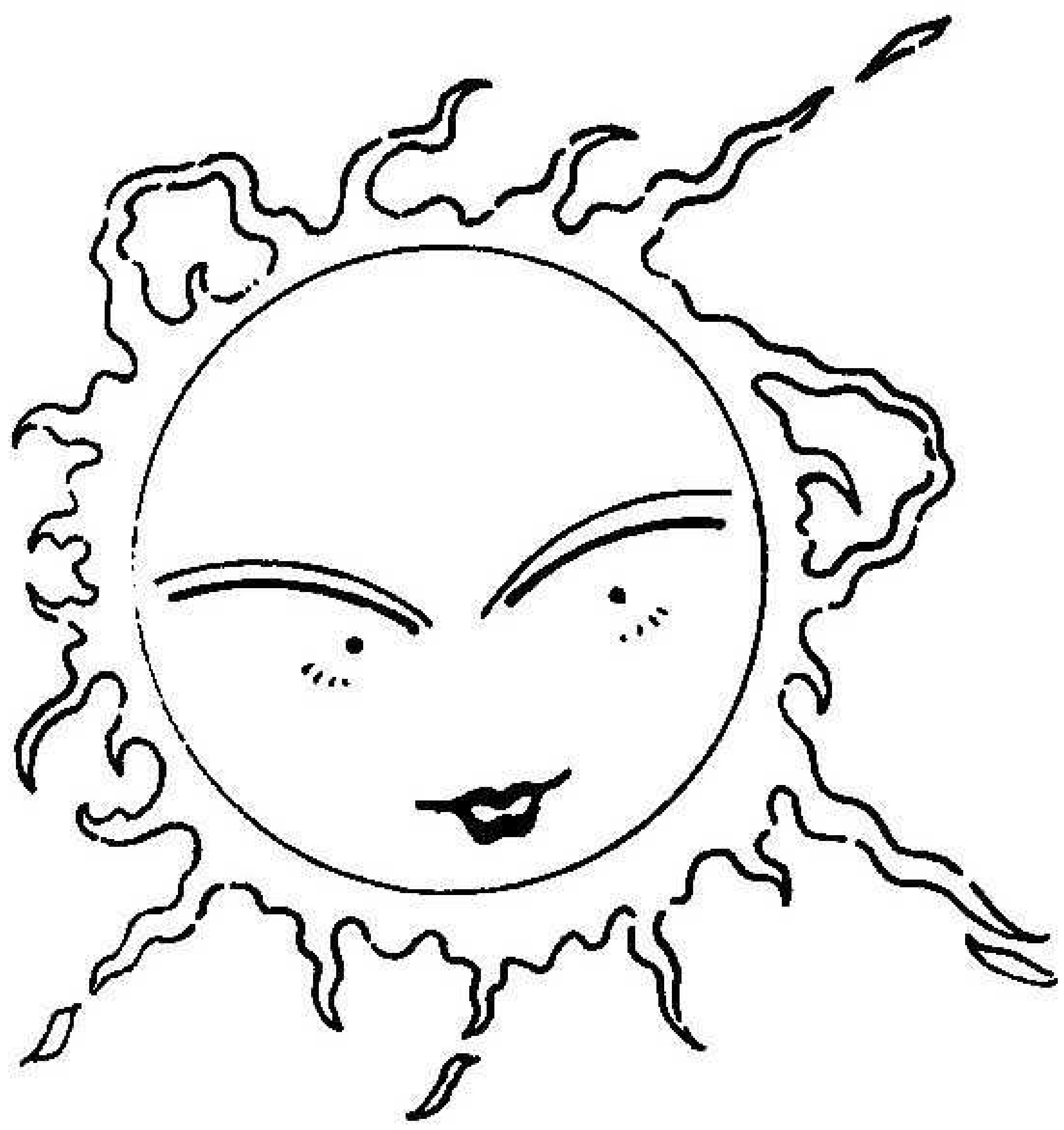
第1章

数と式



○整式の乗法の仕方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆乗法の中心は公式の活用です。そして，その根底は，ある文字について整理しながら進めること，にあるのです。

◆ まず整式の掛け算からはじめましょう。さっそくながら，これです。

1/15

■練習 1. $(4x+4+x^3+2x^2)(x^3+4-2x^2)$ を計算せよ。

ヒント　いずれも x について整理しますと

与式$=(x^3+2x^2+4x+4)(x^3-2x^2+4)$

そこで，

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & x^6 & & & & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
 & & & & x^3 & +2x^2 & +4x & +4\\
\times) & & & & x^3 & -2x^2 & & +4\\
\hline
 & x^6 & +2x^5 & +4x^4 & +4x^3 & & & \\
 & & -2x^5 & -4x^4 & -8x^3 & -8x^2 & & \\
 & & & & 4x^3 & +8x^2 & +16x & +16\\
\hline
 & x^6 & & & & & 16x & +16
\end{array}
$$

答　$x^6+16x+16$

注　上のようにやってもちろんいいのですが，係数だけ書いてやったほうが早くて正確です。ただし，**係数が 0 のときを注意** することが大切。

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
 & 1 & 2 & 4 & 4 & & & \\
\times) & 1 & -2 & 0 & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 4 & & & \\
 & & -2 & -4 & -8 & -8 & & \\
 & & & & 4 & 8 & 16 & 16\\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16
\end{array}
$$

ゆえに，求める積は $x^6+16x+16$ です。

1/16

■練習 2. $(x^2-ax+b)(ax^2+x-b)$ を展開せよ。　(都立大)

ヒント

$$
\begin{array}{lccccc}
 & 1 & -a & b & & \\
\times) & a & 1 & -b & & \\
\hline
 & a & -a^2 & ab & & \\
 & & 1 & -a & b & \\
 & & & -b & ab & -b^2\\
\hline
 & a & 1-a^2 & ab-a-b & b+ab & -b^2
\end{array}
$$

答　$ax^4+(1-a^2)x^3+(ab-a-b)x^2+(b+ab)x-b^2$

1/15

◆ 次は公式による乗法です。

■練習 3. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ を計算せよ。

解　与式$=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=a^4+a^2b^2+b^4$　……答

■練習 4. 次の式を展開せよ。

$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)\times(-a+b+c)$

ヒント　2 つずつ組み合わせて計算していけばよさそうだ。

与式$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\times\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

ここまでくれば{　}をハズスのがいいが，ムリに公式にこだわるなら

$=-\{c^2-(a+b)^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=-[c^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}c^2+(a+b)^2(a-b)^2]$

$=-c^4+(2a^2+2b^2)c^2-(a^2-b^2)^2$

$=-c^4+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4+2a^2b^2-b^4$

$=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

となる。展開せよ，という問題だから，ここでやめるべきだ。ところが，ふしぎと

$=-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

までやる人が多い。これは展開という要求に反する!!

1/10

■練習 5. $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$ を計算せよ。

解　与式$=(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)$

$=(1-a^4)(1+a^4)=1-a^8$　……答

◆ 実は計算に上達するコツは，このようないわゆる計算問題を数多くやるよりも，ふつうの証明問題や方程式解法といった問題の中でやるほうが効果的です。というのも，計算問題を計算問題としてやるときは，そこに重点をおくからマチガウことが少ないのですが，目的がそこにないときにはどうしても計算をおろそかにしてしまうからです。

1/16

■練習 6. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$ を用いて，次の式を簡単にせよ。

$$(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)\times(1-x^4+x^8)$$

ヒント 与えられた公式において $a=1$，$b=x$ とおきますと

$$(1+x+x^2)(1-x+x^2)=1+x^2+x^4$$

となります。また $a=1$，$b=x^2$ とおくと

$$(1+x^2+x^4)(1-x^2+x^4)=1+x^4+x^8$$

となりますし，さらに $a=1$，$b=x^4$ とおくと

$$(1+x^4+x^8)(1-x^4+x^8)=1+x^8+x^{16}$$

となりますから，結局

$$\begin{aligned}与式&=(1+x^2+x^4)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)\\&=(1+x^4+x^8)(1-x^4+x^8)\\&=1+x^8+x^{16}\end{aligned}$$

…… 答

■練習 7. 次の式を簡単にせよ。

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)\\&+(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\&+(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)\\&-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\end{aligned}$$

（京都工繊大）

ヒント 例えば，第1項をとりあげてみると

$$\begin{aligned}&(a+b+c)\{c-(a-b)\}\{c+(a-b)\}\\&=(a+b+c)\{c^2-(a-b)^2\}\\&=(a+b+c)(-a^2-b^2+c^2+2ab)\end{aligned}$$

第2，第3項も $(a+b+c)(\times\times\times)$ といった形で，割合ラクにいく。しかし，おきかえてやると，もう少しウマクいく。

$A=-a+b+c$，$B=a-b+c$，$C=a+b-c$

とおくと

$$A+B+C=a+b+c$$

ですから，

$$\begin{aligned}与式&=(A+B+C)AB+(A+B+C)BC\\&\quad+(A+B+C)CA-ABC\\&=(B+C)A^2+(B+C)^2A+BC(B+C)\\&=(B+C)\{A^2+(B+C)A+BC\}\\&=(B+C)(A+B)(A+C)\\&=(2a)(2c)(2b)\\&=8abc\end{aligned}$$

…… 答

1/16

■練習 8. 次の式を展開したときの x^3 の係数を求めよ。

$$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$$

（名大）

ヒント x^3 の係数を求めよ，というのですから

$$(1+2x+3x^2+4x^3)^4$$

について考えれば十分でしょう。

そこで，まず

$$(1+2x+3x^2+4x^3)^2$$

を計算してみます。

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
\times) & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 & & \\
 & & & 3 & 6 & 9 & 12 & \\
 & & & & 4 & 8 & 12 & 16 \\
\hline
 & 1 & 4 & 10 & 20 & 25 & 24 & 16
\end{array}$$

そこで4乗以上を捨てて

$$(1+4x+10x^2+20x^3)^2$$

をついて考えれば十分です。また同じく

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & 4 & 10 & 20 & & & \\
\times) & 1 & 4 & 10 & 20 & & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 10 & 20 & & & \\
 & & 4 & 16 & 40 & 80 & & \\
 & & & 10 & 40 & 100 & 200 & \\
 & & & & 20 & 80 & 200 & 400 \\
\hline
 & 1 & 8 & 36 & 120 & 260 & 400 & 400
\end{array}$$

といったぐあい，x^3 の係数は 120 です。

しかし，これから x^4 の係数を 260 としてはいけません。

○$(a+b+c)^2$の展開公式

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆$(a+b+c)^2$ の展開公式を知らない人はないでしょうが，いざとなるとなかなか使えないもの。アッ，こんな使い方もあったのか。

◆ 展開公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

の2つは別々にオボエテいることが多いのですが，もちろん本質的には同じものです。つまり，上の b の代わりに $-b$ を入れたのが下の公式なのです。同じように

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

をオボエテしまえば

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$$

は同じものなのです。また，わざわざ b に $-b$ を入れなくても，見て，すぐ書けるように練習しておかなければなりません。

同じく

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+2bc+2bd\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad+2cd\end{aligned}$$

はすぐ書けるようにしておくことが大切。

では，次をやってみませんか。これは，すぐ答がわかるようでなければいけません。

練習 1. $(a+2b)^2$ を展開せよ。

答 $a^2+4ab+4b^2$

練習 2. $(a+2b+3c)^2$ を展開せよ。

答 $a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca$

（注） 2項のときは a^2, ab, b^2 といった順にかきますが，3項以上になると上のように a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca の順序に書くのが習慣です。

練習 3. $(a-2b+3c-4d)^2$ を展開せよ。

答 $a^2+4b^2+9c^2+16d^2-4ab+6ac$
$\quad -8ad-12bc+16bd-24cd$

順序のことはもうおわかりでしょう。

◆ xについての多項式を2乗する場合も同じことです。

練習 4. $(1+x+x^2)^2$ を展開せよ。

（ヒント） 与式$=1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3$

このままほうっておいてはいけません。

$$=1+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

xについて **昇べきの順** にするか，**降べきの順** にするか，と気になる人もあるでしょうが，問題が $(1+x+x^2)^2$ となっているときは答も上のように昇べきの順にして，問題が$(x^2+x+1)^2$ となっていたら，答も降べきの順に配列して

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$

としておいたほうがいいでしょう。

そして，もし問題が $(1+x^2+x)^2$ とでもなっていたら，降べきでも昇べきでもいい，どちらかにすること。デタラメに並べてはいけません。

練習 5. $(1+2x+3x^2)^2$ を展開せよ。

（解） 与式$=1+4x^2+9x^4+4x+6x^2+12x^3$
$\qquad =1+4x+10x^2+12x^3+9x^4$

答 $1+4x+10x^2+12x^3+9x^4$

練習 6. $(a+b+c)^3$ を展開せよ。

（解） $(a+b+c)^3=(a+b+c)^2(a+b+c)$

$$\begin{aligned}&=(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c)\\&=a^3+a^2b+a^2c+ab^2+b^3+b^2c+ac^2+bc^2\\&\quad+c^3+2a^2b+2ab^2+2abc+2a^2c+2abc\\&\quad+2ac^2+2abc+2b^2c+2bc^2\\&=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2\\&\quad+3c^2a+3ca^2+6abc\end{aligned}$$

……答

この程度の計算をおそれているようではいけませんよ。

◆ 3つの項の2乗の展開公式

$$(a+b+c)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

は因数分解にも必要になりますが，このほうはこの公式を知らないために困ることはほとんどありません。というのも，**ある文字について整理** すれば必ずできるからです。

1/16

■練習 7. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ を因数分解せよ。

（解） 与式$=a^2+2(b+c)a+(b+c)^2$

$$=\{a+(b+c)\}^2=(a+b+c)^2$$

1/16

■練習 8. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ はつねに実数解をもつことを示せ。ただし，$a\neq b$ で，a，b，c はすべて実数である。

（ヒント） 判別式をDとしますと

$$D=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)$$
$$=(b-c)^2-4\{-a^2+(b+c)a-bc\}$$
$$=4a^2-4(b+c)a+(b+c)^2$$
$$=\{2a-(b+c)\}^2$$
$$=(2a-b-c)^2\geqq 0 \qquad \text{Q. E. D.}$$

こんなぐあいで，因数分解にはほとんど必要のないことがわかるでしょう。しかし，次のようなのもあります。

1/10　2

■練習 9. $\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ を簡単にせよ。（早大）

（ヒント） 二重根号といっても，これではちょっと手がつけようがありません。しかし，入試問題であるからには，簡単になるにちがいない。とすると，根号内は平方の形になるのではあるまいか。しかし，それなら$2\sqrt{2}$とか$2\sqrt{3}$とかの形になっていそうなもの。

このように考えて，

$$\text{根号内}=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{2}$$
$$\therefore\ \text{与式}=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{2}}$$
$$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

*　　*　　*

◆ $(a+b+c)^2$ の展開公式はいろいろな場合によく出てきます。例えば：――

1/10

■練習 10. 3次方程式 $x^3+2x^2+3x+1=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ。

（ヒント） 解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-2 & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 & \cdots\cdots② \\ \alpha\beta\gamma=-1 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

$①^2-②\times 2$ を作ると

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=(-2)^2-2\cdot 3=4-6=-2$$

1/12　2

■練習 11. $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$ のとき $a^4+b^4+c^4$ の値を求めよ。

（解） $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ と条件式から

$$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$$

次に，$(a^2+b^2+c^2)^2$

$$=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

より

$$a^4+b^4+c^4=1^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

また，

$$(ab+bc+ca)^2$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

より

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-0=\frac{1}{4}$$
$$\therefore\ a^4+b^4+c^4=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ともあれ，$(a+b+c+\cdots\cdots)^2$ の展開公式は数列や積分などにもよく出てくるものですから，使えるようにしておくことが望ましい。大切なことは**2コずつの積の2倍が出てくる**ということなのです。

l

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

① 完全平方式を定めること

◆ 2は完全平方数ではありませんが，$2x^2$ は完全平方式なんですよ。それでは $-4x^2$ はどうなんです。

◆ 次の式が完全平方式となるように，定数 a，b の値を定めよ，といった問題によく出会います。1, 4, 9, 16, …… などは **完全平方数** といいます。これらはいずれも整数の平方（2乗）に等しいからです。

これに対し，

$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$
$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$$

などは整式の2乗に等しいから **完全平方式** です。x に根号がついてはいけませんが，係数には無理数がついてもかまわない。だから，
$x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ や $2x^2+2\sqrt{2}x+1=(\sqrt{2}x+1)^2$ は完全平方式ですが，
$x+2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}+1)^2$ は完全平方式といわないのです。完全平方式は，実際上，現れてくるのは2次式と4次式と思ってさしつかえありません。

* * *

◆ では，まず2次式から：——

実係数の2次式 ax^2+bx+c が完全平方式となるための条件は，判別式を D として　$D=b^2-4ac=0$

です。なぜなら，これは $ax^2+bx+c=0$ が重複解をもつための条件ですから

$$ax^2+bx+c=\{\sqrt{a}(x-\alpha)\}^2$$

と書ける条件でもあるからです。

では，次の練習をやってみませんか。

■練習 1. $3x^2-2kx+12$ が完全平方式となるように定数 k の値を求めよ。

（解） 判別式を D とすれば

$$\frac{D}{4}=k^2-3\times12=0 \qquad \therefore \quad k^2=36$$

$$\therefore \quad k=\pm6$$ ……答

■練習 2. $kx^2-4x+(k+3)$ が完全平方式となるように定数 k の値を定めよ。

（ヒント） 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-k(k+3)=0$$

これより　$k^2+3k-4=0$

$$\therefore \quad (k+4)(k-1)=0$$

$$\therefore \quad k=1,\ -4$$ ……答

■練習 3. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)$ が完全平方式となるための条件を求めよ。

（ヒント） $a\neq b$ はもちろん必要。その上で判別式を D とすると

$$D=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$$

まさか，このまま放っておいて，いいわけはあるまい。さては，因数分解できるのかな，できるとすれば，**ある文字について整理** すればうまくいくにちがいない。b，c に比べて，a は仲間ハズレ，してみると，a について整理してみたらどうだろう。そんなわけで，

$$4a^2-4(b+c)a+(b+c)^2=0$$

$$\therefore \quad \{2a-(b+c)\}^2=0$$

$$\therefore \quad 2a=b+c$$

答　$a\neq b$ かつ $2a=b+c$

こんなわけで2次式についてはべつにめんどうはないのです。次は，4次式です。

* * *

◆ 4次式の場合は解と係数の関係を使ってもいいのですが，知らない人が多い。いや，知らなくてかまいませんよ。その代わり，**未定係数法を使う** といい。では，ともかく，具体的な問題をやってみましょう。

■練習 4. $4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$ が，x の 2 次式の完全平方式となるように，a, b の値を定めよ。 （関西大）

