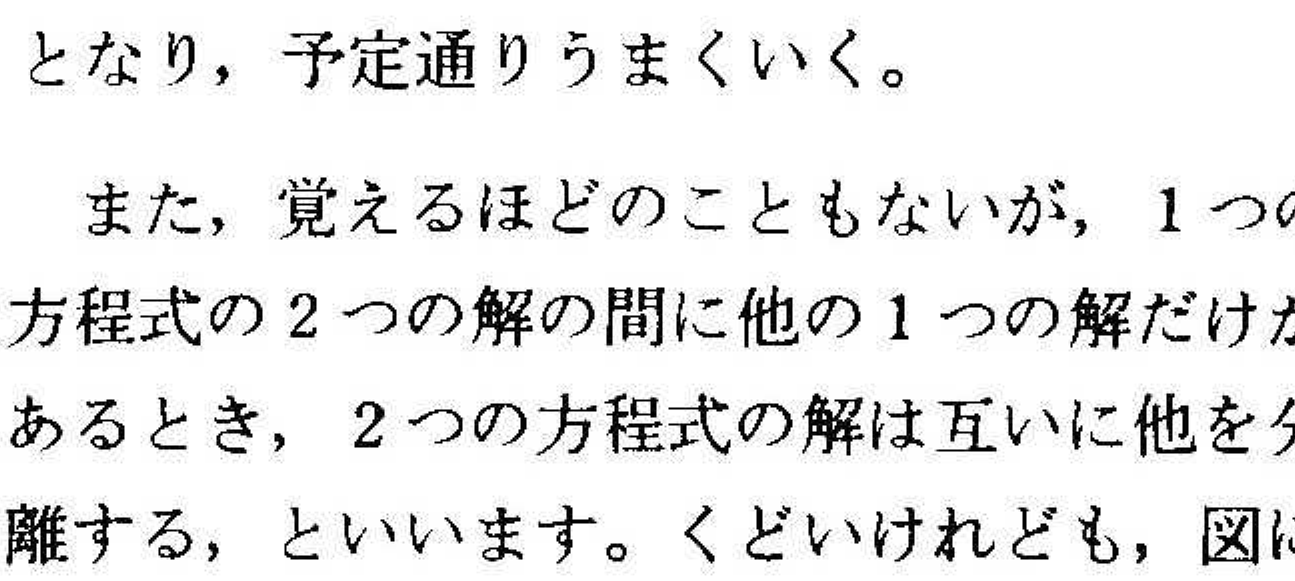
と同値であることに注意すればいいのです。

なお，このとき

$$R=-a^3-3a<0$$

となり，予定通りうまくいく。

また，覚えるほどのこともないが，1 つの方程式の 2 つの解の間に他の 1 つの解だけがあるとき，2 つの方程式の解は互いに他を分離する，といいます。くどいけれども，図にまとめておくと，下の 3 つの場合が主で，その間に共通解をもつ場合が入るのです。



1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

2元2次連立方程式の解法

◆2元2次連立方程式で必ず解けるタイプは2つ。他は，臨機応変とはなさけない。とはいうものの，……

◆　2元2次連立方程式で必ず解けるタイプは2つあります。第1はこれです。

3/5

練習 1.
$$\begin{cases} x^2-16y^2=6 & \cdots\cdots① \\ 2y^2+xy=-2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
を解け。　（日本大）

ヒント　**2次の同次式＝定数**
の形の式が2つあります。このようなときには，**定数項を消去するのが定石**。つまり

①＋②×3 を作ると
$$x^2+3xy-10y^2=0$$
$$\therefore\ (x+5y)(x-2y)=0$$
$$\therefore\ x=-5y,\ x=2y$$
$x=-5y$ のときは，①に代入して
$$9y^2=6$$
$$\therefore\ y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$\therefore\ x=\mp\frac{5\sqrt{6}}{3}$$
次に，$x=2y$ のときは，①に代入して
$$-12y^2=6\qquad\therefore\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}\,i$$

答
$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{5\sqrt{6}}{3},\ \ y=\mp\dfrac{\sqrt{6}}{3}\ ; \\ x=\pm\sqrt{2}\,i,\ \ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$
（複号同順）

練習 2. 連立方程式
$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 & \cdots\cdots① \\ x^2+3xy-y^2=1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
を解け。

ヒント　②×7－① を作ると
$$6x^2+22xy-8y^2=0$$
$$\therefore\ (3x-y)(x+4y)=0$$
よって，……

答
$$\begin{cases} x=\pm1,\ \ y=\pm3\ ; \\ x=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ \ y=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
（複号同順）

＊　＊　＊

◆　第2のタイプは，xy と x，y の1次の項からなるときです。例えば：――

3/5

練習 3.
$$\begin{cases} 5xy+4x-6y=5 & \cdots\cdots① \\ 12xy+9x-14y=11 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
を解け。

ヒント　このときは **xy の項を消去する**と，x，y の1次式が得られます。

①×12－②×5 を作ると
$$3x-2y=5$$
$$\therefore\ y=\frac{3x-5}{2}$$
これを①に代入し，そして整理すると，
$$3x^2-7x+4=0$$
$$\therefore\ (3x-4)(x-1)=0$$
よって，……

答　$x=1,\ y=-1\ ;\ x=\dfrac{4}{3},\ y=-\dfrac{1}{2}$

3/5

練習 4.
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2=k & \cdots\cdots② \end{cases}$$
が実数解をもつように，定数項 k の範囲を求めよ。　（香川大）

ヒント　①－② より
$$xy=9-k \qquad \cdots\cdots③$$
そこで ①＋③ より
$$(x+y)^2=18-k \qquad \cdots\cdots④$$
①－③×3 より
$$(x-y)^2=3k-18 \qquad \cdots\cdots⑤$$

したがって，求める条件は

$$18-k\geqq 0 \quad かつ \quad 3k-18\geqq 0$$

これから　$6\leqq k\leqq 18$

が得られます。

(注) この練習4.のテクニックは重要ですよ。つまり x^2+y^2 と xy を求めてこれから $(x+y)^2$, $(x-y)^2$ を求めれば実数解，虚数解の吟味がラクにできるということなのです。

もう1つやってみましょう。

3/5

練習 5. $x^2+y^2=a$, $xy=b$ が実数解をもつための条件を求めよ。

(ヒント) $x^2+y^2=a$ ……①

$xy=b$ ……②

①+②×2：　$(x+y)^2=a+2b$

①−②×2：　$(x-y)^2=a-2b$

これが実数解をもつための条件は

$$a+2b\geqq 0 \quad かつ \quad a-2b\geqq 0$$

が成り立つこと。すなわち，まとめて

$$a\geqq \pm 2b$$

と書けます。あるいは

$$a\geqq 2|b|$$

と書いてもよい。

答　$a\geqq 2|b|$

練習 6. $x^2+xy+y^2=a$, $x^2-xy+y^2=1$ が実数解をもつための条件を求めよ。

(ヒント) $x^2+xy+y^2=a$ ……①

$x^2-xy+y^2=1$ ……②

{①+②}÷2：

$$x^2+y^2=\frac{a+1}{2} \quad ……③$$

①−②：　$2xy=a-1$ ……④

ゆえに

③+④：　$(x+y)^2=\dfrac{3a-1}{2}$ ……⑤

③−④：　$(x-y)^2=\dfrac{3-a}{2}$ ……⑥

⑤，⑥より

$$x+y=\pm\sqrt{\frac{3a-1}{2}},\quad x-y=\pm\sqrt{\frac{3-a}{2}}$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\dfrac{3a-1}{2}}\mp\sqrt{\dfrac{3-a}{2}}\right\} \\ y=\dfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\dfrac{3a-1}{2}}\mp\sqrt{\dfrac{3-a}{2}}\right\} \end{cases}$$

（複号は4つの組合せをとれる）

ゆえに実数解をもつための条件は

$$3a-1\geqq 0 \quad かつ \quad 3-a\geqq 0$$

が成り立つことである。これを変形すると

$$\frac{1}{3}\leqq a\leqq 3 \quad ……答$$

*　*　*

◆ 2元2次の連立方程式で，**おきかえ** で解ける場合も少なくありません。例えば

練習 7. 連立方程式

7/5

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 & ……① \\ x^2+xy+y^2=1 & ……② \end{cases}$$

を解け。（広島大）

(ヒント) $x+y=u$, $xy=v$ とおくと

①より　$u^2-2v+u=2$ ……①′

②より　$u^2-v=1$ ……②′

①′と②′から v を消去して

$$u^2-u=0$$

$\therefore$ $u=0$ あるいは $u=1$

$u=0$ のとき $v=-1$；$u=1$ のとき $v=0$

ゆえに

$$x+y=0 \quad かつ \quad xy=-1$$

または

$$x+y=1 \quad かつ \quad xy=0$$

これを解いて

$$(x,\ y)=(1,\ -1),(-1,\ 1),(0,\ 1),(1,\ 0)$$

練習 8. 次の連立方程式を解け。

$$x^2+4xy+y^2=13,\quad x+y+2xy=7$$

（愛媛大）

(ヒント) $x+y=u$, $xy=v$ とおくと

$$u^2+2v=13,\quad u+2v=7$$

v を消去すると，……

答 $\begin{cases} x=1,\ y=2\ ;\ x=2,\ y=1\ ; \\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{14}i}{2},\ y=\dfrac{-2\mp\sqrt{14}i}{2} \end{cases}$

（複号同順）

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

2元2次連立方程式の理論

◆２元２次の方程式が実数解をもつかどうか，解の範囲はどうか，といった問題はかなりめんどう。でも典型的なものだけは，……

◆　２次方程式の解の理論はスゴク難しかったのですから，連立方程式となると思いやられることです。しかし，入試問題として出題されるようなものは，かえってラクなくらい。では，まずこれをやってみませんか。

7/6

練習 1. 連立方程式 $x^2+y^2=1$，$xy=a$ が実数解をもつように，実数 a の範囲を定めよ。

ヒント
$$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots①$$
$$xy=a \quad \cdots\cdots②$$

①＋②×2：
$$(x+y)^2=1+2a$$
$$\therefore\ x+y=\pm\sqrt{1+2a} \quad \cdots\cdots③$$

①－②×2：
$$(x-y)^2=1-2a$$
$$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{1-2a} \quad \cdots\cdots④$$

{③＋④}÷2，{③－④}÷2 を作ると x，y が求められましょう。したがって，x，y が実数であるための条件は明らかです。

$$1+2a \geqq 0 \quad かつ \quad 1-2a \geqq 0$$
$$\therefore\ -\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 答$$

注　③，④を組み合わせて解くときに複号の扱い方をうっかりマチガウことが多いもの。この複号は独立に出てきたのですから＋＋，＋－，－＋，－－の４組の組合せをしなければなりません。

7/6

練習 2. 連立方程式
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a \\ x^2-xy+y^2=b \end{cases}$$
が実数解をもつための条件を求めよ。

解
$$x^2+xy+y^2=a \quad \cdots\cdots①$$
$$x^2-xy+y^2=b$$

{①＋②}÷2 を作ると
$$x^2+y^2=\frac{a+b}{2} \quad \cdots\cdots③$$

①－②を作ると
$$2xy=a-b \quad \cdots\cdots④$$

③＋④より
$$(x+y)^2=\frac{3a-b}{2} \quad \cdots\cdots⑤$$

③－④より
$$(x-y)^2=\frac{3b-a}{2} \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥より
$$x+y=\pm\sqrt{\frac{3a-b}{2}}$$
$$x-y=\pm\sqrt{\frac{3b-a}{2}}$$

ゆえに x，y が実数であるための条件は
$$3a-b \geqq 0 \quad かつ \quad 3b-a \geqq 0$$
である。あるいは，これをまとめて
$$\frac{b}{3} \leqq a \leqq 3b$$
とすることができる。

答　$\dfrac{b}{3} \leqq a \leqq 3b$

7/6

練習 3. ２つの曲線 $x^2+y^2=a$ と $xy=1$ が接するように a の値を定めよ。

ヒント
$$x^2+y^2=a \quad \cdots\cdots①$$
$$xy=1 \quad \cdots\cdots②$$

①＋②×2：　$(x+y)^2=a+2$
$$\therefore\ x+y=\pm\sqrt{a+2}$$

①－②×2：　$(x-y)^2=a-2$
$$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{a-2}$$

ゆえに求める a の値は２であることがわかります。もし，ピンとこなかったら，まず x，y を実際に求めてみてください。

■練習 4. 放物線 $y=x^2$ の内部にあって，原点でこの放物線に接する円の半径の最大値を求めよ。　（和歌山大）

ヒント　原点において $y=x^2$ に接する円の方程式は，中心が y 軸上にあるから

$$x^2+(y-a)^2=a^2 \quad (a>0)$$

とおける。これが原点以外に $y=x^2$ と共通点をもたない条件を求めればよいでしょう。

x^2 を消去して

$$y+(y-a)^2=a^2$$

$$\therefore \quad y^2-(2a-1)y=0$$

$$\therefore \quad y=0 \text{ あるいは } y=2a-1$$

オヤ，オカシイゾ。コレデハ，原点以外ノ点デモ必ズ交ワルデハナイカ。

そうではないのです。yが実数だからといって x も実数とは限らないのです。x が実数でないためには $y=x^2\leqq 0$ でなければなりません。

$$\therefore \quad 2a-1\leqq 0$$

すなわち

$$a\leqq\frac{1}{2}$$

のとき，原点以外に共通点はもたないのです。

ゆえに，求める半径の最大値は $\frac{1}{2}$ です。

3/6

■練習 5. 円 $(x-m)^2+y^2=1-m^2$ とだ円 $x^2+2y^2=2$ とが接するように m の範囲を定めよ。

ヒント　接するための条件は，連立方程式と考えたときに，重複解をもつことです。

さて，y^2 を消去しますと

$$x^2+2\{(1-m^2)-(x-m)^2\}=2$$

$$\therefore \quad x^2-4mx+4m^2=0$$

オヤ，オヤ，これでは $(x-2m)^2=0$ となってつねに重複解 $2m$ をもつ。mの値にかかわらず接する，と思いそうだ。

そうではないのです。$x=2m$ を

$$x^2+2y^2=2$$

に代入すると

$$4m^2+2y^2=2$$

$$\therefore \quad y^2=1-2m^2$$

ゆえに，yが実数であるためには

$$1-2m^2\geqq 0$$

$$\therefore \quad m^2\leqq\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq m\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

でなければならないのです。

*　*　*

◆ 次には，ややちがったタイプの問題をあげてみましょう。

■練習 6. 次の連立方程式の解が正の実数であるための t のみたすべき必要十分な条件を求めよ。

$$x+y=t, \quad x^3+y^3=1$$　（法政大）

ヒント

$$x^3+y^3=1$$

$$\therefore \quad (x+y)(x^2-xy+y^2)=1$$

$$\therefore \quad (x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=1$$

これに $x+y=t$ を代入して

$$t^3-3xyt=1$$

$t=x+y>0$ であるから

$$xy=\frac{t^3-1}{3t}$$

となります。こうして，$x+y$ と xy の値が t で表されたのですから，x，y は 2 次方程式

$$u^2-tu+\frac{t^3-1}{3t}=0$$

の 2 つの解です。そこで，この 2 つの解が正であるための条件を求めればよい。判別式を Dとして

$$D=t^2-4\cdot\frac{t^3-1}{3t}\geqq 0$$

かつ　$x+y=t>0$,　$xy=\frac{t^3-1}{3t}>0$

これらを解いて

$$1<t\leqq\sqrt[3]{4}$$

が求める解です。

3次方程式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆3次方程式の解の公式を発見したタータリアは，それをカルダンに盗まれて，憤死したという伝説があるのですが，……

◆ 3次方程式を解くには，ふつう因数定理を使って因数分解するのです。しかし，どんな3次方程式でも解けるカルダンの方法というものもあります。では，ともかく，次の練習からいきましょう。

■練習 1. $x^3=-8$ を解け。

(解)　$x^3+2^3=0$

$\therefore\ (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$　…… 答

3/7

■練習 2. $3x^3+x^2-8x+4=0$ を解け。　（松山商大）

ヒント　**因数定理を使って因数分解** すればいいでしょう。何を代入してみるか，それは x^3 の係数3の約数で，定数項4の約数を割ったものを入れてみるのが定石です。

さて，それは

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm4\ ;\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3}$$

の12個。幸いにも1を入れてみると0になりますから，**組立除法**（☞ p. 22）を使って

1	3	1	−8	4
		3	4	−4
	3	4	−4	0

$\therefore\ (x-1)(3x^2+4x-4)=0$

$\therefore\ (x-1)(x+2)(3x-2)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2,\ \dfrac{2}{3}$　…… 答

*　*　*

◆ では，次に，もう少しめんどうなのに手をつけるとしましょう。

■練習 3. $18x^3-9x^2-2x+1=0$ を解け。

ヒント　$\pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6},$ …… を代入して調べてみるとよいでしょう。

答　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}$

3/7

■練習 4. 3次方程式 $x^3-ax^2+25x-26=0$ の1つの解が2であるという。定数 a の値と，他の2つの解を求めよ。　（東大）

ヒント　2が解だというから代入してみると

$8-4a+50-26=0$　　$\therefore\ a=8$

そこで $x^3-8x^2+25x-26$ を $x-2$ で割ってみますと，組立除法により

2	1	−8	25	−26
		2	−12	26
	1	−6	13	0

となって，他の2つの解は2次方程式

$$x^2-6x+13=0$$

の解であることがわかります。これを解いて

$x=3\pm2i$　　答　$a=8,\ x=3\pm2i$

■練習 5. 3次方程式

$$3x^3-4x^2+26x+20=0$$

の1つの解は $1-3i$ である。他の2つの解を求めよ。　（鹿児島大）

ヒント　実数係数の方程式が $1-3i$ なる解をもてば必ず $1+3i$（**共役な複素数解**）なる解をもつことがわかっています。そこで元の方程式の左辺は

$$\{x-(1-3i)\}\{x-(1+3i)\}$$
$$=x^2-2x+10$$

で割りきれます。実際割ってみると

$$(x^2-2x+10)(3x+2)=0$$

となり，他の解は $1+3i,\ -\dfrac{2}{3}$ となります。

解と係数の関係 を使ってもできます。

◆ 3次方程式を解く問題はこれで大体すんだのですが，共通解を求める問題が残っています。しかし，これは（☞ p. 138）をみていただくこととして，次は，いわゆる **カルダンの方法** をやることにしましょう。しかしムリにやることはありませんよ。それには **1の虚数立方根** ω（オメガ）のことを知っている必要がありますので，もし，ω の性質を忘れていたら，この機会に（☞ p. 122）を読んでおいてください。まず1つ予備問題を：——

≪1の虚数立方根を ω とするとき

$$x^2-xy+y^2=(x+y\omega)(x+y\omega^2)$$

を証明せよ≫

(ヒント) 右辺

$$=x^2+(\omega+\omega^2)xy+y^2\omega^3$$

ところが，

$$\omega^3=1,\ 1+\omega+\omega^2=0$$

ですから

$$=x^2-xy+y^2$$

となり，確かに左辺と等しくなります。

では，次の練習にいきましょう。

練習 6. x^3-6x+9 は $x^3+u^3+v^3-3xuv$ の形に変形できる。u，v の1組の値を求めよ。次に，$x^3-6x+9=0$ を解け。

(ヒント) $x^3-6x+9=x^3+u^3+v^3-3xuv$

が恒等的に成り立つためには

$$uv=2 \qquad \cdots\cdots①$$

$$u^3+v^3=9 \qquad \cdots\cdots②$$

①より $u^3v^3=8$ であるから $u^3=U$，$v^3=V$ とおくと

$$UV=8,\ U+V=9$$

U，V を2つの解とする2次方程式は，解と係数の関係から

$$t^2-9t+8=0$$

$$\therefore\ (t-1)(t-8)=0$$

$$\therefore\ t=1,\ 8$$

$$\therefore\ u^3=1,\ v^3=8$$

としてよい。

$$\therefore\ u=1,\ v=2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

この結果から $x^3-6x+3=0$ は

$$x^3+1^3+2^3-3x\cdot1\cdot2=0$$

と書けるから，因数分解して

$$(x+1+2)(x^2+1^2+2^2-x\cdot1-1\cdot2-2\cdot x)=0$$

$$\therefore\ (x+3)(x^2-3x+3)=0$$

$$\therefore\ x=-3,\ \frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(注) 上の予備問題の結果を使えば

$$-3,\ -\omega-2\omega^2,\ -2\omega-\omega^2$$

とも書けます。

練習 7. x^3+3x+1 は $x^3+u^3+v^3-3xuv$ の形に変形できる。u，v の1組の値を求め，次に，$x^3+3x+1=0$ を解け。

(解) $x^3+1-(-3)x=x^3+u^3+v^3-3xuv$

とおくと

$$u^3+v^3=1 \qquad \cdots\cdots①$$

$$uv=-1 \qquad \cdots\cdots②$$

②を3乗し，$u^3=U$，$v^3=V$ とおくと

$$U+V=1$$

$$UV=-1$$

この U，V を2つの解とする2次方程式は

$$t^2-t-1=0$$

$$\therefore\ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに $u=\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$，$v=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ に選ぶことができる。このとき x^3+3x+1

$$=(x+u+v)(x^2+u^2+v^2-xu-uv-vx)$$

$$=(x+u+v)(x+u\omega+v\omega^2)(x+u\omega^2+v\omega)$$

と書ける。ここに ω は1の虚数立方根。

ゆえに，求める3つの解は次のようである。

$$-u-v=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$-u\omega-v\omega^2=\omega\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$-u\omega^2-v\omega=\omega^2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\omega\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

（ただし，ω は1の虚数立方根）

3次方程式の解と係数の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆3次方程式の解と係数の関係を知っておくと，いろいろな場合に大きな力を発揮するものです。

◆　3次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の3つの解を α, β, γ としますと，恒等式

$$ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

が成り立ちます。右辺を展開しますと

$$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2$$
$$+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

そこで両辺を比べて，次のような関係式が得られます。

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}}$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

これを **3次方程式の解と係数の関係** というのです。では，次の練習からやってみませんか。 ﾚ/ﾉ

■練習 1. $2x^3+3x^2+x-1=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき

$$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$$

を求めよ。

(解)　$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3}{2}$,　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2}$

■練習 2. $x^3+2x^2+3x+5=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

の値を求めよ。

(ヒント)　解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$

ですから

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=(-2)^2-2\times3=4-6=-2$$

ﾚ/ﾉ　　　　答　-2

■練習 3. 3次方程式 $x^3+px+q=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ を p, q で表せ。

(ヒント)　2つの方法があります。1つは，

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

を使うのです。この場合には $\alpha+\beta+\gamma=0$ ですから

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma=-3q \quad \cdots\cdots \text{答}$$

これでできた。

もう1つのやり方は，α, β, γ が解ですから，

$$\begin{cases}\alpha^3+p\alpha+q=0 & \cdots\cdots① \\ \beta^3+p\beta+q=0 & \cdots\cdots② \\ \gamma^3+p\gamma+q=0 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①+②+③ を作りますと

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+p(\alpha+\beta+\gamma)+3q=0$$

ところが　$\alpha+\beta+\gamma=0$

$$\therefore\quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3q \quad \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 4. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき

$$a(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+b(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$
$$+c(\alpha+\beta+\gamma)+d$$

の値を求めよ。　　　　(鹿児島大)

(ヒント)

$$\begin{cases}a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0 \\ a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d=0 \\ a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d=0\end{cases}$$

を辺々相加えると

$$a(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+b(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$+c(\alpha+\beta+\gamma)+3d=0$$

$$\therefore\quad a(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+b(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$
$$+c(\alpha+\beta+\gamma)+d=-2d$$

答　$-2d$

*　*　*

◆　3次方程式の解と係数の関係は方程式を解くときにも大いに役に立ちます。例えば，これです。

練習 5. 連立1次方程式

$$\begin{cases} a^3x+a^2y+az=1 \\ b^3x+b^2y+bz=1 \\ c^3x+c^2y+cz=1 \end{cases}$$

を解け。ただし，a, b, c は異なる数で，0でないとする。　　(熊本大)

ヒント　与えられた3つの式は，t に関する3次方程式

$$xt^3+yt^2+zt-1=0$$

の相異なる3つの解が a, b, c であることを示しています。解と係数の関係を使うと

$$\begin{cases} a+b+c=-\dfrac{y}{x} & \cdots\cdots① \\ ab+bc+ca=\dfrac{z}{x} & \cdots\cdots② \\ abc=\dfrac{1}{x} & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③より　$x=\dfrac{1}{abc}$　……④

①，③より　$y=-\dfrac{1}{abc}(a+b+c)$

②，④より　$z=\dfrac{1}{abc}(ab+bc+ca)$

答　$\begin{cases} x=\dfrac{1}{abc},\quad y=-\dfrac{a+b+c}{abc} \\ z=\dfrac{ab+bc+ca}{abc} \end{cases}$

練習 6. 連立方程式

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases}$$

を解け。

ヒント　3次方程式の解と係数の関係から x, y, z は t の3次方程式

$$t^3-6t^2+11t-6=0 \qquad \cdots\cdots①$$

の3つの解であることがわかります。そして①は

$$(t-1)(t-2)(t-3)=0$$

と変形されますから，

$$t=1,\ 2,\ 3$$

ゆえに，求める解は

x	1	1	2	2	3	3
y	2	3	1	3	1	2
z	3	2	3	1	2	1

の6組です。

*　*　*

◆　3次方程式の解と係数の関係は条件式が対称式のときにも有用なことがあります。

練習 7. a, b, c がすべて異なる数で

$$a^2+\frac{2}{a}=b^2+\frac{2}{b}=c^2+\frac{2}{c}$$

のとき $a+b+c$ および abc の値を求めよ。

ヒント　$a^2+\dfrac{2}{a}=b^2+\dfrac{2}{b}=c^2+\dfrac{2}{c}=k$

とおきますと，

$$a^2+\frac{2}{a}=k$$

$$\therefore\quad a^3-ka+2=0$$

同様にして

$$b^3-kb+2=0$$
$$c^3-kc+2=0$$

が成り立つので，a, b, c は，t に関する3次方程式

$$t^3-kt+2=0$$

の相異なる3つの解です。

$$\therefore\quad a+b+c=0,\ abc=-2$$

答　$a+b+c=0$, $abc=-2$

もちろん，3次方程式を使わないでもできますが，このほうがずっと簡単でラクにできることに注目してください。だからこそ，どうしても知っておきたいものですね。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