（ヒント） $4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$

$$=(2x^2+px+q)^2 \quad \cdots\cdots(*)$$

とおくことができます。いいですか，

$$(2x^2+px+4)^2$$

とおいてはいけません。なぜか？ -4 の 2 乗も $+16$ だからです。こういうと，注意深いキミはすぐ反論するかもしれない。そんなら，$2x^2$ とおいてはいけないじゃないか，$-2x^2$ だって 2 乗すれば $4x^4$ になるじゃないか。それはそうなんですが，……

$$(-2x^2+px+q)^2=(2x^2-px-q)^2$$

なんですから，x^2 の係数は $+2$ にしておいてかまわないのです。このことがわかったら次へいきましょう。

(*) の両辺を比較して

x^3 :　$-a=4p$　……①

x^2 :　$b=p^2+4q$　……②

x :　$-40=2pq$　……③

定数 :　$16=q^2$　……④

④より　$q=\pm 4$

$q=4$ のとき，③より　$p=-5$

したがって①より　$a=20$，②より　$b=41$

$q=-4$ のとき，③より　$p=5$

したがって①より　$a=-20$，②より　$b=9$

つまり，

$a=20$, $b=41$; $a=-20$, $b=9$ …… 答

1/17

■練習 5. 実数を係数とする 4 次式

$$x^4+3x^3+ax^2+6x+b$$

が完全平方式となるように，定数 a, b の値を定めよ。 （三重大）

（解） $x^4+3x^3+ax^2+6x+b=(x^2+mx+n)^2$ とおいて，両辺の係数を比較すると

$3=2m$　……①

$a=m^2+2n$　……②

$6=2mn$　……③

$b=n^2$　……④

①より　$m=\dfrac{3}{2}$

ゆえに③より　$n=2$

$$\therefore \begin{cases} a=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2\cdot 2=\dfrac{9}{4}+4=\dfrac{25}{4} \\ b=4 \end{cases}$$

答　$a=\dfrac{25}{4}$, $b=4$

*　*　*

◆ では，類似の問題として，4 次方程式を解く **フェラリーの方法** をあげておきましょう。このことばを覚える必要はありませんよ。

■練習 6. x^4+x^2-4x-3　1/17

$$=(x^2+ax+b)^2-(lx+m)^2$$

が成り立つように定数 a, b, l, m の 1 組を定め，これを用いて $x^4+x^2-4x-3=0$ を解け。

（解） 与えられた恒等式の両辺の対応する項の係数と比べて

$0=2a$, $1=a^2+2b-l^2$,

$-4=2ab-2lm$, $-3=b^2-m^2$

第 1 式より　$a=0$

$\therefore$　$l^2=2b-1$, $lm=2$, $m^2=b^2+3$

この 3 式から l, m を消去して

$$2^2=(2b-1)(b^2+3)$$

$\therefore$　$2b^3-b^2+6b-7=0$

これから

$b=1$ （1 つ求めればよいから）

$\therefore$　$l^2=1$, $m^2=4$

$\therefore$　$l=\pm 1$, $m=\pm 2$

このうちで $lm=2$ を満足するものとして

$l=1$, $m=2$

を採用すると

$$x^4+x^2-4x-3=(x^2+1)^2-(x+2)^2$$

$$\therefore \{(x^2+1)+(x+2)\} \times\{(x^2+1)-(x+2)\}=0$$

$\therefore$　$x^2+x+3=0$, $x^2-x-1=0$

$\therefore$　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$, $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　… 答

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○整式の除法の仕方

◆除法とは割ることである，とばかり，バカにしている人が多い。しかし，実際に割る段になるとうまくいかないものデス。

◆ ≪$a^3+b^3+c^3-3abc$ を $a+b+c$ で割れ≫という問題に対して

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

であるから商は $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$，などとやる人がある。これは非常識です。割れ，というのだから割るべきもの。

ところで，割る場合は，**ある文字について整理してから割る** のが常識。では，とりあえず，次の練習をやってみませんか。

練習 1. $2x^5-4x^4+3x^2-27$ を x^2-2x+3 で割れ。

(解)

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 \qquad -6x-9 \\ \hline
x^2-2x+3 & 2x^5-4x^4 \qquad +3x^2 \qquad -27 \\
 & 2x^5-4x^4+6x^3 \\ \hline
 & -6x^3+3x^2 \\
 & -6x^3+12x^2-18x \\ \hline
 & -9x^2+18x-27 \\
 & -9x^2+18x-27 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 $2x^3-6x-9$

(注) 割り算は上のようにやるよりもxを書かないで，係数だけを書いてやるほうが早くて正確なものです。次のはそれでやってみましょう。

練習 2. x^4+x^2+1 を x^2+x+1 で割れ。

(解) 下のようにやる。

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & 1 & & \\ \hline
1\ 1\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline
 & & -1 & 0 & 0 & \\
 & & -1 & -1 & -1 & \\ \hline
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

答 x^2-x+1

* * *

◆ さて，次に大切なことは文字が多いときにはある文字に着目して，それについて整理することです。では，さっそくながら：——

練習 3. $a^3+b^3+c^3-3abc$ を $a+b+c$ で割れ。 (信州大)

(解) $\quad a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=a^3-(3bc)a+(b^3+c^3)$$

であるから

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & -(b+c) & (b^2-bc+c^2) & \\ \hline
1\ (b+c) & 1 & 0 & -3bc & (b^3+c^3) \\
 & 1 & (b+c) & & \\ \hline
 & & -(b+c) & -3bc & \\
 & & -(b+c) & -(b^2+2bc+c^2) & \\ \hline
 & & & (b^2-bc+c^2) & (b^3+c^3) \\
 & & & (b^2-bc+c^2) & (b^3+c^3) \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

ゆえに求める商は

$$\begin{aligned}&1\cdot a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\end{aligned}$$

答 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

練習 4. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ を $a^2+b^2-c^2+2ab$ で割れ。

(解) aについて整理して割ると，

$$\begin{array}{r|lllll}
 & 1-2b & (b^2-c^2) & & & \\ \hline
1\ \ 2b\ \ (b^2-c^2) & 1 & 0 & (-2b^2-2c^2) & 0 & (b^4-2b^2c^2+c^4) \\
 & 1 & 2b & (b^2-c^2) & & \\ \hline
 & & -2b & (-3b^2-c^2) & 0 & \\
 & & -2b & -4b^2 & (-2b^3+2bc^2) & \\ \hline
 & & & (b^2-c^2) & (2b^3-2bc^2) & (b^4-2b^2c^2+c^4) \\
 & & & (b^2-c^2) & (2b^3-2bc^2) & (b^4-2b^2c^2+c^4) \\ \hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

よって $\quad 1\cdot a^2-2ba+(b^2-c^2)$
$$=a^2+b^2-c^2-2ab \cdots\cdots\cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ さて，ここでは割り算の応用例をあげておくことにしよう。いや，それは，キミがやるのですよ。

1/18

練習 5. $2x^4+3x^3-10x^2+24x+m$ が x^2+2x-n で割りきれるように m，n の値を定めよ。（弘前大）

ヒント 実際に割り算を行ってみると，次のようになります。

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 2 & -1 & 2n-8 & & \\
\hline
1\ 2\ -n & 2 & 3 & -10 & 24 & m \\
 & 2 & 4 & -2n & & \\
\hline
 & & -1 & (2n-10) & 24 & \\
 & & -1 & -2 & n & \\
\hline
 & & & (2n-8) & (-n+24) & m \\
 & & & (2n-8) & (4n-16) & (-2n^2+8n) \\
\hline
 & & & & (-5n+40) & (2n^2-8n+m)
\end{array}
$$

ゆえに割りきれるための条件は

$$-5n+40=0$$

かつ　$2n^2-8n+m=0$

これを解いて

$$m=-64,\ n=8$$

答　$m=-64$，$n=8$

1/10

練習 6. 2次式 $f(x)=x^2+px+q$，$g(x)=x^2+qx+p$ がある。係数 p，q は実数値を表すものとして，$f(x^2)$ が $g(x)$ で割りきれるためには，p，q はどのような値でなければならないか。（京都工繊大）

解　$f(x)=x^2+px+q$

であるから

$$f(x^2)=x^4+px^2+q$$

である。これを $g(x)=x^2+qx+p$ で割ると

商は　x^2-qx+q^2

剰余は　$(pq-q^3)x+(q-pq^2)$

であることがわかる。

したがって，$f(x^2)$ が $g(x)$ で割りきれるための必要十分条件は

$$pq-q^3=0 \qquad \cdots\cdots①$$

かつ

$$q-pq^2=0 \qquad \cdots\cdots②$$

である。

ゆえに $q=0$ ならば p の値に関係なく割りきれる。

$q \neq 0$ のときには ①，② より

$$p=q^2,\ pq=1$$

$$\therefore\ q^3=1$$

ところが q は実数であるから $q=1$，したがって $p=1$ である。

答　$\begin{cases} q=0,\ p \text{ は任意} \\ \text{または}\ \ p=q=1 \end{cases}$

注 解答としては上のようでよいが，余白があれば，割算の手順も書いておくほうがよいでしょう。次に計算を書いておきます。

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 1 & -q & q^2 & & \\
\hline
1\ q\ p & 1 & 0 & p & 0 & q \\
 & 1 & q & p & & \\
\hline
 & & -q & 0 & 0 & \\
 & & -q & -q^2 & -pq & \\
\hline
 & & & q^2 & pq & q \\
 & & & q^2 & q^3 & pq^2 \\
\hline
 & & & & pq-q^3 & q-pq^2
\end{array}
$$

＊　＊　＊

◆ このように，割りきれるとか，余りがどうとかいう問題の大部分は実際に割ればいいのですが，割られる式が10次式とか n 次式とかになると，一般に割ることができなくなります。このときには恒等式の性質を使うとか，因数定理や剰余定理を使うのです。因数定理については（☞ p. 36），剰余定理については（☞ p. 26）を参照してください。

また，1次式で割るときには組立除法が便利なことが多いもの。これについては（☞ p. 22）を参照。高次元であっても $(x-\alpha)^3$ で割りきれる，といったものは $x-\alpha$ で3回連続して割るほうがラクなもの。

なお，恒等式の性質を使う際には数Iの範囲ではありませんが，微分法が役に立つことが多いものです。一般に割り算だからといってバカにしてはいけません。

○組立除法の方法と応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆クミタテジョホウと読む。クミタチではありません。これくらい，よく使われる道具も少ないですね。

◆ x の多項式を x の1次式で割る方法に **組立除法** というのがあります。例えば，

ax^3+bx^2+cx+d を $x-\alpha$ で割って得る商を $Q(x)=px^2+qx+r$，余りを R としますと

$$ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=(px^2+qx+r)(x-\alpha)+R$$

右辺を展開しますと

$$=px^3+(q-p\alpha)x^2+(r-q\alpha)x+(R-r\alpha)$$

$$\therefore\ p=a,\ q=b+p\alpha$$
$$r=c+q\alpha,\ R=d+r\alpha$$

そこで，次のように計算手順をきめればいいことになります。まず

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

と書きます。次に，$p\alpha=a\alpha$ に注意して

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ & & a\alpha & & \\ \hline & a & a\alpha+b & & \end{array}$$

と書く。つまり，a を下におろす。それに α を掛けたものを b の下に書き，その2つを加えた $a\alpha+b$ をその下に書く。さらに続いて

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ & & a\alpha & a\alpha^2+b\alpha & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha \\ \hline & a & a\alpha+b & a\alpha^2+b\alpha+c & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d \end{array}$$

とやるのです。このとき **商** は

$$ax^2+(a\alpha+b)x+(a\alpha^2+b\alpha+c)$$

で，**余り** は

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$$

なのです。

では，具体例にいきましょう。

練習 1. x^4+x+1 を $x-1$ で割って得られる商と剰余を求めよ。

ヒント x^3，x^2 の項がありませんね。そのときには0を書くのを忘れないようご用心。

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

答 商：x^3+x^2+x+2，剰余：3

練習 2. x^3-3x+2 を因数の積に分解せよ。

ヒント x に1を入れてみると0になりますから $x-1$ で割ってみますと，次の通り。

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$\therefore$ 与式 $=(x-1)(x^2+x-2)$

ここでやめてはいけません。まだデキル。

$$=(x-1)(x-1)(x+2)$$
$$=(x-1)^2(x+2)\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

注 気がつけば次のようにやってもよい。

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

ゆえに　与式 $=(x-1)^2(x+2)$

練習 3. x^4+ax^2+bx+1 が $(x-1)^2$ で割りきれるように定数 a，b の値を定めよ。

解 組立除法を使って2回割ってみると

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & a & b & 1 \\ & & 1 & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & a+b+2=0 \\ & & 1 & 2 & a+3 & \\ \hline & 1 & 2 & a+3 & 2a+b+4=0 & \end{array}$$

そこで，連立方程式

$$\begin{cases} a+b+2=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases}$$

を解いて

$$a=-2,\quad b=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次に，組立除法は $ax+b$ で割る場合にも応用できます。というのは，多項式 $f(x)$ を $ax+b$ で割った商を $Q(x)$，余りを R としますと

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax+b)Q(x)+R \\ &= \left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R \end{aligned}$$

ですから，$x+\dfrac{b}{a}$ で割ってから，得られた商を a で割ればいいのです。**剰余はそのままでよい!!** では，具体的な練習を：——

1/い

■練習 4. $2x^3+3x^2+3x+4$ を $2x+1$ で割れ。

(解) 組立除法によって割ると

$-\frac{1}{2}$	2	3	3	4
		-1	-1	-1
2)	2	2	2	3
	1	1	1	

$\boxed{答}$ 商：x^2+x+1，剰余：3

*　*　*

◆ 組立除法は割りきれるとか，割りきれないとかいう問題に有用なのはもちろんですが，直接関係のなさそうな問題にもずいぶん役に立つものなのです。例えば，これです。

1/い

■練習 5. x^3+2x^2+3x+4

$$=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満足する a，b，c，d の値を求めよ。

(ヒント) これはいろいろなやり方があります。ここでは組立除法を使ってみましょう。

(*) の両辺を $x-2$ で割りますと，明らかに右辺の余りは d ですから，左辺を $x-2$ で割った余りが d に等しいのでしょう。ゆえに，

2	1	2	3	4
		2	8	22
	1	4	11	$26=d$

そこで，こうなります。

$$x^2+4x+11=a(x-2)^2+b(x-2)+c$$

さらに，両辺を $x-2$ で割ると，……

上の手順を次のように書いてやることができます。

2	1	2	3	4
		2	8	22
2	1	4	11	$26=d$
		2	12	
2	1	6	$23=c$	
		2		
	$a=1$	$8=b$		

$\boxed{答}$ $a=1$，$b=8$，$c=23$，$d=26$

■練習 6. $x^3+2x^2+4x+1=0$ の解から 1 を引いたものを解とする 3 次方程式を作れ。

(ヒント) $x-1=y$ とおくと，y に関する方程式を作ればいいわけ。

そして，そのためには $x=y+1$ を代入すればいいのです。つまり

$$(y+1)^3+2(y+1)^2+4(y+1)+1=0$$

$$\therefore\quad y^3+5y^2+11y+8=0$$

かくて求める方程式は

$$x^3+5x^2+11x+8=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

他方，こんなふうにも考えられます。

$$\begin{aligned} & x^3+2x^2+4x+1 \\ &= a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d \end{aligned}$$

と変形することでもあります。だから

1	1	2	4	1
		1	3	7
1	1	3	7	$8=d$
		1	4	
1	1	4	$11=c$	
		1		
	$a=1$	$5=b$		

として

$$x^3+5x^2+11x+8=0$$

が得られるのです。この部分は必ずしも理解する必要はありませんが，組立除法がいかに有用かはよくわかるでしょう。

ρ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑ (整式の) 整除問題の扱い方

◆整式の整除問題の扱い方は大きく分けて2つあります。1つは割ること，1つは掛けること。そして，それは，……

◆ ある式が他のある式で割りきれるための条件を求める問題は多いのですが，たいていの人は未定係数法などを使ってめんどうにしてしまう。多くの場合，割ってしまうのが最上なんです。では，さっそくながら：——

1/15

■練習 1. x^4+x^2+a が x^2+x+1 で割りきれるように定数 a の値を求めよ。

(ヒント) x^4+x^2+a を x^2+x+1 で割ってみましょう。その計算は下の通り，です。

$$
\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & 1 & -1 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 1) & 1 & 0 & 1 & 0 & a \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & & & -1 & 0 & 0 & \\
 & & & & -1 & -1 & -1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & a \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & & & & a-1
\end{array}
$$

ゆえに，x^4+x^2+a を x^2+x+1 で割った余りは $a-1$ で，これが0に等しいことから

$$a-1=0 \qquad \therefore \quad a=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 2. x^3+8x^2+5x-m が x^2+3x-n で割りきれないように，定数 m，n の値を定めよ。

(ヒント) 割ってみようではありませんか。

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 1 & 5 & & \\
\hline
1 & 3 & -n) & 1 & 8 & 5 & -m \\
 & & & 1 & 3 & -n & \\
\hline
 & & & & 5 & n+5 & -m \\
 & & & & 5 & 15 & -5n \\
\hline
 & & & & & n-10 & 5n-m
\end{array}
$$

つまり，余りは $(n-10)x+(5n-m)$ です。割りきれないためには

$$n-10 \neq 0 \text{ または } 5n-m \neq 0$$

ゆえに，…… $\boxed{答}$ $n \neq 10$ または $m \neq 5n$

■練習 3. x の整式 ax^3+bx^2-4x-1 が x^2-2x-1 で割りきれるように a，b の値を定めよ。　(岡山大)

(解) 実際に割り算を行うと下のようになる。すなわち，

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & a & 2a+b & & \\
\hline
1 & -2 & -1) & a & b & -4 & -1 \\
 & & & a & -2a & -a & \\
\hline
 & & & & 2a+b & a-4 & -1 \\
 & & & & 2a+b & -4a-2b & -2a-b \\
\hline
 & & & & & 5a+2b-4 & 2a+b-1
\end{array}
$$

ゆえに余りは

$$(5a+2b-4)x+(2a+b-1)$$

であるから，割りきれるための条件は

$$5a+2b-4=0 \quad かつ \quad 2a+b-1=0$$

これを解いて　$a=2$，$b=-3$　…… $\boxed{答}$

(注) 割り算をするとき，x を省略してやるほうが早くて正確だから，この方式になれるほうがよい。**小さくキレイにそろえて書く** ことが大切!!