3 次方程式の解のべき乗の和

◆2次方程式の解のべき乗の和はいわばどんなやり方でもできます。しかし，3次方程式になると，そうはいきませんよ。

◆ べき乗の和について計算したことがないなら，まず2次方程式の場合（☞ p. 132）をあっさりやってから，3次方程式の場合にとりかかってください。

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

これを使うと $\alpha+\beta+\gamma$ や $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ はすぐ求められます。では，次の練習へ。

■練習 1. 3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の解を α, β, γ とするとき，$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ を p, q, r で表せ。　（明治大）

ヒント　解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-p & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q & \cdots\cdots② \\ \alpha\beta\gamma=-r & \cdots\cdots③\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2\\&\quad-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(-p)^2-2q=p^2-2q\end{aligned}$$

答　$-p$, p^2-2q

■練習 2. 3次方程式

$$x^3-(3-k)x^2+(1+5k^2)x+2=0$$

の3つの解を α, β, γ とするとき $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ が最大となるように，実数 k の値を定めよ。　（電通大）

解　解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=3-k$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1+5k^2$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\\&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(3-k)^2-2(1+5k^2)\\&=-9k^2-6k+7=-9\left(k+\frac{1}{3}\right)^2+8\end{aligned}$$

これを最大にする k の値は

$$k=-\frac{1}{3}$$ ……答

■練習 3. 3次方程式 $x^3-3x^2+5=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値を求めよ。

ヒント　2つのやり方があります。1つは公式

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$$
$$\boldsymbol{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

を使うもの。つまり，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ \alpha\beta\gamma=-5\end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\\&=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma\\&\quad+\gamma\alpha)\}\end{aligned}$$

に代入して

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot(-5)=3\{3^2-3\cdot 0\}$$

$$\therefore\quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=12$$ ……答

もう1つのやり方は α, β, γ が解であることから

$$\begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2+5=0 \\ \beta^3-3\beta^2+5=0 \\ \gamma^3-3\gamma^2+5=0\end{cases}$$

辺々相加えて

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+15=0$$

ところが

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=9-0=9$$
$$\therefore\quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=12 \quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

この2つのやり方のうちで，あとのほうがスッキリしていると思いませんか。

練習 4. 3次方程式 $x^3+ax+b=0$ の3つの解を α, β, γ とし，$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$, $S_0=3$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) S_2, S_3 を a, b で表せ。

(2) n が0または正の整数のとき，等式 $S_{n+3}+aS_{n+1}+bS_n=0$ を証明せよ。

(3) (2)を用いて次の等式を証明せよ。

$$\frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}$$

（順天堂大）

ヒント　解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\\ \alpha\beta\gamma=-b\end{cases}$$

ですから

(1) $S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=0-2a=-2a$$

α, β, γ が解ですから

$$\alpha^3+a\alpha+b=0 \quad\cdots\cdots①$$
$$\beta^3+a\beta+b=0 \quad\cdots\cdots②$$
$$\gamma^3+a\gamma+b=0 \quad\cdots\cdots③$$

①＋②＋③ より

$$S_3+aS_1+3b=0$$
$$\therefore\quad S_3=-a\cdot 0-3b=-3b$$

(2) ①$\times\alpha^n$＋②$\times\beta^n$＋③$\times\gamma^n$ を作ると

$$S_{n+3}+aS_{n+1}+bS_n=0 \quad\cdots\cdots④$$

が得られます。

(3) ④から

$$S_5=-aS_3-bS_2$$
$$=-a(-3b)-b(-2a)$$
$$=3ab+2ab=5ab$$

ゆえに，証明すべき式の

$$左辺=\frac{5ab}{5}=ab$$
$$右辺=\frac{-3b}{3}\cdot\frac{-2a}{2}=ab$$

ゆえに証明された。

練習 5. 3次方程式 $x^3+ax+b=0$ の3つの解を α, β, γ とし，$t_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とおくとき，at_5+bt_4 を a, b で表せ。

（東京工大）

解　解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\\ \alpha\beta\gamma=-b\end{cases}$$

$$\therefore\quad t_1=0$$
$$t_2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=0^2-2\cdot a=-2a$$

また，α, β, γ が解であることから

$$\begin{cases}\alpha^3+a\alpha+b=0 & \cdots\cdots①\\ \beta^3+a\beta+b=0 & \cdots\cdots②\\ \gamma^3+a\gamma+b=0 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①＋②＋③ より

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+a(\alpha+\beta+\gamma)+3b=0$$
$$\therefore\quad t_3=-3b$$

①$\times\alpha$＋②$\times\beta$＋③$\times\gamma$ より

$$t_4+at_2+bt_1=0$$
$$\therefore\quad t_4=-a(-2a)-b\cdot 0=2a^2$$

①$\times\alpha^2$＋②$\times\beta^2$＋③$\times\gamma^2$ より

$$t_5+at_3+bt_2=0$$
$$\therefore\quad t_5=-a(-3b)-b(-2a)=5ab$$

したがって

$$at_5+bt_4=a(5ab)+b(2a^2)=7a^2b$$

$\boxed{答}$　$7a^2b$

注　上の解答で練習4.と練習5.とは本質的に同じことですが，どのように書くかということは，その人の趣味の問題といえましょう。それはキミが決定することです。しかし，次数があまり高くないときは練習5.のようなやり方のほうがよさそうだ!!

9/17

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

4次方程式の解法

◆4次方程式を解くいわゆるフェラリーの方法は入学試験にはしばしば出ているんですよ。この機会にマスターしておきたいもの。

◆ 4次方程式は3次方程式とちがい，いろいろバラエティもあり，入試にもよく出ているのです。次にその典型的なものを1つ1つ攻略するとしましょう。

3/12

練習 1. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$ を解け。　(北大)

ヒント　左辺には4つ因数の積があって，キレイに並んでいます。このようなときには，**両端から順にまとめる** のがコツ。すなわち

$$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$$

ここで $x^2+8x=u$ とおいてもよいし，$x^2+8x+7=u$ とおいてもいいが，もっともよいのは x^2+8x+7 と $x^2+8x+15$ の平均 $x^2+8x+11$ を u とおくのです。すなわち，

$$x^2+8x+11=u$$

とおくと

$$(u-4)(u+4)+15=0$$

$$\therefore\ u^2-1=0$$

$$\therefore\ u=\pm1$$

$u=1$ のとき　$x^2+8x+10=0$

$$\therefore\ x=-4\pm\sqrt{6}$$

$u=-1$ のとき　$x^2+8x+12=0$

$$\therefore\ x=-2,\ -6$$

答　$-4\pm\sqrt{6}$，-2，-6

3/12

練習 2. $x^4+x^2-2ax+1-a^2=0$ を解け。　(群馬大)

ヒント　xについては4次式ですが，aについては2次式，さては **aについて整理** すればいいのであろう。

$$a^2+2xa-(x^4+x^2+1)=0$$

$$\therefore\ a^2+2xa-(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore\ \{a+(x^2+x+1)\}\{a-(x^2-x+1)\}=0$$

$$\therefore\ (x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)=0$$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-4a-3}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2} \end{array}\right\}\ \cdots\cdots \text{答}$$

3/12

練習 3. $x^4+3x^2+4=0$ を解け。

ヒント　こんなふうに解く人が多いのです。

$x^2=u$ とおくと

$$u^2+3u+4=0$$

$$\therefore\ u=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}},\quad \pm\sqrt{\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}}$$

このやり方はまずい。**複2次式の因数分解** (☞ p. 44) により，

$$x^4+3x^2+4=(x^2+2)^2-x^2$$
$$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\ \cdots\cdots \text{答}$$

注　上のまずい解もマチガイというわけではありません。これを変形すると上の解になるのですから。(☞ p. 120)

練習 4. $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$ を解け。　(松山商大)

ヒント　$f(x)=2x^4-x^3-6x^2-x+2$

因数定理 を使えないか？ そのため，x^4 の係数2の約数で定数項の約数を割って得られる　$\pm1,\ \pm2,\ \pm\dfrac{1}{2}$

を調べてみるといい。幸い，$f(-1)=0$ だからうまくいきます。

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)(2x-1)$$

となりますから，求める解は

$$-1\ (2\text{重解}),\ 2,\ \frac{1}{2}\ \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 5.　$4x^4+8x^3+3x^2+8x+4=0$
を解け。

ヒント　練習4. と同型で，因数定理を使って因数分解することができますが，実は，もう1つの扱い方があります。係数が両端から順に等しい。つまり

x^4 と定数項の係数が　4

x^3 の x の係数が　8

といったぐあい。これを **相反方程式**（そうはんほうていしき）あるいは **逆数方程式**（ぎゃくすうほうていしき）といいます。

これを解くには **x^2 で両辺を割っておきかえる** のです。すなわち，

$$4x^2+8x+3+8\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore\quad 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=u$ とおくと，平方して

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=u^2\qquad\therefore\quad x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$$

$$\therefore\quad 4(u^2-2)+8u+3=0$$

$$\therefore\quad 4u^2+8u-5=0$$

$$\therefore\quad (2u+5)(2u-1)=0$$

$$\therefore\quad u=-\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}$$

$u=-\dfrac{5}{2}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$

$$\therefore\quad 2x^2+5x+2=0$$

$$\therefore\quad x=-2,\ -\frac{1}{2}$$

$u=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\quad 2x^2-x+2=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$$

答　$-2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$

*　*　*

◆ 以上で4次方程式の解き方の大切なタイプは終わりました。4次方程式に出会ったら，上の4つのドレカに当たると思って，まずマチガイはありません。そこで，いよいよ，どんな4次方程式でも解ける **フェラリーの方法** についてやっておきましょう。**入試などに出るときには，全部やり方を書いてある** のですから，べつにこの方法を知らないからといってできないことはありません。恒等式を扱う1つの例題にすぎないのですから。

3/12

■練習 6.　$f(x)=x^4-7x^2+24x-15$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $(x^2+a)^2-(bx+c)^2$ の形に変形できる。定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。ただし，$a,\ b,\ c$ は実数。

(2)　方程式 $f(x)=0$ を解け。（長崎大）

ヒント　(1)　$x^4-7x^2+24x-15$

$=(x^2+a)^2-(bx+c)^2$

$=x^4+(2a-b^2)x^2-2bcx+(a^2-c^2)$

が恒等的に成り立つから

$2a-b^2=-7$　……①

$-2bc=24$　……②

$a^2-c^2=-15$　……③

①より　$b^2=2a+7$　……④

③より　$c^2=a^2+15$　……⑤

②より　$b^2c^2=144$　……⑥

④，⑤を⑥に代入して

$$(2a+7)(a^2+15)=144$$

$$\therefore\quad 2a^3+7a^2+30a-39=0$$

$$\therefore\quad (a-1)(2a^2+9a+39)=0$$

a は実数だから　$a=1$

$\therefore\quad b=\pm3\qquad\therefore\quad c=\mp4$

答　$a=1,\ b=\pm3,\ c=\mp4$
（複号同順）

(2)　次に，(1)の結果から

$$f(x)=(x^2+1)^2-(3x-4)^2=0$$

より

$$(x^2+3x-3)(x^2-3x+5)=0$$

あとは解ける。

答　$\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2},\ \dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$

2 9/9

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○方程式・不等式の応用問題のコツ

◆いわゆる応用問題は，数学的表現の困難のゆえにめんどうになる。しかし，いわゆる数学的困難はないのです。

◆ 応用問題を解く際の手順は，いうまでもないこと：——

まず，問題に現れた量を文字を用いて表すこと。このとき，**何を主にして，何を従にするかが焦点**，になるのです。例えば，

練習 1. たえず一定の水量がわき出ている池を，満水のときから排水するのに，ポンプ3台では a 分かかり，4台では b 分かかった。5台では何分かかるか。

（京都教育大）

ヒント　5台では何分かかるか，といったからとて，x 分かかるとすれば，では，その先が進まないでしょう。

まず満水量を u，わき出ている水量を毎分 v，ポンプの排水量を毎分 w とすれば，はじめて，式で表せます。

3台のポンプで1分間の排水量 $3w$，a 分では $(3w)a$，一方この間 u にわき出る量 av が加わったわけですから

$$3wa=u+av \quad \cdots\cdots①$$

まったく同様にして

$$4wb=u+bv \quad \cdots\cdots②$$

$$5wx=u+xv \quad \cdots\cdots③$$

あとは，①，②，③から x を求めるだけのこと。ところで，答には a，b しか入っていけないのですから，u，v，w を消去しなければなりません。まず，u を消去するために，

②－①：　$(4b-3a)w=(b-a)v$　……④

③－②：　$(5x-4b)w=(x-b)v$　……⑤

シメタ!! ここまでくると ④÷⑤ を作ると w，v は一挙にして消えて

$$\frac{4b-3a}{5x-4b}=\frac{b-a}{x-b}$$

これから分母をはらって x を求めると

$$x=\frac{ab}{2a-b}\ (\text{分}) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

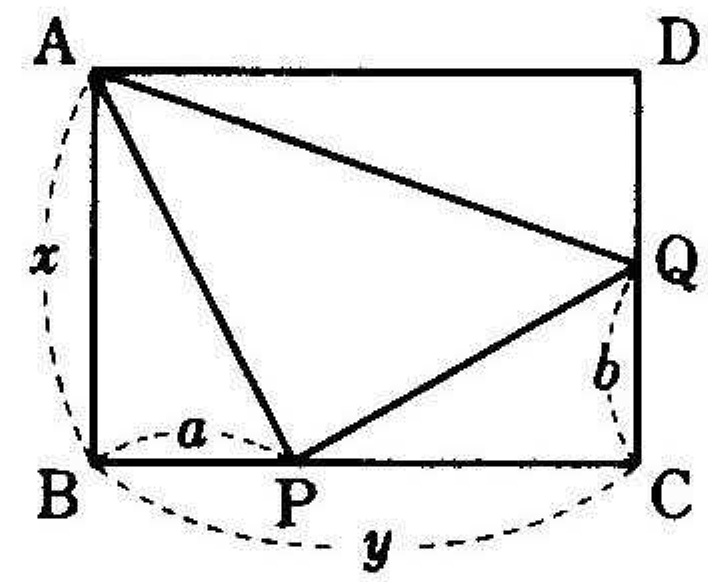
◆ 応用問題を解く際の第2のコツは，**必ずしも求めたいものを x とおかない**，こと。いいうなれば迂回（うかい）する。例えば，

練習 2. 長方形 ABCD は，その相隣る2辺 BC，CD 上にそれぞれ点 P，Q をとって，△ABP，△PCQ，△ADQ の面積をそれぞれ 2cm^2，3cm^2，4cm^2 にすることができるという。長方形 ABCD の面積を求めよ。

ヒント　ABCD の面積を求めよ，とあるから，といって，これを x としても，そこから先に進まない。やはり，

$AB=x$，$BC=y$

とでもおくのが当然です。



右の図のようにおきますと，

$$2\triangle ABP=ax=4 \quad \cdots\cdots①$$

$$2\triangle PCQ=b(y-a)=6 \quad \cdots\cdots②$$

$$2\triangle ADQ=y(x-b)=8 \quad \cdots\cdots③$$

となります。

さて求めたいのは何か。いうまでもなく xy ですが，a や b が入っていてはまずい。このようなときには，まず，ジャマものの a と b をなくそうと思うべきです。

そのためには，①から a を求め，③から b を求めて②に代入すればいいだろう。xy のほうは，そのあとで，考えてみよう，と，こう決心するのです。

さて,

$$a=\frac{4}{x},\ b=x-\frac{8}{y}$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{8}{y}\right)\left(y-\frac{4}{x}\right)=6$$

$$\therefore\ (xy-8)(xy-4)=6xy$$

バンザイ，xy に関する2次方程式だ。これを解いて

$xy=16$　($xy=2$ は適さない!!)

答　16cm^2

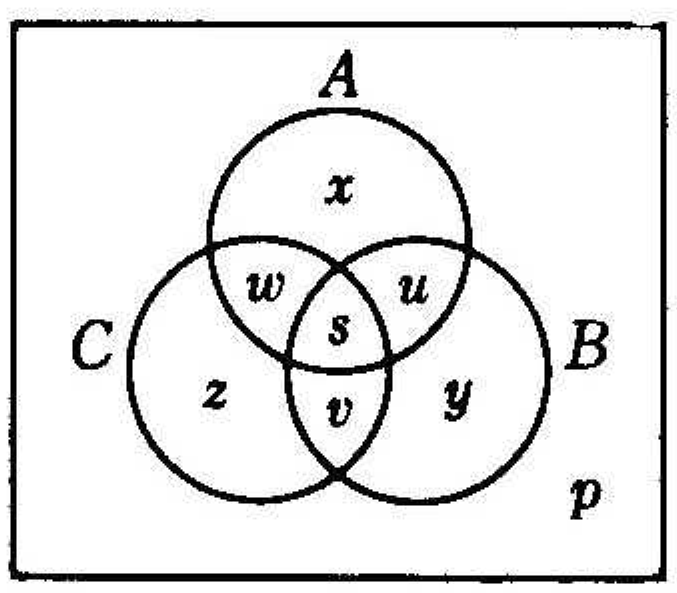
＊　＊　＊

◆ 応用問題を解く際に，おこる1つの困難は文句で書いてあることをいかに数式化するか，ということです。うまくやろうと思わずに，**すべてを数式化しよう**，と考えてはじめると，もっと簡単化できることに気がつくことが多いのです。例えば：——

練習 3. ある都市で，A, B, C 3種類の新聞が発行されている。その都市の世帯で
- Aを購読しているものの割合は 69%,
- Bを購読しているものの割合は 46%,
- Cだけを購読しているものの割合は 3%
- B, C両方を購読しているものの割合は 21%,
- A, Cの少なくとも一方を購読しているものの割合は 88%,
- B, Cの少なくとも一方を購読しているものの割合は 50%,
- A, B, Cのうち，どれか1種類だけ購読しているものの割合は 61%

である。このときAだけを購入しているものの割合を求めよ。　(東大)

ヒント まずベン図を用いて表してみるのが定石。右の図に示すようにおくと，題意から次の8つの式が得られます。



この際 x, y, …… の順にして，縦をそろえて書くのがコツ。

$$\begin{array}{llr}
x+u+w+s & =69 & \cdots\cdots① \\
y+u+v+s & =46 & \cdots\cdots② \\
z & =3 & \cdots\cdots③ \\
v+s & =21 & \cdots\cdots④ \\
x+z+u+v+w+s & =88 & \cdots\cdots⑤ \\
y+z+u+v+w+s & =50 & \cdots\cdots⑥ \\
x+y+z & =61 & \cdots\cdots⑦ \\
x+y+z+u+v+w+s+p & =100 & \cdots\cdots⑧
\end{array}$$

ほしいのは x ですが，⑤－⑥ から

$$x-y=38 \qquad \cdots\cdots⑨$$

⑦－③ から

$$x+y=58 \qquad \cdots\cdots⑩$$

(⑨＋⑩)÷2 から

$$x=48$$

と出ます。しかし，このようにうまくやろうとすると，とかく堂々めぐりになります。それよりは順々に消してゆくほうがいい。まず p が入っているのは⑧だけですから，これは p を求めるのに必要なだけ，そこで捨てる。

次に ①－②, ②－④, ④－⑤, ⑤－⑥ を作って，s を消去すると

$$\begin{array}{llr}
x-y-v+w & =23 & \cdots\cdots⑪ \\
y+u & =25 & \cdots\cdots⑫ \\
-x-z-u-w & =-67 & \cdots\cdots⑬ \\
x-y & =38 & \cdots\cdots⑭
\end{array}$$

これでずいぶん簡単になった。そこで，③, ⑦, ⑪, ⑫, ⑬, ⑭から w を消去する。実際は ⑪＋⑬ を作って

$$-y-z-u-v=-44 \qquad \cdots\cdots⑮$$

だけ。次は v を消去，といったぐあい。

急がばまわれ，で，結局はこのほうが早くできてしまうことが多いのです。

この種の問題については (☞ p. 88)。

＊　＊　＊

◆ ともかく，応用問題に強くなるコツは，うまくやらないこと。求めたいものにばかり目をつけないで，問題全体をいかに数学的に表現するかということに注目することです。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

① 混合の問題の扱い方

◆いわゆる方程式の応用問題に強くなるコツはいくつかのティピカルな問題をいくつもやってみるのがコツ。混合の問題はその好例!!

◆ 混合の問題というのは，例えば，次のような問題です。

練習 1. 8％と5％の食塩水がある。この食塩水を混ぜて7％の食塩水をつくるには，どんな割合で混ぜればよいか。(広島大)

ヒント　さあ，どうしますか。この問題をはじめる前にちょっと考えてくださいよ。8％の食塩水とは何のことですか。これは100 g の食塩水の中に8 gだけ食塩が入っている，ということなんですよ。**100 g の水に8 gの食塩を入れたというのではありません。**

いいですか。くどいけれども，もう一度います。N gの食塩水中に$0.08N$ gの食塩が含まれている，ということなんです。

そして，2つの食塩水を加えて変わらないものは食塩の合計と食塩水の合計なんです。そこに目をつける。さて：——

8％の食塩水xグラムと5％の食塩水yグラムを混合しますと，その食塩の量の合計は

$$(0.08x+0.05y)\ \text{グラム}$$

です。そして，混合して7％の食塩水$(x+y)$グラムができたとしますと，その中の食塩の量は

$$0.07(x+y)\ \text{グラム}$$

ですから，

$$0.08x+0.05y=0.07(x+y)$$
$$\therefore\ 8x+5y=7x+7y$$
$$\therefore\ x=2y$$
$$\therefore\ x:y=2:1$$

つまり8％と5％の食塩水を $2:1$ の割合に混合すればよいのです。

注　7％の食塩水という代わりに濃度(のうど)が7％であるともいいます。

◆ では，次を：——

3/13

練習 2. 甲，乙2種の食塩水を作ろうと思う。甲，乙の中の食塩の目方の比を $2:3$，水の目方の比を $1:2$ にして作ったら，できあがった甲の食塩水と乙の食塩水の目方の比は $40:77$ になった。甲の食塩水の濃度を求めよ。(埼玉大)

ヒント　甲，乙の中の食塩の目方の比が $2:3$ だというのですから，その目方をそれぞれ $2x$, $3x$ グラムとすることができます。また水の目方の比が $1:2$ だというのですから，水の目方は y, $2y$ グラムとすることができます。したがって，甲，乙の食塩水の目方は

$$2x+y,\ 3x+2y\ \ \text{グラム}$$

で，その比が $40:77$ だというのですから

$$2x+y:3x+2y=40:77$$
$$\therefore\ 77(2x+y)=40(3x+2y)$$
$$\therefore\ y=\frac{34}{3}x$$

ところで，濃度は食塩水の目方で，食塩の目方を割ったものですから，甲の濃度は

$$\frac{2x}{2x+y}=\frac{2x}{2x+\frac{34}{3}x}=\frac{3}{20}$$
$$=0.15=15\ (\%)$$

答　15％

これがわかれば混合の問題の要点はわかったというもの。あとは，これをやや複雑にすると，いわゆる難問，ということになるのです。つまり，あくまでも，濃度の定義をはっきりとらえ，その定義から離れないようにしてゆくことが大切なのです。

練習 3. a%の食塩水 x g に b%の食塩水 y g を混ぜて，ちょうど c%となるとして，x と y との関係を示す式を作れ。ただし，$a \neq b$ とする。　（奈良女大）

（解）　a%の食塩水 x g 中の食塩の量は

$$\frac{ax}{100}$$

で，b%の食塩水 y g 中の食塩の量は

$$\frac{by}{100}$$

で，c%の食塩水 $(x+y)$ g 中の食塩の量は

$$\frac{c(x+y)}{100}$$

であるから

$$\frac{ax}{100}+\frac{by}{100}=\frac{c(x+y)}{100}$$

$$\therefore\quad ax+by=c(x+y)$$

$$\therefore\quad (a-c)x=(c-b)y \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

（注）　$a \neq b$ という条件はどこに使ったのだろう？　さあ，わかりましたか？

練習 4. 濃度80%のアルコール溶液が3kg入っているびんAと60%のものが3kg入っているびんBとがある。Aからある量をくみ出してBに入れ，次にBからその2倍の量をくみ出してAに入れたところ，びんAの中の溶液の濃度は72.5%になった。第1回のくみ出し量を求めよ。　（熊本大）

（ヒント）　第1回にくみ出した量を x kg としてその操作を調べてみましょう。

さて，第1回目に x kg くみ出したとするとその中に含まれるアルコールの量は $\dfrac{80x}{100}$ kg で，この x kg をびんBに入れるのですから，全体は $(3+x)$ kg，その中のアルコールの量は

$$\frac{3\times 60}{100}+\frac{80x}{100}=\frac{180+80x}{100}$$

したがってBの濃度は，これを $3+x$ で割って求められます。

それは，$\dfrac{180+80x}{100(3+x)}\times 100$ (%) です。そこで，これから $2x$ kg くみ出すと，その中に含まれているアルコールの量は

$$\left(\frac{180+80x}{100(3+x)}\right)\times(2x)\ \text{(kg)}$$

そこで，Bから $2x$ kg くみ出してAに入れると，Aの中のアルコール量に目をつけて

$$3\times\frac{80}{100}-\frac{80x}{100}+\left(\frac{180+80x}{100(3+x)}\right)\times 2x$$

$$=(3+x)\times\frac{72.5}{100}$$

なる関係が成り立ちます。

$$\therefore\quad x^2-10x+9=0$$

$$\therefore\quad (x-1)(x-9)=0$$

$x<3$ でなければならないから　$x=1$

答　1kg

練習 5. 容器A，B，Cに右の表の割合で物質Pと物質Qとを溶かした水溶液が入っている。Aから x グラムの液を捨て，代わりにBの液 x グラムをAに入れてよく混合し，さらにAから x グラムの液を捨て，代わりにBの液 x グラムをAに入れたところ，Aの液はCの液と同じ割合の水溶液になったという。x を求めよ。　（大阪市大）