*　*　*

◆ 次のも同じですが，計算がややめんどうというわけ。いや，計算がややめんどうというにすぎない，と，いいなおそう。

■練習 4. x^3+Ax^2+Bx+2 が x^2+ax+b でも，x^2+bx+a でも割りきれるとき，A，B，a，b の値を求めよ。ただし，$a \neq b$ とする。　(東大)

(ヒント) x^3+Ax^2+Bx+2 を x^2+ax+b で割ってみますと，余りは

$$(-aA+B+a^2-b)x+(-bA+ab+2)$$

したがって，割りきれるための条件は次の①，②のようになります。なお x^2+bx+a で割りきれるための条件は，割ることも要りません。a と b を交換するだけでいいのですから。

そんなわけで,

$$-aA+B+a^2-b=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$-bA \quad +ab+2=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$-bA+B+b^2-a=0 \quad \cdots\cdots③$$
$$-aA \quad +ab+2=0 \quad \cdots\cdots④$$

③−① を作れば

$$(a-b)A-(a^2-b^2)-(a-b)=0$$

$a \neq b$ ですから

$$A-(a+b)-1=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

②−④ を作れば

$$(a-b)A=0$$

$a \neq b$ ですから　$A=0$　……⑥

ゆえに, ②より

$$ab=-2 \quad \cdots\cdots⑦$$

また, ⑤より

$$a+b=-1 \quad \cdots\cdots⑧$$

⑦, ⑧を解いて

$$a=1,\ b=-2\ ;\ a=-2,\ b=1$$

したがって, ①から

$$B=-3$$

答 $\begin{cases} A=0,\ B=-3, \\ (a,\ b)=(1,\ -2),\ (-2,\ 1) \end{cases}$

1/25

練習 5. x^2+ax+b が x^4+ax^2+b の因数となるとき a, b の値をすべて求めよ。ただし, $b \neq 0$ とする。　(鳥取大)

ヒント　x^4+ax^2+b を x^2+ax+b で割ると, 余りは

$$a(2b-a-a^2)x+b(b+1-a-a^2)$$

となります。したがって, x^2+ax+b が因数となるための条件は, 割りきれるための条件と同じで,

$$a(2b-a-a^2)=0 \quad \cdots\cdots①$$

かつ

$$b(b+1-a-a^2)=0 \quad \cdots\cdots②$$

を解けばいい。それには, $b \neq 0$ だから, 次の2つの場合に分ければいいでしょう。

(i)　$a=0$ かつ $b+1-a-a^2=0$ のとき

(ii)　$2b-a-a^2=0$ かつ $b+1-a-a^2=0$ のとき

答　$(a,\ b)=(0,\ -1),\ (1,\ 1),\ (-2,\ 1)$

*　*　*

◆ 以上でいわゆる整除問題のもっとも大切なことに終わりです。1次式で割りきれる問題は因数定理の応用としてやる(☞ p. 36)のがふつうです。

また, 割られる整式の次数がわからないか, わかっても n 次式といった形で与えられているか, あるいは, かなりの高次式の場合は割るわけにはいかない。このときは **恒等式の性質を使う** (☞ p. 182) のがコツ。ここでは1つだけあげておくとしましょう。

1/26

練習 6. x に関する整式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割れば $5x+7$ 余り, x^2+1 で割れば $2x+3$ 余る。このような整式の中で最低次のものを求めよ。　(大阪府大)

ヒント　これは難問だ。しかし, 定石通り, $f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを Ax^3+Bx^2+Cx+D とおくと

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2+1)Q(x)$$
$$+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

が成り立つ。この右辺を x^2+x+1 で割るとその余りは Ax^3+Bx^2+Cx+D を割った余りに等しく $(-B+C)x+(A-B+D)$ となりますから,

$$-B+C=5,\ A-B+D=7$$

同様にして x^2+1 で割った余りから

$$-A+C=2,\ -B+D=3$$

この連立方程式を解いて

$$A=4,\ B=1,\ C=6,\ D=4$$

が得られます。

つまり, 与えられた条件を満足する $f(x)$ の一般式は

$$(x^2+x+1)(x^2+1)Q(x)$$
$$+4x^3+x^2+6x+4$$

ですから, 最低次のものは $Q(x)\equiv 0$ のときでしょう。(上の $\equiv 0$ はつねにあるいは恒等的に0であることを示す記号)

答　$4x^3+x^2+6x+4$

○剰余定理とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆剰余定理は，またの名は，余りの定理。余りが0のときは因数定理と本質的に同じであります。さて，それは，……

◆ ある式をある式で割った余りを求めたい，ということはよく必要になります。もし，割らないで，余りを求められたら，どんなにいいだろう，とは，割るたびに無精者の考えることなのです。もちろん，それはできません。しかし，特別な場合はできるのです。その特別な場合のもっとも大切なのが，この剰余定理なのです。では，それは何か。

剰余定理： 整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割って得る余りは $f(\alpha)$ に等しい。

この定理の証明は簡単です。

整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割って得る商を $Q(x)$，余りを R としますと，恒等式

$$\boldsymbol{f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R}$$

が成り立ちます。これは恒等式ですから，x に何を入れても成り立ちます。そこで $x=\alpha$ を代入してみますと

$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R$$
$$\therefore \quad f(\alpha)=R$$

つまり余り R は

$$\boldsymbol{R=f(\alpha)}$$

で与えられる。 Q. E. D.

さて，次は，剰余定理の使い方です。

* * *

◆ 剰余定理の使い方の第1号は，いわずと知れたこと，剰余を求めること，です。

■練習 1. $f(x)=x^4+x+3$ を $x-1$ で割った余りを求めよ。

(解) 剰余定理により，求める余りは

$$f(1)=1^4+1+1+3=5$$

答 5

■練習 2. $f(x)=x^3+3x^2+a$ を $x-1$ で割った余りが5に等しいとき a の値を求めよ。 (横浜国大)

(解) $f(x)$ を $x-1$ で割った余りは剰余定理により

$$f(1)=1+3+a=a+4$$
$$\therefore \quad a+4=5 \qquad \therefore \quad a=1 \ \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 3. $f(x)=2x^3+ax^2-x+6$ が $x+1$ で割りきれるように定数 a の値を求めよ。

(ヒント) 割りきれるというのは余りが0ということでもあるから，$x+1=x-(-1)$ に目をつけて $f(-1)=0$ となるように a を求めればいいでしょう。さて

$$f(-1)=2(-1)^3+a(-1)^2-(-1)+6$$
$$=-2+a+1+6=a+5$$
$$\therefore \quad a+5=0 \qquad \therefore \quad a=-5 \ \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 4. 多項式 $f(x)$ を $ax-b$ $(a \neq 0)$ で割って得る余りを求めよ。

(解) $f(x)$ を $ax-b$ で割って得る商を $Q(x)$，余りを R とすると

$$f(x)=(ax-b)Qx+R$$

この右辺を変形すると

$$f(x)=a\left(x-\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=\left(x-\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R$$

つまり $f(x)$ を $ax-b$ で割った余りと，$x-\dfrac{b}{a}$ で割った余りは等しい。

ゆえに，求める余り R は

$$R=f\left(\frac{b}{a}\right)$$

で与えられる。 答 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$

* * *

◆ では剰余定理の使い方の第2号は：——

■練習5. xの整式 x^3+ax^2+bx+1 を $x-1$ で割った余りは7で，$x+1$ で割った余りは -1 に等しい。a，b の値を求めよ。

(解) $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ とおくと，題意より

$$f(1)=1+a+b+1=7$$
$$f(-1)=-1+a-b+1=-1$$
$$\therefore\quad a+b=5,\ a-b=-1$$
$$\therefore\quad a=2,\ b=3 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

1/25

■練習6. xの整式 $3x^3+mx^2+nx-2$ は $3x-2$ で割ると割りきれ，$x+1$ で割ると -20 余るという。m，n の値を求めよ。

(静岡大)

(ヒント) $f(x)=3x^3+mx^2+nx-2$ とすると

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}+\frac{4}{9}m+\frac{2}{3}n-2=0$$
$$\therefore\quad 2m+3n=5 \quad\cdots\cdots①$$
$$f(-1)=-3+m-n-2=-20$$
$$\therefore\quad m-n=-15 \quad\cdots\cdots②$$

①，②を連立させて解くと

$$m=-8,\ n=7 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

1/25

■練習7. $4x^3+ax^2+bx+c$ が x^2-1 で割りきれ，$x+2$ で割ると余りが3になるような a，b，c の値を求めよ。(金沢大)

(ヒント) $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，$f(x)$ は x^2-1 で割りきれるから $x-1$，$x+1$ でも割りきれる。

$$\therefore\quad f(1)=4+a+b+c=0 \quad\cdots\cdots①$$
$$f(-1)=-4+a-b+c=0 \quad\cdots\cdots②$$

また，$f(x)$ を $x+2$ で割った余りは3に等しいから

$$f(-2)=-32+4a-2b+c=3 \quad\cdots\cdots③$$

①，②，③を連立させて解けばいいでしょう。さて，その結果は

$$a=9,\ b=-4,\ c=-9 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ ところで，剰余定理によると多項式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割って得る余りが $f(\alpha)$ なのですから，$f(\alpha)=0$ のときには $x-\alpha$ で割りきれるハズ。つまり

因数定理：　$f(\alpha)=0$ であれば，整式 $f(x)$ は $x-\alpha$ で割りきれる。

が得られます。

■練習8. x^3+nx^2+mx+m が x^2-1 で割りきれるとき，定数 m，n を求めよ。

(都立大)

(ヒント) $f(x)=x^3+nx^2+mx+m$ とおくと，$x^2-1=(x+1)(x-1)$ であるから，

$$f(1)=1+n+m+m=0$$
$$f(-1)=-1+n-m+m=0$$
$$\therefore\quad m=-1,\ n=1 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

1/25

■練習9. x^3+mx^2+nx+4 を x^2+3x+2 で割りきれるように m，n の値を定めよ。

(同志社大)

(ヒント) $f(x)=x^3+mx^2+nx+4$ とおくと，$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ であるから

$$f(-1)=-1+m-n+4=0$$
$$f(-2)=-8+4m-2n+4=0$$

これを解いて

$$m=5,\ n=8$$

$\boxed{答}$ $m=5,\ n=8$

(注) x^2+3x+2 や $2x^2+x-1$ で割りきれるための条件は因数分解できるから上のようにしてうまくいきますが x^2+x+1 では $(x-\omega)(x-\omega^2)$ (ωは1の虚数立方根)を使ってできます。虚数立方根については(☞ p. 122)参照。x^2-2x-1 では無理にやると $\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}$ となりますが，さればといって $f(1+\sqrt{2})$ や $f(1-\sqrt{2})$ を計算するのはやっかいです。それよりは実際に $f(x)$ を割ってしまうほうがいいものです。剰余定理は便利ですが，乱用は禁物です。

◎2乗の和を作る方法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆実数条件を使うには判別式が活用される。しかし，2乗の和のほうがかえって便利なことが多いのです。

◆ まず，平方を完成することからはじめましょう。

練習1. $3x^2+4x+5$ の平方を完成せよ。

ヒント　とかく計算ちがいをおかしやすいものです。次の手順をキチンと守ればいいのですが。まず，

$$3x^2+4x+5$$
$$=3\left(x^2+\frac{4}{3}x\qquad\quad\right)+5$$

というように x^2 の係数3で x^2 と x の項をくくり，定数項はカッコの外におくのです。

次に，$\frac{4}{3}$ の半分の平方をあいているところに入れて，その分だけ5のあとにつけて引くのです。ここでくくった係数3を掛け忘れないこと。つまり

$$=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+5-3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$$

練習2. x，y を実数とするとき

$$x^2+xy+y^2\geqq 0$$

であることを示せ。

ヒント　xについて平方を完成しますと，

$$x^2+xy+y^2$$
$$=(x^2+yx\qquad\quad)+y^2$$
$$=\left(x^2+yx+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)+y^2-\frac{y^2}{4}$$
$$=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geqq 0$$

等号は $x=y=0$ のとき成り立つ。

Q. E. D.

注　$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}\{x^2+y^2+(x+y)^2\}\geqq 0$ とすることもできます。しかし，これはムダな努力です。

練習3. x，y，z が実数値をとるとき

$$x^2+xz+z^2-3y(x-y+z)\geqq 0$$

が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

ヒント　2乗の和を作ればいいでしょう。そのためには，まず，xについて整理して

$$左辺=x^2-(3y-z)x+(3y^2-3yz+z^2)$$
$$=\left(x-\frac{3y-z}{2}\right)^2+(3y^2-3yz+z^2)-\left(\frac{3y-z}{2}\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{3y-z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2-\frac{6}{4}yz+\frac{3}{4}z^2$$
$$=\left(x-\frac{3y-z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-z)^2\geqq 0$$

等号が成り立つのは

$$x-\frac{3y-z}{2}=0 \quad かつ \quad y-z=0$$

のときです。$y=z$ を第1式に代入すると

$$x-\frac{3z+z}{2}=0 \qquad \therefore\ x=z$$

ゆえに $x=y=z$ のとき，等号が成り立つことがわかります。

つまり，2乗の和を作るコツはある文字について整理して，**その文字に目をつけて平方を完成する**のです。その上で，残ったものをまた1つの文字について整理する，というぐあい。

では，もう1つやってみませんか。

練習4. x，y，z が実数のとき

$$x^2+y^2+7z^2+xy+5yz+4zx\geqq 0$$

であることを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

答　等号は $2x=y=-2z$ のとき

＊　＊　＊

◆ 今まで2乗の和で表すことと，不等式への応用例をあげました。

次には，同じことですが，2乗の和で表すことと，その最大・最小問題への応用例をあげてみましょう。

練習5. 2次関数 $y=3x^2-6x+1$ の最小値を求めよ。

ヒント
$$y=3(x^2-2x)+1$$
$$=3(x-1)^2+1-3$$
$$=3(x-1)^2-2$$

ゆえに $x=1$ のとき最小値 -2 をとる。

答 -2

練習6. a を1つの定数とするとき，2次関数 x^2+ax+1 の最小値を求めよ。

（小樽商大）

ヒント x^2+ax+1
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$$

ゆえに $x=-\dfrac{a}{2}$ のとき，最小値 $1-\dfrac{a^2}{4}$ をとる。

答 $1-\dfrac{a^2}{4}$

1/25

練習7. $x^2+xy+y^2+3x+3y+10$ の最小値を求めよ。ただし，x，y は実数である。

ヒント 2乗の和を作ってみよう。まず，x について整理して
$$x^2+(y+3)x+(y^2+3y+10)$$
$$=\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+(y^2+3y+10)-\frac{(y+3)^2}{4}$$
$$=\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{6}{4}y+\frac{31}{4}$$
$$=\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2+\frac{31}{4}-\frac{3}{4}$$
$$=\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2+7$$

ナルホド，$x+\dfrac{y+3}{2}=0$ かつ $y+1=0$ のとき，すなわち，$x=-1$，$y=-1$ のとき，最小値7をとるわけだ。

判別式をとる方法でもできますが，この方法のほうが簡潔で便利だ。

1/25

練習8. x，y を実数とするとき
$$\frac{2x+4y}{x^2+y^2+1}$$
の最大値・最小値を求めよ。

ヒント $k=\dfrac{2x+4y}{x^2+y^2+1}$ とおいて，分母をはらうと
$$kx^2+ky^2+k=2x+4y$$
$$\therefore\quad kx^2+ky^2-2x-4y=-k$$

左辺の2乗の和を作ってみよう。両辺を k で割って
$$x^2+y^2-\frac{2}{k}x-\frac{4}{k}y=-1$$

（チョット待ッテクダサイヨ。$k=0$ ダッタラドウスルンデス。割レナイジャアリマセンカ）

それはともかくあとまわしにしよう。上式を変形すると
$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+\left(y-\frac{2}{k}\right)^2=\frac{5}{k^2}-1$$

左辺$\geqq 0$ だから
$$\frac{5}{k^2}-1\geqq 0$$
$$\therefore\quad 5\geqq k^2$$
$$\therefore\quad -\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$$

ゆえに，最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$ であることがわかった。

注 $k=0$ のときは割れないから，実は $-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$ $(k\neq 0)$ とすべきです。次に，もとの分数式からすぐわかるように $2x+4y=0$ のとき，つまり，$x=-2y$ のとき $k=0$ になるのです。

そこで，この2つをまとめて，結局
$$-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$$
となるのでした。しかし，あまり，そのような点にばかり気をとられると，大事なところを見落としてしまうことになりがちです。

＊　＊　＊

◆ もう，これで2乗の和を作るコツと応用の仕方が一応わかったことと思います。あとは計算ちがいをしないことが大切です。

1回目 年 月 日

2回目 年 月 日

3回目 年 月 日

① 式の値を求めること

◈$x=\times\times\times$ のとき x^4+x^2+2x+1 の値を求めよ，といった問題は多い。しかし，扱い方をよく知っている人は割合少ないのデス。

◆ 多言無用，そのものズバリ，練習1.からはじめようではないか。

1/25

■練習 1. $x=\dfrac{-5}{2+i}$ のとき x^2+4x の値を求めよ。 （富山大）

ヒント $x=\dfrac{-5}{2+i}$ ∴ $2x+ix=-5$

∴ $2x+5=-ix$

両辺を2乗すると

$$4x^2+20x+25=-x^2$$

∴ $x^2+4x+5=0$

∴ $x^2+4x=-5$ 答 -5

1/25

■練習 2. $x^2-3x-2=0$ のとき

$x^4-6x^3+12x^2+3x-8$ の値を求めよ。

ヒント $x^4-6x^3+12x^2+3x-8$ を x^2-3x-2 で割ってみると，下の通り。

$$\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & 1 & -3 & 5 & & \\
\hline
1 & -3 & -2 & 1 & -6 & 12 & 3 & -8 \\
 & & & 1 & -3 & -2 & & \\
\hline
 & & & & -3 & 14 & 3 & \\
 & & & & -3 & 9 & 6 & \\
\hline
 & & & & & 5 & -3 & -8 \\
 & & & & & 5 & -15 & -10 \\
\hline
 & & & & & & 12 & 2
\end{array}$$

∴ 与式

$$=(x^2-3x-2)(x^2-3x+5)+12x+2$$

ところが $x^2-3x-2=0$ であるから，上の式の右辺の 第1項$=0$，また，

$$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

∴ 与式$=12\times\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}+2$

$$=20\pm6\sqrt{17}$$

答 $20\pm6\sqrt{17}$

1/26

■練習 3. $x=2+\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

$$P=\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^2-4x+2}$$ （千葉大）

ヒント $x=2+\sqrt{3}$ ∴ $x-2=\sqrt{3}$

両辺を2乗して

$x^2-4x+4=3$ ∴ $x^2-4x+1=0$

ゆえにPの分母は1に等しい。また，

$$\begin{aligned}
\text{分子}&=(x^2-4x+1)(x+8)+29x-7\\
&=29x-7=29(2+\sqrt{3})-7\\
&=51+29\sqrt{3}
\end{aligned}$$

答 $51+29\sqrt{3}$

* * *

◆ ふつうの問題は上の流儀で，つまり **割ることによってうまくいく** のです。しかし，次数が高くなると，もはや割るのは大変です。このときは，**次数を下げる** ほうがいい，つまり，次のようにやるのです。

1/26

■練習 4. $x=1+2i$ のとき x^{10} の値を求めよ。

ヒント $x=1+2i$ ∴ $x-1=2i$

両辺を2乗して

$x^2-2x+1=-4$ ∴ $x^2=2x-5$

ゆえに

$$\begin{aligned}
x^{10}&=(x^2)^5=(2x-5)^5\\
&=(4x^2-20x+25)^2(2x-5)\\
&=\{4(2x-5)-20x+25\}^2(2x-5)\\
&=(-12x+5)^2(2x-5)\\
&=(144x^2-120x+25)(2x-5)\\
&=(168x-695)(2x-5)\\
&=-1558x+1795\\
&=237-3116i
\end{aligned}$$

……答

* * *

◆ 以上で大切なことは終わったのですが，次には **立方根の入ってくるもの** をやるとしましょう。ここで大切なのは，恒等式

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

を使うことです。

1の虚数立方根をω（オメガ）としますと$\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$ という関係があります。これらのことをまだやってない人は，次の練習を，今はもちろんやる必要がありません。

1/25

■練習 5. $x=\omega+\omega^2$ を解とする3次方程式を作れ。

ヒント　　$x=\omega+\omega^2$

の両辺を3乗しますと

$$x^3=\omega^3+\omega^6+3\omega\omega^2(\omega+\omega^2)$$
$$\therefore\ x^3=1+1+3x$$
$$\therefore\ x^3-3x-2=0$$

答　$x^3-3x-2=0$

1/25

■練習 6. $x=1+2\omega+2\omega^2$ のとき

$x^3-3x^2-9x+10$ の値を求めよ。

ヒント　$x-1=2\omega+2\omega^2$ の両辺を3乗すると

$$(x-1)^3=8\omega^3+8\omega^6+3\cdot2\omega\cdot2\omega^2(x-1)$$
$$\therefore\ x^3-3x^2+3x-1=16+12(x-1)$$
$$\therefore\ x^3-3x^2-9x=5$$
$$\therefore\ x^3-3x^2-9x+10=15$$

答　15

1/25

■練習 7. $x=4+\omega-\omega^2$ のとき

$x^3-12x^2+51x+4$ の値を求めよ。

ヒント　　$x-4=\omega-\omega^2$

$$\therefore\ (x-4)^3=\omega^3-\omega^6-3\omega\omega^2(\omega-\omega^2)$$
$$\therefore\ (x-4)^3=-3(x-4)$$

よって……　　答　80

*　*　*

◆ もう1つ，根号が2つついている場合がまれにあります。このときは，はじめの手順を2度行えばうまくいきます。

つまり，$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ なら

$$x^2=5+2\sqrt{6}\qquad\therefore\ x^2-5=2\sqrt{6}$$

さらに，この両辺を2乗すると

$$(x^2-5)^2=(2\sqrt{6})^2$$
$$\therefore\ x^4-10x^2+1=0$$

となるでしょう。では，次の練習8. を。

1/26

■練習 8. $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$ のとき，

$2x^5+2x^4-3x^3-2x^2+x$ の値を求めよ。

（大阪府大）

ヒント　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

$$=\frac{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)}{\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4}\qquad\cdots\cdots①$$

ここまでくると，上の注意事項を参照してやれるハズ。①から

$$4x+2=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

この両辺を2乗して，変形すると

$$4x^2+4x-1=\sqrt{3}$$

また，両辺を2乗して整理すると

$$8x^4+16x^3+4x^2-4x-1=0$$

かくして，

与式

$$=(8x^4+16x^3+4x^2-4x-1)\frac{x-1}{4}+\frac{x-1}{4}$$
$$=\frac{x-1}{4}$$

ここで，xに①を代入して

$$与式=\frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}-6)\qquad\cdots\cdots 答$$

*　*　*

◆ このほかに，複素数の場合，ド・モアブルの定理を使う方法などもありますが，知らなくて結構です。

ともかく，上のことがらがわかれば，十分です。しかし，とかく，**やり方がわかっても計算ちがいが多い** もの。くれぐれも注意してやってください。

① 近似値の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆近似値や誤差の立入ったことは，微積分を使ってやらなければなりません。それは数Ⅰの範囲ではありませんが，ここでは……

◆ ここでは，**近似値** や **誤差**（ごさ）の問題をいくつかやっておこう，というのが目的です。きまったやり方とてありませんので，どうも雑然とするのは避けられないが，それでも終わりまでたどってゆくと，1つのイメージがわいてこよう，というものです。

1/26

■練習 1. 小数第3位を4捨5入して

$x=3.00$ のとき，x の真の値を不等式で書け。（早大）

ヒント　2.995 なら5入で 3.00 になりますが，2.99499 はもはや 2.99 になります。2.99499 を ~~2.99499~~ 3.00 とやってはいけません。

また，4捨のほうからみると 3.005 なら 3.01 になってしまいますが，3.00499 なら，3.00 になります。

$$\therefore \quad 2.995 \leqq x < 3.005 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

1/26

■練習 2. 小数第3位を切り上げたら

$x=3.00$ となった。x を求めよ。

ヒント　2.991 でも 2.993 でも小数第3位を切り上げると 3.00 となります。しかし，2.990 では切り上げて 3.00 とすることはできません。

$$\therefore \quad 2.991 \leqq x \leqq 3.000 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 小数第3位まで **正しく計算せよ**，というのは **第4位の数を4捨5入したり，切り上げたりしない** のです。では，次の練習3. にいくとしましょう。

1/26

■練習 3. $\left(\dfrac{5379}{5368}\right)^2$ を小数第3位まで正しく計算せよ。（早大）

ヒント

$$\frac{5379}{5368}=1.0020491\cdots$$

$$\therefore \quad \left(\frac{5379}{5368}\right)^2=1.00410\cdots$$

しかし，これではあまりに小学生的である!! もう少し，うまくやりたい。それが問題点です。

$$\frac{5379}{5368}=1+\frac{11}{5368}=1+\alpha$$

とおくと

$$\left(\frac{5379}{5368}\right)^2=(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2$$

ところが，

$$\alpha=0.002049\cdots$$

$$\therefore \quad 0.00204<\alpha<0.00205$$

$$0.00408<2\alpha<0.00410 \quad \cdots\cdots①$$

$$\therefore \quad 2\alpha=0.004\cdots \quad \cdots\cdots②$$

また

$$0.002^2<\alpha^2<0.003^2$$

$$\therefore \quad 0.000004<\alpha^2<0.000009 \quad \cdots\cdots③$$

であるから α^2 は①と③からみて小数第3位に影響しないことがわかります。

ゆえに求める値は 1.004 です。

■練習 4. $x=\sqrt{5}$ のとき，

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$$

の値を小数第3位まで求めなさい。ただし $\sqrt{2}=1.41421$，$\sqrt{10}=3.16227$，$\sqrt{20}=4.47213$ とする。（慶大）

ヒント　まず与えられた式を変形するのが先決問題でしょう。そして，それには分母の有理化が当然でしょう。

では：——

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})^2}{(x+2)-(x-1)}$$

$$=\frac{1}{3}\{x+2+x-1-2\sqrt{(x+2)(x-1)}\}$$

$$=\frac{1}{3}(2x+1-2\sqrt{x^2+x-2})$$

$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{5}+1-2\sqrt{3+\sqrt{5}})$$

$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{5}+1-\sqrt{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}})$$

$$=\frac{1}{3}\{2\sqrt{5}+1-\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{5}+1-\sqrt{10}-\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{20}-\sqrt{10}-\sqrt{2}+1)$$

$$=\frac{1}{3}(4.47213-3.16227-1.41421+1)$$

$$=\frac{1}{3}(0.89565)=0.29855$$

第4位の5を4捨5入して0.299, これが答です。第3位まで求めよ，とは，第4位まで正しく求めて，これを4捨5入することです。

* * *

◆ 上の計算は長たらしく続いて不愉快であるが，とくにめんどうということはありません。しかし，次のになると，ちょっと抵抗を感じますね。

練習 5. $x=2.34\cdots\cdots$, $y=5.37\cdots\cdots$ のとき $\dfrac{3x-y}{x+y}$ の値を正しい位まで求めよ。

ヒント 問題の意味わかりますか。

$$x=2.34 \quad と \quad x=2.34\cdots\cdots$$

とでは意味がちがいます。$x=2.34\cdots\cdots$ の点のところには何があるかわからない，ということなのです。したがって

$$2.34 \leqq x < 2.35$$
$$5.37 \leqq y < 5.38$$
$$\therefore \quad 7.71 \leqq x+y < 7.73 \quad \cdots\cdots①$$

$$1.64 < 3x-y < 1.68 \quad \cdots\cdots②$$

(②デハ等号ガツキマセンヨ)

$$\therefore \quad \frac{1.64}{7.73} < \frac{3x-y}{x+y} < \frac{1.68}{7.71}$$

$$\therefore \quad 0.21216\cdots\cdots < \frac{3x-y}{x+y} < 0.21789\cdots\cdots$$

上の不等式からわかるように答は

$$\frac{3x-y}{x+y}=0.21\cdots\cdots$$

* * *

◆ やや理論がかった練習もしておきたいもの。では，次の練習6. をやってみませんか。どうしても抵抗を感ずるなら，ここはやめにしてもかまわない。

練習 6. a, b を正の整数とするとき，$\sqrt{3}$ は $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{3a+b}{a+b}$ との間にあることを示せ。

また $\sqrt{3}$ は $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{3a+b}{a+b}$ のどちらに近いか。

ヒント $(x-4)(x-5)<0$ なら $4<x<5$ ですね。この場合も同じ。

$$\left(\sqrt{3}-\frac{b}{a}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{3a+b}{a+b}\right)<0$$

をいえばよいのです。

ところで，この左辺は

$$-\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}\,a-b)^2}{a(a+b)}<0$$

よって，証明された。

次に，$\sqrt{3}$ がどちらに近いか，というのは

$$\left|\frac{b}{a}-\sqrt{3}\right| \quad と \quad \left|\frac{3a+b}{a+b}-\sqrt{3}\right|$$

の大小がわかればいい。そのためには

$$\left(\frac{b}{a}-\sqrt{3}\right)^2 \quad と \quad \left(\frac{3a+b}{a+b}-\sqrt{3}\right)^2$$

の大小がわかればいい。そこで引いて符号を調べるといいだろう，ということになります。

答 $\sqrt{3}$ は $\dfrac{3a+b}{a+b}$ に近い。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○因数分解とは何か

◆因数分解なんてコトバは耳にタコができるほど聞いているハズなのに，とんでもない誤解をしている人も多いのです。

◆ $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$x^2+4x=x(x+4)$

などのように，**積に分解することを因数分解**といいます。しかし，積とはいっても，条件によってちがいます。

$x^2-4=(x+2)(x-2)$ は係数が整数ですが，$x^2-\dfrac{1}{4}$ は整数係数の範囲では分解できません。しかし，有理係数の範囲ならできます。すなわち，$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ となります。また x^2-3 なら有理数の範囲でもできませんが，実数の範囲でならできます。それは

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

です。さらに x^2+1 は実数の範囲でもできませんが，複素係数でよければできます。すなわち，$(x+i)(x-i)$ です。

このように，因数分解というのは，係数の範囲をきめないとわかりません。何も断ってなければ，**ふつうは整数の範囲** と思うべきですが，常識で判断することの必要なことも少なくありません。

*　*　*

◆ 考える文字に根号をつけて分解しないのがふつうです。例えば

$$x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$$

とやって因数分解とはいわないのです。しかし，xに目をつけたとき $a>0$ として

$$x^2-a=(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

は実数係数の因数分解ということになります。

このように，何に目をつけて因数分解するのか，よく，見定めてからとりかかる必要があります。

◆ さて，因数分解をするに当たって，もっとも大切なことは，**ある文字について1次式ではあるまいか**，と思うことです。

では，次の練習をやってみませんか。

■練習 1. $ax+bx+cx$ を因数に分解せよ。

ヒント　どの文字について，ということが書いてない。しかし，xについての整式と考えるのが常識というもの。さては

$$(a+b+c)x \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

ということになりましょう。

■練習 2. $ax-bx+a-b$ を因数の積に分解せよ。

ヒント　xに目をつけて整理しますと

$$\begin{aligned}与式&=(a-b)x+(a-b)\\&=(a-b)(x+1) \qquad \cdots\cdots \boxed{答}\end{aligned}$$

■練習 3. $x^3-(2p-3)x^2-(2p-q-3)x+q+1$ を x に関する1次と2次の式の積に因数分解せよ。　（山梨大）

ヒント　pについても1次式，qについても1次式，さてはいずれかについて整理するのがよいであろう。qについてやると，

$$与式=(x+1)q+\{x^3-(2p-3)x^2-(2p-3)x+1\}$$

ところで，第2項の{　}の中はpについての1次式，さては，これをpについて整理すればいいだろう。注意深い人なら $(2p-3)$ がタバになっているから，これについて整理したらいいハズ，と気がつく。かくして

$$\begin{aligned}与式&=(x+1)q+\{(x^3+1)-(2p-3)(x^2+x)\}\\&=(x+1)q+(x+1)(x^2-x+1)-(2p-3)x(x+1)\end{aligned}$$

$=(x+1)\{q+(x^2-x+1)-(2p-3)x\}$
$=(x+1)\{x^2-2(p-1)x+q+1\}$ …[答]

* * *

◆ さて，どの文字についても1次式でないときには，**ある文字について2次式ではあるまいか**，と思うのです。

■練習 4. x^2+5x+6 を因数分解せよ。

(ヒント) これはいわゆるタスキガケ法でやるとよい。その結果は右のようです。

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

与式 $=(x+2)(x+3)$ ……[答]

1/27

■練習 5. $x^2+xy-6y^2-x+7y-2$ を因数分解せよ。 (群馬大)

(ヒント) x についても2次式，y についても2次式，さては，x について整理すればいいだろう。かくて：——

与式 $=x^2+(y-1)x-(6y^2-7y+2)$

ここで，最後の項を因数分解して

$=x^2+(y-1)x-(2y-1)(3y-2)$

ここでタスキガケ法です。

$$\begin{array}{cc} 1 & -(2y-1) \\ 1 & +(3y-2) \\ \hline -(2y-1) & 3y-2 \end{array}$$

右のようにして

$=\{x-(2y-1)\}\{x+(3y-2)\}$
$=(x-2y+1)(x+3y-2)$ ……[答]

* * *

◆ くどいけれどもひとこと。因数分解というのは積になっていなければいけません。

■練習 6. $x^2y^2+x^2y+xy^2+3xy+x+y+1$ を因数分解せよ。

(ヒント) $x^2y^2+x^2y+xy^2+3xy+x+y+1$
$=(x^2y^2+xy)+(x^2y+x)+(xy^2+y)$
$\quad+(xy+1)+xy$
$=xy(xy+1)+x(xy+1)+y(xy+1)$
$\quad+(xy+1)+xy$
$=(xy+1)(xy+x+y+1)+xy$
$=(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$…… [答]

などとして満足している人が割合多いのです。これでは因数分解をしたことになりません。次のように，きまった通りやること。

(解) x について整理すると

与式 $=(y^2+y)x^2+(y^2+3y+1)x+(y+1)$
$=y(y+1)x^2+(y^2+3y+1)x+(y+1)$

$$\begin{array}{cc} y & y+1 \\ y+1 & 1 \\ \hline y^2+2y+1 & y \end{array}$$

$=\{yx+(y+1)\}\{(y+1)x+1\}$
$=(xy+y+1)(xy+x+1)$ ……[答]

* * *

◆ 因数分解に強くなるコツは，まず基本的なものをしっかりとつかむこと。その上で，それらをバラバラにして，それでもできるよう訓練することです。具体的には，因数分解でない問題の中で因数分解をキチンとやることが大切。ともあれ，次をやってみましょう。

1/27

■練習 7. $x^2-y^2-z^2+2yz$ を因数分解せよ。

(ヒント) x, y, z について2次ですから，どれについて整理してもできるハズ。

x について整理すると

与式 $=x^2-(y^2-2yz+z^2)$
$=x^2-(y-z)^2=(x+y-z)(x-y+z)$

y について整理すると

与式 $=-y^2+2zy+(x^2-z^2)$
$=-y^2+2zy+(x+z)(x-z)$
$=-\{y^2-2zy-(x+z)(x-z)\}$

$$\begin{array}{cc} 1 & -(x+z) \\ 1 & +(x-z) \\ \hline -(x+z) & +(x-z) \end{array}$$

$=-\{y-(x+z)\}\{y+(x-z)\}$
$=(x-y+z)(x+y-z)$

z について整理すると

与式 $=-z^2+2yz+(x^2-y^2)$
$=-\{z^2-2yz-(x+y)(x-y)\}$
$=-\{z-(x+y)\}\{z+(x-y)\}$
$=(x+y-z)(x-y+z)$

① 因数定理の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆因数定理というのは剰余定理において剰余が0になった場合にすぎない。何をことさら，と思いたいくらいだが，さて，どうか。

◆ **因数定理** というのはこうだ。

x の多項式 $f(x)$ において，$f(a)=0$ ならば $f(x)$ は $x-a$ で割りきれる

これは **剰余定理**：多項式 $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ である，というのとまったく同じです。いや，同じといってはまずい。特別な場合です。余りが0だというにすぎないではありませんか。でも，それは重要なのです。その使い方を学ぶことにしましょう。

第1は，**因数分解** です。

■**練習 1.** x^3+x^2+x-3 を因数分解せよ。

ヒント　$f(x)=x^3+x^2+x-3$ とおくと $f(1)=0$ ゆえに $f(x)$ は $x-1$ で割りきれる。そこで組立除法（☞ p.22）を使って割ってみますと右の通り。

1	1	1	1	-3
		1	2	3
	1	2	3	0

さてこそ

$$x^3+x^2+x-3$$
$$=(x-1)(x^2+2x+3) \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

1/27

■**練習 2.** $f(x)=x^4+4x^3-4x^2-16x+15$ を因数分解せよ。（神戸商大）

ヒント　$f(a)=0$ となるような a をみつければいいのですが，さて，どうするか。実は，それは **x^4 の係数1の約数で，定数項15の約数を割ったものしかない** のです。つまり15の約数だけ。してみると，

$$\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm15$$

以外にはないのです。これを順々に調べていくことです。ところが $x=1$ とおいてみると早くも0，さては：——

1	1	4	-4	-16	15
		1	5	1	-15
	1	5	1	-15	0

$$f(x)=(x-1)(x^3+5x^2+x-15)$$

ところが第2因数において $x=-3$ とおいて0になります。

かくして，$x+3$ で割ってみると，右の通り。ゆえに

-3	1	5	1	-15
		-3	-6	15
	1	2	-5	0

$$f(x)=(x-1)(x+3)(x^2+2x-5)$$
$$\cdots\cdots \boxed{答}$$

■**練習 3.** $2x^3-3x^2-4x+6$ を因数分解せよ。

ヒント　x^3 の係数は2，定数項は6，ですから，因数定理の対象になるのは

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}$$

だけです。だけ，というのは適当であるまい。も，ある，というべきか。

さて，$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$ はみんなダメ。そして，$\pm\dfrac{1}{2}$ もダメ。$\dfrac{3}{2}$ にいたって成立。ひどいよなあ。