容器	水溶液の全重量	物質Pの重量	物質Qの重量
A	500	2	4
B	1000	12	0
C	500	5	1

（重量の単位はグラムとする）

（解）　第1回の操作後Aの液における物質Qの重量は　$4\times\dfrac{500-x}{500}$ グラム

第2回の操作後Aの液における物質Qの重量は　$4\times\left(\dfrac{500-x}{500}\right)^2$ グラム

$$\therefore\quad 4\left(\frac{500-x}{500}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad x=250$$

これを物質Pの重量について調べると

$$\left(2\times\frac{1}{2}+3\right)\times\frac{1}{2}+3=5$$

となって，題意に適する。　答　$x=250$

どうです。混合の問題もやってみると，別にめんどうに感じなくなったではないか。

○整数解を求めるには

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◈整数解を求める問題は大きく分けて4つのタイプがあります。第1は $ax+by=c$ の形の場合です。

◆　$3x+5y=10$ の整数解を求めよ，とか，$2x+3y+7z=5$ の整数解を求めよ，とかいう問題の扱い方は3通りあります。その1つを完全にマスターしておくことが大切です。例をあげて説明しましょう。

第1の方法は次のようです。

≪$3x+5y=13$ の整数解を求めよ≫

なら，**1つの文字について解く** のです。ただし，係数の小さいほう，イヤ，セイカクニイウト，係数ノ絶対値ノ小サイホウ，について解きます。すなわち

$$3x=-5y+13$$

このとき，$3x=13-5y$ としないで，yを前にして，つまり，yについて整理して上のように書くと，計算のマチガイが減るもの。

$$\therefore\quad x=\frac{-5y+13}{3}$$

次に右辺の分子から3の倍数をとれるだけとってまとめる。つまり，$-5y+13$ を $(-6y+12)+(y+1)$ とするわけ。そして，次のようにする。

$$x=\frac{(-6y+12)+(y+1)}{3}$$
$$=(-2y+4)+\frac{y+1}{3}$$

ところが，xも $-2y+4$ も整数だから $\frac{y+1}{3}$ も整数である。これを k（整数）に等しいとおいて，

$$\frac{y+1}{3}=k\qquad\therefore\quad y=3k-1$$
$$\therefore\quad x=-2(3k-1)+4+k=-5k+6$$

さて，答はどう書くか。

答　$x=-5k+6,\ y=3k-1$
（k：任意の整数）

◆　入試問題の大部分はこれで解けますが，2段階でやる必要の起こることもあります。例えば

≪$5x+8y=17$ の整数解を求めよ≫

なら，xについて解いて

$$x=\frac{-8y+17}{5}=\frac{(-10y+15)+(2y+2)}{5}$$
$$=(-2y+3)+\frac{2y+2}{5}$$

kを整数として

$$\frac{2y+2}{5}=k$$

とおいて，変形すると

$$y=\frac{5k-2}{2}=\frac{(4k-2)+k}{2}$$
$$=(2k-1)+\frac{k}{2}$$

またもや $\frac{k}{2}=l$（lは整数）とおいて

$$k=2l$$
$$\therefore\quad y=2(2l)-1+l=5l-1$$
$$x=-2(5l-1)+3+2l=-8l+5$$

答　$x=-8l+5,\ y=5l-1$
（$l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots\cdots$）

注　kやlの説明は表現はちがいますが，本質的には同じですよ。

では，次の練習をやってみましょう。答は書いてありませんが，もとの方程式に代入してみて成り立てばいいのです。

練習1. $5x+11y=17$ の整数解を求めよ。
7/13

練習2. $8x+11y=23$ の整数解を求めよ。
7/13

練習3. $3x+10y=18$ の整数解を求めよ。

9/12

◆ 第2の方法は次のようです。

≪$5x+7y=17$ の整数解を求めよ≫

なら，$x=2$，$y=1$ のとき成り立つことはすぐわかりますから

$$5(x-2)=7(1-y)$$

と変形することができます。左辺は5の倍数であるから，右辺も5の倍数，ところが5と7は互いに素，ゆえに $1-y$ が5の倍数である（ここのところ，チョットマギラワシイが，考えてみると当然のことですよ)。そこで

$$1-y=5k$$

とおくと，

$$5(x-2)=7\times(5k)$$

$$\therefore\quad x-2=7k$$

したがって

$$x=7k+2,\quad y=-5k+1$$

ということになります。1組の解がすぐ求まるときは便利です。

■練習 4. $3x+7y=37$ の整数解を求めよ。

ヒント　$x=10$，$y=1$ が1つの解です。

■練習 5. $5x+9y=23$ の整数解を求めよ。

ヒント　$x=1$，$y=2$ が1つの解です。

*　*　*

◆ 第3の方法はいわゆる **剰余類**(じょうよるい）を使う方法です。剰余類を知らない人はそれを勉強してからやればいいでしょう。ここではそれをすでに知っているものとしてやっておきます。なお剰余類については（☞ p. 164）を参照。さて，

≪$5x+9y=14$ の整数解を求めよ≫

なら係数の小さい（実ハ絶対値ノ小サイ）$5x$ を右辺にもってきて

$$14-9y=5x$$

ゆえに $14-9y$ は5の倍数。つまり14と $9y$ は5を法として同じ剰余類に入る。

$$\therefore\quad 9y\equiv 14\ (5)$$

ところが

$$9=5\times2-1,\quad 14=5\times3-1$$

$$\therefore\quad -y\equiv -1\ (5)$$

$$\therefore\quad y\equiv 1\ (5)$$

つまり，y を5で割った余りが1というわけ。

$$\therefore\quad y=5k+1\quad (k\text{は整数})$$

と書けます。これをもとの方程式に代入して

$$5x+9(5k+1)=14$$

$$\therefore\quad x=-9k+1$$

答　$x=-9k+1$，$y=5k+1$
（k は整数）

*　*　*

◆ これまで整数解を求めることをやってきましたが，自然数解でも同じことです。

■練習 6. $5x+7y=1000$ の自然数解は何組あるか。

ヒント　例えば，上の剰余類を使うやり方では

$$7y\equiv 1000\ (5)$$

$7\equiv 2\ (5)$，$1000\equiv 0\ (5)$ であるから

$$2y\equiv 0\ (5)$$

2を両辺に掛けて

$$4y\equiv 0\ (5)$$

ところが $4\equiv -1\ (5)$ であるから

$$-y\equiv 0\ (5)$$

$$\therefore\quad y\equiv 0\ (5)$$

ゆえに　$y=5k$（k は整数）

$$\therefore\quad x=-7k+200$$

x，y が自然数であるから

$$5k\geqq 1,\quad -7k+200\geqq 1$$

$$\therefore\quad 28\geqq k\geqq 1$$

ゆえに自然解は28組ある。

*　*　*

◆ x，y，z の3つあるときは自由に変わるものが2つ入ってきます。例えば，

≪$2x+3y+5z=15$ の整数解を求めよ≫

なら1組の解は $(0,\ 0,\ 3)$ ですから

$$2x+3y+5(z-3)=0$$

あるいは

$$2(x+z-3)+3(y+z-3)=0$$

これは $2X+3Y=0$ の形ではありませんか。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○整数解を求めるには(つづき)

◈整数解を求める5つの型のうち，第2は，$xy+x+2y=4$，第3は $2xy+x+y=4$，あとは $x^2+xy+y^2=7$，$x^2+xy-2y^2=4$

◆ 整数解を求める第2のタイプはこんな形です。それは

≪$xy+3x+y=9$ の整数解を求めよ≫

xでもいい，yでもいい，**一方について解いてみます** と，

$$y=\frac{-3x+9}{x+1}$$

分子を分母で割ると，商は -3，余りは12ですから

$$y=-3+\frac{12}{x+1} \qquad \cdots\cdots(*)$$

yも -3 も整数ですから $\dfrac{12}{x+1}$ も整数です。つまり，$x+1$ は 12 の約数です。

$\therefore\quad x+1=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$

∴

x	-13	-7	-5	-4	-3	-2
y	-4	-5	-6	-7	-9	-15

x	0	1	2	3	5	11
y	9	3	1	0	-1	-2

(＊) の式を変形すると

$$(x+1)(y+3)=12$$

となりますから，積が12になるものを調べるというのでもよいが，さて，どちらがラクかということになると，その人によってちがうようだ。スキなほうを自分のものとするより仕方があるまい。

(注) こんな意地の悪い問題に出会うこともあります。

≪$xy-2x+y=2$ の整数解を求めよ≫

yについて解いてみると

$$y=\frac{2x+2}{x+1}=2$$

この $y=2$ を代入すると $0=0$ となってしまう。

実は，これは因数分解できて

$$(x+1)(y-2)=0$$

$\therefore\quad x=-1$ あるいは $y=2$

したがって

(i) $x=-1$ で yは任意の整数

(ii) xは任意の整数で $y=2$

なる2組の解があるわけです。

練習 1. $xy+3x+5y=13$ の整数解を求めよ。 3/10

*　　*　　*

◆ 第3のタイプは

≪$3xy+x+2y=10$ の自然数解を求めよ≫

といったもの。

xでもいい，yでもいいが，ここではyについて解いてみよう。

$$y=\frac{-x+10}{3x+2}$$

分子を分母で割ってみると商は$-\dfrac{1}{3}$，余りは$\dfrac{32}{3}$ですから

$$y=-\frac{1}{3}+\frac{\frac{32}{3}}{3x+2}$$

これでは $-\dfrac{1}{3}$ や $\dfrac{32}{3}$ の処置に困りますね。このときは両辺に3を掛けて

$$3y=-1+\frac{32}{3x+2}$$

そこで $3x+2$ は 32 の正の約数ですから

$3x+2=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$

$\therefore\quad x=-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{2}{3},\ 2,\ \dfrac{14}{3},\ 10$

結局，自然数解は 2 と10，そして $x=2$ のとき $y=1$；$x=10$ のとき $y=0$ (コレハ不適)，したがって，求める解はただ1つ $x=2,\ y=1$ であることがわかった。

では，次の問題をやってみませんか。

■練習 2. $2xy+x+3y=6$ の整数解を求めよ。5/14

■練習 3. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=2$ の自然数解を求めよ。

ヒント 分母をはらって変形すると

$$2xy-5x-2y=0$$

となります。

* * *

◆ 第4のタイプは

7/14 ≪$x^2+xy+y^2=7$ の整数解を求めよ≫

といった形です。yについて整理しますと

$$y^2+xy+(x^2-7)=0$$

2次方程式の **解の公式を使って解くと**

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{28-3x^2}}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

となります。yは整数というのですから，虚数解になるハズもない。

$$\therefore \quad 28-3x^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad x^2 \leqq 9.33\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$x=-3$ のときには①より

$$y=\frac{3\pm\sqrt{28-27}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=2,\ 1$$

$x=-2$ のときには同様にして　$y=3,\ -1$

$x=-1$ のときには　$y=3,\ -2$

$x=0$ のときには　$y=\pm\sqrt{7}$（不適）

といったぐあい。結局

答

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	2	3	3	2	1	-1
	1	-1	-2	-3	-3	-2

* * *

◆ 第5のタイプは

≪$x^2+xy-2y^2=4$ の整数解を求めよ≫

といったもの。第4と同じじゃないか，と思うかもしれません。しかし，その通りやってみるとちがうことがわかるのです。

xについて整理すると

$$x^2+yx-(2y^2+4)=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-y\pm\sqrt{9y^2+16}}{2}$$

第4のタイプでは根号内の2乗の係数が負だからうまくいったのです。こんどは正だから絶望的!! 実は，このとき，もとの方程式をふり返ってみると，因数分解できるのでした。つまり，

$$(x+2y)(x-y)=4$$

ゆえに

$x+2y$	4	2	1	-4	-2	-1
$x-y$	1	2	4	-1	-2	-4

これを解いて

x	2	2	3	-2	-2	-3
y	1	0	-1	-1	0	1

* * *

◆ 大事なことはこれでほとんど終わりです。なお，☞ p. 206 参照。では次へ。

■練習 4. 次の連立方程式の整数解を求めよ。3/14

$$x+y+z=10,\quad x-y+2z=8 \qquad \text{(信州大)}$$

ヒント yを消去すると

$$2x+3z=18$$

これを解いて

$$x=-3k+9,\quad z=2k$$

したがって

$$y=x+2z-8=k+1$$

kはもちろん任意の整数です。

■練習 5. $xy=x^2+y+3$ の整数解を求めよ。

ヒント $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}=x+1+\dfrac{4}{x-1}$

$x-1$ は4の約数である。だから，……

■練習 6. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ の自然数解を求めよ。

（明治大）

ヒント 変形して $y=\dfrac{3x}{x-3}=3+\dfrac{9}{x-3}$

もういいでしょう。

答 $(x,y)=(4,12),(6,6),(12,4)$

⑪ 剰余類とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆同じ性質をもつものをまとめて扱うといろいろ便利なことが多いもの。ある数で割った余りの等しいものをまとめると，……

◆ 漢字というのはとかくやさしいものをめんどうにみせる役目をする。

剰余類というと，いかにもめんどうな気持におそわれますが，実は，これ，**剰余による分類のこと** なんです。

例えばすべての整数を5で割った余りは0, 1, 2, 3, 4 しかない。これを次のように並べてみましょう。いちばん上の行には5で割った余りが0のものが並んでいる。そして，第2行には，……余りが1，……。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & -5 & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & \cdots \\
\cdots & -4 & 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & \cdots \\
\cdots & -3 & 2 & 7 & 12 & 17 & 22 & \cdots \\
\cdots & -2 & 3 & 8 & 13 & 18 & \cdots\cdots & \\
\cdots & -1 & 4 & 9 & 14 & 19 & \cdots\cdots &
\end{array}$$

では，具体的な問題を考えてみましょう。

3/19

練習1. 5で割った余りが r であるような整数の集合を C_r で表すとき，5つの集合 C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 について次の問いに答えよ。

$a\in C_2$, $b\in C_3$ とするとき積 ab は上のどの集合に属するか。　(岐阜大)

ヒント　$a\in C_2$ というのは a を5で割った余りが2だということなんですから

$$a=5k+2 \quad (k\text{は整数})$$

と書けます。また $b\in C_3$ ですから

$$b=5l+3 \quad (l\text{は整数})$$

と書けます。だから

$$\begin{aligned}ab&=(5k+2)(5l+3)\\&=25kl+15k+10l+6\\&=5(5kl+3k+2l+1)+1\end{aligned}$$

これからわかるように ab を5で割ると余りは1です。つまり

$$ab\in C_1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

なお，$a=5k+2$ などと書かないで，5の倍数を例えば (5) で表すことにしますと

$$(5)\times(5)=(5)$$
$$(5)+(5)=(5)$$
$$(5)-(5)=(5)$$

といった関係が成り立つのですから，上のような扱いにはスゴク便利です。すなわち，

$$a=(5)+2,\ b=(5)+3$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad ab&=\{(5)+2\}\{(5)+3\}\\&=(5)+6=(5)+1\in C_1\end{aligned}$$

といったぐあい。では，このやり方で1つ練習してみましょう。

3/19

練習2. 3で割って余りが r となるような整数の集合を K_r を書くことにする。a, b, c を，それぞれ K_0, K_1, K_2 に属する整数とするとき $a+b$, $2b+c$, bc, c^3-c はそれぞれ K_0, K_1, K_2 のどれに属するか。　(大阪工大)

ヒント　$a=(3)$, $b=(3)+1$, $c=(3)+2$ であるから

$$a+b=(3)+\{(3)+1\}=(3)+1$$
$$\therefore\quad a+b\in K_1$$
$$\begin{aligned}2b+c&=2\{(3)+1\}+\{(3)+2\}\\&=(3)+4=(3)+1\end{aligned}$$
$$\therefore\quad 2b+c\in K_1$$
$$bc=\{(3)+1\}\{(3)+2\}=(3)+2$$
$$\therefore\quad bc\in K_2$$
$$\begin{aligned}c^3-c&=\{(3)+2\}^3-\{(3)+2\}\\&=(3)+8-(3)-2=(3)+6=(3)\end{aligned}$$
$$\therefore\quad c^3-c\in K_0$$

■**練習 3.** 6で割ったときの余りが0, 1, 2, 3, 4, 5 であるような整数の集合をそれぞれ $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$ で表し，$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\times b}$ とするとき，$\bar{3}\cdot\bar{x}=\bar{0}$ を満足する $\bar{x}$ を求めよ。（東北学院大）

（ヒント）　$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\times b}$ というのだから，例えば

$$\bar{4}\cdot\bar{5}=\overline{4\times 5}=\overline{20}=\bar{2}$$
$$\bar{5}\cdot\bar{2}=\overline{5\times 2}=\overline{10}=\bar{4}$$

といったぐあい。

これを表にしてみると下のようになる。

《$\bar{a}\cdot\bar{b}$ の表》

		$\bar{b}$					
		$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{a}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

実は $\bar{3}\cdot\bar{x}=\bar{0}$ を求めたいのであったから，この表が全部は要らないのですが，ついでだから書いておいたのです。これをみると

$\bar{x}=\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{4}$　……［答］

＊　＊　＊

◆ 上のことから剰余類，つまり剰余による分類の意味がおおよそわかったことでしょう。ここでもう少し立入ったことを説明しておきましょう。無理に理解しようとつとめるほどのことでもありませんから，イヤなら，やらなくてよいのです。さて：——

すべての整数を，整数 m で割って得る余りが 0, 1, 2, …, $m-1$ である整数の集合を C_0, C_1, C_2, …, C_{m-1} で表し，このような集合を **m を法(ほう)とする剰余類** というのです。そして，この集合 C_0, C_1, …, C_{m-1} の集合を **剰余系** といいます。

また，ここに使った C_0, C_1, C_2, ……の代わりに $C(0)$, $C(1)$, $C(2)$, …… などの記号を使うこともありますし，$C(0)$, $C(1)$, $C(2)$, …… の代わりに 0, 1, 2, …… と書くこともあります。このときには剰余系は $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ と表せます。すべての整数は法 m に対して m 通りに分けられるわけですから，もし，$m+1$ 個の整数をとると，同じ剰余類に少なくとも2個は入るハズ。そこで，こんな問題が出るわけです。

■**練習 4.** 相異なる $(n+1)$ 個の整数がある。これらの中から2つの数を選べば，その差が n で割りきれるものがあることを証明せよ。（早大）

（解）　整数を n で割って得る余りは 0, 1, 2, 3, ……, $n-1$ のいずれかであるから，相異なる $(n+1)$ 個の整数を n で割って得られる余りも 0, 1, 2, ……, $n-1$ のいずれかで，それが $n+1$ 個あることから少なくとも2個は一致しなければならない。そして，その整数の差は n で割りきれる。

（注）　ここまでくるとちょっと気になることがある。負数を割った余りは何かということ。具体的にいうと

40を7で割ると商は5，余りは5で

$$40=7\times5+5$$

という関係があったのですが，-40を7で割った商と余りはどうなのか？　実は，これも

$$-40=7\times(-6)+2$$

として，商は -6，余りは2と考える約束です。つまり余りは，この場合でも正になるようにするのです。だから，上の早大の問題は整数の正負を区別する必要はありません。

＊　＊　＊

◆ なお，2数 a, b が m を法として同じ剰余類に属するとき $a\equiv b \pmod m$ とか，$a\equiv b\ (m)$ とか，あるいは $a\equiv b$ と書くことがあります。

$a\equiv b \pmod m$ ならば，$a-b$ はもちろん m で割りきれるのです。また

$a\equiv a'$, $b\equiv b'$ ならば次の関係があります。

$$a+b\equiv a'+b'$$
$$a-b\equiv a'-b'$$
$$ab\equiv a'b'$$

◯剰余類の整除への応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈割りきれることを証明せよ，とか，余りを求めよ，とかいう問題に剰余類はきわめて有力な武器なんです。

◆ 剰余類のこと（☞ p. 164）を忘れていたら，この機会に復習してから，次を読んでください。

さっそく具体的な問題にいきましょう。

■練習 1. $N=n^3+5n$ は６で割りきれることを証明せよ。ただし n は整数とする。

ヒント　いろいろな方法があります。

第１：$n^3+5n=(n^3-n)+6n$

$=n(n^2-1)+6n=(n-1)n(n+1)+6n$

ところが連続３整数 $n-1$, n, $n+1$ のうち，いずれか１つは２の倍数，いずれか１つは３の倍数ですから，その積は６の倍数です。$6n$ はいうまでもなく６の倍数です。したがって n^3+5n は６の倍数です。

第２：数学的帰納法を使う方法（これは数ⅡBの範囲ですから，ここでは省略）

第３：剰余類を使う方法です。６で割った余りを調べるには整数を法６の剰余系で考えてみるのです。６の倍数を (6) で表して

まず $n=(6)$ のとき

$N=(6)^3+5(6)=(6)+(6)=(6)$

$n=(6)+1$ のとき

$N=\{(6)+1\}^3+5\{(6)+1\}$

$=\{(6)+1\}+\{(6)+5\}=(6)+6=(6)$

$n=(6)+2$ のとき

$N=\{(6)+2\}^3+5\{(6)+2\}$

$=\{(6)+2^3\}+\{(6)+10\}$

$=\{(6)+8\}+\{(6)+10\}$

$=(6)+18=(6)$

$n=(6)+3$ のときは……

といったぐあい。これでいいのですが，これでは解答としてゴタゴタしすぎる。

そこで表にまとめてみましょう。６を法としたときの剰余類 C_0, C_1, …, C_5 の代わりに 0, 1, 2, …, 5 と書いてもいいのでしたね。そこで次のようにします。

n	0	1	2	3	4	5
$5n$	0	5	4	3	2	1

この表の意味は $n\in C_3$ のとき $5n\in C_3$ であるし，$n\in C_4$ のとき $5n\in C_2$ だということなんです。同じく

n	0	1	2	3	4	5
n^3	0	1	2	3	4	5

例えば $n\in C_2$ ならば　$n=6k+2$

$\therefore\ \ n^3=(6k+2)^3=(６の倍数)+2^3$

$=(６の倍数)+8=(６の倍数)+2$

といったぐあい。

上の２つの表から

n	0	1	2	3	4	5
n^3+5n	0	0	0	0	0	0

なるほど n^3+5n は６で割りきれることがわかった。ところで，これを答案に書くにはどうか。では，次にその１例を：——

3/9

■練習 2. $N=n^7-n$ は７で割りきれることを示せ。ただし，n は整数である。

解　７を法とする剰余系を考えると，下のようになる。

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	9≡2	16≡2	25≡4	36≡1
n^4	0	1	16≡2	4	4	16≡2	1
n^6	0	1	8≡1	8≡1	8≡1	8≡1	1
n^7	0	1	2	3	4	5	6

ゆえに n^7-n は７で割りきれる（この表は

n^7 を求めるために n^2, n^4, n^6 を順次計算した手順をも示しているのです)。

練習 3. n を整数とするとき n^5-n は30で割りきれることを示せ。

ヒント　法を30とする剰余系を考えるのは大変だ。しかし，$30=5\times6$ だから5で割りきれることと6で割りきれることをいえばよいだろう。あるいは $30=2\times3\times5$ だから，2でも，3でも，5でも割りきれることをいえばいいだろう。

まず2で割りきれることはすぐわかる。なぜなら n が奇数なら n^5 も n も奇数であるからその差は偶数，n が偶数なら n^5 も n も偶数であるからその差も偶数，だからです。

次に3で割りきれることを剰余系でやってみよう。3を法とする剰余系を考えて

n	0	1	2
n^5	0	1	$32\equiv2$
n^5-n	0	0	0

となって明らか。

次に5で割りきれることを剰余系でやってみよう。5を法とする剰余系を考えて

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	$9\equiv4$	$16\equiv1$
n^4	0	1	$16\equiv1$	$16\equiv1$	1
n^5	0	1	2	3	4
n^5-n	0	0	0	0	0

となって予定通り。

わかったら，キチンと答案を書いてみてください。

*　*　*

◆ 本質的には同じことですが，少し形の変わったものを扱ってみましょう。

練習 4. a, b, c が整数で，$a^2+b^2=c^2$ のとき，2数 a, b のうち少なくとも1つは3の倍数であることを示せ。　(成蹊大)

ヒント　ふつう使われるのは背理法です。

a が3の倍数でないとすると

$$a=3k\pm1$$

と書けます。

$$\therefore\quad a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1$$
$$=(3\text{の倍数})+1$$

b も3の倍数でないとすると，同様に

$$b^2=(3\text{の倍数})+1$$

したがって

$$a^2+b^2=(3\text{の倍数})+2$$

である。ところで，c が3の倍数ならば c^2 も3の倍数であるし，c が3の倍数でなければ上と同様にして c^2 は(3の倍数)+1，これは不合理，ということになります。

さて，これを剰余系を使えばどうなるか。本質的には同じことなんですが。

解　3を法とする剰余系について

n	0	1	2
n^2	0	1	$4\equiv1$

ゆえに a, b が3の倍数でないとすると a^2, b^2 について

$$a^2\equiv1,\quad b^2\equiv1$$
$$\therefore\quad a^2+b^2\equiv2$$

ところが　$c^2\equiv0$ あるいは $c^2\equiv1$

したがって a, b が3の倍数でなければ $a^2+b^2=c^2$ は成立しない。

注　上の解は a, b の少なくとも一方が3の倍数であるようなものがあることを示しているわけではありません。しかし，実際に存在することは

$$3^2+4^2=5^2$$

からすぐわかります。

では，上と同じ流儀で次の練習を。

練習 5. a, b, c が整数で $a^2+b^2=c^2$ のとき，a, b の少なくとも一方は偶数であることを示せ。　(大阪歯大)