右のように割り算を行って

$\frac{3}{2}$	2	-3	-4	6
		3	0	-6
	2	0	-4	0

$$与式=\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2-4)$$
$$=(2x-3)(x^2-2) \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 第2は **整除問題** です。

1/27

■**練習 4.** $f(x)=4x^4+ax^3-9x^2+bx+2$ が $2x^2+x-1$ で割りきれるように定数 a, b の値を定めよ。（埼玉大）

ヒント　$2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$ ですから，$2x-1$ と $x+1$ で割りきれる条件を使えばいいのでしょう。さて，因数定理により

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16}+\frac{a}{8}-\frac{9}{4}+\frac{b}{2}+2=0$$

$$f(-1)=4-a-9-b+2=0$$

つまり，

$$a+4b=0,\ a+b=-3$$

これを解いて

$$a=-4,\ b=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

1/68

■練習 5. $3x^5+2x^3+p$ を x^3+2x で割るとき，その剰余が $x-3$ で割りきれるように p を定めよ。　（広島大）　9

（解） $3x^5+2x^3+p$ を x^3+2x で割ると

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & & & & 3 & 0 & -4 & & & \\ \hline
1 & 0 & 2 & 0\,) & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & p \\
 & & & & 3 & 0 & 6 & 0 & & \\ \hline
 & & & & & & -4 & 0 & 0 & p \\
 & & & & & & -4 & 0 & -8 & 0 \\ \hline
 & & & & & & & & 8 & p
\end{array}$$

商は $3x^2-4$，剰余は $8x+p$ である。これが $x-3$ で割りきれるから因数定理により

$$8\cdot3+p=0$$

$$\therefore\ p=-24 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ 因数定理のやや高等な使い方は対称式や交代式でおこります。（対称式・交代式については （☞ p. 48））

■練習 6. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を因数分解せよ。

（ヒント） $b=c$ とおいてみると

$$a^2(b-b)+b^2(b-a)+b^2(a-b)=0$$

ですから $(b-c)$ で割りきれます。したがって，3次式 $(b-c)(c-a)(a-b)$ で割りきれますが，もとの式も3次の **同次式**。してみると，k を定数として

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=k(a-b)(b-c)(c-a)$$

とおくことができます。

両辺の a^2b の係数を比較して

$$1=-k \qquad \therefore\ k=-1$$

$$\therefore\ 与式=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

■練習 7. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ を因数分解せよ。

（解） $b=c$ とおくと0になるから $(b-c)$ なる因数をもつ。ところが与式は a，b，c に関する4次の **交代式** であるから

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdot k(a+b+c)$$

とおくことができる。

両辺の a^3b の係数を比較して

$$1=-k \qquad \therefore\ k=-1$$

よって

$$与式=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$\cdots\cdots \boxed{答}$

＊　＊　＊

◆ 因数定理は整除問題にも有用です。例えば，これです。

1/18

■練習 8. 10^n-1 は9で割りきれることを証明せよ。ただし，n は自然数である。

（ヒント） a^n-1 において $a=1$ とおくと0になるから a^n-1 は $a-1$ で割りきれます。とくに $a=10$ とおくと 10^n-1 は $10-1$ すなわち9で割りきれることがわかります。

（注） 次のようにやってはいけません。

$a=10$ とおくと

$$10^n-1=a^n-1$$

$a=1$ とおくと0になるから $a-1$ で割りきれる。ゆえに $10-1$ すなわち9で割りきれる。

これでは $10=1$ とおいたことになってしまうではありませんか。そうではなく，10^n-1 をみたとき，突如，a^n-1 を思い出した，というわけ!!

1/21

■練習 9. $10^{2n}-1$ は99で割りきれることを示せ。

（解） $a^{2n}-1$ において $a=\pm1$ とおくと0になるから

$$(a-1)(a+1)=a^2-1$$

で割りきれる。

いま $a=10$ とおくと $a^{2n}-1$ は $10^{2n}-1$ となり $a^2-1=99$ で割りきれる。　Q. E. D.

○2次式の因数分解

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆因数分解でもっとも使われるのは何といっても２次式の場合です。これこそ自由自在に使えるようになってほしいのだが，……

◆ **２次式の因数分解** で大切なことは５つあります。まず公式によるもの：——

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$
$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$$
$$\boldsymbol{x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)}$$
$$\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$$

最後の２つはふつう **たすきがけの方法** でやります。もう１つ，解の公式を用い，解を求めて利用するものがあります。では，１つずつやってみようではありませんか。

＊　＊　＊

◆ まず，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ から：——

練習 1. a^2-4b^2 を因数分解せよ。

（解） $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$ ……答

練習 2. 実数係数の範囲で x^2-3 を因数分解せよ。

（解） $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2$
$=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
……答

練習 3. 複素数の範囲で x^2+1 を因数分解せよ。

（解） $x^2+1=x^2-i^2=(x+i)(x-i)$
ここに i は虚数単位である。

1/28

練習 4. a^8-b^8 を因数分解せよ。

（解） $a^8-b^8=(a^4)^2-(b^4)^2$
$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$
$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
……答

＊　＊　＊

◆ 第２は $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ です。

練習 5. x^2+4x+4 を因数分解せよ。

（解） $x^2+4x+4=x^2+2\cdot2\cdot x+2^2$
$=(x+2)^2$ ……答

練習 6. 有理係数の範囲で $x^2+x+\dfrac{1}{4}$ を因数分解せよ。

（解） $x^2+x+\dfrac{1}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ ……答

＊　＊　＊

◆ 第３は $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ です。

練習 7. $4x^2-4x+1$ を因数分解せよ。

（解） $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ ……答

練習 8. $a^2-2ab+b^2-c^2$ を因数分解せよ。

（解） 与式$=(a-b)^2-c^2$
$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$
$=(a-b+c)(a-b-c)$ ……答

＊　＊　＊

◆ 第４は $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$ です。

練習 9. x^2-6x+5 を因数分解せよ。

（解） $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$

練習 10. $x^2-(a+1)x+a$ を因数分解せよ。

（解） $x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$

練習 11. $a^2+b^2-2ab+a-b-56$ を因数分解せよ。　（専修大）

（ヒント） 与式$=(a-b)^2+(a-b)-56$
$=\{(a-b)+8\}\{(a-b)-7\}$
$=(a-b+8)(a-b-7)$

あるいは次のようにしてもできます。

与式$=a^2+(1-2b)a+(b^2-b-56)$
$=a^2+(1-2b)a+(b-8)(b+7)$

$=\{a-(b-8)\}$
　$\times\{a-(b+7)\}$
$=(a-b+8)$
　$\times(a-b-7)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -(b-8) \\ 1 & & -(b+7) \\ \hline -b+8 & & -b-7 \end{array}$$

もちろん b について整理してもできます。やってみませんか。実は 2 次式の因数分解でもっとも重要なのはこのタイプです。では：

練習 12. $2a^2-ab-b^2-7a+b+6$ を因数分解せよ。

（解） 与式$=2a^2-(b+7)a-(b^2-b-6)$
$=2a^2-(b+7)a-(b+2)(b-3)$
$=\{a-(b+2)\}$
　$\times\{2a+(b-3)\}$
$=(a-b-2)$
　$\times(2a+b-3)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -(b+2) \\ 2 & & +(b-3) \\ \hline -2(b+2) & & (b-3) \end{array}$$

これがいわゆる **たすきがけの方法** です。a^2 の係数で積が 2 になるように分け，定数項を 2 つに分け，たすきがけに掛けて加えたものが a の係数になるようにするのです。

練習 13. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ を因数分解せよ。

（ヒント） a についての 2 次式ですから a について整理してみるのがコツ。つまり，バラバラにしてから再整理というわけですが，**整理しながらバラバラにする** ほうがよい。つまり

与式$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-bca$
　　$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
　　$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
　　$=(b+c)(a+b)(a+c)$

1/20

ここでやめてはいけません。順序をととのえる，つまり

　　$=(a+b)(b+c)(c+a)$

までやりたいもの。

1/27

練習 14. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ を因数分解せよ。

（解） 与式$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}+bca$
$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$
$=\{(b+c)a+bc\}$
　$\times\{1\cdot a+(b+c)\}$
$=(ab+bc+ca)$
　$\times(a+b+c)$ …… 答

$$\begin{array}{ccc} b+c & \times & bc \\ 1 & & b+c \\ \hline bc & & (b+c)^2 \end{array}$$

＊　＊　＊

◆ ・2 次式の因数分解には，もう 1 つ重要な問題があります。それは，因数分解できるように定数をきめる問題です。例えば，これ。

1/28

練習 15. $2x^2-xy-y^2-7x+y+k$ が 1 次因数の積になるように定数 k の値を定めよ。

（ヒント） 大きく分けて 2 つの方法があります。1 つは **未定係数法** です。

$2x^2-xy-y^2=(2x+y)(x-y)$ ですから

　与式$=(2x+y+a)(x-y+b)$

とおくことができます。そこで，両辺の係数を比べてみますと

xの係数：　$a+2b=-7$　……①
yの係数：　$-a+b=1$　……②
定数項：　$ab=k$　……③

①，② を解いて

$a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ k=6$　…… 答

次に，**判別式を使う方法**：——

与式$=2x^2-(y+7)x-(y^2-y-k)$

これが因数分解できるためには x について解いたとき根号内が完全平方にならなければなりません。だから，……（☞ p. 18）。

＊　＊　＊

◆ 最後に，解を用いて因数分解すること。

練習 16. $2x^2+x-4$ を実数の範囲で因数分解せよ。

（ヒント） 与式$=0$ とおいて解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$\therefore\quad 与式=2\left(x-\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right)$$

この係数の 2 を忘れる人が実に多い。ご注意あれ。

9

3次式の因数分解

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆3次式の因数分解では公式が3つと，因数定理とがある。べつにめんどうはないが，ケアレスミスをおそれよ。

◆ 3次式の因数分解としては，**公式が3つ**あります。それは

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$$
$$\boldsymbol{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

で，あとは **因数定理を使うもの** です。

しかし，このほかに，見かけは3次式だが，実質的には1次式というものもかなりありますよ。では，とりあえず，それからはじめようではありませんか。

練習 1. $4x^3-5x^2-6x$ を因数分解せよ。

ヒント　なるほど3次式にはちがいないが，x でくくると

$$与式=x(4x^2-5x-6)$$
$$=x(x-2)(4x+3)\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ \hline -8 & 3 \end{array}$$

練習 2. $x^3+(a+1)x^2+(a+1)x+a$ を因数分解せよ。

ヒント　なるほど x について3次式にはちがいないが，**a については1次式** ですから，a について整理しなおしてみますと

$$与式=(x^2+x+1)a+(x^3+x^2+x)$$
$$=(x^2+x+1)a+(x^2+x+1)x$$
$$=(x^2+x+1)(x+a)\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次には，上の公式

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

を使う場合をとりあげてみましょう。

練習 3. x^3+8 を因数分解せよ。

解　$x^3+8=x^3+2^3$

$$=(x+2)(x^2-2x+4)\quad\cdots\boxed{答}$$

練習 4. $(2x+y)^3+(x-2y)^3$ を因数分解せよ。（日本大）

解　$与式=\{(2x+y)+(x-2y)\}$

$$\times\{(2x+y)^2-(2x+y)(x-2y)+(x-2y)^2\}$$
$$=(3x-y)(3x^2+3xy+7y^2)\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 5. $27x^3y+y$ を因数分解せよ。

解　$与式=y(27x^3+1)=y\{(3x)^3+1\}$

$$=y(3x+1)(9x^2-3x+1)\cdots\cdots\boxed{答}$$

*　*　*

◆ 同じく，公式

$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

を使うものでは：——

練習 6. $(a-b)^3-(a+b)^3$ を因数分解せよ。

解　$与式=\{(a-b)-(a+b)\}$

$$\times\{(a-b)^2+(a-b)(a+b)+(a+b)^2\}$$
$$=(-2b)(3a^2+b^2)$$
$$=-2b(3a^2+b^2)\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 7. a^6-b^6 を因数分解せよ。

解　$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$

$$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$$
$$=(a-b)(a+b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

あるいは：

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$$
$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

としてもよいでしょう。

*　*　*

◆ いよいよ最後は，公式

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$$
$$\boldsymbol{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

です。ここで，ちょっと注意を：——

それは，この因数分解のことなんです。公式を証明せよというのであれば右辺を計算すればいい。実際，入試にはそうした問題も数多く出題されていますが，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ，といわれたら，まさか，そうもいかないでしょう。では，次の練習を。

■練習 8. $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。1/29

ヒント　a について整理しますと

$$a^3-3bca+(b^3+c^3)$$

で，定数項は $(b+c)(b^2-bc+c^2)$ ですから，1次因数をもつとすると $a+(b+c)$ か $a-(b+c)$ で割りきれるハズ。**組立除法** を使って $a+(b+c)$ で割ってみると下の通り。

$-(b+c)$	1	0	$-3bc$	(b^3+c^3)
		$-(b+c)$	$b^2+2bc+c^2$	$-(b^3+c^3)$
	1	$-(b+c)$	b^2-bc+c^2	0

$\therefore$　与式 $=\{a+(b+c)\}\{a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\}$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

あるいは：——

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

さて，この公式を使って因数分解することを練習しておきましょう。

■練習 9. $a^3+b^3+8c^3-6abc$ を因数分解せよ。1/15

ヒント　与式 $=a^3+b^3+(2c)^3-3ab(2c)$

ですから，上の公式を使って

$=(a+b+2c)(a^2+b^2+4c^2-ab-2ac-2bc)$

■練習 10. $a^3+b^3+1-3ab$ を因数分解せよ。

ヒント　$a^3+b^3+1^3-3ab\cdot 1$

$=(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b)$

$=(a+b+1)(a^2-ab+b^2-a-b+1)$

*　　*　　*

◆ いよいよ最後は **因数定理の応用** です。

1/19

■練習 11. x^3-3x+2 を因数分解せよ。

ヒント　$x=1$ を入れると 0 になることは視察でわかります。そこで，与式を $x-1$ で割ってみますと，右のようで

与式

$=(x-1)$

$\times(x^2+x-2)$

$=(x-1)^2(x+2)$　……答

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0

■練習 12. $x^3+50x^2+51x+98$ を因数分解せよ。（立命館大）

ヒント　これはヒドイ!!　98 の約数は

$\pm1,\ \pm2,\ \pm7,\ \pm14,\ \pm49,\ \pm98$

など。強引にやってみると -49 に達する!!　でも，プラスの値は入れてもムダ。

-49	1	50	51	98
		-49	-49	-98
	1	1	2	0

$\therefore$　与式 $=(x+49)(x^2+x+2)$　……答

係数を複素数までとると

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega+z\omega^2)$

となります。ここに ω は 1 の虚数立方根です。また，$x+y+z=0$ のときには

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$$
$$\therefore\ \ x^3+y^3+z^3=3xyz$$

これを使うとすぐできる問題もあります。

1/19

■練習 13. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ を因数分解せよ。

◯ $a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解公式

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆ふつう高校では，こんな公式をオボエナケレバナラヌとはなっていない。しかし，受験生となると，知らないではすむまい。

◆ この重要な公式

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$

の証明はラクです。とはいうものの，タダ左辺を計算するよりは，次のように，a について整理してやったほうがよいでしょう。

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\{a+(b+c)\}\{a^2-(b+c)a\\&\qquad+(b^2-bc+c^2)\}\\&=a^3+\{(b^2-bc+c^2)-(b+c)^2\}a\\&\qquad+(b^3+c^3)\\&=a^3-3bca+b^3+c^3\\&=a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

* * *

◆ ところで，この公式は因数分解でとくに重要となりますが，不等式の証明や3次方程式の解法にも活躍します。では，その主なものについて練習しておくことにしましょう。

まず **因数分解** から：——

1/3

■練習 1. $a^3+b^3-c^3+3abc$ を因数分解せよ。

(解) $a^3+b^3-c^3+3abc$

$$\begin{aligned}&=a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c)\\&=\{a+b+(-c)\}\{a^2+b^2+(-c)^2-ab\\&\qquad-b(-c)-(-c)a\}\\&=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)\end{aligned}$$

…… 答

1/3

■練習 2. $x^3+8y^3+6xy-1$ を因数分解せよ。

(解) 与式

$$\begin{aligned}&=x^3+(2y)^3+(-1)^3-3x(2y)(-1)\\&=\{x+(2y)+(-1)\}\{x^2+(2y)^2+(-1)^2\\&\qquad-x(2y)-(2y)(-1)-(-1)x\}\\&=(x+2y-1)(x^2+4y^2+1-2xy+2y+x)\\&=(x+2y-1)(x^2-2xy+4y^2+x+2y+1)\end{aligned}$$

…… 答

* * *

◆ 次は **値を求める問題** をとりあげてみましょう。

■練習 3. $a+b+c=0$ のとき，次式の値を求めよ。 (滋賀大)

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(ヒント) $a+b+c=0$ ですから

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$
$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3=3abc$$

に気がつけばラク。

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{c+a+b}{abc}\\&\qquad+\frac{2}{3}\cdot\frac{bc+ca+ab}{abc}\\&=\frac{1}{3abc}\{(a^2+b^2+c^2)+3(a+b+c)\\&\qquad+2(bc+ca+ab)\}\end{aligned}$$

$a+b+c=0$ だから，中央の項をここまで引っぱってくることもなかったなあ。第1項と第3項はいっしょにして

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)^2=0$$

かくして，与式$=0$ とは相成ったのです。

■練習 4. $x+y+z=a$，$yz+zx+xy=b$，$xyz=c$ のとき $x^3+y^3+z^3$ を a，b，c で表せ。 (福岡大)

(ヒント) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}$$

$\therefore\ \ x^3+y^3+z^3=3c+a(a^2-3b)$

$\qquad =a^3-3ab+3c$ …… 答

この公式を知らなくても3次方程式の解と係数の関係を使うこともできます。

練習 5. a, b, c を相異なる数，x, y, z を連立方程式

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

の解とするとき，$a^3+b^3+c^3$ を x, y, z で表せ。 (東大)

ヒント　3つの式から a, b, c は3次方程式

$$x+ty+t^2z=t^3$$

$$\therefore\ \ t^3-zt^2-yt-x=0$$

の3つの解です。解と係数の関係から

$$\begin{cases} a+b+c=z \\ ab+bc+ca=-y \\ abc=x \end{cases}$$

ゆえに

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$

$\therefore\ \ a^3+b^3+c^3=3x+z(z^2+3y)$

$\qquad =z^3+3yz+3x$ …… 答

*　*　*

◆ 次には**証明問題**からとりあげましょう。

練習 6. $a+b+c+d=0$ のとき

$$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$$

が成り立つことを示せ。 (静岡大)

ヒント　$a=-b-c-d$ を代入して両辺をバラバラにして比べてもよいが，形がいかにも

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

に似ているではありませんか。というよりも $d=0$ とおいてみると，

$a+b+c=0$ のとき

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=3abc}$$

となります。さては，と思って当然。

$a+b+c+d=0 \quad \therefore\ \ a+b+(c+d)=0$

ですから，上の公式を使って

$a^3+b^3+(c+d)^3=3ab(c+d)$

$\therefore\ \ a^3+b^3+c^3+d^3+3cd(c+d)$

$\qquad =3ab(c+d)$

$\therefore\ \ a^3+b^3+c^3+d^3=3(c+d)(ab-cd)$

右辺の第2因数に $c=-a-b-d$ を代入して

$=3(c+d)\{ab-(-a-b-d)d\}$

$=3(c+d)(a+d)(b+d)$

$=3(a+d)(b+d)(c+d)$　　Q. E. D.

練習 7. $a>0$, $b>0$, $c>0$ のとき

$$a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$$

を証明せよ。 (九大)

ヒント　こんな問題を出題すると，相加・相乗平均の関係を使う人が少なからずいるものです。つまり

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqq \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

$$\therefore\ \ a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$$

しかし，これは非常識というものだ。本問は，その定理の証明を要求しているからです。

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\cdot\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2$

$\quad +(c-a)^2\}\geqq 0$

$\therefore\ \ a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$

等号は $a=b=c$ のとき。　　Q. E. D.

*　*　*

◆ 3次方程式への応用については（☞ p. 152）を参照してください。複素数まで考えると，いろいろ重要な応用があるのです。というのも，1の虚数立方根を ω とすると

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$

と書けるからです。しかし，ここでは，そこまでは立ち入らないことにしましょう。

ともあれ，本項の公式は，まずよく覚えて使いこなせるようにしておきたいもの。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○4次式の因数分解

◆4次式の因数分解は，次数が高いためにかえってラクです。というのも，次数が高くてめんどうな問題では手に負えないからだ。

◆　4次式の因数分解は大きく分けて2つになります。第1は **因数定理を使うもの**，第2は **複2次式の場合** なのです。そのほかに本質的には2次式だというのもあります。それからとりかかるとしようか。では，とりあえずこれを：——

■練習 1. a^4-b^4 を因数分解せよ。

ヒント　4次式とはいっても，本質的には **平方差** の問題です，ね。

$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

■練習 2. $a^4-2a^2b^2+b^4$ を因数分解せよ。

解　与式 $=(a^2-b^2)^2$
$$=(a-b)^2(a+b)^2\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

■練習 3. $(a^2+3a-2)(a^2+3a+4)-27$ を因数分解せよ。　　（天理大）

ヒント　$a^2+3a+1=u$ とおくと

与式 $=(u-3)(u+3)-27$
$$=u^2-36=(u+6)(u-6)$$
$$=(a^2+3a+7)(a^2+3a-5)$$

注　$a^2+3a=u$ とおくよりも上のように $a^2+3a+1=u$ とおくほうがラク。なお，これは a^2+3a-2 と a^2+3a+4 を加えて2で割ったもの。

■練習 4. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8$ を因数分解せよ。

ヒント　キレイに並んでいる。このようなときは **両端から2つずつ積にする** のがコツ。

与式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$

$x^2+5x+5=u$ とおくと

$$=(u-1)(u+1)-8=u^2-9$$
$$=(u-3)(u+3)$$
$$=(x^2+5x+2)(x^2+5x+8)\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

ここまでは4次式といっても，本格的ではありません。いよいよ，本番へ。

*　　*　　*

◆　4次式本番第1号は **因数定理を使うもの** です。では，これを：——

■練習 5. $f(x)=2x^4+11x^3+15x^2+13x+4$ を因数分解せよ。

ヒント　$f(a)=0$ ならば $x-a$ で割りきれる，というのが因数定理ですが，さて，a としては **x^4 の係数2の約数で，定数項4の約数を割ったもの** を入れてみること。それは

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm\frac{1}{2}\quad で全部$$

この場合，＋のものはダメなこと明らか。そこで -1，-2，-4 と入れてゆく。実際上は，組立除法を使ったほうが速い。

-4	2	11	15	13	4
		-8	-12	-12	-4
	2	3	3	1	0

$$\therefore\ f(x)=(x+4)(2x^3+3x^2+3x+1)$$

しかし，**安心は禁物**，まだできるのです。

$-\frac{1}{2}$	2	3	3	1
		-1	-1	-1
	2	2	2	0

$$\therefore\ f(x)=(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$$
$$=(x+4)(2x+1)(x^2+x+1)$$
$$\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

■練習 6. $2x^4+x^3+4x+2$ を因数分解せよ。

ヒント　因数定理でするなら　±1，±2，$\pm\frac{1}{2}$ を調べてみること。

$\boxed{答}$　$(2x+1)(x^3+2)$

◆ 本番第 2 号は **複2次式の因数分解** です。複2次式というのは x^3 と x の項を欠くもの。これには2つのタイプがあって，1つは $x^2=u$ とおくとうまくいくもの，1つは，x^4 と定数項に目をつけて平方を完成すると2乗の差ができてうまくいくもの，です。

■練習 7. x^4+x^2-2 を因数分解せよ。 1/20

ヒント $x^2=u$ とおくと

$$与式=u^2+u-2=(u+2)(u-1)$$
$$=(x^2+2)(x^2-1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2+2)\quad\cdots\cdots \text{答}$$

■練習 8. $2x^4+x^2-3$ を因数分解せよ。

解 $2x^4+x^2-3$

$$=(x^2-1)(2x^2+3)$$
$$=(x-1)(x+1)(2x^2+3)\quad\cdots\cdots \text{答}$$

上の2つは，いうなれば，左のページの最初のハンチュウに属しているといってもいい。しかし，次はちがうのです。

■練習 9. x^4+x^2+1 を因数分解せよ。 1/20

ヒント $x^2=u$ とおくと u^2+u+1 となって上のやり方では行きづまり。このときは u^2 と1をみて平方を完成すること。

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\quad\cdots\cdots \text{答}$$

■練習 10. x^4-x^2+1 を実数の範囲で因数分解せよ。 1/20　（同志社大）

ヒント $x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2$

$$=(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$$

さあ，ここでやめていいかどうか？
$x^2\pm\sqrt{3}x+1=0$ の判別式をDとすると

$$D=\sqrt{3}^2-4\cdot1\cdot1=3-4=-1<0$$

なるほど，もうだめだ。

答 $(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$

＊　＊　＊

◆ 同じことだが，次はちょっとめんどう。

■練習 11. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ を因数に分解せよ。 1/20　（専修大）

解 $与式=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$

$$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2+c^2)^2-4b^2c^2 \quad\cdots\cdots(*)$$
$$=\{a^2-(b^2+c^2)\}^2-(2bc)^2$$
$$=\{a^2-(b^2+c^2)+2bc\}\times\{a^2-(b^2+c^2)-2bc\}$$
$$=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$$
$$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\times\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)\times(a-b-c)$$

これでいいが，順序をかえておくほうがいい。つまり

$$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)\times(a+b-c)$$

(*) のところで，次のようにやってもいいのです。

（別解） 与式

$$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$$
$$=a^4-2(b^2-c^2)a^2+(b^2-c^2)^2-4a^2c^2$$
$$=\{a^2-(b^2-c^2)\}^2-(2ac)^2$$
$$=\{a^2-(b^2-c^2)+2ac\}\times\{a^2-(b^2-c^2)-2ac\}$$
$$=\{(a+c)^2-b^2\}\{(a-c)^2-b^2\}=\cdots\cdots$$

＊　＊　＊

◆ 少し変わったものではこんなのもあります。無理にやるほどのものでもありませんが，やってみませんか。

1/20

■練習 12. $x^4+x^3-10x^2+x+1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

解 $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$ とおいて x^2 で割ると

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=u$ とおくと $x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2$ だから，

$$(u^2-2)+u-10=0 \quad \therefore\ u^2+u-12=0$$
$$\therefore\ u=-4,\ 3$$

こうして x が求められるから，……

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

① (整式の)最大公約数と最小公倍数

◈G.C.M.（最大公約数）と L.C.M.（最小公倍数）は，greatest common measure, least common multiple の略なんです。

◆ まず定義を：——

A，B，Q を整式として

$$A=BQ$$

のとき，B を A の約数，A を B の倍数

といいます。ところで，２つ以上の整式に

共通な約数が　公約数

共通な倍数が　公倍数

です。例をあげましょう。

■練習 1. $14a^2b^3c$，$21a^3b^2$，$7ab^4c^2$ の公約数を求めよ。

ヒント　数係数14，21，7は問題にしないから，a^2b^3c，a^3b^2，ab^4c^2 の公約数を求めればよい。それは次のようにします。

a^2，a^3，a の公約数は　a，1

b^3，b^2，b^4 の公約数は　b^2，b，1

c，1，c^2 　の公約数は　1

したがって求める公約数は

ab^2，ab，a，b^2，b，1

であることがわかる。この中でもっとも次数の高い ab^2 が最大公約数です。いいですね。

■練習 2. $2a^3$，$3a^2b$ の公倍数を求めよ。

ヒント　数係数２，３は関係なし。a^3 と a^2 の公倍数は a^3，a^4，a^5，……；1 と b の公倍数は b，b^2，b^3，b^4，……であるから，公倍数は

a^3b；a^3b^2，a^4b；a^3b^3，a^4b^2，a^5b；……

と無数にある。この中でもっとも次数の低い a^3b が最小公倍数なのである。

さあ，これで，公約数・公倍数および最大公約数，最小公倍数の意味はわかった。

注　実は本によっては数係数の最大公約数や最小公倍数をつけ加えているのもあります。

つまり120，48，36の最大公約数は12ですから，

$$120a^2bx^2y^2,\ 48a^2b^2x^2y^2,\ 36a^3by^4$$

の最大公約数は $12a^2by^2$ ということになります。

■練習 3. 次の各組の整式の G.C.M. および L.C.M. を求めよ。

(1)　a，a^2，a^3

(2)　$2a^3b$，$\sqrt{3}ab^2$，πa^2b^4

■練習 4. 次の各組の整式の G.C.M. および L.C.M. を求めよ。

(1)　x^2-1，x^2-x-2

(2)　$a(a-b)$，$b(b-c)$，$c(c-a)$

ヒント　(1)について考えてみましょう。

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

ですから

G.C.M.：$x+1$

L.C.M.：$(x-1)(x+1)(x-2)$

$\qquad =x^3-2x^2-x+2$

(2)では，３つは互いに素で，最大公約数は 1，最小公倍数は　$abc(a-b)(b-c)(b-a)$ となります。

＊　＊　＊

◆ **最大公約数の求め方**：２つの整式の最大公約数を求める方法は２つあります。１つは因数分解できるとき，このときは別にめんどうはありません。しかし，因数分解できないときは，あるいは，少なくとも簡単にできそうもないときは，**ユークリッドの互除法**（ごじょほう）が使われます。もし，はじめてなら，まず整数の場合についての互除法の使い方を学んでから，整式の場合をやればいいでしょう。整数の場合は（☞ p. 66）。

◆ ユークリッドの互除法

AをBで割った商をQ，余りをR（≠数）とすると　　$A=BQ+R$

ゆえにB，Rの公約数はAの公約数です。また，　$R=A-BQ$

ですからA，Bが公約数があれば$A-BQ$はその公約数で割りきれます。したがって，Rはその公約数で割りきれます。したがって，

　AとBの公約数とBとRの公約数

とは一致します。

この性質を使ってA，Bの最大公約数を求めるのに次のようにすることができます。

Aの次数がBの次数より低くないときAをBで割って，割りきれればBが最大公約数です。余りが0以外の数ならAとBは互いに素です。余りが整式R_1のときにはR_1でBを割ります。割りきれればR_1が最大公約数，余りが0以外の数ならA，Bは互いに素，余りが整式R_2ならR_2でR_1を割ります。つまり，割ったものは，次に割られる，ということになります。この操作をくり返すだけ。整数の場合は大小が問題だったのに，ここでは整式の次数が問題になっているだけです。では，次の練習にいきましょう。

■練習 5. x^4+2x^2+x+2とx^3+3x^2+3x+2の最大公約数を求めよ。

（ヒント）x^4+2x^2+x+2をx^3+3x^2+3x+2で割って得る余りは$8x^2+8x+8$であるが，数係数は考えないのだからx^2+x+1としてよい。これでx^3+3x^2+3x+2を割ってみると割りきれる。さては最大公約数はx^2+x+1であったわけ。この計算を次のような方式でやります。

1 2	1	3	3	2	1	0	2	1	2	1 −3
	1	1	1		1	3	3	2		
		2	2	2		−3	−1	−1	2	
		2	2	2		−3	−9	−9	−6	
				0		8	8	8	8	
							1	1	1	

答　x^2+x+1

■練習 6. $2x^4-2x^3-x^2+2x-1$と$2x^3-6x^2+5x-2$の最大公約数を求めよ。

（解）ユークリッドの互除法によって，

1 −2	2	−6	5	−2	2	−2	−1	2	−1	1 2
	2	−2	1		2	−6	5	−2		
		−4	4	−2		4	−6	4	−1	
		−4	4	−2		4	−12	10	−4	
				0		3	6	−6	3	
							2	−2	1	

答　$2x^2-2x+1$

◆ G.C.M. と L.C.M. の関係

2式A，BのG.C.M.をGとすると

$$A=GA',\ B=GB'$$

とおくことができます。A'とB'は互いに素です。ゆえに，A，BのL.C.M.の値Lは

$$\boldsymbol{L=GA'B'}$$

G.C.M.とL.C.M.が与えられてA，Bを求める問題は，これを使うとできます。

■練習 7. 2つの整式がある。その最大公約数が$2x+1$，最小公倍数が$6x^3-7x^2-9x-2$のとき，この2つの整式を求めよ。

（明治大）

（解）2つの整式をA，Bとし，$G=2x+1$，$L=6x^3-7x^2-9x-2$とすると

$$A=GA',\ B=GB',\ L=GA'B'$$

A'，B'は互いに素な整式である。そして

$$\begin{aligned}A'B'&=L\div G=3x^2-5x-2\\&=(x-2)(3x+1)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{cases}A'=(x-2)(3x+1)\\B'=1\end{cases}$$

あるいは

$$\begin{cases}A'=x-2\\B'=3x+1\end{cases}$$

これに対応して求める2式A，Bは2通り。

$$\begin{cases}A=(x-2)(3x+1)(2x+1)\\\quad=6x^3-7x^2-9x-2\\B=2x+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=(x-2)(2x+1)=2x^2-3x-2\\B=(3x+1)(2x+1)=6x^2+5x+1\end{cases}$$

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◐交代式と対称式と

◆コウタイシキとかタイショウシキなどは知らなくてもさしつかえはありません。しかし，知っていると便利なもの。

◆ $a+b+c^2$ において a と b を交換すると $b+a+c^2$ となりますが，明らかに元の式に等しいのです。このように

2つの文字 a, b を交換して変わらない式を a, b についての 対称式 という。

x^2+xy+y^2 は x, y についての対称式ですが，x^2+2y^2 は対称式ではありません。

また $a+b+c$ は a, b についても対称式，b, c についても，c, a についても対称式です。このように，a, b, c のうち2つを勝手にとり変えても変わらない式を a, b, c についての対称式といいます。

$a^2+b^2+c^2$, $ab+bc+ca$ はいずれも a, b, c についての対称式ですが，

$a^2+b^2+c^3$, ab^2+bc^2+ca はいずれも a, b, c についての対称式ではありません。

* * *

◆ 2つの文字を交換するとき符号だけが変わるものがあります。例えば，$a-b$ において a, b を交換すると $b-a$ となり，これは $-(a-b)$ に等しい。つまり，符号だけが変わるのです。つまり

2つの文字 a, b を交換して，符号だけが変わる式を a, b についての 交代式 という。

$(a-b)(b-c)(c-a)$ もそうです。a と b を交換すると $(b-a)(a-c)(c-b)$ となり，これは $-(a-b)(b-c)(c-a)$ に等しく，元の式とは符号だけが変わるのです。なお，この式は a, b, c のうち任意の2つについて交代式です。これを，a, b, c についての交代式といいます。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b),$$
$$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$$

は，いずれも a, b, c についての交代式です。

* * *

◆ 交代式や対称式の間には次の重要な性質があります。例えば3個の文字 a, b, c について考えることにしましょう。

(交代式)×(交代式)＝(対称式)
(交代式)÷(交代式)＝(対称式)
(対称式)×(対称式)＝(対称式)
(対称式)÷(対称式)＝(対称式)
(交代式)×(対称式)＝(交代式)
(交代式)÷(対称式)＝(交代式)

といったぐあい。こんなことをいちいちオボエル必要はありません。

では，こんなことが何の役に立つか。2，3の例をあげてみましょう。

■練習 1. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ を因数に分解せよ。

ヒント 2つの文字を交換すると符号だけが変わりますから，交代式であることはすぐわかります。

また $a=b$ とおくと0になりますから因数定理によって $(a-b)$ で割りきれる。同様にして，$(b-c)$, $(c-a)$ で割りきれます。つまり，$(a-b)(b-c)(c-a)$ で割りきれるのです。