ヒント　法を4として剰余系を考えると下のようになることから考えてください。

n	0	1	2	3
n^2	0	1	0	1

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○1次の不等式の解法

◆1次の不等式を完全にマスターすることが不等式に強くなる秘訣と心得るべし。そうときまれば，がんばるべし。

◆ 不等式を解くときに大切なことは，1つ。

負の数を掛けたり，割ったりすると，
不等号の向きが変わる

ということ。うっかり，分母をはらったりしてはいけません。では，ともかく，これをやってみませんか。

練習 1. $3x+1<5x-7$ を解け。

（解）　$3x+1<5x-7$

$\therefore\ 5x-3x>7+1$

$\therefore\ 2x>8$

$\therefore\ x>4$　　　答　$x>4$

練習 2. $0.2x+0.3>5x-0.1$ を解け。

（解）両辺に10を掛けて

$2x+3>50x-1$

$\therefore\ 50x-2x<3+1$

$\therefore\ 48x<4$

$\therefore\ x<\frac{1}{12}$　　……答

3/19

練習 3. $ax>2$ を解け。ただし，a は定数である。

（ヒント）ナンダ，コレハ簡単ダ。オレガヤルニ値シナイ，などとつぶやきながら

$$x>\frac{2}{a}$$

とやる人のいかに多いことか。

a は正か0か負かによってちがいますよ。つまり，$a>0$ のとき，両辺を a で割っても不等号の向きは変わらないから

$$x>\frac{2}{a}$$

となります。$a=0$ のときは，左辺は0，右辺は2ですから不成立。しかし，不成立などと書いてはいけません。解なし，と書くべきです。最後に，$a<0$ のときには，両辺を負の数 a で割れば，不等号の向きが変わって

$$x<\frac{2}{a}$$

となります。これをまとめて

答 $\begin{cases} a>0: & x>\dfrac{2}{a} \\ a=0: & \text{解なし} \\ a<0: & x<\dfrac{2}{a} \end{cases}$

7/19

練習 4. x についての不等式

$$ax+b>cx+d$$

を解け。　　(岡山大)

（解）　$(a-c)x>d-b$　　……①

$a>c$ のとき

$$x>\frac{d-b}{a-c}$$

$a<c$ のとき

$$x<\frac{d-b}{a-c}$$

$a=c$ のとき，①は

$$0>d-b$$

となるから，$d\geqq b$ のとき，解なし。

$d<b$ のとき，x はすべての実数値をとる。

答 $\begin{cases} a>c: & x>\dfrac{d-b}{a-c} \\ a<c: & x<\dfrac{d-b}{a-c} \\ a=c,\ d\geqq b: & \text{解なし} \\ a=c,\ d<b: & -\infty<x<\infty \end{cases}$

練習 5. $(a^2+a-2)x>a^2+2a-3$ を解け。a は実数の定数。

（ヒント）$(a-1)(a+2)x>(a-1)(a+3)$

$a>1$ あるいは $a<-2$ のとき，両辺を $(a-1)(a+2)\,(>0)$ で割って

$$x>\frac{a+3}{a+2}$$

$-2<a<1$ のときには

$$x<\frac{a+3}{a+2}$$

$a=1$ のとき，両辺とも 0 であるから，解なし。

$a=-2$ のとき，$0>-3$ となるから，x のすべての値に対して成り立つ。つまり，解は $-\infty<x<+\infty$ となります。

*　　*　　*

◆ 1次の不等式としてはこれですべてをつくしたわけですが，あとは絶対値がついたり，連立させたり，ということになります。

3/18

練習 6. 不等式 $|2-x|<1$ を解け。

（都立大）

ヒント いろいろな解答が考えられましょう。まず，もっとも素朴なのは場合分けの方法。

$x\geqq2$ のとき

$$-(2-x)<1 \quad \therefore \quad x<3$$

ゆえに $2\leqq x<3$ は解である。

$x<2$ のとき

$$(2-x)<1 \quad \therefore \quad 1<x$$

ゆえに $1<x<2$ は解である。

上の 2 つを組み合わせて，求める解は

$$1<x<3 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

である。

第 2 の解法としては

$|a|<1$ なら $-1<a<1$

を使うもの。

$$|2-x|<1$$

$$\therefore \quad -1<2-x<1$$

左半分より

$$x<3$$

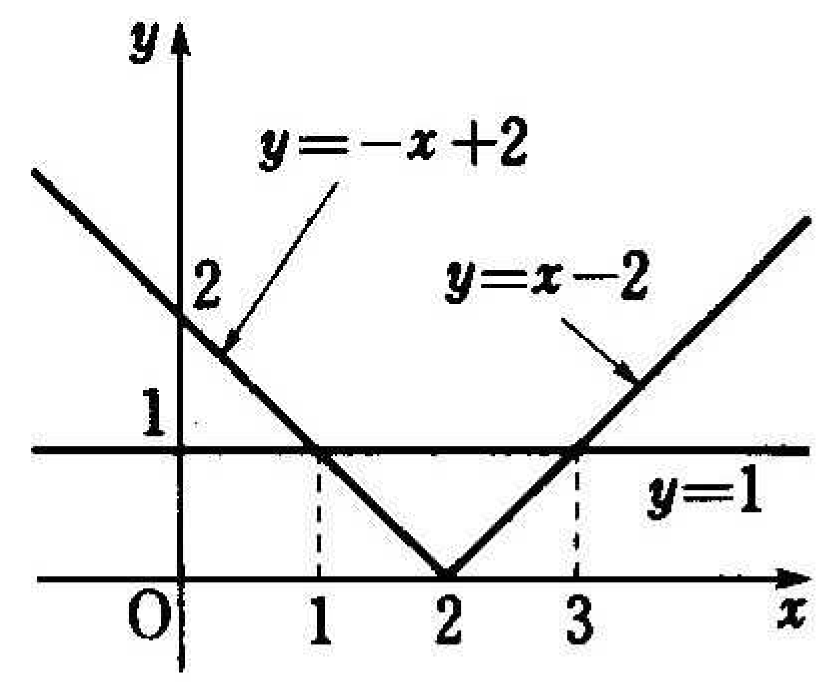
右半分より

$$1<x$$

$$\therefore \quad 1<x<3 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

第 3 の解法としてはグラフを使うもの。

$y=|2-x|$ のグラフは図の折れ線，$y=1$ のグラフは x 軸に平行な直線で，その交点は (3, 1) と (1, 1) です。



$y=|2-x|$ のグラフが，$y=1$ のグラフの上にあるのは

$$1<x<3 \quad \cdots\cdots①$$

の部分です。したがって解は①です。

第 4 の解法は両辺を 2 乗しても同値であることを使うもの。つまり，

$$|2-x|<1$$

$$\therefore \quad (2-x)^2<1$$

$$\therefore \quad (x-2)^2-1<0$$

$$\therefore \quad \{(x-2)+1\}\{(x-2)-1\}<0$$

$$\therefore \quad (x-1)(x-3)<0$$

$$\therefore \quad 1<x<3 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

では，いろいろな方法で，次の 3 問を解いてみませんか。

3/19

練習 7. x を実数とするとき，不等式 $|x-3|<|2x-1|$ を解け。（埼玉大）

答 $x<-2$ または $x>\dfrac{4}{3}$

練習 8. $\dfrac{1}{4}<\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|<\dfrac{1}{2}$ を解け。

（慶大）

答 $1<x<\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}<x<3$

練習 9. $3x+5y=6$ のとき，$x<2y\leqq3x$ をみたす x の範囲を求めよ。（早大）

ヒント $y=\dfrac{6-3x}{5}$ を $x<2y\leqq3x$ に代入して x の範囲を求めればよい。ナニ!! 答が，ナイだって!! それは自分でやってみるさ。2 通りにやって一致したら，たぶん正解だね。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

①2次不等式の解法

◆2次方程式を解くのはラクだが，2次不等式はニガ手，という人が多い。しかし，これもきまった手順をカタクナに守ればよい。

◆ $x^2-4x+3>0$ を解けとか，$x^2-x-2<0$ を解け，というのが2次不等式といわれるものです。これは，きまった方法を形式的に使うようにならないといけない。

≪$x^2-4x+3>0$ を解け≫
であれば

$$(x-1)(x-3)>0$$

$\therefore$ $x-1>0$ かつ $x-3>0$
あるいは
$x-1<0$ かつ $x-3<0$
が成り立つ。

$\therefore$ $x>1$ かつ $x>3$
あるいは
$x<1$ かつ $x<3$
が成り立つ。ゆえに
$x>3$ あるいは $x<1$

このようにいちいちやっていたのでは少しめんどうになるとすぐ混乱してしまう。そこで，形式的に，次のように公式としてオボエテしまうのです。

$a>0$ のとき
$ax^2+bx+c>0$ の解は
$x<\beta$，$\alpha<x$
$ax^2+bx+c<0$ の解は
$\beta<x<\alpha$

である。ただし，α，β は $ax^2+bx+c=0$ の解で，$\beta<\alpha$ とする。

*　*　*

◆ では具体的な例を練習しておくとしましょう。

■練習 1. $x^2-3x-4>0$ を解け。

（解）　$(x-4)(x+1)>0$

$\therefore$ $x>4$ あるいは $x<-1$ ……答

■練習 2. $x^2+x-2\leqq 0$ を解け。

（解）　$(x+2)(x-1)\leqq 0$

$\therefore$ $-2\leqq x\leqq 1$ ……答

■練習 3. $-x^2+x+3>0$ を解け。

（ヒント）　まず -1 を両辺に掛けると

$$x^2-x-3<0$$

ところが $x^2-x-3=0$ の解は，解の公式から

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

ゆえに求める解は

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$ ……答

（注）　ここで，たいていの人の解答は混乱してしまう。例えば次のようなぐあい。これはまずい。

$$-x^2+x+3>0$$
$$\therefore\ x^2-x-3<0$$
$$\therefore\ x^2-x-3=0$$
$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$
$$\therefore\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$ ……答

なるほど答はあっている。しかし，これでは何のことかさっぱりわからない。

*　*　*

◆ さあ，これがわかれば次にややめんどうなものをやってみましょう。

7/15

■練習 4. 不等式 $2x^2-x-3<0$ を解け。

（東京理大）

（解）　$(x+1)(2x-3)<0$

$\therefore$ $-1<x<\frac{3}{2}$ ……答

練習 5. $x^2-4x+1<0$ を満足する x の範囲を求めよ。 （東京学芸大）

（解） $x^2-4x+1=0$ の解は

$$x=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$$

であるから

$$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$$

答　$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

3/19

練習 6. 不等式 $2>15x^2+x$ を解け。 （都立大）

（解） $15x^2+x-2<0$

$\therefore\ (5x+2)(3x-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{1}{3}$ …… 答

練習 7. 不等式 $1<x^2-3x+3<7$ を満足する x の範囲を求めよ。 （静岡大）

（解） $1<x^2-3x+3$ より

$x^2-3x+2>0$

$\therefore\ (x-1)(x-2)>0$

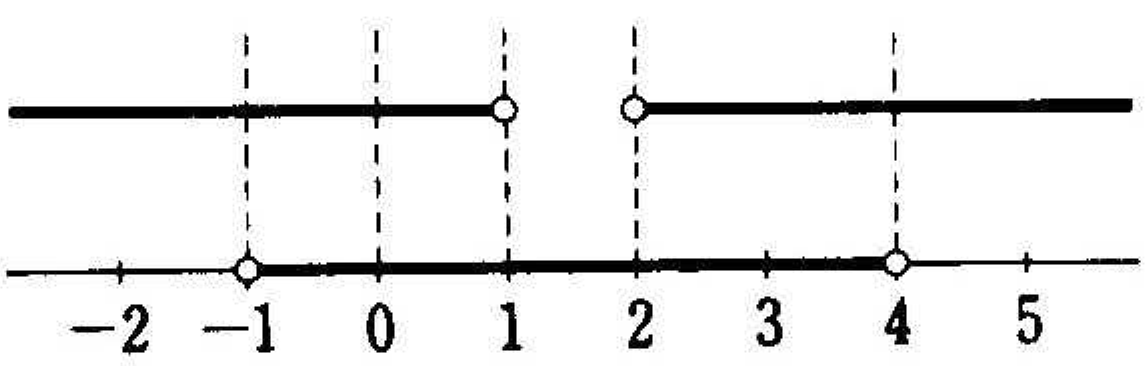
$\therefore\ x<1$ または $x>2$ ……①

次に $x^2-3x+3<7$ より

$x^2-3x-4<0$

$\therefore\ (x-4)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<4$ ……②



ゆえに求める解は

$-1<x<1$ と $2<x<4$

である。

*　*　*

◆ 2次の不等式を解く問題にはふしぎと絶対値の入ったものが多いのですが，これはグラフでやるか，絶対値をとってやるのが定石ですが，ときには両辺を2乗してスゴク簡単にできることもあります。では，次にこれらの例をやるとしましょう。

練習 8. $x^2-2<|x|$ を解け。（東京外語大）

（ヒント） $x\geqq 0$ のとき

$x^2-2<x$

$\therefore\ x^2-x-2<0$

$\therefore\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

これと $x\geqq 0$ をまとめて

$0\leqq x<2$ ……①

次に $x<0$ のとき

$x^2-2<-x$

$\therefore\ x^2+x-2<0$

$\therefore\ (x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ -2<x<1$

これと $x<0$ をまとめて

$-2<x<0$ ……②

①と②をまとめて次のようになります。

$-2<x<2$ …… 答

練習 9. 不等式 $x^2-x-5>|2x-1|$ を解け。 （静岡大）

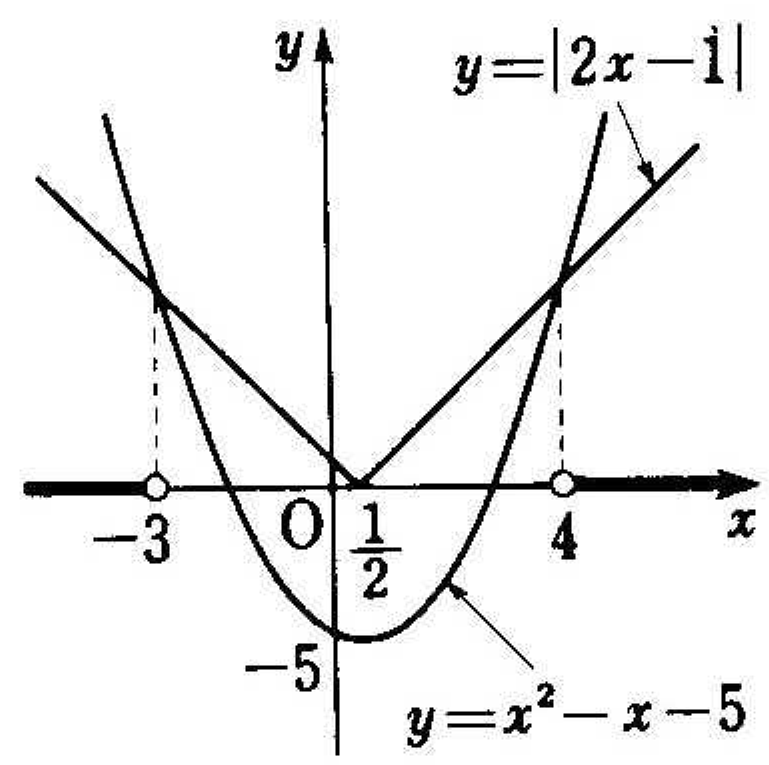
（ヒント） グラフを使ってみましょう。

$y=x^2-x-5$

および

$y=|2x-1|$

のグラフをかいてみますと，右のようになります。放物線が折れ線より上にあるのは $x<-3$ および $4<x$ のときですから，答は $x<-3$, $4<x$ です。



練習 10. $|x-3|<|2x-1|$ を解け。 （埼玉大）

（ヒント） 両辺正ですから2乗しても同値です。ゆえに $(x-3)^2<(2x-1)^2$ を解けばよい。

$\therefore\ (2x-1)^2-(x-3)^2>0$

$\therefore\ (3x-4)(x+2)>0$

$\therefore\ x>\dfrac{4}{3}$ または $x<-2$ …… 答

198

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◎絶対不等式の証明法に5つあり

◆絶対不等式とは，xが何であっても成り立つ不等式だ，といったら，ある予備校生がそんなら馬のクソでもいいですか，だって!!

◆ xがどんな実数であろうとも

$$x^2+4x+5>0$$

が成り立ちます。xがどんな正の数であろうとも

$$x+4>0$$

が成り立ちます。このように，

≪ある条件のもとで≫xが何であろうとも成り立つ不等式を

絶対不等式

といいます。ところで，絶対不等式を扱う原則は5つあります。それは

第1のタイプは，AとBの大小を比べるには $A-B$ の符号を調べればよい。そして，そのためには，因数分解するか，あるいは2乗の和で表せばよい。さて，その例からまいりましょう。それは，これです。

3/19

■練習1. a，bが実数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$a^2+b^2\geqq a(b+1)+b-1$$ （松山商大）

ヒント　$a^2+b^2-a(b+1)-b+1\geqq 0$　を証明すればいいだろう。それには2乗の和にするか，因数分解すればいいだろう。因数分解するにせよ，2乗の和にするにせよ，ある文字について整理セズバなるまい。何はともあれ，aで整理しようか，……

$$a^2+b^2-a(b+1)-b+1$$
$$=a^2-(b+1)a+(b^2-b+1)$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+(b^2-b+1)-\left(\frac{b+1}{2}\right)^2$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{6}{4}b+\frac{3}{4}$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2\geqq 0$$

等号は $a=1$，$b=1$ のとき。

なるほど，ウマク行ッタゾ!!　では，次だ。

3/19

■練習2. x，y，zが実数のとき，次の不等式を証明せよ。 （お茶の水女大）

$$x^2+xz+z^2+3y(x+y+z)\geqq 0$$

（解）　左辺

$$=x^2+(z+3y)x+(z^2+3yz+3y^2)$$
$$=\left(x+\frac{z+3y}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}+\frac{3yz}{2}+\frac{3}{4}y^2$$
$$=\left(x+\frac{z+3y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+z)^2\geqq 0$$

ところで等号で成り立つのは

$$x+\frac{z+3y}{2}=0 \text{ かつ } y+z=0$$

のとき，このとき

$$x=-\frac{-y+3y}{2}=-y$$

のとき，したがって

$$x:y:z=-y:y:-y=1:-1:1$$

のときである。3/19

■練習3. $|a|<1$，$|b|<1$ のとき

$ab+1>a+b$　を証明せよ。 （名大）

（解）　$(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$$=a(b-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$$

ところが $-1<a<1$，$-1<b<1$ より

$$a-1<0,\ b-1<0$$
$$\therefore\quad (ab+1)-(a+b)>0$$
$$\therefore\quad ab+1>a+b \qquad \text{Q.E.D.}$$

＊　＊　＊

◆ では，次は第2のタイプだ。これは，

$$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$
$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}}$$

を使うものなんです。

何はともあれ，具体例へ：——

■練習 4. $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$$

が成り立つことを示せ。（お茶の水女大）

(ヒント) 根号がジャマ。しかし，根号をとりさるためにすぐに2乗というのはいけません。考えてもごらんなさい。

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$$
$$=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$$

で，根号は少しも減らないじゃありませんか。これはおきかえるのです。

$\sqrt{a}=\alpha$，$\sqrt{b}=\beta$，$\sqrt{c}=\gamma$ とおくと

$$a=\alpha^2,\ b=\beta^2,\ c=\gamma^2$$

ですから，証明すべき式は

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}} \geqq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

ここで2乗するのです。すなわち

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3} \geqq \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2$$

これを証明すればいい。

ここで左辺から右辺を引くと

$$\frac{1}{9}\{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)^2\}$$
$$=\frac{1}{9}\{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$$
$$=\frac{1}{9}\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\} \geqq 0$$

となってうまくいく。

■練習 5. $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき

$a+b+c=1$ ならば $a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ であることを示せ。

(ヒント) $a^2+b^2+c^2-\dfrac{1}{3} \geqq 0$ をいえばよい。ところが，この式は $a^2+b^2+c^2$ なる2次の同次式から $\dfrac{1}{3}$ なる0次式を引いている。これは扱いにくい。そこで，$a+b+c=1$ を使って2次の同次式にしてやること。

$$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}$$
$$=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$
$$=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqq 0$$

となってうまくいく。

* * *

◆ 第3は **相加・相乗平均の使い方**，詳しくはその項（☞ p. 176）参照のこと。

■練習 6. $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき

$$a^2b+b^2c+c^2a \geqq 3abc$$

を証明せよ。

(ヒント) $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} \geqq \sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}=abc$

$$\therefore\ a^2b+b^2c+c^2a \geqq 3abc$$

■練習 7. $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき次式を証明せよ。

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

(ヒント) $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{b+c}{2} \geqq \sqrt{bc}$，

$\dfrac{c+a}{2} \geqq \sqrt{ca}$

を辺々相乗じて

$$\frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \geqq abc$$
$$\therefore\ (a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

* * *

◆ 第4は2次式 $ax^2+bx+c>0$ が x のすべての実数値に対して成り立つための条件は $a>0$，$D<0$ であること。ここに D は判別式 b^2-4ac です。詳しくは（☞ p. 124）参照。

■練習 8. x のすべての実数値に対して

$$x^2+2x+a>0$$

が成り立つための条件を求めよ。

(ヒント) x^2 の係数は正，そこで判別式が負になればよい。つまり，$D=2^2-4\cdot1\cdot a<0$，これから $a>1$．これが求める条件です。

* * *

◆ 第5は **シュワルツの不等式** を使うこと。それは文字はすべて実数として

$$(\boldsymbol{a^2+b^2})(\boldsymbol{x^2+y^2}) \geqq (\boldsymbol{ax+by})^2$$
$$(\boldsymbol{a^2+b^2+c^2})(\boldsymbol{x^2+y^2+z^2}) \geqq (\boldsymbol{ax+by+cz})^2$$

詳しくは（☞ p. 178）参照。

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

大小関係を吟味する方法

◆$A>B$ を証明せよ，とか，A と B の大小を吟味せよ，とかいう問題には５つのやり方があります。それをキチンとつかむこと。

◆　大小関係を吟味する方法で大切なことは５つあります。さて，第１は：──

＊　＊　＊

◆　第１は A と B の大小を調べるのに

$A-B$ の符号を調べる

ということです。いうまでもありませんが，

$A-B>0$ なら　$A>B$

$A-B=0$ なら　$A=B$

$A-B<0$ なら　$A<B$

■練習 1. a，b，c，d が実数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$$

（高知大）

（解）　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2$

$=(ad)^2-2(abcd)+(bc)^2$

$=(ad-bc)^2\geqq0$

$\therefore\quad(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$

（等号は　$ad=bc$　のとき）

■練習 2. a, b が正の数のとき，次の３数の大小を吟味せよ。

$$\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2},\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

（東京外語大）

（解）　$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\sqrt{a}^2-2\sqrt{ab}+\sqrt{b}^2}{2}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq0$

$\therefore\quad\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　（等号は $a=b$ のとき）

次に，$\sqrt{ab}-\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\sqrt{ab}-\dfrac{2ab}{a+b}$

$=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$=\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geqq0$

$\therefore\quad\sqrt{ab}\geqq\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$　（等号は ……）

$\therefore\quad\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\geqq\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

（等号は　$a=b$ のとき）

＊　＊　＊

◆　次に大切なことは，

a，b，c が実数のとき

$$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq0}$$

（等号は　$a=b=c$　のとき）

を使うもの。難問の多くはこれに帰着します。

■練習 3. $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，次式の成り立つことを示せ。

$$a^3+b^3+c^3\geqq3abc$$

（長崎大）

（ヒント）　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\cdot\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq0$

■練習 4. 実数 x，y，z に関する式

$$P=\sqrt{\frac{(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+(x+y-z)^2}{3}}$$

と $\dfrac{x+y+z}{3}$ の大小を調べよ。　（早大）

（ヒント）　$P^2-\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2$ の大小を調べればよいでしょう。 $y+z-x=X$，$z+x-y=Y$，

$x+y-z=Z$ とおけば，

$$与式=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{3}-\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{9}(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)$$

$$=\frac{1}{9}\{(X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2\}\geqq 0$$

$$\therefore\quad P\geqq\frac{x+y+z}{3}$$

*　*　*

◆ 第3は **相加・相乗平均の関係** です。つまりいくつかの正の数があるとき，その相加平均が相乗平均より大か等しいことを使うもの。詳しくは（☞ p. 176）を参照。

練習 5. $x>0$，$y>0$ のとき

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqq 4$$

を証明せよ。　（金沢大）

ヒント　$x>0$，$y>0$ であるから

$$\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}\quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqq\sqrt{\frac{1}{xy}}\quad\cdots\cdots②$$

（等号は①，②とも $x=y$ のとき）

①と②を辺々相乗じて（両辺とも正だから）

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqq 4$$

（等号は $x=y$ のとき）　Q. E. D.

3/10

練習 6. $x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき

$$xy^2+yz^2+zx^2\geqq 3xyz$$

を証明せよ。

ヒント　3つの正の数 xy^2，yz^2，zx^2 の相加平均と相乗平均の関係を使う。

*　*　*

◆ 第4は **2次の絶対不等式を使うもの。**

つまり，

x のすべての実数値に対して，

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$$

が成り立つための条件は

$a>0$ かつ　判別式 $b^2-4ac<0$

であり，また

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c\geqq 0}$$

が成り立つための条件は

$a>0$ かつ　判別式 $b^2-4ac\leqq 0$

です。例えば，次のような問題を：——

練習 7. a，b が実数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$a^2+b^2\geqq a(b+1)+b-1\qquad（松山商大）$$

ヒント　$a^2+b^2-a(b+1)-b+1$

$$=a^2-(b+1)a+(b^2-b+1)$$

判別式を D とすると

$$D=(b+1)^2-4\cdot 1\cdot(b^2-b+1)$$

$$=-3b^2+6b-3$$

$$=-3(b-1)^2\leqq 0$$

$$\therefore\quad a^2+b^2-a(b+1)-b+1\geqq 0$$

$$\therefore\quad a^2+b^2\geqq a(b+1)+b-1$$

（等号は $a=b=1$ のとき）　Q. E. D.

3/10

練習 8. x，y，z が実数のとき

$$x^2+xz+z^2+3y(x+y+z)\geqq 0$$

を証明せよ。　（お茶の水女大）

ヒント　x について整理すると

$$x^2+(3y+z)x+(3y^2+3yz+z^2)\geqq 0$$

そこで，左辺の判別式$\leqq 0$ が証明できればいいハズ。さあ，やってみてください。

*　*　*

◆ 第5は **シュワルツの不等式を使うもの。**

公式の証明はべつにめんどうがありませんが，使い方が問題だ。詳しくは（☞ p. 178）を参照してください。

練習 9. x，y，z が実数のとき

$$6(x^2+2y^2+3z^2)\geqq(x+2y+3z)^2$$

を証明せよ。　（奈良教育大）

ヒント　$(1^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2)\{x^2+(\sqrt{2}\,y)^2$

$$+(\sqrt{3}\,z)^2\}\geqq(1\cdot x+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,y+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,z)^2$$

が成り立ちます。よくみると，これこそ，証明すべき式ではありませんか。もちろん，シュワルツの不等式を使わないでできますよ。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○相加・相乗平均の関係

◆相加平均を算術平均，相乗平均を幾何平均ということもある。その大小関係は，平均というものの本質をチラリと見せるのだ。

◆ **相加平均** とは全部加えて，その個数で割ったものをいい，**相乗平均** とは，ふつう正の数の場合について使いますが，全部掛けて，その個数で開いたものをいいます。

式で書けば，2個の場合

$$\frac{a_1+a_2}{2} \quad と \quad \sqrt{a_1a_2}$$

3個の場合

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \quad と \quad \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

4個の場合

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \quad と \quad \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

なお，$\sqrt[3]{}$ や $\sqrt[4]{}$ をまだ知らない人はその部分を保留してかまいません。さて：──

いくつかの正の数の相加平均は相乗平均よりも大きいか，または等しい。

これをふつう **相加・相乗平均の関係** とよんでいます。

* * *

◆ では，まずその証明から：──

■練習 1. $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad (a>0,\ b>0)$

を証明せよ。 (室蘭工大)

(解) $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}^2-2\sqrt{ab}+\sqrt{b}^2)$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$

$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである。

Q. E. D.

(注) 証明はこれでいいのですが，オーソドックスには，まず，根号をとるべきですね。根号をとるには，$\sqrt{a}=\alpha$，$\sqrt{b}=\beta$ とおくのが定石。このとき

$$a=\alpha^2,\ b=\beta^2$$

で，証明すべき式は

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \geqq \alpha\beta$$

となり，

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\alpha\beta=\frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \geqq 0$$

となります。

7/10

■練習 2. $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

を証明せよ。 (名古屋市大)

(ヒント) $\sqrt[3]{a}=\alpha$，$\sqrt[3]{b}=\beta$，$\sqrt[3]{c}=\gamma$ とおくと

$$a=\alpha^3,\ b=\beta^3,\ c=\gamma^3$$

となります。そして

$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$

$=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\frac{1}{2}\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2$

$+(\gamma-\alpha)^2\} \geqq 0$

等号は $\alpha=\beta=\gamma$ すなわち $a=b=c$ のとき成り立つ。よって証明された。

ここに出てきた公式

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

については（☞ p. 42）を参照。

■練習 3. a_1，a_2，a_3，a_4 が正の数であるとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \qquad (京大)$$

ヒント　2個の場合を2回使うとカンタン。

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4})$$

$$\geqq\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

$$\therefore\quad \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

そして，等号が成り立つのは

$\sqrt{a_1a_2}=\sqrt{a_3a_4}$ かつ $a_1=a_2$, $a_3=a_4$

のとき，つまり $a_1=a_2=a_3=a_4$ のときです。

マトモにやれば，$\sqrt[4]{a_1}=\alpha_1$, $\sqrt[4]{a_2}=\alpha_2$, $\sqrt[4]{a_3}=\alpha_3$, $\sqrt[4]{a_4}=\alpha_4$ とおけば

$$\frac{\alpha_1{}^4+\alpha_2{}^4+\alpha_3{}^4+\alpha_4{}^4}{4}\geqq\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

となり，

$$\alpha_1{}^4+\alpha_2{}^4+\alpha_3{}^4+\alpha_4{}^4-4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$
$$=(\alpha_1{}^2-\alpha_2{}^2)^2+(\alpha_3{}^2-\alpha_4{}^2)^2$$
$$+2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)^2\geqq0$$

からすぐ出ます。

*　*　*

◆ 相加・相乗平均の関係の応用は大きく分けて2つ；1つは不等式の証明，1つは最大・最小問題なのです。まず，前者から。

練習 4. $x>0$, $y>0$ のとき次を証明せよ。

3/v

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq2$$

ヒント　$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq2$$

等号は $x=y$ のとき。　Q. E. D.

練習 5. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ のとき

$$(b+c)(c+d)(d+a)(a+b)\geqq16abcd$$

を証明せよ。　（東京工大）

解　相加・相乗平均の関係から

$$b+c\geqq2\sqrt{bc}$$
$$c+d\geqq2\sqrt{cd}$$
$$d+a\geqq2\sqrt{da}$$
$$a+b\geqq2\sqrt{ab}$$

この4つを辺々相乗じて

$$(b+c)(c+d)(d+a)(a+b)\geqq16abcd$$

とくに，等号が成り立つのは

$$b=c,\ c=d,\ d=a,\ a=b$$

したがって，$a=b=c=d$ のときである。

注　この関係はもっと拡張することもできます。すなわち，

a_1, a_2, ……, $a_n>0$ のとき

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)$$
$$\geqq2^na_1a_2\cdots\cdots a_n$$

です。証明はまったく同じことです。やってみませんか。

*　*　*

◆ 次は最大・最小問題への応用です。

3/v

練習 6. $a>0$, $b>0$ で $a+4b=4$ のとき，ab の最大値を求めよ。

ヒント　$$\frac{a+4b}{2}\geqq\sqrt{a\cdot4b}$$

$$\therefore\quad \frac{4}{2}\geqq\sqrt{4ab}$$

$$\therefore\quad 2\geqq2\sqrt{ab}\qquad\therefore\quad 1\geqq\sqrt{ab}$$

$$\therefore\quad 1\geqq ab$$

ゆえに ab の最大値は1で，このとき

$$a=4b=2$$

$$\therefore\quad a=2,\ b=\frac{1}{2}$$

練習 7. a, b, c が正の数で，

$$ab+bc+ca=k\ (\text{定数})$$

とする。積 abc はどんな a, b, c に対して最大となるか。また，そのときの最大値を求めよ。　（信州大）

ヒント　$ab>0$, $bc>0$, $ca>0$ であるから

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geqq\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}$$

$$\therefore\quad \frac{k}{3}\geqq\sqrt[3]{(abc)^2}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{k}{3}\right)^3\geqq(abc)^2\qquad\therefore\quad \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq abc$$

ゆえに $a=b=c$ のとき最大値 $\left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ をとることがわかります。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

●シュワルツの不等式

◆コーシーの不等式ともいうし，コーシー・シュワルツの不等式ともいい，単に，シュワルツの不等式ともいわれます。

◆ 次の不等式が成り立ちます。

a, b, x, y が実数のとき

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

なる関係がある。等号が成り立つのは

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\ \text{のとき}$$

です。また

a, b, c, x, y, z が実数のとき

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$$

なる関係がある。等号が成り立つのは

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\ \text{のとき}$$

です。これらの不等式を **シュワルツの不等式** といいます。

＊　＊　＊

◆ まず，上の不等式の証明からはじめるとしましょう。前者は

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$$
$$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$$
$$=(ay-bx)^2\geqq0$$

とくに，等号が成り立つのは

$$ay-bx=0$$

のとき，$xy\neq0$ ならば xy で割って

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$

のとき，となります。また，後者は

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$$
$$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx$$
$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq0$$

とくに，等号が成り立つのは

$ay-bx=0$　かつ　$bz-cy=0$　かつ　$cx-az=0$

のときで，$xyz\neq0$ なら

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

と書けることは，いうまでもありません。

＊　＊　＊

◆ 定理の証明がすんだから，次は応用です。大きく分けて2つあります。第1は不等式の証明に使えること。第2は最大・最小を求めるのに有効です。

では，まず，不等式の証明です。

よい

■練習 1. 任意の実数 a, b, c に対して

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

が成り立つことを証明せよ。（和歌山県医大）

ヒント　シュワルツの不等式により

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geqq(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2$$
$$\therefore\ 3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$$

両辺を9で割れば

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

等号は $a=b=c$ のとき。

■練習 2. $p>0$, $q>0$, $p+q=1$ のとき，次の不等式を証明せよ。（広島大）

$$\sqrt{px+qy}\geqq p\sqrt{x}+q\sqrt{y}$$

ヒント　シュワルツの不等式により

$$\{(\sqrt{p})^2+(\sqrt{q})^2\}\{(\sqrt{px})^2+(\sqrt{qy})^2\}\geqq(\sqrt{p}\sqrt{px}+\sqrt{q}\sqrt{qy})^2$$

が成り立ちますね。この式を計算すると

$$(p+q)(px+qy)\geqq(p\sqrt{x}+q\sqrt{y})^2$$

ところが，$p+q=1$ ですから

$$\sqrt{px+qy}\geqq p\sqrt{x}+q\sqrt{y}$$

等号は $x=y$ のとき。　Q. E. D.

これらの不等式は，シュワルツの不等式を使わないでも，もちろん，証明できます。また，ムリにシュワルツの不等式を使うほどのものでもありません。しかし，ここでは，シュワルツの威力をちょっと見せたわけ,です。

ついでに，もう1つ。もし，気があったら次のをやってみませんか。

練習 3. a, b, c, p, q, r が正の数で，$p+q+r=1$ のとき，次式を証明せよ。

$$\sqrt{pa+qb+rc}\geqq p\sqrt{a}+q\sqrt{b}+r\sqrt{c}$$

＊　＊　＊

◆ 次は最大・最小問題への応用を2，3やってみましょう。

3/21

練習 4. x, y が実数で $x+y=2$ のとき x^2+y^2 の最小値を求めよ。

ヒント　シュワルツの不等式により

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geqq(1\cdot x+1\cdot y)^2$$

$x+y=2$ ならば

$$2(x^2+y^2)\geqq 2^2 \qquad \therefore\quad x^2+y^2\geqq 2$$

ゆえに求める最小値は2で，このとき

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1},\quad x+y=2$$

より $x=y=1$ です。

この問題は何もシュワルツを使うほどのこともありません。しかし，**変数が3つになると効力絶大** です。

3/21

練習 5. x, y, z が実数で $x+y+z=3$ のとき $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

ヒント　シュワルツの不等式により

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$$

$$\therefore\quad 3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$$

ところが $x+y+z=3$ ですから

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq 9$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2\geqq 3$$

ゆえに求める最小値は3で，このとき

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\quad x+y+z=3 \text{ より}$$

$x=y=z=1$ なのです。

3/21

練習 6. 実数 x, y の間に $2x+y=1$ という関係があるとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

ヒント　シュワルツの不等式により

$$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\geqq(2x+1\cdot y)^2$$

$2x+y=1$ ですから，……

＊　＊　＊

◆ シュワルツの不等式は，一般に

$$(\boldsymbol{a}_1{}^2+\boldsymbol{a}_2{}^2+\cdots+\boldsymbol{a}_n{}^2)(\boldsymbol{x}_1{}^2+\boldsymbol{x}_2{}^2+\cdots+\boldsymbol{x}_n{}^2)$$
$$\geqq(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x}_n)^2$$

が成り立つのです。証明は次の通り。

$$(a_1t-x_1)^2+(a_2t-x_2)^2+\cdots\cdots+(a_nt-x_n)^2=0 \quad\cdots\cdots①$$

なる t に関する2次方程式を考えてみましょう。（どうして突然こんなものを考える気になったか？などといわないでください）

実数の2乗の和ですから，一般に0にはなれない。つまり虚数解をもつ。t で整頓して

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)t^2$$
$$-2(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n)t$$
$$+(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)=0$$

の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n)^2$$
$$-(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$
$$\times(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)\leqq 0$$

$$\therefore\quad (a_1{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)(x_1{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)$$
$$\geqq(a_1x_1+\cdots\cdots+a_nx_n)^2$$

とくに等号が成り立つのは①のすべての項が0のとき，つまり

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{x_n} \text{ のときです。}$$

（注）シュワルツの不等式については，代幾の内積を使ってもできます。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑根号のついた絶対不等式の扱い方

◆根号はイヤだ。絶対不等式はフユカイだ。しかし，根号のついた絶対不等式の証明は扱い方しだいなのです。

◆ 根号というのはどうもニガ手，という人が多いのです。というのも，根号をとろうと思って2乗や3乗する。すると，スゴク計算がめんどうになって，つまりは，計算倒れ，ということが多いのです。まず，**おきかえをすべき** なのです。ともあれ，実例を：——

練習 1. $a>0$，$b>0$ のとき

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

を証明せよ。

(ヒント) 両辺正ですから2乗しても同値です。そこで，両辺を2乗してみると

$$a+b+2\sqrt{ab}>a+b$$

ナルホド，これなら，もう証明されたと同然です。これで，もちろんよいが，オーソドックスには，まず，根号をとろうと思うべきです。そのため

$$\sqrt{a}=\alpha,\ \sqrt{b}=\beta$$

とおきますと

$$\alpha+\beta>\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

右のほうの根号をとるにはおきかえてもどうにもならない。だから2乗すると

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta>\alpha^2+\beta^2$$

となる。このほうは上に比べてまずい。まずいが，態度として正しい，というべきです。

3/~

練習 2. $a>b>0$ のとき

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$$

を証明せよ。　(都立大)

(ヒント) $\sqrt{a}=\alpha$，$\sqrt{b}=\beta$ とおくと $\alpha>\beta>0$ で

$$\alpha-\beta<\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

と書ける。両辺が正であるから，2乗しても同値です。したがって，

$$(\alpha-\beta)^2<\alpha^2-\beta^2$$

を証明すればよい。ところが，

$$(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)^2$$
$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\}$$
$$=(\alpha-\beta)(2\beta)>0$$

よって証明された，わけです。

3/いい

練習 3. $x>0$，$y>0$ のとき

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}}\geqq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$$

を証明せよ。

(解) $\sqrt{x}=u$，$\sqrt{y}=v$ とおくと

$$x=u^2,\ y=v^2$$

で，与えられた不等式は

$$\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}\geqq\frac{u+v}{2}$$

と書ける。両辺が正であるから2乗しても同値である。すなわち，

$$\frac{u^2+v^2}{2}\geqq\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \quad \cdots\cdots①$$

したがって，①を証明すれば十分。さて，

$$\frac{u^2+v^2}{2}-\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\{2(u^2+v^2)-(u+v)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}(u-v)^2\geqq0$$

よって証明された。とくに，等号が成り立つのは $u=v$，したがって $x=y$ のとき。

練習 4. $x>0$，$y>0$ のとき

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{2}}\geqq\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{2}$$

を証明せよ。

(ヒント) $\sqrt[3]{x}=u$，$\sqrt[3]{y}=v$ とおけばよい。$\sqrt[3]{\ }$ 未習の人はもちろん保留としよう。

◆ 以上で大切なことがらは終わったのですが，文字が3つになると，計算がめんどうになります。では，これをやってみませんか。

■練習5. $x>0,\ y>0,\ z>0$ のとき

$$\sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \geqq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}$$

を証明せよ。　　　　　（お茶の水女大）

ヒント　$\sqrt{x}=\alpha,\ \sqrt{y}=\beta,\ \sqrt{z}=\gamma$ とおきますと，

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}} \geqq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

両辺とも正ですから2乗しても同値です。さて，それは：——

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3} \geqq \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha}{9}$$

そこで，左辺から右辺を引いてみますと

$$\frac{1}{9}\{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)\}$$

$$=\frac{2}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

ここまできたら，すぐピンとこなくてはいけませんよ。あの公式：

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\}}$$

です。これに気がつけば2乗の和になる。なるほど，できました。

こうしてみると，計算こそめんどうでも，方針には何のちがいもないことがわかるでしょう。

*　　*　　*

◆ $\sqrt[3]{}$ をまだやってない人は次を省略してよいが，少なくも半分はできるハズ!!

■練習6. $a>0,\ b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2},\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$$

の大小を比べよ。　　　　　（東京工大）

ヒント　まず左の2つを比べてみようか。いや，その前に，結果を予想すれば便利でしょう。$a=1,\ b=2$ としてみると，それぞれ

$$\frac{1+2}{2},\ \sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{1^3+2^3}{2}}$$

つまり

1.5，1.58…，1.6…

とはいっても，手元にある平方値・立方値の表を使ったのだから，実際はいま少しめんどうになるが，少なくとも，大小の見当がつくと扱いやすい。これで，

$$\frac{a+b}{2}\ \text{と}\ \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$$

の大小を比べるのはムダらしいことがわかるのです。さて，左の2つを比べると，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(-a^2+2ab-b^2)$$

$$=-\frac{1}{4}(a-b)^2\leqq 0$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

次に，右の2つを比べてみよう。平方根と立方根では困る。両方をそれぞれ6乗すると

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^6=\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)$$

また

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\right)^6=\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(a^6+2a^3b^3+b^6)$$

そこで差をとって

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\right)^6-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^6$$

$$=\frac{1}{8}(a^6-3a^4b^2+4a^3b^3-3a^2b^4+b^6)$$

$$=\frac{1}{8}(a-b)^2(a^4+2a^3b+2ab^3+b^4)\geqq 0$$

これで3つの大小関係がわかった。かなりの難問だったなあ。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◑恒等式とは何か

◆コウトウシキというと何か高等なひびきがして親しみにくい。つねに成り立つ式といったのでは長すぎる。

◆ $(x+1)^2=9$ という式は x が何であっても成り立つわけではありません。$x=2$ と $x=-4$ のときだけです。これを **方程式** といい，2と -4 を求めることを **方程式を解く** というのでした。

これに対して

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$

は，x が何であっても成り立ちます。これを **恒等式** というのです。

ですから，$x^3+50x^2+51x+98$ を因数分解して

$$x^3+50x^2+51x+98=(x+49)(x^2+x+2)$$

とすると，これはもちろん恒等式です。

また，整式 $f(x)$ を x^2-1 で割って商が $q(x)$，余りが $6x+2$ なら

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+(6x+2)$$

となりますが，これも恒等式です。

では，具体的な問題にいきましょう。

3/1〜

練習 1. $ax^2+2x+3=a(x-p)(x-3)$ のとき，a，p の値を求めよ。 (富山大)

ヒント 恒等式ですから x に何を代入しても成り立つハズ。

もっとも簡単なものは0だから，まずこれを代入してみましょう。

$$3=3ap \quad \therefore \quad ap=1 \quad \cdots\cdots①$$

次に，$x=3$ を代入してみますと

$$9a+2\cdot3+3=0 \quad \therefore \quad a=-1\cdots\cdots②$$

①，②より

$$p=-1$$

この $a=p=-1$ が適することは代入してみるとすぐわかります。

答 $a=p=-1$

9 3/2〜

練習 2. 恒等式

$$2x^3-3x^2-26x-12$$
$$=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$$

が成り立つように，定数 a，b，c，d の値を求めよ。 (静岡大)

ヒント いろいろな方法があります。

解 1. $x=-2$ を代入すると

$$2(-2)^3-3(-2)^2-26(-2)-12=d$$
$$\therefore \quad d=12$$

そこで $d=12$ を代入して移項すると

$$2x^3-3x^2-26x-24$$
$$=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)$$

両辺を $x+2$ で割ると

$$2x^2-7x-12=a(x+2)^2+b(x+2)+c$$

これは恒等式だから $x=-2$ を代入すると

$$2(-2)^2-7(-2)-12=c \quad \therefore \quad c=10$$

そこで $c=10$ を代入して移項すると

$$2x^2-7x-22=a(x+2)^2+b(x+2)$$

両辺を $x+2$ で割ると

$$2x-11=a(x+2)+b$$

これは恒等式だから $x=-2$ を代入して

$$2(-2)-11=b \quad \therefore \quad b=-15$$

これを代入して移項すると

$$2x+4=a(x+2)$$

これは恒等式だから $x+2$ で割って

$$2=a$$

答 $a=2$，$b=-15$，$c=10$，$d=12$

注 上の解答はムリに1つの方法を押しつけたのですが，もちろん，もっと省略できます。

解 2. 右辺を展開しますと

右辺$=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$
$=a(x^3+6x^2+12x+8)+b(x^2+4x+4)$

$+c(x+2)+d$

$=ax^3+(6a+b)x^2+(12a+4b+c)x$

$\quad +(8a+4b+2c+d)$

そこで，左辺と比較して対応する項が等しいことから

$a=2,\ 6a+b=-3,\ 12a+4b+c=-26$

$8a+4b+2c+d=-12$

これを連立させて解くと

$a=2,\ b=-15,\ c=10,\ d=12$

が得られます。

(解) 3. 左辺を変形することもできます。

左辺$=2x^3-3x^2-26x-12$

$=2\{(x+2)-2\}^3-3\{(x+2)-2\}^2$

$\quad -26\{(x+2)-2\}-12$

$=2(x+2)^3-12(x+2)^2+24(x+2)-16$

$\quad -3(x+2)^2+12(x+2)-12$

$\quad -26(x+2)+52$

$\quad -12$

$=2(x+2)^3-15(x+2)^2+10(x+2)+12$

$\therefore\ a=2,\ b=-15,\ c=10,\ d=12$

(解) 4. $2x^3-3x^2-26x-12$

$=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$

両辺を $(x+2)$ で割った商と余りは

$a(x+2)^2+b(x+2)+c$　と　d

この商を $(x+2)$ で割った商と余りは

$a(x+2)+b$　と　c

この商を $(x+2)$ で割った商と余りは

a　と　b

ですから，組立除法をくり返し使って，

-2	2	-3	-26	-12
		-4	14	24
-2	2	-7	-12	$12=d$
		-4	22	
-2	2	-11	$10=c$	
		-4		
	$2=a$	$-15=b$		

$\therefore\ a=2,\ b=-15,\ c=10,\ d=12$

これがもっとも簡単でしょう。このほかにもいろいろ考え方があります。

*　*　*

◆ ここで，恒等式に関する定理の証明をしておきましょう。

≪多項式 $f(x)$ が多項式 $g(x)$ と恒等的に等しいための必要十分な条件は，対応するすべての項の係数が等しいことであることを証明せよ。　(東京工大)≫

つまり

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_mx^m$

が恒等的に等しいための条件は $n=m$ で

$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots\cdots,\ a_n=b_m$

が成り立つことだ，というのです。

このことをいいかえると

$f(x)-g(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x$

$\quad +\cdots\cdots+(a_n-b_n)x^n$

が恒等的に 0 に等しいための条件は

$a_0-b_0=0,\ a_1-b_1=0,\ a_2-b_2=0,\ \cdots\cdots$

ということです。

そこで，結局こういうことになりました。

≪多項式 $f(x)$ が恒等的に 0 に等しいための条件は，係数がすべて 0 に等しいことである≫

さて，その証明は

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0=0$

が恒等的に成り立つが $a_n\neq 0$ とすると不合理であることをいえばいい。

ところで，$f(x)=0$ ならしめる x の n 個の値を $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ としますと

$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)=0$

となります。無数に x の値があるのですから $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ と異なる x の値を x_{n+1} として代入すると

$a_n(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)=0$

$\therefore\ a_n=0$

これは不合理である。よって，……

◑条件のない証明問題はどう扱うか

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈条件のない証明問題は，タダ，タダ，ヒタスラに計算するだけのこと。ウマイことをやろうとしてはいけません。

◆ ナニナニなるとき，ナニナニを証明せよ，というのが，いわゆる条件付証明問題です。これに対し，ナニナニなるとき，がないもの，これが条件のない証明問題なのです。ともあれ，具体的な練習に入るとしましょう。

■練習 1. 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

ヒント　左辺を計算すれば，おそらく右辺になるのでしょう。では：---

$$左辺=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$$
$$=2(a^2+b^2)$$

ナルホド，予想通り，早くもできてしまったではないか。

■練習 2. $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$

$$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

を証明せよ。

ヒント　左辺から右辺を導こうなどと思ってはいけません。複雑なのは右辺です。これを簡単にすると，左辺になるにちがいない。

$$右辺=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)$$
$$+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$
$$=左辺$$

Q. E. D.

■練習 3. 次の等式を証明せよ。

$$a^4+b^4=\frac{1}{2}\{(a^2+b^2)^2+(a-b)^2(a+b)^2\}$$

ヒント　右辺を計算して左辺を導く。すなわち

$$右辺=\frac{1}{2}\{(a^4+2a^2b^2+b^4)+(a^2-b^2)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a^4+2a^2b^2+b^4)+(a^4-2a^2b^2+b^4)\}$$
$$=a^4+b^4=左辺$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ 単に計算するだけ，とはいっても，計算のめんどうなものもあります。例えば，**オイラーの等式** といわれるものがあります。

■練習 4. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}$

$$+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

であることを示せ。

解　左辺

$$=\frac{-1}{(a-b)(c-a)}+\frac{-1}{(b-c)(a-b)}$$
$$+\frac{-1}{(c-a)(b-c)}$$
$$=\frac{-(b-c)-(c-a)-(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-b+c-c+a-a+b}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

■練習 5. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}$

$$+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

であることを示せ。

ヒント　前問と同様にやる。

■練習 6. 次式を証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$

（玉川大）

解　左辺

$$=\frac{-a^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{-b^2}{(b-c)(a-b)}$$

$$+\frac{-c^2}{(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ところで，

$$\begin{aligned}\text{分子}&=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)\\&=-(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a\\&\quad-(b-c)bc\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{左辺}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

*　　*　　*

◆ また，計算のややめんどうになるのでは，1の虚数立方根 ω などの入ったものもありますが，それらについては（☞ p. 122）を参照してください。

また，三角関数や根号や絶対値のついたものの中にも条件のない証明問題がチラチラ見えがくれするもの。例えば：——

≪$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$ を証明せよ≫

とか

≪$\dfrac{1-2\sin^2\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\cos^2\theta}=0$

を証明せよ≫

とか

≪$\sqrt{1+\dfrac{2\sin^2\theta}{\sin^4\theta+1}}-\sqrt{1-\dfrac{2\sin^2\theta}{\sin^4\theta+1}}$

$=\dfrac{2\sin^2\theta\sqrt{\sin^4\theta+1}}{\sin^4\theta+1}$ を証明せよ≫

といったたぐい。これらについては，それぞれの項目を参照して下さい。実は，最後の問題などは $\sin^2\theta=a$ (>0) とおくと単なる根号計算になるのです。

*　　*　　*

◆ 条件のない証明問題の中から，やや高度な定理と，その応用をあげておきましょう。その定理というのは

≪2つの n 次の多項式があって，相異なる $(n+1)$ 個の値に対して等しい値をとるならば，この2つの多項式は恒等的に等しい。(東京工大)≫

というのです。

具体的にいいますと2つの2次式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=px^2+qx+r$$

があって，相異なる3つの値 x_1，x_2，x_3 に対して同じ値をとるなら，x が何であっても $f(x)=g(x)$ だ，というのです。

これを証明するには，まず

≪2次関数 Ax^2+Bx+C が x の異なる3つの値に対して0になるならば，恒等的に0になる≫

ことを証明すればよいのです。

すなわち，

$$Ax_1^2+Bx_1+C=0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$Ax_2^2+Bx_2+C=0 \qquad \cdots\cdots②$$
$$Ax_3^2+Bx_3+C=0 \qquad \cdots\cdots③$$

としますと，①−② より

$$A(x_1^2-x_2^2)+B(x_1-x_2)=0$$

$x_1 \neq x_2$ であるから

$$A(x_1+x_2)+B=0 \qquad \cdots\cdots④$$

同様に

$$A(x_2+x_3)+B=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

④−⑤ より

$$A(x_1-x_3)=0 \qquad \therefore\quad A=0$$

したがって，④より　$B=0$

①より　$C=0$

■練習 7. $f(x)$ が2次式のとき

$$f(x)=f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b)\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

を証明せよ。a，b，c はすべて異なる。

ヒント　$x=a$，b，c を入れてみると成り立つから，上の定理によって当然です。

◑条件付証明問題の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈～なるとき～を証明せよ，これが条件付証明問題の典型的な形であるが，～なるとき，この使い方が焦点となるのです。

◆ 条件付証明問題の扱い方は条件式の次数によってちがいます。では，1次式の場合からやってみようではありませんか。では，これです。

■練習 1. $abc=1$ のとき次式を証明せよ。

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

（神奈川大）

ヒント　条件式が a についても，b についても，c についても1次式です。ついては，**ある文字について解いて代入**すれば必ずできるハズ!!　では，a について解いてみようか。

$a=\frac{1}{bc}$ を代入して

$$\text{左辺}=\frac{\frac{1}{bc}}{\frac{b}{bc}+\frac{1}{bc}+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{\frac{1}{b}+c+1}$$

$$=\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+bc+b}$$

$$=\frac{1+b+bc}{1+b+bc}=1$$

Q. E. D.

■練習 2. $a+b+c=0$ のとき

$$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$$

を証明せよ。　（高知大）

ヒント　条件式が a, b, c について1次式ですから，a か，b か，c かについて解いて代入すればいいでしょう。どれでもいいが，c がいちばん労力が少なそうだ。では：――

$$c=-a-b$$

$\therefore$　左辺 $=2a^2+b(-a-b)=2a^2-ab-b^2$

右辺 $=(b-a)\{(-a-b)-a\}$

$=(b-a)(-2a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$　　Q. E. D.