つまり，与えられた式は a, b, c に関する4次の交代式で3次の交代式 $(a-b)(b-c)\times(c-a)$ で割りきれるのですから，商は1次の対称式です。ところが1次の対称式は

$$k(a+b+c) \quad (k\text{ は定数})$$

しかありません。

$\therefore$ 与式$=(a-b)(b-c)(c-a)\{k(a+b+c)\}$ となりましょう。kをきめるには a^3b の係数を比較して

$$1=-k \qquad \therefore \quad k=-1$$

$\therefore$ 与式$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ となります。

* * *

◆ 2つの変数 x，y についての対称式を $=0$ とおいた方程式のグラフは，~~直線 $y=x$ について対称です。例えば，~~

$$x^2+y^2=1$$

のグラフは単位円で，確かに $y=x$ について対称です。このことはグラフをかくときに便利です。

■練習 2. $x^2-xy+y^2=3$ のグラフの概形をかけ。 （東大）

ヒント このグラフのかき方はいろいろありますが，ここではもっとも素朴な方法でやることにしましょう。x と y を交換して変わらないから $y=x$ について対称です。

yについて整理すると

$$y^2-xy+(x^2-3)=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{x\pm\sqrt{12-3x^2}}{2}$$

$$=\frac{x}{2}\pm\frac{\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$$

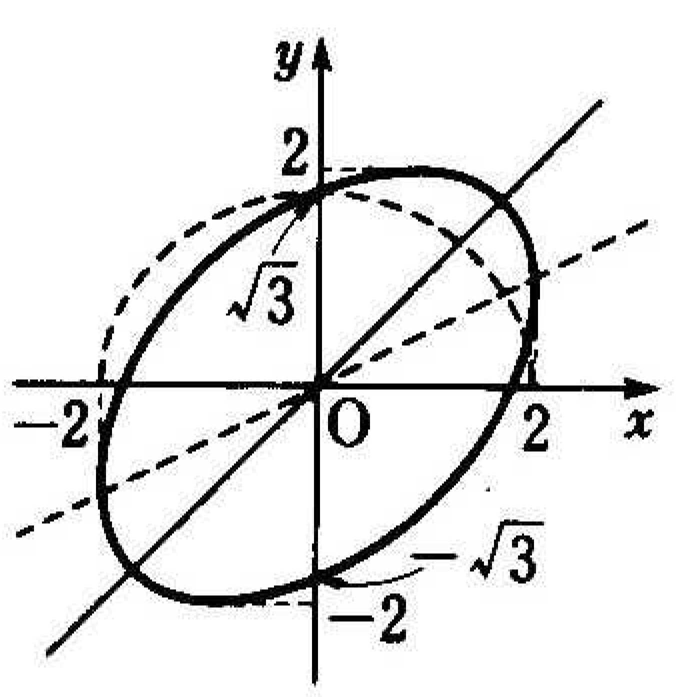
いま $\quad y_1=\dfrac{x}{2}$，$y_2=\dfrac{\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$

とおくと，

$$y_2{}^2=\frac{3(4-x^2)}{4} \quad (y_2\geqq 0)$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y_2{}^2}{3}=1$$

そこで，y_1，y_2 のグラフを別々にかいて合成すればよい。そのとき，$y=x$ について対称であることを考慮してかくのです。



* * *

◆ 対称式や交代式は証明問題にもよく現れてきます。その1つをやってみましょう。

■練習 3. a，b，c は互いに異なる実数で
$$a^3+b^3+2(a^2+b^2)=b^3+c^3+2(b^2+c^2)$$
$$=c^3+a^3+2(c^2+a^2)$$
が成立するとき $a+b+c$ の値を求めよ。

（北大）

ヒント $a^3+b^3+2(a^2+b^2)=b^3+c^3+2(b^2+c^2)$ を変形すると

$$a^3-c^3+2(a^2-c^2)=0$$

となります。左辺は a，c についての交代式ですから $(a-c)$ で割りきれて，その商は対称式になるハズ。実際には，そんなことをいわないでも因数分解すればいいのです。

さて，それは

$$(a-c)(a^2+ac+c^2+2a+2c)=0$$

$a\neq c$ だから

$$a^2+ac+c^2+2a+2c=0 \quad \cdots\cdots①$$

まったく同様にして

$$a^2+ab+b^2+2a+2b=0 \quad \cdots\cdots②$$

が得られるでしょう。①－②より

$$a(c-b)+(c^2-b^2)+2(c-b)=0$$

$$\therefore \quad (c-b)(a+c+b+2)=0$$

$c\neq b$ だから

$$a+b+c=-2$$

* * *

◆ 上に一端を示したように交代式や対称式は本質的に重要なものをもっているのですが，何も大上段にふりかぶって使うほどのものでもありません。つまり，交代式，対称式であることから方針をつかむこと，そして，答案には，それらをいっさい使わないでやる，というところが理想というものでしょう。では，最後に1問。

■練習 4. 連立方程式 $xy=12$，$x^2+y^2=25$ を解け。

答 $(\pm3,\ \pm4)$，$(\pm4,\ \pm3)$（複号同順）

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○分数式の計算法

◆分数式の加減乗除ほどケアレスミスの多いものはあるまい。人間というものは本質的に分数をキラウものではあるまいか。

◆ 分数式の計算で典型的なものを練習しておくのが目的です。さて，第1は約分から。

■練習 1. $\dfrac{(x^2-2x-3)(x^2+3x+2)}{(x^2-x-6)^2}$

を簡単にせよ。　(三重大)

ヒント　因数分解して約分して簡単にするのが目的です。では：——

$$与式=\frac{(x-3)(x+1)\cdot(x+1)(x+2)}{\{(x-3)(x+2)\}^2}$$
$$=\frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+2)}$$

注　これをさらに

$$=\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$$

とやる人がある。これは，まったく蛇足。

1/41

■練習 2. 次の式を簡単にせよ。

$$\frac{x^2-4}{2x^2-7x+3}\times\frac{x^2-x-6}{2x^2+3x-2}\div\frac{3x-6}{4x^2-4x+1}$$

(鹿児島大)

ヒント　因数分解して約分して簡単にするのは上と同じこと。では：——

$$与式=\frac{(x-2)(x+2)}{(2x-1)(x-3)}\times\frac{(x-3)(x+2)}{(2x-1)(x+2)}$$
$$\times\frac{(2x-1)^2}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3}$$

*　*　*

◆ 第2は分数式の加減です。これは通分してから計算する。複雑なときには，個々のものを簡単にしてからやるほうがよい。

■練習 3. 次の式を簡単にせよ。

$$\frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}+\frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}$$ (東京外大)

ヒント　まず分母を因数分解します。その上で通分ということになる。

つまり，

$$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2+1)$$
$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+1)$$

ですから

$$与式=\frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)}+\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

■練習 4. $\dfrac{x^3-x^2-4x+1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x^3-2x^2-9x+21}{x^2-5x+6}$

$+\dfrac{x^2-3x+8}{x^2-4x+3}$ を計算せよ。　(熊本女大)

ヒント　3つの分数の和ですが，分子の次数が大きい。このようなときには分子を分母で割って書きかえると簡単になることが多いものです。例えば，x^3-x^2-4x+1 を x^2-3x+2 で割ると商は $x+2$，余りは -3 ですから

$$第1項=x+2+\frac{-3}{(x-1)(x-2)}$$

となります。同じように

$$第2項=x+3+\frac{3}{(x-2)(x-3)}$$

$$第3項=1+\frac{x+5}{(x-1)(x-3)}$$

かくして

$$与式=-\frac{3}{(x-1)(x-2)}-\frac{3}{(x-2)(x-3)}$$
$$+\frac{x+5}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{1}{x-3}$$

……答

1/31

■練習 5.　$\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{x-6}{x-4}$

を計算せよ。　　(昭和女大)

(解)　与式

$$=\left(1+\frac{2}{x}\right)-\left(1+\frac{2}{x+1}\right)-\left(1-\frac{2}{x-3}\right)+\left(1-\frac{2}{x-4}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$=2\left\{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x-3)(x-4)}\right\}$$

$$=\frac{-8(2x-3)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

この種の計算でとくに大切なのはオイラーの等式で，これについては (☞ p. 52)。

*　*　*

◆ 最後に，**繁分数**の計算です。これはべつに新しいことがあるわけではありませんが，1つ1つていねいにやってゆくこと，暗算はマチガイのもとです。

1/31

■練習 6. 次の式を簡単にせよ。

$$\frac{7-\dfrac{6}{x+1}}{x-7-\dfrac{x^2-4}{x+\dfrac{2}{x+3}}}$$

(電通大)

(ヒント)　分母，分子を別々に計算したほうがいいでしょう。

$$\text{分子}=7-\frac{6}{x+1}=\frac{(7x+7)-6}{x+1}=\frac{7x+1}{x+1}$$

$$\text{分母}=x-7-\frac{x^2-4}{\dfrac{x^2+3x+2}{x+3}}$$

$$=x-7-\frac{(x^2-4)(x+3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=x-7-\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}$$

$$=\frac{(x^2-6x-7)-(x^2+x-6)}{x+1}=\frac{-7x-1}{x+1}$$

したがって

$$\text{与式}=\frac{7x+1}{x+1}\times\frac{x+1}{-(7x+1)}$$

$$=-1\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 7. 次の式を簡単にせよ。

$$\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x^2-x}{x-\dfrac{2-3x}{2x}}\right)\div\left(x-\frac{3}{1-\dfrac{1}{x}}\right)$$

(岡山大)

(ヒント)

$$\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x^2-x}{x-\dfrac{2-3x}{2x}}$$

$$=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x(2x-1)\cdot 2x}{2x^2+3x-2}$$

$$=\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x^2(2x-1)}{(2x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2(x+2)-2x^2(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{-x^3+4x^2}{(x-1)(x+2)}=\frac{-x^2(x-4)}{(x-1)(x+2)}$$

また　$x-\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{x}}=x-\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{x^2-4x}{x-1}$

$$=\frac{x(x-4)}{x-1}$$

$$\therefore\quad \text{与式}=\frac{-x^2(x-4)}{(x-1)(x+2)}\times\frac{x-1}{x(x-4)}$$

$$=-\frac{x}{x+2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

*　*　*

◆ 分数式の計算は，方程式にも不等式にも証明問題にも大小問題にもよく出てきますから，何も分数式計算をいわば専門にやる必要はありません。むしろ，証明問題などのとき，これは分数式の計算練習なんだぞ，と自分にいいきかせながらやることが大切です。では，1つやってみましょう。

1/31

■練習 8. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ のとき

$f(f(f(x)))$ を求めよ。　　(早大)

(ヒント)　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$$f(f(x))=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$$

$$=\frac{x+1}{x+2}$$

さらに，……　　答 $\dfrac{x+2}{2x+3}$

9

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○オイラーの等式の証明

◆オイラーの名前のついたものは多い。オイラー図，オイラーの等式，オイラーの定理，などなど。

◆　オイラーの等式は分数式の計算練習にちょうどいい。ついては，ここではもっぱら，**計算練習に徹してやる** のがいいのです。

では，さっそくはじめるとしようか。

練習 1. 次の等式を証明せよ。（名古屋市大）

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

（ヒント）まず，$a-b$，$b-c$，$c-a$ に統一しますと

$$左辺=-\frac{1}{(a-b)(c-a)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}-\frac{1}{(c-a)(b-c)}$$

となります。ここで，通分したときの分母が

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

であることに目をつけて通分しますと

$$左辺=-\frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

よって，証明された。

練習 2. 次の等式を証明せよ。

7/2

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

（解）$左辺=-\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}$

$$-\frac{b}{(b-c)(a-b)}-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{P}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここに

$$P=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$$

よって，証明された。

（注）分子が複雑になるとき，そのまま計算すると，とかく計算ちがいをおこすことになります。そこで，このように，分子をPとでもおいて，あとは分子の計算に専念するといいのです。このようなことが計算のコツというものです。

練習 3. 次の等式を証明せよ。（玉川大）

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$

（解）$左辺=-\dfrac{a^2}{(a-b)(c-a)}$

$$-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{P}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここに，

$$\begin{aligned}P&=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

よって，証明された。

練習 4. 次の等式を証明せよ。

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$$

（解）$左辺=-\dfrac{a^3}{(a-b)(c-a)}$

$$-\frac{b^3}{(b-c)(a-b)}-\frac{c^3}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{P}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここに，

$$\begin{aligned}P&=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\&=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)\end{aligned}$$

$=(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

{ } の中を b について整理すれば，

$=(b-c)\{(c-a)b^2+(c-a)cb$
$-a(c^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}$

{ } の中を c について整理して

$=(b-c)(c-a)\{(b-a)c+(b^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって，証明された。

*　*　*

◆ オイラーの等式ではありませんが，類似の形ということで，次を：——

練習 5. 1/2

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+a)(x+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$$

を簡単にせよ。　（国際商大）

（ヒント）　与式 $=\dfrac{x^2+(b+c)x+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x^2+(a+c)x+ac}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{(c-a)(c-b)}$

$=x^2A+xB+C$

ここに

$$A=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

$$B=\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$$

$$=-\frac{b+c}{(a-b)(c-a)}-\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}-\frac{a+b}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{P}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここに

$P=(b+c)(b-c)+(a+c)(c-a)+(a+b)(a-b)$
$=b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2=0$

$\therefore\quad B=0$

$C=\cdots\cdots\cdots\cdots=1$

したがって，……　答 1

練習 6. 次の式を計算せよ。 1/2

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

（解）　与式

$$=\frac{-\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{1}{abc}$$

答 $\dfrac{1}{abc}$

練習 7. 次の計算をせよ。

$$\frac{2(b+c)-3a}{(b-a)(c-a)}+\frac{2(c+a)-3b}{(c-b)(a-b)}+\frac{2(a+b)-3c}{(a-c)(b-c)}$$

（ヒント）　与式 $=-\dfrac{2(b+c)-3a}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{2(c+a)-3b}{(b-c)(a-b)}-\dfrac{2(a+b)-3c}{(c-a)(b-c)}$

$$=-\frac{P}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここに，

$P=\{2(b+c)-3a\}(b-c)$
$+\{2(c+a)-3b\}(c-a)$
$+\{2(a+b)-3c\}(a-b)$
$=2\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}$
$-3\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$
$=0$

$\therefore$　与式 $=0$

答 0

このような問題は数多く出されますが，いずれもキマッタことをキマッタ仕方で処理することが大切です。

うまいやり方は，あまりうまくない。では解答は書かないでおくが，自信のある人は何とかして次をやってみませんか。

練習 8. 1/2

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$ を簡単にせよ。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○部分分数に分けること

◆部分分数に分ける定理は大学でやるのですが，部分分数に分ける作業は高校でも必要です。かくて，必要は理論に先行する!!

◆ 理屈をいうより，実際やってみるほうが早そうだ。では，これを：——

練習 1. $\dfrac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

がつねに成り立つように定数 A，B，C の値を定めよ。 （慶大）

ヒント 両辺に $(x-1)(x^2+1)$ を掛けると

$$3x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$\therefore\quad 3x+1=(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)$$

これが恒等的に成り立つための条件は

$$A+B=0$$
$$-B+C=3$$
$$A-C=1$$

この連立方程式を解いて

$A=2,\ B=-2,\ C=1$ ……答

あるいは次のようにやってもよいのです。

$$3x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

これが恒等的に成り立つ。つまり，x が何であっても成り立たなければならない。そこで $x=1$ を代入しても成り立つ。そして，

$$4=2A\qquad\therefore\quad A=2$$

次に i（虚数単位）を代入すると，

$$3i+1=A(i^2+1)+(Bi+C)(i-1)$$

$$\therefore\quad 3i+1=(-B+C)i+(-B-C)$$

$$\therefore\quad 3=-B+C,\ 1=-B-C$$

これを解いて $B=-2,\ C=1$

注 あとの別解では $x=1$ を代入したり，$x=i$ を代入したりしました。しかし，この値はもとの式の分母を零にするんです。その値を代入してかまわないのでしょうか。かまわないのです。

なぜ，ナゼ，なぜ，……

練習 2. $\dfrac{4x^2}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{B}{1-x}+\dfrac{Cx+D}{1+x^2}$

がつねに成り立つように，定数 A，B，C，Dを定めよ。 （立命館大）

ヒント 分母をはらって

$$4x^2=A(1-x)(1+x^2)+B(1+x)(1+x^2)+(Cx+D)(1+x)(1-x)$$

この恒等式において

$x=1$ とおくと $4=4B$ $\therefore\ B=1$

$x=-1$ とおくと $4=4A$ $\therefore\ A=1$

$x=i$ とおくと $-4=(Ci+D)\cdot 2$

$$\therefore\quad Ci+D=-2$$

$$\therefore\quad C=0,\ D=-2$$

答 $A=1,\ B=1,\ C=0,\ D=-2$

注 $x=i$ を入れたくないという人もあろうか。そのときには，$x=0$ を代入すると

$$0=A+B+D$$

x^3 の係数を比べると

$$0=-A+B-C$$

$$\therefore\quad D=-2,\ C=0$$

が得られる。

練習 3. $\dfrac{x^2+2x-2}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

が恒等式となるように a，b，c の値を定めよ。 （徳島大）

ヒント さあ，まったく同じこと。

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

に目をつけて，分母をはらって考えてみてくださいよ。

答 $a=-1,\ b=2,\ c=-1$

* * *

◆ これを若干めんどうにすると，次のよう

なことになりましょう。

■練習 4.　恒等式

$$\frac{4x^2+x+4}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{x+\square}{x^2+\square}+\frac{\square}{x+\square}$$

が成り立つように，$\square$の中に適当な数を入れよ。　(大分大)

(ヒント)　$x^3-x^2+2x-2=x^2(x-1)+2(x-1)$

$=(x-1)(x^2+2)$

となりますから

$$\frac{4x^2+x+4}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

となるハズ。問題と比べてみると，おそらく $B=1$ なのでしょう。

分母をはらって両辺を比べてみると，

$4x^2+x+4=A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)$

$$\therefore\quad \begin{cases} 4=A+B \\ 1=-B+C \\ 4=2A-C \end{cases}$$

$\therefore\quad A=3,\ B=1,\ C=2$

であることがわかります。つまり，右辺は

$$\frac{x+2}{x^2+2}+\frac{3}{x+(-1)}$$

となるのです。

*　*　*

◆ では部分分数に分けることがどんな役に立つか，基解や微積への応用は多いのですが，ここでは数 I の範囲でいくつかをあげておきましょう。

7/2

■練習 5. $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}$

$+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$ を計算せよ。

(関西学院大)

(ヒント)　$\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$

$$\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$$

$$=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}$$

ですから

$$与式=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}\quad\cdots\cdots\ \text{答}$$

(注)　もちろん，通分してやってもできます。しかし，このほうがずっとラクなのです。次も同じです。

2/2

■練習 6. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}$

$+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$ を計算せよ。

(ヒント)　$\dfrac{1}{a(a+1)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}$

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$$

$$\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}$$

$$\therefore\quad 与式=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+3}=\frac{3}{a(a+3)}\quad\cdots\cdots\ \text{答}$$

2/2

■練習 7. $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{a^2}{(1+a)(1+a+a^2)}$

$+\dfrac{a^3}{(1+a+a^2)(1+a+a^2+a^3)}$

を簡単にせよ。

答　$\dfrac{a+a^2+a^3}{1+a+a^2+a^3}$

*　*　*

◆ 練習 4. の (ヒント) をみて，ちょっとひっかかるものを感じた人もありましょう。部分分数に分解することについて，次の定理があるのです。分母の次数が分子より大きい有理式で分母，分子に公約数がないとき，分母を因数分解して

$$(x-\alpha)(x-\beta)^2(x^2+px+q)^2$$

となったとしますと，この式は

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}$$

$$+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}$$

の形に分解できるのです。ただし，大文字はすべて実数です。

○比と比例と比例式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆比の求め方，比例式の使い方，それが主眼点です。比の求め方なども，いわば盲点，あんがいわかっていないもの。