条件式が1次式でも，ちょっと，こみ入ったものもあります。例えば，これです。

■練習 3. $x+\frac{4}{y}=2$, $y+\frac{4}{z}=2$ のとき $z+\frac{4}{x}=2$ であることを証明せよ。

（解）　$x+\frac{4}{y}=2$　$\therefore$　$x=2-\frac{4}{y}=\frac{2y-4}{y}$

$\therefore$　$\frac{1}{x}=\frac{y}{2y-4}$

また，　$y+\frac{4}{z}=2$　$\therefore$　$\frac{4}{z}=2-y$

$\therefore$　$z=\frac{4}{2-y}$

$\therefore$　$z+\frac{4}{x}=\frac{4}{2-y}+\frac{4y}{2y-4}$

$=\frac{4}{2-y}+\frac{2y}{y-2}=\frac{4-2y}{2-y}=\frac{2(2-y)}{2-y}$

$=2$　　Q. E. D.

*　*　*

◆ では，次は条件式が2次式のときです。このときには，**ある文字について整理**してみるとたいていうまくいくものです。

■練習 4. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ ならば，x, y, z のいずれか2つの和は0となることを示せ。　（山口大）

ヒント　条件式は分数式です。しかし，そんなことは，どうでもいいのです。分母をはらった場合のことを考えてゴラン!!　x, y, z いずれについても2次式なんです。だから，これは本質的に条件式が2次式の場合なんです。そして，そのときは：――

（解）　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

分母をはらうと

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz$$
$\therefore$ $\{xy+z(x+y)\}\{(x+y)+z\}=xyz$

$\therefore$ $(x+y)z^2+\{(x+y)^2+xy\}z$
$+(x+y)xy=xyz$

$\therefore$ $(x+y)z^2+(x+y)^2z+(x+y)xy=0$

$\therefore$ $(x+y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$

$\therefore$ $(x+y)(z+x)(z+y)=0$

$\therefore$ $x+y=0$ あるいは $z+x=0$
あるいは $z+y=0$

Q. E. D.

*　　*　　*

◆ 以上で大切なことはほぼすんだのですが，次にやや，めんどうな問題について当たってみようではありませんか。

まず，比例式のとき。

3/レ✓

練習 5. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ ならば
$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$
であることを示せ。

(ヒント) $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=k$

とおくと
$$y+z=ak \quad \cdots\cdots①$$
$$z+x=bk \quad \cdots\cdots②$$
$$x+y=ck \quad \cdots\cdots③$$

これを x, y, z について解いてみようではないか。

{①+②+③}÷2 より
$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}k \quad \cdots\cdots④$$

④−①より　$x=\dfrac{-a+b+c}{2}k$

④−②より　$y=\dfrac{a-b+c}{2}k$

④−③より　$z=\dfrac{a+b-c}{2}k$

$\therefore$ $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$
$=(b-c)\dfrac{-a+b+c}{2}k+(c-a)\dfrac{a-b+c}{2}k$
$+(a-b)\dfrac{a+b-c}{2}k=0$　　Q. E. D.

練習 6. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ のとき

$x+y+z=0$ を証明せよ。

(解) $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$

とおくと
$$y+z=(b-c)k \quad \cdots\cdots①$$
$$z+x=(c-a)k \quad \cdots\cdots②$$
$$x+y=(a-b)k \quad \cdots\cdots③$$

①+②+③を作ると
$$2(x+y+z)=0$$
$\therefore$ $x+y+z=0$　　Q. E. D.

*　　*　　*

◆ さあ，もう1問やってみよう。

3/kん

練習 7. $x^2-yz=y^2-zx=2$ のとき，$z^2-xy=2$ であることを証明せよ。ただし，$x \neq y$ とする。

(ヒント)
$$x^2-yz=2 \quad \cdots\cdots①$$
$$y^2-zx=2 \quad \cdots\cdots②$$

①と②をみると x と y を交換しただけです。このようなときには辺々相引いてみるとよい。では：——

①−②を作ると
$$(x^2-y^2)-z(y-x)=0$$
$\therefore$ $(x-y)(x+y+z)=0$

ところが，仮定により　$x \neq y$
$$\therefore\ x+y+z=0 \quad \cdots\cdots③$$

さて，ここだ!!

z^2-xy の値を求めたいのだから，③を使って x を消去してみようか。
$$z^2-xy=z^2-(-y-z)y$$
$$=z^2+yz+y^2$$
となって，残念でした。うまくいかない。

しかし，キミ，おそらく，$z^2-xy=2$ となるハズなのだから，上にならって
$$z^2-xy-2=z^2-xy-(y^2-zx)$$
$$=\cdots\cdots$$
とすれば，スグサマ，だ。

1 1/15

○命題とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆命題のようなものまで数学で扱える，ということは，まさにオドロキである。デカルトがこれを見たら何というだろう。

◆ 意味のある文章で　それが **真**（しん）であるか **偽**（ぎ）であるかをはっきり判定できるものを **命題**（めいだい）といいます。

例えば，
「丸い三角形が泣いている」
とか
「4＋だ円＝x^2」
とかいうのは，まったく無意味である。これを命題とはいわない。また，
「数学はイヤだ」
とか
「英語の成績はよくない」
などは，意味はあるが，真か偽かを判定することができない。これを命題とはいわない。
しかし，特定の人に限定して
「太郎は数学が得意である」
とか，
「花子は英語の成績が抜群である」
などは命題である。

では次は命題か否か，調べてみませんか。わかったつもりでも，イザ，やってみるとわからなくなってくるものなんです。

7/29

■**練習 1.** 次の文章は命題であるか，否か。

(1)　猫は数である。
(2)　10＋25＝0
(3)　おばかさん!!
(4)　四角形は角が4つある。
(5)　命題には真偽の判定できないものもある。

ヒント　(1)はまったく無意味で命題ではない。(2)は，はっきりした意味をもっていて，しかも偽であることも明白なんですから命題です。(3)は意味はあるが，真偽の判定がつかない。これは命題でない。(4)は意味をもっていて，しかも真ですから，命題です。(5)はちょっと迷うかもしれません。しかし，いまわれわれは真偽の判定のつくものと命題ときめたのだから，これは意味をもつが偽である命題です。

＊　＊　＊

◆ このような簡単な命題をいくつか組み合わせて複雑な命題を作ることができます。これを **合成命題** といい，合成命題を作っているおのおののものを **単一命題** といいます。
例えば，
「猿は動物である」という命題と，「桜の木は植物である」という命題を合成して
「猿は動物で，そして，桜の木は植物である」
という合成命題が作られるわけです。

数学の大きい特徴は，これらの命題を文字で表して，それを連結することも記号化できたことです。それによって，ギリシア以来の論理学に大きな進歩を与えることができたばかりでなく，電子計算機を操作する基礎も確立されたのでした。数学ではブール代数といい，論理学では，論理計算とか命題計算ともいいます。

＊　＊　＊

◆ さて，その記号化についてですが，2つの命題をpとかqとか，小文字で表すのがふつうです。そして，pとqを「あるいは」とか「または」で結んだとき，p∨q で表しま

す。例えば，

「円に中心がある」をpで，
「放物線は中心がない」をqで　　(*)

表すとき，

$p \vee q$ は

「円に中心があるか，または，放物線に中心がないか，である」

ということを表すわけです。

(注) しかし，実は，この「または」というコトバの内容がはっきりしない。

「よく勉強したごほうびにくだものまたはお菓子をあげよう」

といったときと

「今晩は風が吹くかまたは雨が降るでしょう」

といった場合のちがいを考えてみるとハッキリします。実は，∨の記号は両方とも含んでかまわない場合の「または」を表し，一方だけというときは $\veebar$ という記号を使います。

2つの命題を連結する記号はまだあります。「そして」とか「かつ」とかいうときは ∧ で表します。上の (*) の例で

$p \wedge q$ は

「円に中心があって，そして，放物線には中心がない」

ことを表しています。

また，「……でない」という否定を表すには $\bar{p}$ を使うのです。(人によっては $\sim p$ を使ったり p' を使ったりします)

この他にも，いろいろ記号があります。これらについてはここには立ち入りませんが，最近こうした記号化によって大きな成果があげられています。

それというのも，ことばや図形で表現する場合には，ひとつの記号をひとつの対象と対応させることが困難だからです。

*　*　*

◆ 上のように単一命題から合成命題を作りますと，すぐ起こってくる問題は，単一命題の真偽をもとにして，合成命題の真偽を判定することです。これについては，ふつう **真偽表**（あるいは **真理表**）とよばれる表を作って調べます。

次に起こってくる問題は，ある条件を満足する合成命題の作り方なんです。

第3には，命題計算をもとにして，論理の吟味をすることも起こってきます。

このようにして，電子計算機を活用する方法も大きく発展したのでした。数理言語学といった分野も開拓されています。

*　*　*

◆ 命題というものの大要はこれでおわかりになったでしょう。そこで，最後にひとこと。命題に関してよくきかれることは，命題の定義のアイマイさです。

「山田君が丸い三角形をみた」

という文章は丸い三角形といったものがないから無意味であるといえるわけですが，

「精神病院の患者が丸い三角形を探している」

といえば，具体性をもってきます。

「山田君が幽霊をみた」

という文章は幽霊というものが存在しないから命題ではないとはいえません。

「数が猫を作った」

という文章は命題ではない。数が猫を作るなどということはまったく無意味だからです。しかし，

「数が神を作った」
「数が万物である」

ということはピタゴラス学派の信条であったのです。そこでは，無意味ではなかったハズ。そして，彼らにとっては真であったハズ。

そのようなアイマイさにあまり深入りしないで，積極的に真偽のハッキリしているものに限定して考えることにしたほうがいいのです。その立入ったことがらは改めて学ぶ機会がありましょう。

*　*　*

◆ なお，命題を数学的に扱う分野を命題計算といいますが，その基礎はブール代数として知られています。なお，数理論理学という分野も開拓されております。

逆命題とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈逆命題はみなよく知っている，と，思っている。しかし，「人間は動物である」の逆命題は「動物は人間である」なのか？

◆　条件をp，qで表すとき，命題

pならばqである

に対して

qならばpである

を**逆命題**といいます。

逆命題について大切なことは，

真の命題の逆は必ずしも真ではない

ということです。このことは，ふつう，

≪逆は必ずしも真ならず≫

といいます。

なお，ある命題が真であることを示すにはもちろんそれを証明しなければなりませんが真でないことをいうには反例を1つ示せばよいのです。反例（ハンレイ）とは，それが成立しないひとつの例，ということです。

練習 1. 命題「AならばBである」の逆を示せ。（姫路工大）

（解）「BならばAである」　……答

練習 2. a，bを2つの実数とするとき，
$a=b$ ならば $a^2=b^2$ かつ $a^3=b^3$ である。
この逆は正しいかどうか，調べよ。（早大）

（ヒント）逆命題は
「a, bを2つの実数とするとき，$a^2=b^2$ かつ $a^3=b^3$ ならば，$a=b$ である」
となります。この命題は正しい。なぜなら，
$a^2=b^2$ より　$a=\pm b$
$a=b$ なら明らかです。
$a=-b$ なら，$a^3=b^3$ に代入して
$(-b)^3=b^3$　$\therefore$　$2b^3=0$　$\therefore$　$b=0$
$\therefore$　$a=0$
確かに，このときも $a=b$ となる。
いずれにしても $a=b$ が成り立つ。

（注）逆を次のようにいってはいけません。
「$a^2=b^2$ かつ $a^3=b^3$ ならば $a=b$ なる実数である」
a，bが実数というのは前提条件だからです。

練習 3. 次の命題Aの逆を書け。また，実数aがどのような値のとき正しいか。
A：「1かaは $(x^2-1)(x+a)=0$ と $(x+1)(|x|+a)=0$ の共通な解である」
（山梨大）

（ヒント）逆「$(x^2-1)(x+a)=0$ と $(x+1)\times(|x|+a)=0$ の共通解は1かaである」

ところでAが正しいのはaの値が -1 か 0 のときです。なぜなら，1が共通解であるための条件は第2式から $1+a=0$，したがって $a=-1$ のときであるし，aが共通解であるための条件は

$$(a^2-1)\cdot 2a=0$$

かつ　$(a+1)(|a|+a)=0$

より $a=-1$ または $a=0$ となるからです。

次に逆命題が正しいのは $a=-1$ のときです。なぜなら，$(x^2-1)(x+a)=0$ と $(x+1)\times(|x|+a)=0$ は明らかに -1 という共通解をもっています。ところが，共通解は1かaだというのですから，$a=-1$ であることが必要です。そこで $a=-1$ にしてみますと2つの方程式は

$$(x^2-1)(x-1)=0$$

と

$$(x+1)(|x|-1)=0$$

になり，共通解は

$$1 \text{ と } -1 \ (=a)$$

とになるからです。

＊　＊　＊

◆ 逆命題の正しいか否かを調べるとき，正しい場合はもちろん証明しなければなりませんが，**正しくないときは反例を１つあげれば十分** です。

3/23

■練習 4. 「$a>0$, $b>0$ のとき $a+b>0$ かつ $ab>0$ である」の逆命題を述べ，その正しいか否かを述べよ。

(解) 逆命題は

「$a+b>0$ かつ $ab>0$ ならば

$a>0$ かつ $b>0$ である」

で，これは正しくない。なぜなら，

$$a=1+i,\ b=1-i$$

とすると

$$a+b=2>0,\ ab=2>0$$

であるが，$a>0$ ではない (虚数には大小がない) からです。

もし，与えられた命題が，

「２つの実数 a, b について，$a>0$ かつ $b>0$ のとき $a+b>0$ かつ $ab>0$ である」

ならば，逆も正しいのです。

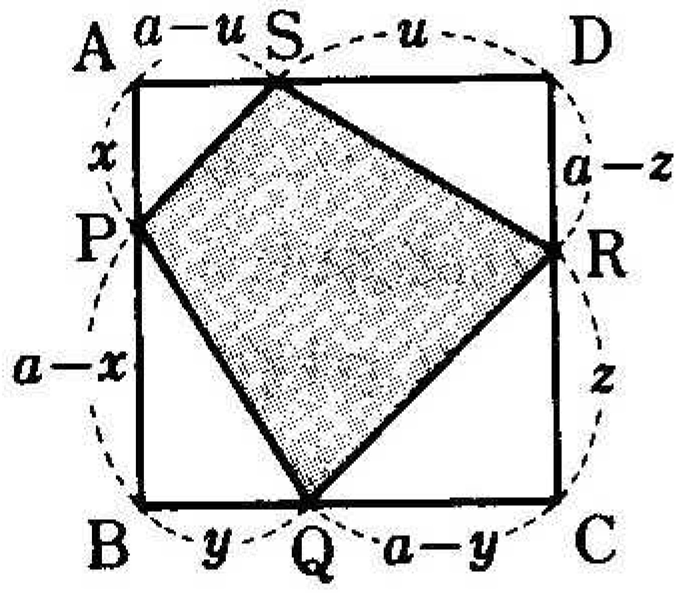
3/25

■練習 5. １辺の長さが a の正方形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S をとり，AP$=x$, BQ$=y$, CR$=z$, DS$=u$ とする。

「四辺形 PQRS の面積が $\dfrac{a^2}{2}$ より小さいならば，x, y, z, u のうち少なくとも１つは $\dfrac{a}{2}$ よりも大きい」

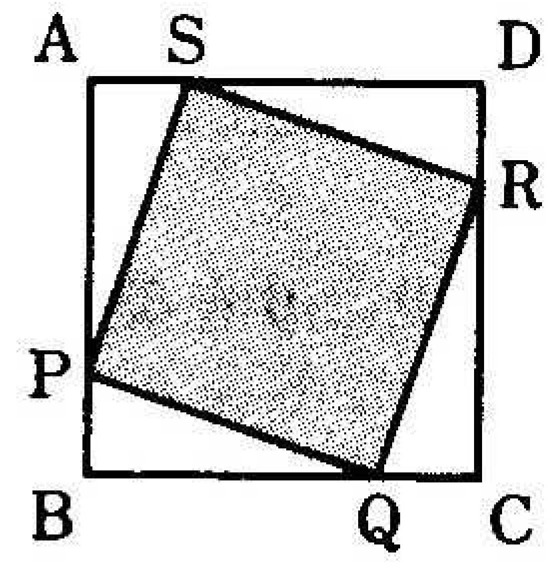
この命題の逆を述べて，それが正しいかどうかを調べよ。　　(慶大)

(ヒント) 逆は「x, y, z, u のうち少なくとも１つが $\dfrac{a}{2}$ より大きいならば，四辺形 PQRS の面積は $\dfrac{a^2}{2}$ より小さい」



さて，これが正しいかどうか。正しくなさそうだ。なぜなら，P, Q, R, S をそれぞれ B, C, D, A の近くにとると $x>\dfrac{a}{2}$ であることは確か。しかも，四辺形 PQRS の面積はほとんど a^2 に等しいから。

しかし，近くにとるという表現はアイマイです。解答としては



$$x=y=z=u=\frac{3}{4}a$$

にとれば

$$\text{四辺形 PQRS}=a^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{3a}{4}\times4$$

$$=a^2-\frac{3a^2}{8}=\frac{5a^2}{8}>\frac{a^2}{2}$$

とでもしたらいいでしょう。もちろん $\dfrac{a}{2}$ より大でさえあれば何でもいいのです。

■練習 6. n を任意の自然数とするとき，次の命題Aが成り立つ。

A「実数 x, y が $x^{2n}+y^{2n}\leqq1$ をみたせば $x^{2n+2}+y^{2n+2}\leqq1$ をみたす」

命題Aの逆の命題を述べ，それが真であるかどうか，理由をあげて答えよ。

(名古屋市大)

(ヒント) Aの逆命題は

「実数 x, y が $x^{2n+2}+y^{2n+2}\leqq1$ をみたせば $x^{2n}+y^{2n}\leqq1$ をみたす」

これは真ではない。

$$x^{2n+2}+y^{2n+2}\leqq1 \quad\cdots\cdots①$$

を満足するが，

$$x^{2n}+y^{2n}\leqq1 \quad\cdots\cdots②$$

を満足しない実数 x, y があるからです。それは，$x=y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n+2}}$ を考えてみましょう。

これは①の左辺に代入すると等号が成り立って確かに①を満足します。ところが②の左辺に代入してみますと

$$x^{2n}+y^{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{2n+2}}\times2=2^{-\frac{n}{n+1}+1}=2^{\frac{1}{n+1}}>1$$

だから。

対偶命題とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆逆・裏・対偶の中で，対偶がもっともよく使われるし，入学試験などにも，もっとも多く出題されています。だからこそ，……

◆ p，qを条件として

pならばqである

に対し，

qでないならばpではない

を**対偶**（タイグウ）といいます。対偶の大切な点は，もとの命題が真であれば対偶も真であるし，逆に対偶が真であればもとの命題も真だ，ということです。いいかえれば，ある命題とその対偶とは同値なのです。

だから，ある命題を証明するかわりに，その対偶を証明してもいいのです。そして，問題によっては対偶を証明する方がスゴク楽だということも少なくありません。大学で数学を学ぶ際には，このことは，とくに実感をもって体験することになるでしょう。対偶の扱い方はよくつかんでおいてください。

■練習1. 次の命題の対偶を述べよ。

「$xy=0$ ならば $x=0$ または $y=0$ である」　（慶大）

（解）「$x\neq0$ かつ $y\neq0$ ならば $xy\neq0$ である」

■練習2. a，b，c が実数で，$a\neq0$ のとき，

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

とすれば，「xのどんな実数値に対しても $f(x)>0$ ならば $a>0$，$b^2-4ac<0$ である」

この命題の対偶を述べなさい。　（京大）

（ヒント）$a>0$，$b^2-4ac<0$ というのは

$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$

ということ，したがって，その否定は

$a<0$ あるいは $b^2-4ac\geqq0$　（$\because$ $a\neq0$）

です。したがって，求める対偶は

「$a<0$ あるいは $b^2-4ac\geqq0$ のとき $f(x)\leqq0$ を満足するxが存在する」

となります。

■練習3. 次の命題の対偶を述べよ。

「x，yが実数であって，$x^2+y^2+1=0$ であるならば $x=0$ または $y=0$ である」　（京大）

（ヒント）$x=0$ または $y=0$ である，の否定は $x\neq0$ かつ $y\neq0$ ですから，求める対偶は

「x，yが実数であって，$x\neq0$ かつ $y\neq0$ のとき $x^2+y^2+1\neq0$ である」

となります。しかし，x，yが実数というのを命題pに入れるなら

「$x\neq0$ かつ $y\neq0$ のときxは虚数であるか，あるいはyが虚数であるか，あるいは $x^2+y^2+1\neq0$ である」

実はこの問題は京大出題のままではありません。もとの問題は次のようでした。

≪次の文中の□に，適当な語句または文を入れよ。

1つの命題「AならばBである」について，条件Aをみたすものが存在しないならば，この命題は(イ)□。その理由は，次の通りである。1つの命題とその(ロ)□とは互いに同値であるから，次の命題を考えればよい。

「Bで(ハ)□ならば，Aで(ニ)□」

この命題の結論「Aで(ホ)□」は(ヘ)□から，この命題は(ト)□。ゆえに，もとの命題「AならばBである」は(チ)□。

上のようなことが実際にあてはまる例を考えよう。

次の命題をPと呼ぼう。「x, y が実数であって，$x^2+y^2+1=0$ であるならば，$x=0$ または $y=0$ である」このPを，「AならばBである」の形にして考えると，Aは「(リ)$\boxed{\quad\quad}$」であり，Bは「(ヌ)$\boxed{\quad\quad}$」である。Aの否定は「(ル)$\boxed{\quad\quad}$」であり，Bの否定は「(ヲ)$\boxed{\quad\quad}$」である。

したがって，Pの逆，対偶は，それぞれ，次の通りである。逆：(ワ)$\boxed{\quad\quad}$，対偶：(カ)$\boxed{\quad\quad}$。P，Pの逆，Pの対偶のうち，(i)初めに述べた命題の例になっているものは(ヨ)$\boxed{\quad\quad}$であり，(ii)真であるものは(タ)$\boxed{\quad\quad}$である≫

これならはっきりしています。しかし，ゴタゴタしているので，いますぐやることもないが，解答は次のようです。

(イ)真である　(ロ)命題の対偶　(ハ)ない　(ニ)ない　(ホ)ない　(ヘ)真である　(ト)真である　(チ)真である　(リ)x, yが実数であって，$x^2+y^2+1=0$ である　(ヌ)$x=0$ または $y=0$ である　(ル)x, y のうちの少なくとも一方は実数でないか，または $x^2+y^2+1\neq0$ である　(ヲ)$x\neq0$ かつ $y\neq0$ である　(ワ)$x=0$ または $y=0$ であるならば，x, y は実数であって，$x^2+y^2+1=0$ である　(カ)$x\neq0$ かつ $y\neq0$ であるならば，x, y のうち少なくとも一方は実数でないか，または $x^2+y^2+1\neq0$ である　(ヨ)P　(タ)PおよびPの対偶

＊　＊　＊

◆ 対偶について，次のはどうでしょう。

練習 4.「先生が怒らないと生徒は勉強しない」という命題の対偶を作れ。

(ヒント) 対偶はすぐ書けます。

「生徒が勉強すれば先生は怒る」

問題はここだ。**ある命題が真なら対偶も真である** ことがわかっている。してみると，この命題は果して同値なのであろうか。ナニオカシイ。これは，時間の経過も考え，

「生徒が勉強しているのは先生が怒ったからである」とすれば自然です。

このように，意味がよくとれないために，わからなくなることも多いのです。

＊　＊　＊

◆ 次には幾何学的問題をとりあげてみましょう。

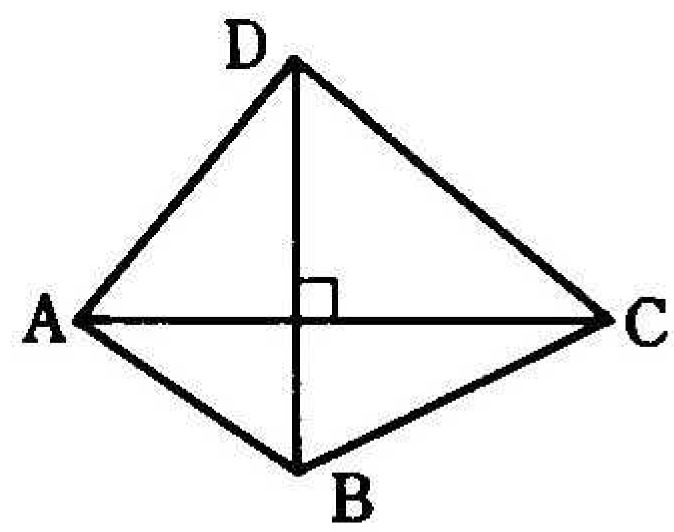
練習 5. 次の命題の対偶を作れ。

「2つの三角形が合同ならば面積は等しい」

(解) 「2つの三角形が，面積が等しくなければ合同ではない」

練習 6.「ひし形の2つの対角線は直交する」という命題の対偶を作れ。

(解) 「2つの対角線が直交しない四辺形はひし形でない」



なお，ついでにこの逆「対角線が直交する四辺形はひし形である」は正しくない。右の図をみれば明らかでしょう。

(注) では，その対偶はどうなるでしょうか。

「ひし形でない四辺形の対角線は直交しない」となります。いうまでもなく正しくない。

これを四辺形において，と書いてないことに目をつけて，

「ひし形でない多角形の対角線は直交しない」とやるのはまちがいではないがまずい。これは四辺形という条件が全体にかかっていると考えるのがふつうです。

練習 7. 次の命題の対偶を述べよ。

「直線 g が円Oとただ1点Pを共有するならば，Pと円の中心Oとを結ぶ直線は g と直交する」　(上智大)

(解) 「円周上の点Pを通り半径POと直交しない直線は，円Oと1点Pのみを共有することはない」

⑪ 裏命題とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆裏命題（ウラメイダイ）が単独に出題されることはまずありませんし，とくに大切ということでもありませんが，……

◆ 条件p，qが与えられたとき命題

pならばqである

に対し，

pでないならばqではない

を**裏命題**（ウラメイダイ）といいます。

つまり，命題，逆命題，裏命題，対偶の関係を図に示すと下のようになります。

$$\begin{tikzcd} \text{命　題} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, leftrightarrow] & \text{逆命題} \arrow[d, dash, dashed] \\ \text{裏命題} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[ur, leftrightarrow] & \text{対　偶} \end{tikzcd}$$

矢線で示した2つは同値です。したがって，ある命題が真であっても，裏命題は必ずしも真ではありません。

なお，逆命題と裏命題とは，互に，対偶の関係になっています。

練習 1. 次の命題の裏を述べ，その真偽を定めよ。

「$a=0$ ならば $ab=0$」

ヒント　$a=0$ の否定は　$a\neq 0$

$ab=0$ の否定は　$ab\neq 0$

ですから，裏は

「$a\neq 0$ ならば $ab\neq 0$ である」

となります。これは正しくありません。なぜなら $a\neq 0$ でも，$b=0$ なら $ab=0$ となるからです。

練習 2. 次の命題の裏を述べ，その正しいか否かを調べよ。

「a，bが整数ならば，$a+b$ は整数である」

ヒント　「a，bが整数である」の否定は「a，bが整数でないとき」ではありません。「a，bが整数」というのは「aおよびbが整数」ということですから，その否定は「aまたはbが整数でないとき」となりましょう。もう少し正確にいうと「a，bの少なくとも一方が整数でないとき」となります。かくて，裏命題は

「a，bの少なくとも一方が整数でないとき，$a+b$ は整数ではない」

となります。正しくありません。

$$a=\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{4} \text{ のとき } a+b=1$$

をあげれば明らか。

練習 3. 次の命題の裏命題を述べ，正しいか否かを調べよ。

$f(x)=x^2-9$ のとき

「$f(a)=0$ ならば $x=a$ は $x^2-9=0$ の解である」

ヒント　裏命題は

$f(x)=x^2-9$ のとき

「$f(a)\neq 0$ ならば $x=a$ は $x^2-9=0$ の解でない」

正しいことはいうまでもないでしょう。

*　*　*

◆ 次はやや総合的な問題ですが，やってみませんか。

練習 4. 正の数aと実数xとに対して，

「$x>a$ ならば $x^2>a^2$ である」

これから次の4通りの結論を導いた。これらはもとの命題に対して何か。

(イ)「$x^2>a^2$ ならば $x>a$ である」

(ロ)「$x\leqq a$ ならば $x^2\leqq a^2$ である」

(ハ)「$x^2\leqq a^2$ ならば $-x\leqq -a$ である」

(ニ)「$x^2\leqq a^2$ ならば $x\leqq a$ である」

(解)　(イ)　逆命題

(ロ)　裏命題

(ハ)　逆，裏，対偶のいずれでもない。

(ニ)　対偶

(注)　$x>a$ の否定は $x<a$ ではありません。$x\leqq a$ なんです。

練習 5. $f(x,\ y)=xy+x+y$ (x, y は 0 でない実数）とするとき，命題「$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>0$ ならば $f(x,\ y)\neq 0$ である」の裏命題を述べ，正しいか否かを調べよ。（小樽商大）

(ヒント)　裏命題は

「$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq 0$ ならば $f(x,\ y)=0$ である」

正しくない。$x=-1$, $y=1$ のとき $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0$ であるから，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq 0$ を満足する。

しかし

$$f(-1,\ 1)=(-1)\cdot 1+(-1)+1$$
$$=-1\neq 0$$

であるから，……

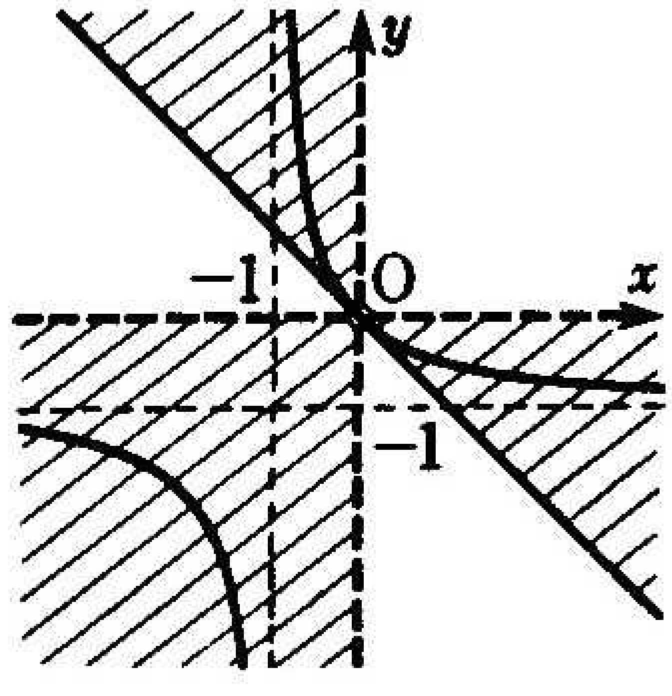
(注)　裏命題の成立するか否かは領域を調べてみるとハッキリします。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqq 0$$

ならば　$$\frac{x+y}{xy}\leqq 0$$

$\therefore$　$xy(x+y)\leqq 0$　（ただし $x\neq 0$, $y\neq 0$）

を満足する点 $(x,\ y)$ は下の図の斜線を引いた部分および太い直線上にあります。



ところが

$f(x,\ y)$

$=xy+x+y=0$

のグラフは $x=-1$, $y=-1$ を漸近線とする双曲線です（右の図の太い曲線)。

だから $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq 0$ であっても $f(x,\ y)=0$ にはならないのです。

練習 6. 命題「$x=y$ ならば $zx=zy$ である」の逆・裏・対偶を述べ，おのおのについて，成り立つかどうか調べよ。

（熊本女大）

(解)　逆：$zx=zy$ ならば $x=y$ である。

反例は　$x=1$, $y=2$, $z=0$　（正しくない）

裏：$x\neq y$ ならば $zx\neq zy$ である。

逆が正しくないので。　（正しくない）

対偶：$zx\neq zy$ ならば $x\neq y$ である。

（正しい）

練習 7. 次の命題の逆・裏・対偶を作り，その正否を調べよ。ただし，x, y, z は実数とする。

(1)　$xyz=0$ ならば，$x=0$ または $y=0$ または $z=0$ である。

(2)　$x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ かつ $z\geqq 1$ ならば $x+y+z\geqq 3$ である。　（慶大）

(ヒント)　(1)　逆：$x=0$ または $y=0$ または $z=0$ ならば $xyz=0$ である。(正)

裏：$xyz\neq 0$ ならば $x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ かつ $z\neq 0$ である。(正)

対偶：$x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ かつ $z\neq 0$ ならば $xyz\neq 0$ である。(正)

(2)　逆：$x+y+z\geqq 3$ ならば $x\geqq 1$ かつ $z\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ である。(否)

これが成立しないことは

$$x=100,\ y=0,\ z=0$$

のときを考えてみれば明らかです。

裏：$x<1$ あるいは $y<1$ あるいは $z<1$ ならば $x+y+z<3$ である。(否)

これが正しくないことは，例えば，

$$x=0,\ y=0,\ z=100$$

のとき $x+y+z=100>3$ であることから明らかです。

対偶：$x+y+z<3$ ならば $x<1$ あるいは $y<1$ あるいは $z<1$ である。(正)

*　　*　　*

命題の裏の逆，裏の対偶などを作ってみませんか。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

同値とは何か

◆同値であることを証明せよ，という問題もあるが，それにもまして，これは同値変形でないから減点だ，などといわれるのだ。

◆　2つの命題PとQがあって，

Pが成り立つとき，Qが成り立つならば

　PはQの　**十分条件**

　QはPの　**必要条件**

というのでした。そして，

PならばQが成り立ち，QならばPが成り立つとき

P，Qは互いに他の　必要十分条件

といいます。あるいは，

PとQとは　同値

である，ともいうのです。

だから，P，Qが同値であることを証明するには　PならばQ　と　QならばP　を証明しなければなりません。

*　*　*

◆　では，具体的な問題をやってみようではありませんか。

3/26

練習1. a，b が実数であるとき

$$ab \geqq 0 \quad と \quad \frac{a}{b} \geqq 0$$

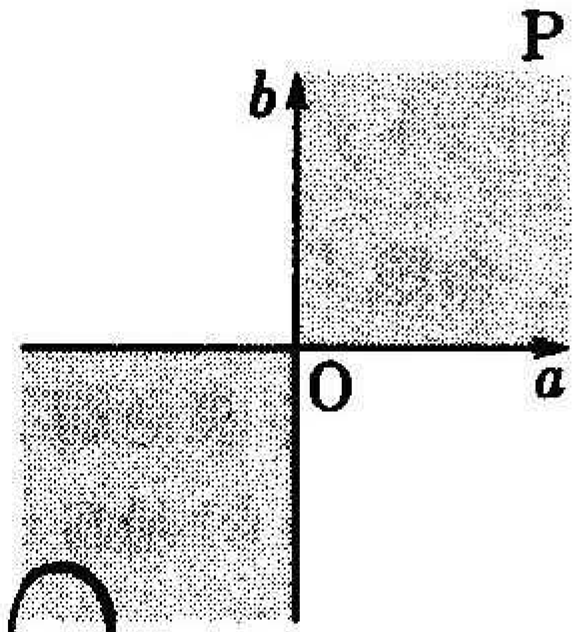
は同値であるか。

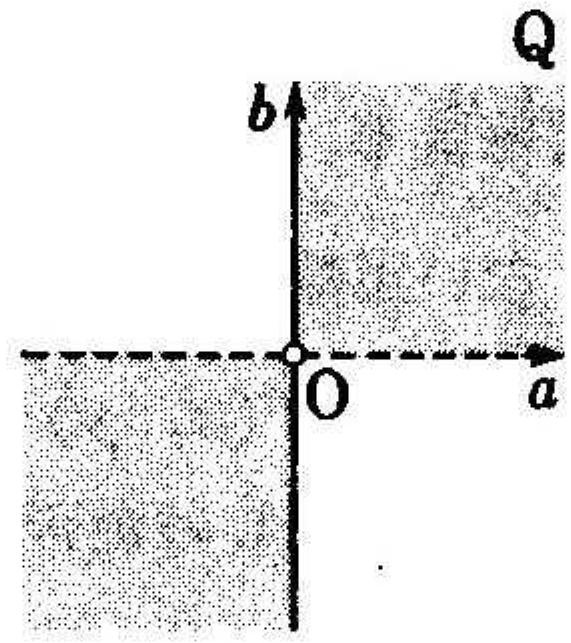
ヒント　P：　$ab \geqq 0$，　Q：　$\frac{a}{b} \geqq 0$

とします。QならばP　はすぐ証明できます。$\frac{a}{b} \geqq 0$ の両辺に b^2 を掛けると $ab \geqq 0$ すなわちPが得られるからです。

しかし，PならばQはできないのです。なぜなら $ab \geqq 0$ は $b=0$ のときにも成り立つのですから b^2 で割ることができない。

かくて，PとQは同値ではないのです。これを点 $(a,\ b)$ の存在範囲で図示してみましょう。右上の図のようにササイながらちがいがあります。(境界は実線部分のみを含む)





3/26

練習2. P：「2次方程式　$ax^2+bx+c=0$ の2つの解が α と β である」という命題と

Q：「$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$　かつ　$\alpha\beta=\frac{c}{a}$　である」

という命題は同値であるか。

ヒント　$ax^2+bx+c=0$ の2つの解が α と β ですから

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

これから

$$b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

ゆえに　　PならばQ

次に，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ かつ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ であるとしますと，第1式から

$$\beta=-\alpha-\frac{b}{a}$$

これを第2式に代入すると

$$\alpha\left(-\alpha-\frac{b}{a}\right)=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ -\alpha^2-\frac{b}{a}\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

同様にして

$$a\beta^2+b\beta+c=0$$

つまり，α，β は $ax^2+bx+c=0$ の2つの解であることがわかります。

したがって，P，Qは同値です。

(注) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ かつ $a\beta^2+b\beta+c=0$ が成り立つとき，α, β は $ax^2+bx+c=0$ の解になるかどうかわからないじゃないか。$at^2+bt+c=0$ の解かもしれないし，$au^2+bu+c=0$ の解かもしれない，と文句をいう人があります。しかし，方程式としてはこれはみんな同じものです。x と書いてあるか，t と書いてあるかは関係のないことなのです。

*　*　*

◆ 次に，少しめんどうな問題を扱ってみましょう。

練習 3. $A=B$ と $A^2=B^2$ と同値であるための条件を求めよ。

(ヒント) $A=B$ ならば，$A^2=B^2$ であることは確かです。ところで逆はどうか。

$A^2=B^2$ ならば　$A^2-B^2=0$

$\therefore\ (A-B)(A+B)=0$

ここでうっかり $A+B\neq 0$ のとき $A=B$ と $A^2=B^2$ と同値だ，とやってしまう。そうではありませんよ。なぜなら

$A-B=0$　かつ　$A+B=0$

の場合があるからです。かくて：——

(解) $A=B$ が成り立てば明らかに $A^2=B^2$ が成り立つ。

次に，$A^2=B^2$ ならば　$A^2-B^2=0$

$\therefore\ (A+B)(A-B)=0$

ゆえに，$A+B\neq 0$ あるいは ($A+B=0$ かつ $A=B$) のとき $A=B$ が成り立つ。

ゆえに $A+B\neq 0$ あるいは $A=B=0$ のとき，$A=B$ と $A^2=B^2$ と同値である。

すなわち，A と B が同符号か，あるいは $A=B=0$ のとき $A=B$ と $A^2=B^2$ と同値である。

練習 4. a, b が実数のとき

$a>k$　かつ　$b>k$

と　$ab>k^2$　かつ　$a+b>2k$

とは同値であるか。

(解) 同値ではない。

例えば，$k=1$ のとき $a=100$, $b=\dfrac{1}{10}$ にとると $ab>1^2$ かつ $a+b>2$ であるが，$a>1$ かつ $b>1$ ではない。

(注) 成り立たないことをいうには，反例を1つあげればよい。

*　*　*

◆ 条件式を変形するときに，同値性がこわれないように変形することを**同値変形**（ドウチヘンケイ）といいます。例えば，

a, b が実数のとき，

$$\frac{b}{a}>0$$

の両辺に a を掛けて

$$b>0$$

とやる人が多いが，これはまったくマチガイです。

反例をあげましょうか。

$$\frac{-3}{-2}>0$$

ですが，

$$-3>0$$

ではないのです。

また

$$\frac{b}{a}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

の両辺に a^2 を掛けて

$$ab\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(**)$$

としても，これは同値ではありません。なぜなら (*) では a は 0 になれませんが，(**) では $a=0$ になれるからです。しかし，

$$\frac{b}{a}>0$$

の両辺に a^2 を掛けて得られる

$$ab>0$$

は同値です。なぜなら $ab>0$ であれば a は 0 にはならない。そこで a^2 (>0) で両辺を割ると

$$\frac{b}{a}>0$$

が得られるからです。このことは，とかくマチガエル人が多いもの。よく，つかんでおいてください。

必要条件とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆必要条件であるか，というとき，われわれはとかく，＜必要＞というコトバのもつ通俗的意味にとらわれて思わぬ失敗をする。

◆ Aという命題とBという命題があって，

≪AならばBである≫とき，

AをBに対する　十分条件

BをAに対する　必要条件

といいます。では，具体的な例を。

3/26

■練習 1. A : $x>0$, B : $x>1$ とするとき，AはBに対する必要条件か。

ヒント 「AはBに対する必要条件か」というからめんどうになるのです。

「BならばAであるか」

もっと具体的にいえば

「$x>1$ ならば $x>0$ となるか」

とホン訳して考えるといい。確かにこれは正しい。つまり，AはBに対する必要条件なのです。

3/26

■練習 2. A : $x^2+x-2>0$, B : $x^2-1<0$ とするとき，AはBに対する必要条件か。

ヒント 「AはBに対する必要条件か」ということは

「BならばAであるか」

つまり

「$x^2-1<0$ ならば $x^2+x-2>0$ となるか」

といいかえてみると，べつにめんどうはない。

$x^2-1<0$ を解くと

$$-1<x<1$$

$x^2+x-2>0$ を解くと

$$x<-2,\ x>1$$

となりますから，

$x^2-1<0$ ならば $x^2+x-2>0$ とならない。つまりAはBに対する必要条件ではない，ことがわかります。

ではもう1つやってみませんか。

■練習 3. 実数 a, b, c について，$a<b$ は，$ac<bc$ であるための必要条件か。

ヒント 上のようにA，Bに分けたとき，実数 a, b, c について，というのはAにつくのかBにつくのか，まず，気になりませんか。ていねいに書けばこうです。

A : 実数 a, b, c について　$a<b$

B : 実数 a, b, c について　$ac<bc$

とするとき，「AはBであるため必要条件であるか」，いいかえると，

「BならばAとなるか」

もっと具体的にいうと

「a, b, c が実数で $ac<bc$ のとき $a<b$ となるか」

というわけ。

ところで，$ac<bc$ ならば

$$ac-bc<0 \quad \therefore \quad c(a-b)<0$$

$c>0$ ならば　$a<b$

$c<0$ ならば　$a>b$

$c=0$ ならば　$c(a-b)<0$ とならないから $c\neq 0$ であるハズ。したがって $c\neq 0$ ということが $ac<bc$ の中に含まれているのです。

ともあれ，$ac<bc$ だからといって $a<b$ とはならない。つまり

$$a<b \quad \text{は} \quad ac<bc$$

であるための必要条件ではありません。

*　*　*

◆ 必要条件の判定法がわかったと思いますから，次には，もっとめんどうなものをやってみませんか。上のように一度ホン訳してからやることを忘れてはいけません。

■練習 4. 実数係数の 2 次方程式

$x^2+bx+c=0$ について，$c\leqq 0$ はこの方程式が実数解をもつための必要条件か。

(解)　$b=2,\ c=1$ のとき

$$x^2+bx+c=x^2+2x+1=0$$

は実数解 -1 をもつ。ゆえに，$c=1>0$ のとき実数解をもつから，$c\leqq 0$ は必要条件ではない。

■練習 5. $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=3a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ は ax^3+bx^2+cx+d が $(x-\alpha)^2$ で割りきれるための必要条件であることを示せ。　(東京工大)

(解)　ax^3+bx^2+cx+d が $(x-\alpha)^2$ で割りきれるとすると

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=3a\alpha^2+2b\alpha+c=0$$

であることを示せばよい。

さて組立除法を使って割ってみると，

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha & a & b & c & d \\
 & & a\alpha & a\alpha^2+b\alpha & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha \\
\hline
\alpha & a & a\alpha+b & a\alpha^2+b\alpha+c & \underline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d} \\
 & & a\alpha & 2a\alpha^2+b\alpha & \\
\hline
 & a & 2a\alpha+b & \underline{3a\alpha^2+2b\alpha+c} &
\end{array}$$

となって，$(x-\alpha)^2$ で割りきれるならば

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$

かつ　$3a\alpha^2+2b\alpha+c=0$

であること。すなわち，これが必要条件であることがわかる。(実は十分条件でもある)

(注)　上の解答では $x-\alpha$ で 2 度割りましたが $(x-\alpha)^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2$ で割ったらどうなるでしょうか。

下に示したように，剰余は

$$(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x+(-2a\alpha^3-b\alpha^2+d)$$

となりますから，割りきれるならば，

$$3a\alpha^2+2b\alpha+c=0 \quad \cdots\cdots①$$

かつ　$-2a\alpha^3-b\alpha^2+d=0 \quad \cdots\cdots②$

$$\begin{array}{r|cccc}
 & a & 2a\alpha+b & & \\
\hline
1\ \ -2\alpha\ \ \alpha^2 & a & b & c & d \\
 & a & -2a\alpha & a\alpha^2 & \\
\hline
 & & 2a\alpha+b & -a\alpha^2+c & d \\
 & & 2a\alpha+b & -4a\alpha^2-2b\alpha & 2a\alpha^3+b\alpha^2 \\
\hline
 & & & 3a\alpha^2+2b\alpha+c & -2a\alpha^3-b\alpha^2+d
\end{array}$$

となります。しかし，②は求めるものとちがっている。では，このやり方がまずいのか。そうではありません。

①×α+② を作ると

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$

となって，証明すべき条件が出ます。

なお，$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$　だけでも

$-2a\alpha^3-b\alpha^2+d=0$　だけでも

$3a\alpha^2+2b\alpha+c=0$　だけでも

みんな必要条件です。だから，必要条件を求めよ，といった問題は出せない。答がいろいろ出て困るからです。

■練習 6. $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$ は $\alpha,\ \beta$ が正であるための必要条件であるか。

(ヒント)　$\alpha>0,\ \beta>0$ のとき $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$ となるかと書きかえてみるとよくわかる。必要条件です。では，逆はどうだろう。

「$\alpha>0,\ \beta>0$ は $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$ であるための必要条件か」

$\alpha=1+i,\ \beta=1-i$ とすると

$$\alpha+\beta=2>0$$
$$\alpha\beta=2>0$$

しかし，$\alpha>0,\ \beta>0$ とはいえない (虚数には大小がないから)。つまり，必要条件ではないのです。

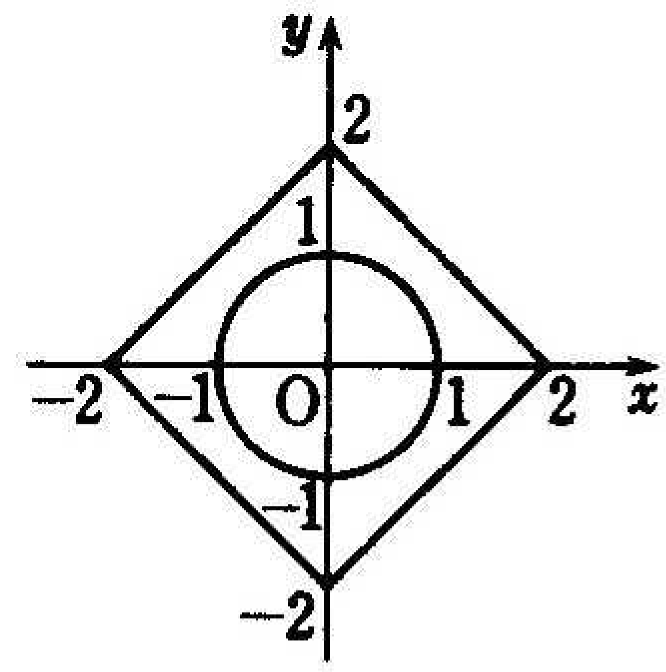
(注)　$\alpha,\ \beta$ が実数ならば，必要条件です。

*　*　*

◆ 領域を使うとわかりやすいこともあります。例えば，

■練習 7. $x,\ y$ が実数のとき，$|x|+|y|<2$ であることは $x^2+y^2<1$ であるための必要条件か。

(ヒント)　$|x|+|y|<2,\ x^2+y^2<1$ の表す領域はそれぞれ図の正方形と円の内部。これから明らか。



(答)　必要条件である。

十分条件とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆～は～の十分条件か，と問われて，ハテナ，ジュウブンかな?!　などと思うようではいけません。

◆ 命題A，Bがあって，Aが成り立つならばBが成り立つ，というとき，すなわち

「A ⟶ B」が成り立つとき

AをBに対する 十分条件

BをAに対する 必要条件

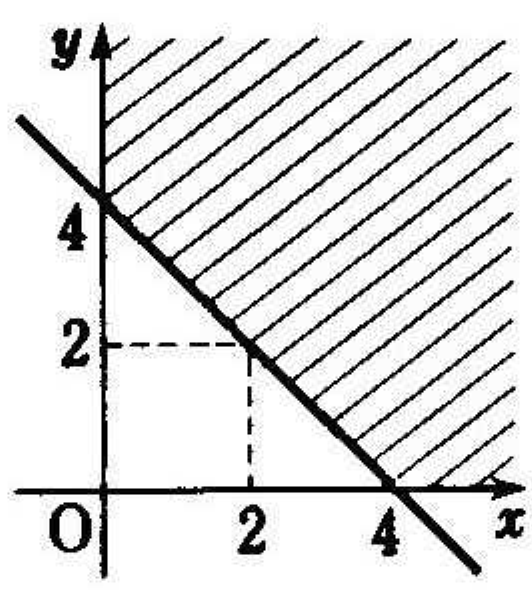
というのです。日本語で，必要か，十分か，と考えてはいけません。

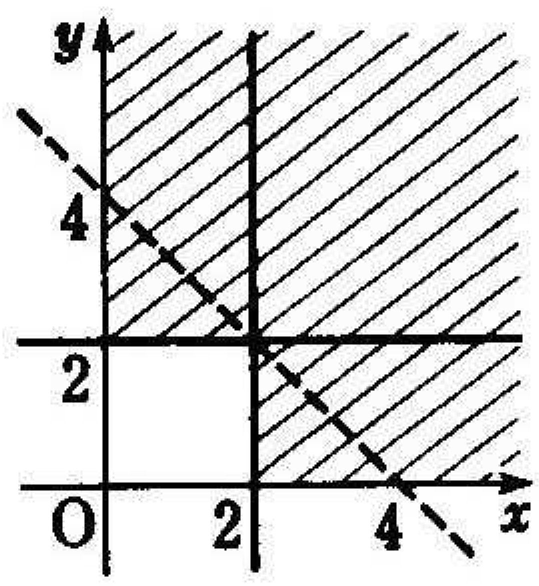
3/27

■練習1. $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ で A：$x+y\geqq 4$，B：$x\geqq 2$ または $y\geqq 2$ のときAはBの十分条件であるか。（創価大）

ヒント　Aが成り立つときBが成り立つことが証明されればAはBの十分条件といえます。さて，どうかな。

$x+y\geqq 4$ を満足する点（x，y）の存在範囲を調べてみますと，下の左の図の斜線を引





いた部分です。また $x\geqq 2$ または $y\geqq 2$ を満足する範囲は右のほうの図の斜線を引いた部分なのです。ですから，$x+y\geqq 4$ を満足する範囲は $x\geqq 2$ または $y\geqq 2$ を満足する範囲に含まれてしまいます。だから，AならばBになるのです。ゆえにAはBの十分条件です。

■練習2. A：$a=0$，B：$ab=0$ のとき，AはBであるための十分条件であるか。（成蹊大）

3/2

解　Aが成り立てば　$a=0$　∴　$ab=0$　すなわちBが成り立つ。ゆえにAはBの十分条件である。

3/27

■練習3. 実数 a に対して $\sqrt{a^2}=-a$ が成り立つためには，$a\leqq 0$ であることが十分条件であるか。

ヒント　$a\leqq 0$　のとき　$\sqrt{a^2}=-a$　が成り立つか，といいなおしてみるとよい。いわずとしれたこと，十分条件です。

*　*　*

◆ 同じことですが，もっと，めんどうなものをやってみませんか。

3/12

■練習4. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\leqq 0$ であるためには，$x>3$ であることが十分条件であるか。（香川大）

解　$\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}$

ゆえに $x>3$ のとき

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}>0$$

となり，$\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\leqq 0$

は成立しない。ゆえに，十分条件ではない。

■練習5. $abc\neq 0$ とする。このとき，$a+b+c=0$ は

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

のための十分条件であるか。（神戸商科大）

ヒント　$a+b+c=0$ であれば

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$$

$$=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}+3$$

$$=\frac{-a^2}{bc}+\frac{-b^2}{ca}+\frac{-c^2}{ab}+3$$

$$=\frac{-(a^3+b^3+c^3-3abc)}{abc}$$

$=\dfrac{-1}{abc}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$

となる。ゆえに，$a+b+c=0$ は十分条件。

* * *

◆ 十分条件の意味がわかれば，必要条件とのからみあった問題が問題となってきます。

練習 6. x, y を実数とするとき，次の$\boxed{}$にあてはまる言葉を下の〔1〕～〔4〕の中から選べ。（東京薬大）

(1) $x^2+y^2 \leqq 1$ は $|x|+|y| \leqq 1$ が成り立つための$\boxed{}$である。

(2) $x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ は $|x|+|y| \leqq 1$ が成り立つための$\boxed{}$である。

(3) $x^2+y^2 \leqq 1$ は $x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立つための$\boxed{}$である。

(4) $|x|+|y| \leqq 1$ は $|y| \leqq |x+1|$ が成り立つための$\boxed{}$である。

〔1〕 必要でも十分でもない条件

〔2〕 必要であるが十分でない条件

〔3〕 十分であるが必要でない条件

〔4〕 必要かつ十分な条件

（解） (1)〔2〕 (2)〔3〕 (3)〔2〕 (4)〔3〕

（注） この問題は練習 1. のように領域を使ってやったほうがわかりよいでしょう。なお，必要条件の扱い方がよくわからなかったら（☞ p. 198）を軽く当たってからやってみるとよいでしょう。

練習 7. それぞれ有限個の実数からなる 2 つの集合 A と B に対し，次の 7 つの条件を考える。

〔1〕 A の任意の元は B の任意の元より大きい。

〔2〕 A の任意の元に対し，それより小さい B の元が存在する。

〔3〕 B の任意の元に対し，それより大きい A の元が存在する。

〔4〕 A の最大元は B の最大元より大きい。

〔5〕 B の最小元は A の最小元より小さい。

〔6〕 A のすべての元の和は B のすべての元の和より大きい。

〔7〕 A のすべての元の相加平均は B のすべての元の相加平均より大きい。

これらの条件のうちで，次の文中の$\boxed{}$に当てはまるものを番号で答えよ。

(1) 互いに必要十分条件となっているものの組は$\boxed{}$と$\boxed{}$および$\boxed{}$と$\boxed{}$である。

(2) 条件$\boxed{}$は他のある条件の必要条件であるが，他のどの条件の十分条件でもない。

(3) 条件$\boxed{}$は他のある条件の十分条件ではあるが，他のどの条件の必要条件でもない。

(4) 他のどの条件の必要条件でも十分条件でもないものは$\boxed{}$である。（都立大）

（解） (1) 〔2〕と〔5〕，〔3〕と〔4〕

(2) 〔7〕 (3) 〔1〕 (4) 〔6〕

（注） どうもゴタゴタしていてピンとこない。しかし，(2)で，A の元として最小の元をとると〔2〕⇒〔5〕がわかるでしょう。また〔5〕⇒〔2〕も明らか。したがって〔2〕と〔5〕は同値です。〔3〕と〔4〕もわかるでしょう。

他のものも，ひとつひとつ，それだけの問題として調べてみることが大切です。

練習 8. α，β，γ は複素数とする。次の(A)は(B)が成り立つための必要条件か，十分条件か。

(1) (A) $\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

(B) $\alpha>0$，$\beta>0$

(2) (A) $\alpha=0$，$\beta=0$

(B) $\alpha^2+\beta^2=0$

(3) (A) $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$

(B) $\alpha=\beta$ または $\alpha=\gamma$

（ヒント） 結果は (1) 必要条件 (2) 十分条件 (3) 必要かつ十分な条件

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

●ド・モルガンの定理と否定命題

◆ド・モルガンの定理と否定命題の関係をよくつかんでおくことは，集合と命題との関係をつかむ上に有効ですから……

◆ 集合 A, B, C の間に **分配法則**

$$\boldsymbol{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$$
$$\boldsymbol{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cup C)} \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立ちます。また，Aの補集合を$\overline{A}$で表すとき

$$\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$$
$$\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}} \quad \cdots\cdots(**)$$

が成り立ちます。これを，**ド・モルガンの定理** といいます。

ここではこの2つをもとにして集合の演算の扱い方をマスターすることにしましょう。この2つは集合の扱い方の見本だからです。

*　*　*

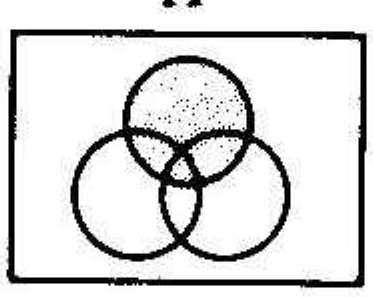
◆ まず，(*) のほうから。

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

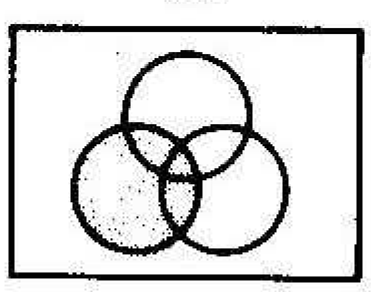
を証明するには3つの方法があります。第1はベン図を使う方法，第2は包含表を使う方法，第3は集合演算を直接使う方法，です。

⦿ベン図を使う方法：全体集合を長方形で表し，A, B, C を次のようにきめましょう。

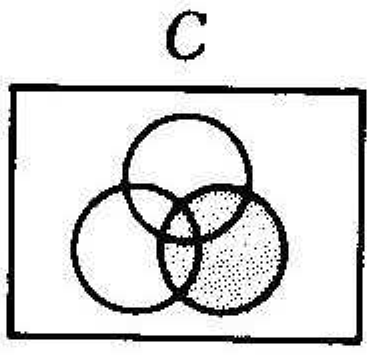
A



B

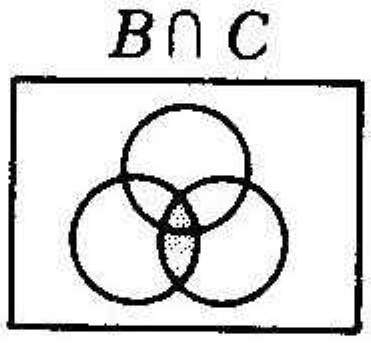


C



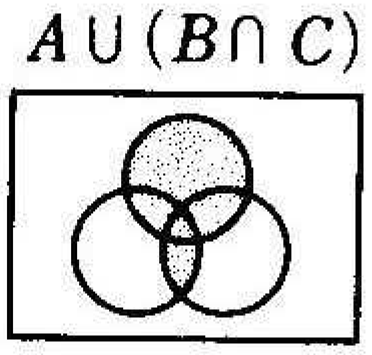
ゆえに

$B\cap C$



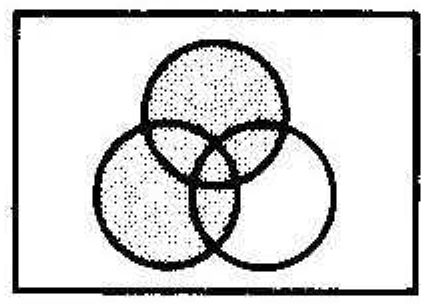
したがって

$A\cup(B\cap C)$

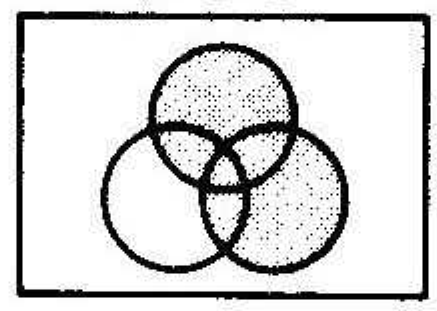


次に，右辺をベン図で表す。

$A\cup B$

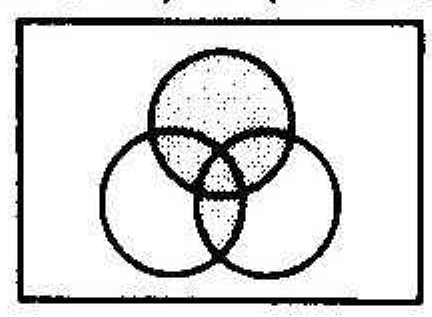


$A\cup C$



ゆえに

$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



2つの結果から

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

⦿包含表を使う方法：元xが集合Aに含まれるとき○，含まれないとき×で表し，包含表を作ると下のようになります。

A B C	$A\cup(B\cap C)$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)$
○ ○ ○	○　○	○　○　○
○ ○ ×	○　×	○　○　○
○ × ○	○　×	○　○　○
○ × ×	○　×	○　○　○
× ○ ○	○　○	○　○　○
× ○ ×	×　×	○　×　×
× × ○	×　×	×　×　○
× × ×	×　×	×　×　×
	↑	↑

⦿集合演算を使う方法：

1° $x\in A\cup(B\cap C)$ とすると

$x\in A$ または $x\in(B\cap C)$

(ⅰ) $x\in A$ ならば

$x\in(A\cup B)$ かつ $x\in(A\cup C)$

$\therefore$ $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

つまり，左辺に含まれる元は必ず右辺にも含まれている。

(ⅱ) $x\in(B\cap C)$ ならば

$x\in B$ かつ $x\in C$

ゆえに

$x \in (A \cup B)$ かつ $x \in (A \cup C)$

$\therefore\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

つまり，このときも左辺に含まれる元は右辺にも含まれる。

このようにして，いずれにもせよ，左辺に含まれるものは右辺に含まれることがわかったのです。

2°　逆に，$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とすると

$x \in (A \cup B)$ かつ $x \in (A \cup C)$

$\therefore\ x \in A$ あるいは $x \in B$ かつ $x \in C$

(i)　$x \in A$ ならば $x \in A \cup (B \cap C)$

(ii)　$x \in B$ かつ $x \in C$ ならば

$x \in B \cap C$

$\therefore\ x \in A \cup (B \cap C)$

いずれにもせよ，右辺に含まれる元は左辺にも含まれる。

*　*　*

◆ 条件p，qに対して命題

pならばqである

に対し

（pならばqである）でない

を**否定命題**といいます。しかし，日本語として，こんな表現は一般にしませんから，日本語らしくするときにマチガイをおこすのです。

練習 1. 「2は偶数である」の否定を書け。

(解)「2は偶数でない」

練習 2. 「4は4より大である」の否定を書け。

(解)「4は4より大でない」

練習 3. pは $x^2+y^2<1$ で与えられている。ここに，x，y は実数である。このとき，否定命題 $\overline{p}$ は何を表すか。

(解) $x^2+y^2 \geqq 1$ を表す。

練習 4. 「△ABCは頂点Aの直角二等辺三角形である」の否定を述べよ。

(ヒント)「△ABC において ∠A=90° かつ AB=AC」と同じこと。この否定は「△ABC において ∠A≠90° または AB≠AC」ですから，「△ABC は ∠A が直角でないか，または AB=AC ではない三角形である」

練習 5. 「$ab=0$」の否定を述べよ。

(ヒント) $ab=0$ というのは「$a=0$ または $b=0$」ということ。この否定は「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」ということになります。

練習 6. 「すべての虚数に大小関係はない」の否定はどうか。

(ヒント)「ある虚数には大小関係はある」もちろん正しくない。

練習 7. 「ある整数は素数である」の否定はどうか。

(ヒント)「すべての整数は素数でない」もちろん正しくない。

*　*　*

◆ では，否定命題についての総合的な問題を考えてみましょう。

練習 8. 実数全体を定義域とする関数 $f_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の集合を M とする。「x のある値に対して，M のどの関数も0の値をとる」という命題をAとする。

(1)　Aの否定命題Bを書け。

(2)　M が3つの関数 $f_1(x)=ax-1$，$f_2(x)=x^2-2x+b$，$f_3(x)=x^3+b$ の集合であるとき，命題Bが成り立つための実数 a，b の条件を求めよ。　（名古屋市大）

(ヒント) (1)「x のすべての値に対して M の少なくとも1つの関数は0にならない」

(2)　$f_1(x)=ax-1$ が x のすべての値に対して0にならないというのですから　$a=0$

$f_2(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+(b-1)$

と書けるから，求める条件は　$b>1$

$f_3(x)=x^3+b$ は b をどのようにとっても必ず0になる x があります。

結局，求める条件は「$a=0$ あるいは $b>1$ が成り立つ」ことであります。

10/26

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑絶対値のついた証明問題

◆この証明問題には扱いにくいのが多い。というのも，一般に絶対値記号をとると，多くの場合に分かれて繁雑になるからだ。

◆ 証明問題とひと口にいうが，いろいろあります。ここでは絶対値のついた証明問題を中心に絶対値の扱い方を学ぶのが目的です。

ところで，絶対値の扱い方は大きく分けて２つあります。第１は a が実数のとき

$$|a|=\begin{cases} a\geqq 0 \text{ のとき } & a \\ a<0 \text{ のとき } & -a \end{cases}$$

ということ。もう１つは

$$|a|^2=a^2$$

だということです。無理にあげるともう１つ。$|a|$ のままで扱えることもあります。では，さっそく次の練習をやってみませんか。

3/28

■練習 1. x が実数のとき

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqq 2$$

を証明せよ。

(ヒント)　a と b が同じ符号であれば

$$|a+b|=|a|+|b|$$

なる関係があります。もちろん x と $\dfrac{1}{x}$ は同じ符号ですから

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}$$

ところが

$$|x|+\frac{1}{|x|}-2=\frac{|x|^2-2|x|+1}{|x|}$$

$$=\frac{(|x|-1)^2}{|x|}\geqq 0$$

$$\therefore\quad \left|x+\frac{1}{x}\right|\geqq 2 \qquad \text{Q. E. D.}$$

(注)　上のでもちろんいいが，相加・相乗平均の関係を使うともっとエレガントになる。すなわち，

$$\frac{1}{2}\left(|x|+\left|\frac{1}{x}\right|\right)\geqq\sqrt{|x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|}=1$$

$$\therefore\quad |x|+\left|\frac{1}{x}\right|\geqq 2 \qquad \text{Q. E. D.}$$

なお，符号の成り立つ場合も考えてみること。以下の練習も同様。

■練習 2. $a,\ b,\ c,\ d$ が０でない実数のとき，

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\geqq 4$$

を証明せよ。　（神戸大）

(解)　４つの正の数の相加平均は相乗平均より大か等しいから

$$\frac{1}{4}\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\right)$$

$$\geqq\sqrt[4]{\left|\frac{a}{b}\right|\cdot\left|\frac{b}{c}\right|\cdot\left|\frac{c}{d}\right|\cdot\left|\frac{d}{a}\right|}=1$$

$$\therefore\quad \left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\geqq 4$$

Q. E. D.

*　　*　　*

◆ 上の問題では｜｜がついているということは大きな制約ではありませんでした。しかし，次はちがいます。イヤならやめてよい。

■練習 3. $a,\ b$ を実数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\geqq\frac{|a+b|}{1+|a+b|}$$

（神戸大）

(ヒント)　$|a|$ と $|b|$ のほかに $|a+b|$ のあるのがめんどうのもとです。まず，小手調べに，$a>0,\ b>0$ の場合を考えてみますと

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-\frac{a+b}{1+a+b}$$

$$=\frac{P}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}$$

ここに　$P=a(1+b)(1+a+b)$
$\qquad +b(1+a)(1+a+b)$
$\qquad -(1+a)(1+b)(a+b)$

$$=ab(a+b+2)>0$$

なるほど，確かに成り立つ。

$a<0$, $b<0$ のときは $-a=\alpha$, $-b=\beta$ とおくと，上式は

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}\geqq\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$$

となってまったく同様です。最後に a と b が異符号のときもほぼ同様にできますから，証明されたことになります。しかし，次のようにやるともう少し簡単です。

$$|a|=\alpha,\ |b|=\beta,\ |a+b|=\gamma$$

とおくと，左辺から右辺を引いて

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{\gamma}{1+\gamma}$$
$$=\frac{P}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

ここに，

$$P=\alpha(1+\beta)(1+\gamma)+\beta(1+\gamma)(1+\alpha)$$
$$-\gamma(1+\alpha)(1+\beta)$$
$$=\alpha+\beta-\gamma+2\alpha\beta+\alpha\beta\gamma$$

ところが

$$\alpha+\beta-\gamma=|a|+|b|-|a+b|\geqq 0$$
$$\left(\begin{array}{l}\because\quad(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2\\ \quad=2(|ab|-ab)\geqq 0\end{array}\right)$$
$$\therefore\quad P\geqq 0$$

$$\therefore\quad\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}\geqq\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}\qquad\text{Q. E. D.}$$

ついでに，もう1つ別解を：——

それは分母をおきかえるのです。すなわち，

$$1+|a|=\alpha,\ 1+|b|=\beta,\ 1+|a+b|=\gamma$$

とおくのです。左辺から右辺を引いて

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\beta-1}{\beta}-\frac{\gamma-1}{\gamma}=\frac{P}{\alpha\beta\gamma}$$

ここに，

$$P=(\alpha-1)\beta\gamma+(\beta-1)\alpha\gamma-\alpha\beta(\gamma-1)$$
$$=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$$

ところが

$$\alpha\beta=(1+|a|)(1+|b|)$$
$$=1+|a|+|b|+|ab|$$
$$\geqq 1+|a+b|=\gamma$$

$$\therefore\quad P\geqq\alpha\beta\gamma+\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma$$
$$=\gamma(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)$$
$$=\gamma(\alpha-1)(\beta-1)=\gamma|a||b|\geqq 0$$

よって証明された。

*　　*　　*

◆ 次には少し形の変わったものをやることにしましょう。

練習 4. a, b を正の整数とするとき $\sqrt{5}$ は $\dfrac{b}{a}$ よりも $\dfrac{5a+b}{a+b}$ のほうに近いことを証明せよ。ただし $a<b$ とする。

ヒント　$\sqrt{5}$ が $\dfrac{b}{a}$ よりも $\dfrac{5a+b}{a+b}$ に近いとは

$$\sqrt{5}\sim\frac{b}{a}>\sqrt{5}\sim\frac{5a+b}{a+b}$$

ということ。いいかえれば

$$\left|\sqrt{5}-\frac{b}{a}\right|>\left|\sqrt{5}-\frac{5a-b}{a+b}\right|\qquad\cdots\cdots(*)$$

ということ，です。こうして，絶対値の問題になったわけです。(*) を証明するには

$$\left(\sqrt{5}-\frac{b}{a}\right)^2>\left(\sqrt{5}-\frac{5a+b}{a+b}\right)^2$$

を証明すればいい。さて，左辺から右辺を引いてみると：——

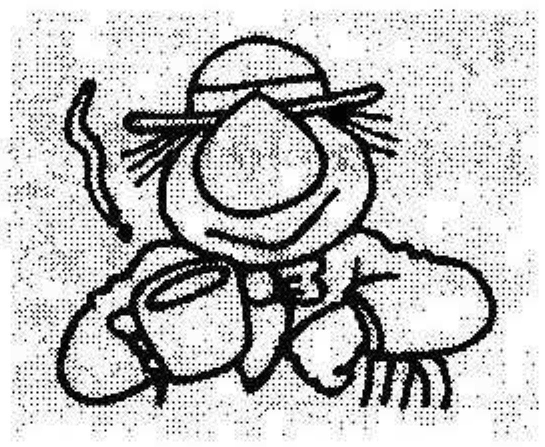
$$\left(\sqrt{5}-\frac{b}{a}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\frac{5a+b}{a+b}\right)^2$$
$$=\frac{(\sqrt{5}a-b)^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{5}-1)^2(\sqrt{5}a-b)^2}{(a+b)^2}$$
$$=(\sqrt{5}a-b)^2\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(a+b)^2}\right\}>0$$

かくして証明された。なお a, b が整数ですから $\sqrt{5}a-b=0$ にならないこと。また，$a<b$ より

$$\frac{1}{a^2}>\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(a+b)^2}$$

であることに注意。では，もう1つ。

練習 5. a を $\sqrt{3}$ に近い正の有理数で $b=\dfrac{a+3}{a+1}$ とする。$\sqrt{3}$ は a と b の間にあって，b は a よりもよい $\sqrt{3}$ の近似式であることを示せ。



整数解を求める問題の蛇足

◆２次の不定方程式は３つに分かれます。第１はグラフが双曲線になるとき，第２はだ円になるとき，そして第３はこれなんです。

◆ これは，重要というわけではありませんが，ときたま，出題されています。なるべく扱い方をオボエテおいてもらいたいものです。

さて，それは：――

練習 1. $y^2=3x+y$ の整数解を求めよ。

ヒント　yについては２次，xについては１次，さては，xについて解いたらいいだろう，と見当がつきます。こんなわけで

$$x=\frac{y^2-y}{3}$$

そこで y^2-y が３で割りきれなければならない。３を法としてyを剰余類に分けて

$y=3k$ のとき　$x=3k^2-k$

$y=3k+1$ のとき　$x=3k^2+k$

$y=3k+2$ のとき　$x=3k^2+3k+\dfrac{2}{3}$ (不適)

ゆえに，求める解は，kを任意の整数として

$$x=3k^2-k,\ y=3k\ ;$$
$$x=3k^2+k,\ y=3k+1$$

で表せるわけです。例えば $k=0$ とするとこれは $(0,\ 0)$ および $(0,\ 1)$ となりいずれも解であることはすぐわかるでしょう。

ではもうひとつ：――

練習 2. $x^2+4xy+4y^2+x+y=0$ の整数解を求めよ。

ヒント　変形すると

$$(x+2y)^2+x+y=0$$

そこで $x+2y=u$ とおくと与式は

$$u^2+x+y=0$$

となります。つまり

$$x+2y=u \qquad \cdots\cdots①$$
$$x+y=-u^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②をx，yについて解くと

$$x=-2u^2-u,\ y=u^2+u$$

したがって，uを任意の整数とするとき，上のx，yが解となるわけです。例えば $u=1,\ 2$ とすると

$$(-3,\ 2),\ (-10,\ 6)$$

といったぐあい。では，もうひとつ。

練習 3. $x^2+2xy+y^2+4x+2y-1=0$ の整数解を求めよ。

解　$(x+y)^2+4x+2y-1=0$

$x+y=u$ とおくと

$$\begin{cases}4x+2y=-u^2+1\\ x+y=u\end{cases}$$

より

$$x=\frac{-u^2-2u+1}{2}=\frac{-(u+1)^2+2}{2}$$
$$=-\frac{(u+1)^2}{2}+1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

これが整数を表すためにはuが奇数であることが必要かつ十分である。そこで

$$u=2k-1 \quad (k\text{は整数})$$

とおくと

$$x=-2k^2+1$$

したがって $y=2k^2+2k-2$

で与えられる。

答　$x=-2k^2+1$
　　$y=2k^2+2k-2$
　　(kは整数)

注　マトモにいえば(＊)のところでuを２を法とする剰余類に分けて $u=2k,\ 2k+1$ と２つ代入して調べるところですが，それほどのこともなかったわけです。なお，念のため $k=1,\ 2$ とすると $(x,\ y)=(-1,\ 2),\ (-7,\ 10)$ となります。