◆ まず，比の求め方からはじめるとしましょう。

練習 1. $3x+4y=0$ のとき $x:y$ を求めよ。

ヒント　xについて解くと

$$x=-\frac{4}{3}y$$

$\therefore\ x:y=-\frac{4}{3}y:y=-\frac{4}{3}:1=-4:3$

もちろん，$4:-3$ でもかまわない。

練習 2. $x+2y-5z=0$，$3x+4y-11z=0$ のとき $x:y:z$ を求めよ。

ヒント　$x+2y=5z$　……①

$3x+4y=11z$　……②

②−①×2 より

$$x=z$$

①×3−② より

$$2y=4z \quad \therefore\ y=2z$$

$\therefore\ x:y:z=z:2z:z=1:2:1$

答　$1:2:1$

練習 3. $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}$ のとき

$x:y:z$ を求めよ。　（埼玉大）

ヒント　2つに分けて，x，y を z で表して練習2. のようにしてもいいが，やはり $=k$ とおくほうが簡単である。すなわち

$$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k$$

とおくと

$x+y=3k$　……①

$y+z=4k$　……②

$z+x=5k$　……③

{①+②+③}÷2 より

$x+y+z=6k$　……④

④−②，④−③，④−① より

$$x=2k,\ y=k,\ z=3k$$

$\therefore\ x:y:z=2k:k:3k$

$=2:1:3$

練習 4. x，y，z は実数で，かつ $xyz\neq0$ とする。

$$5x+4y+2z=0$$

$$8x^3+27y^3+125z^3-90xyz=0$$

のとき $x:y:z$ を求めよ。　（北大）

ヒント　第2式が因数分解できることに気がつけば簡単です。

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$$
$$\boldsymbol{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$
$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}(a+b+c)}$$
$$\boldsymbol{\times\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}}$$

ですから a，b，c が実数なら

$a+b+c=0$　あるいは　$a=b=c$

なのです。

さて，

$$8x^3+27y^3+125z^3-90xyz$$
$$=(2x)^3+(3y)^3+(5z)^3-3(2x)(3y)(5z)$$

ですから

$2x+3y+5z=0$　あるいは　$2x=3y=5z$

$2x+3y+5z=0$ と $5x+4y+2z=0$ から

$$x:y:z=2:-3:1$$

また，$2x=3y=5z$ のときには　$x=\frac{5}{2}z$，$y=\frac{5}{3}z$，これを $5x+4y+3z=0$ に代入すると $z=0$ となって不合理になります。結局，答は　$x:y:z=2:-3:1$　だけです。

この練習4. はゴタゴタしていていやな問題でしたね。ともあれ，これで比を求めることは卒業として，次は比例式の扱い方です。

＊　＊　＊

◆ 比例式というのは

$$a:b=c:d$$

のように比を等しいとおいたもので，分数式

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

でも同じことです。

これらは **$=k$ とおいて k で表す** のが定石。では，次の練習をやってみませんか。

7/2

■練習 5. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ のとき

比 $(y+z):(z+x):(x+y)$ の値を求めよ。　(都立大)

(解) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}=k$ とおくと

$$x=3k,\ \ y=2k,\ \ z=k$$

$$\therefore\ (y+z):(z+x):(x+y)$$
$$=3k:4k:5k=3:4:5$$

7/2　　　　答 $3:4:5$

■練習 6. $x:y:z=-2:1:4$ のとき

$\dfrac{(x+y-z)^2}{x^2+y^2-z^2}$ の値を求めよ。

(解) $x:y:z=-2:1:4$

$$\therefore\ \frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$$

この式の値を k とおくと

$$x=-2k,\ \ y=k,\ \ z=4k$$

$$\therefore\ 原式=\frac{25k^2}{4k^2+k^2-16k^2}=-\frac{25}{11}\ \cdots\cdots 答$$

＊　＊　＊

◆ 条件式が比例式の証明問題も少なくありません。いずれも k とおくのが定石です。

では，これを：——

■練習 7. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ のとき

$\dfrac{a}{d}=\left(\dfrac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3$ を証明せよ。

(ヒント) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=k$ とおきましょう。そうすると，

$$a=bk,\ \ b=ck,\ \ c=dk$$

$$\therefore\ b=ck=dk\cdot k=dk^2$$
$$a=bk=dk^2\cdot k=dk^3$$

$$\therefore\ 左辺=\frac{dk^3}{d}=k^3$$

$$右辺=\left(\frac{dk^3+dk^2+dk}{dk^2+dk+d}\right)^3$$
$$=\left(\frac{dk(k^2+k+1)}{d(k^2+k+1)}\right)^3=k^3$$

よって証明された。 7/2

■練習 8. $a>0,\ b>0,\ c>0$ で

$$\frac{c}{a+2b}=\frac{a}{b+2c}=\frac{b}{c+2a}$$

のとき，この分数式の値を求めよ。

(ヒント) $\dfrac{c}{a+2b}=\dfrac{a}{b+2c}=\dfrac{b}{c+2a}=k$

とおくと

$$c=(a+2b)k \qquad \cdots\cdots ①$$
$$a=(b+2c)k \qquad \cdots\cdots ②$$
$$b=(c+2a)k \qquad \cdots\cdots ③$$

①＋②＋③ を作ると

$$a+b+c=3(a+b+c)k \qquad \cdots\cdots ④$$

$a,\ b,\ c$ は正であるから　$a+b+c>0$

そこで④の両辺を $a+b+c$ で割って

$$1=3k$$

$$\therefore\ k=\frac{1}{3}$$

答 $\dfrac{1}{3}$

(注) $k=\dfrac{1}{3}$ を①，②に代入して変形しますと

$$a+2b=3c \qquad \cdots\cdots(\text{i})$$
$$3a-b=2c \qquad \cdots\cdots(\text{ii})$$

(i)＋(ii)×2 を作ると

$$7a=7c$$
$$\therefore\ a=c$$

(i)×3－(ii) を作ると

$$7b=7c$$
$$\therefore\ b=c$$
$$\therefore\ a=b=c$$

つまり，$a,\ b,\ c$ がすべて等しいとき与えられた比例式が成り立つのです。

○比の求め方とその応用

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆比を求めよ，という問題は少ないのですが，比を求めて，それをもとにして解く問題は多いのです。

◆ $a:b$ や $a:b:c$ を **比** といいます。**比 $a:b$ の値** とは $\dfrac{a}{b}$ のことです。比の値を求めよ，という問題に対して 2：3 といった答を書く人が圧倒的に多いもの。注意してくださいよ。

また，$a:b=c:d$ のような式を **比例式** といいます。$a:b:c=d:e:f$ も比例式です。なお，あまり使いませんが $a:b=b:c$ とか $a:b=b:c=c:d$ のように，同じ量が重複して出てくるとき，**連比例**（れんぴれい）するということもあります。

さて，比の求め方ですが，具体的な例からはじめましょう。

■練習 1. $3x+2y-3z=0$, $2x-6y-13z=0$ であるとき $x:y:z$ を求めよ。（高知大）

（解） $3x+2y=3z$ ……①

$2x-6y=13z$ ……②

①×3+②： $11x=22z$ ∴ $x=2z$

①×2−②×3： $22y=-33z$

$$\therefore\ y=-\frac{3}{2}z$$

$$\therefore\ x:y:z=2z:-\frac{3}{2}z:z=4:-3:2$$

答 $4:-3:2$

■練習 2. $x-2y+z=0$, $x^2+y^2-2z^2=0$ であるとき $x:y:z$ を求めよ。

（解） 第1式より，$x=2y-z$ これを第2式に代入して x を消去すると

$$(2y-z)^2+y^2-2z^2=0$$

$$\therefore\ 5y^2-4yz-z^2=0$$

因数分解して

$$(5y+z)(y-z)=0$$

$$\therefore\ z=-5y\ \text{あるいは}\ z=y$$

$z=-5y$ のとき $x=2y+5y=7y$

$\therefore\ x:y:z=7y:y:-5y=7:1:-5$

$z=y$ のとき $x=2y-y=y$

$\therefore\ x:y:z=y:y:y=1:1:1$

答 $7:1:-5$, $1:1:1$

ともあれ，この種の比を求めるコツは1次式のほうを用いて，1つの文字を消去することです。必ずといってよいくらい因数分解できます。因数分解できなければ，解の公式を使って解けばよい。無理数が出てわるいことはないのですから。

* * *

◆ 比を求めることがわかると，次に分数式の値を求めるのが順序。では，次をやってみませんか。

■練習 3. $6x-y+3z=-2x+5y+9z$ $=8x-5y+z$, $xyz\neq 0$ のとき $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2+z^2}$ の値を求めよ。（阪大）

（ヒント） 2つの考え方があります。1つは

$6x-y+3z=-2x+5y+9z$

より $4x-3y-3z=0$ ……①

$6x-y+3z=8x-5y+z$

より $x-2y-z=0$ ……②

①，②より $x:y:z=3:-1:5$

$$\therefore\ \frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{5}=k$$

とおいて $x=3k$, $y=-k$, $z=5k$ が得られます。これを与えられた分数式に代入して $\dfrac{35}{33}$ が得られます。

いま1つの方法は与えられた式を $=k$ とおいて，

$$6x-\ y+3z=k$$
$$-2x+5y+9z=k$$
$$8x-5y+\ z=k$$

を x, y, z について解くのです。問題によってはこのほうが楽なこともあります。

では念のためもう1つやってみませんか。

練習 4. $\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{z+x}{4}=\dfrac{x+y}{2}$ のとき $\dfrac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ の値を求めよ。 (創価大)

ヒント $\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{z+x}{4}=\dfrac{x+y}{2}=k$ とおくと

$$y+z=3k,\ z+x=4k,\ x+y=2k$$

3式を辺々相加えて2で割ると

$$x+y+z=\frac{9}{2}k$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2}k,\ y=\frac{1}{2}k,\ z=\frac{5}{2}k\cdots\cdots(*)$$

これを代入して $\dfrac{33}{35}$ が得られます。なお (*) をみると，はじめ $=k$ とおかずに $=2k$ とおけばよかったのだが，それはあとの祭り!! (というよりも，余裕があれば，そうおきなおすのがよいのです)

* * *

◆ ここで，証明問題への応用をやっておきましょう。

2/3

練習 5. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ のとき $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$ を証明せよ。 (秋田大)

ヒント $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=k$ とおくと $x=ak$, $y=bk$ を得る。ここまではいいが，これからあとを次のようにやる人がスゴク多い。これはいけません。すなわち：――

$x=ak$, $y=bk$ を代入して

$$\frac{a^2k^2}{a^2}=\frac{a^2k^2-abk^2+b^2k^2}{a^2-ab+b^2}$$

$$\therefore\quad 1=1$$

ゆえに成り立つ。これではまるで $1=1$ を証明したみたいだ!! これはあくまでも次のようにやるべきです。

$$左辺=\frac{a^2k^2}{a^2}=k^2$$

$$右辺=\frac{a^2k^2-abk^2+b^2k^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{(a^2-ab+b^2)k^2}{a^2-ab+b^2}$$
$$=k^2$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}\qquad \text{Q.E.D.}$$

2/3

練習 6. $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{c+a}{c-a}\neq0$ であるとき，次の関係式を導け。 (法政大)

(1) $a+b+c=0$ (2) $a^2+b^2+c^2=0$

解 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{c+a}{c-a}=k$ とおくと

$$a+b=(a-b)k\qquad\cdots\cdots①$$
$$b+c=(b-c)k\qquad\cdots\cdots②$$
$$c+a=(c-a)k\qquad\cdots\cdots③$$

(1)は，①+②+③ を作れば

$$2(a+b+c)=0$$
$$\therefore\quad a+b+c=0\qquad\cdots\cdots④$$

(2)についても

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

を変形して同じようにできますが，比を使えば①，②，③ より

$$a:b=-(1+k):1-k$$
$$b:c=-(1+k):1-k$$
$$c:a=-(1+k):1-k$$
$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$$

これを改めて $=k$ とおくと $k\neq1$ はすぐわかる。そして，

$$a=bk,\ b=ck,\ c=ak$$
$$\therefore\quad a=(ck)k=ak^3\qquad \therefore\quad k^3=1$$
$$b=(ak)k=ak^2$$
$$\therefore\quad a+b+c=a(k^3+k^2+k)$$
$$=a(1+k+k^2)=0$$

また $a^2+b^2+c^2=a^2(k^6+k^4+k)$
$$=a^2(1+k^2+k)=0$$
$$(\because\ k は 1 の虚数立方根)$$

ここで1の虚数立方根の性質を使いましたが，それについては (☞ p. 122) を参照。

◯ 比を求める公式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆比を求める公式は代数幾何，とくに空間図形ではスゴク役に立ちます。ムリにとはいいませんがオボエテおきたいもの。

◆　$ax+by+cz=0$
　　$a'x+b'y+c'z=0$

から $x:y:z$ を求めるのに便利な公式があります。それは，下のように，係数をならべて

$$\begin{array}{cccc} b & c & a & b \\ b' & c' & a' & b' \end{array}$$

次に $bc'-b'c$, $ca'-c'a$, $ab'-a'b$ を作るのです。そうすると

$$x:y:z$$
$$=bc'-b'c:ca'-c'a:ab'-a'b$$

となります。

2/3

■練習 1. $x+2y+3z=0$, $3x+y+4z=0$ であるとき $x:y:z$ を求めよ。

解

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$
$$5 \quad 5 \quad -5$$

$\therefore\ x:y:z=5:5:-5$
$\qquad =1:1:-1$　……答

では，もうひとつ。

2/3

■練習 2. $3x+y+7z=0$, $x+4y+2z=0$ であるとき $x:y:z$ を求めよ。

解

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$
$$-26 \quad 1 \quad 11$$

$\therefore\ x:y:z=-26:1:11$　……答

これを応用して4数の場合を扱ってみましょう。

■練習 3.　$x+2y+3z+u=0$　……①
　$4x+y+2z+u=0$　……②
　$5x+3y+z+u=0$　……③

のとき $x:y:z:u$ を求めよ。

ヒント　①－②，②－③を作ると

$-3x+y+z=0$　……④
$-x-2y+z=0$　……⑤

そこで④，⑤から，左の公式を使って比を求めてみますと次のようになります。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}$$
$$3 \quad 2 \quad 7$$

つまり $x:y:z=3:2:7$ であることがわかりました。

だから

$$x=3k,\ y=2k,\ z=7k$$

とおくことができます。これを①，②，③のどれかに代入しましょう。①にしようか。

$$3k+4k+21k+u=0$$
$$\therefore\quad u=-28k$$
$$\therefore\quad x:y:z:u=3:2:7:-28$$

実際上は k なんか使わないでも，$x=3$, $y=2$, $z=7$ を①に代入して u を求めれば -28 となります。では，もうひとつやってみませんか。

2/4

■練習 4.　$x+2y+3z+4u=0$　……①
　$2x+y+2z+u=0$　……②
　$3x+y+4z+2u=0$　……③

のとき $x:y:z:u$ を求めよ。

ヒント　y を消去してみましょうか。

①－②×2：$-3x-z+2u=0$　……④
②－③：　$-x-2z-u=0$　……⑤

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \end{array}$$
$$5 \quad -5 \quad 5$$

$$\therefore\quad x:z:u=1:-1:1$$

したがって

$$x:y:z:u=1:-1:-1:1 \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ では，この公式をオボエタところで，少しめんどうな応用例を扱ってみましょうか。

9/4

■練習 5. $x,\ y,\ z$ が正数で

$$\frac{z}{2x+3y}=\frac{x}{2y+3z}=\frac{y}{2z+3x}$$

のとき，この分数式の値を求めよ。

ヒント $=k$ とおくと

$$\frac{z}{2x+3y}=k \quad \text{より}$$

$$2kx+3ky-z=0 \qquad \cdots\cdots①$$

同様にして

$$x-2ky-3kz=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$3kx-y+2kz=0 \qquad \cdots\cdots③$$

①，②より $x:y:z$ を求めてみますと

$$\begin{array}{cccc} 3k & -1 & 2k & 3k \\ -2k & -3k & 1 & -2k \end{array}$$

$x:y:z$

$=(-9k^2-2k):(-1+6k^2):(-4k^2-3k)$

これを③に代入して

$$3k(-9k^2-2k)-(-1+6k^2)+2k(-4k^2-3k)=0$$

$$\therefore\quad 35k^3+18k^2-1=0$$

$$\therefore\quad (5k-1)(7k^2+5k+1)=0 \cdots\cdots(*)$$

$x,\ y,\ z>0$ であるから $k>0$

$$\therefore\quad 5k-1=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{5}$$

そして，このとき $x=y=z$ であることが上の比からすぐ求められます。そこで，$x,\ y,\ z$ が正数という条件をとり去ったらどうなるだろうか。

■練習 6. $x,\ y,\ z$ が実数で

$$\frac{z}{2x+3y}=\frac{x}{2y+3z}=\frac{y}{2z+3x}$$

のとき，この分数式の値を求めよ。

ヒント 上の計算はそのまま使えて，$(*)$まではそのとおりです。さて，その後はどうなるか。

$$7k^2+5k+1=0$$

の判別式をDとしますと

$$D=5^2-4\cdot7\cdot1=25-28=-3<0$$

つまりkが虚数になってしまう。しかし，$x,\ y,\ z$が実数なら，kが虚数になるハズがない。

さてこそ，$k=\dfrac{1}{5}$ $(x=y=z)$だけになるのです。では，$x,\ y,\ z$が虚数でもいいとするとどうなるか。

■練習 7. $x,\ y,\ z$ が複素数で

$$\frac{z}{2x+3y}=\frac{x}{2y+3z}=\frac{y}{2z+3x}$$

のとき，この分数式の値を求めよ。

ヒント おなじ，全くおなじ，$(*)$までは上のとおりやってきます。しかし，$(*)$を解くと

$$k=\frac{1}{5},\quad \frac{-5\pm\sqrt{3}\,i}{14}$$

と3つでてくるのです。そして

$k=\dfrac{1}{5}$ となるのは $x=y=z$ のとき

$k=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}\,i}{14}$ となるのは $x+y+z=0$

のときなのです。なぜなら

$$(-9k^2-2k)+(-1+6k^2)+(-4k^2-3k)$$

$$=-7k^2-5k-1=0$$

となるからです。

実は

$$\frac{z}{2x+3y}=\frac{x}{2y+3z}=\frac{y}{2z+3x}=k$$

とおくと

$$z=(2x+3y)k$$

$$x=(2y+3z)k$$

$$y=(2z+3x)k$$

を辺々相加えて

$$x+y+z=5(x+y+z)k$$

$$\therefore\quad (x+y+z)(5k-1)=0$$

これから求めることもできますが，上のやり方はより一般的なのです。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○整数とは何か

◆整数の性質を研究する分野を≪整数論≫といいます。人類最大の数学者ガウスは，整数論は数学の女王であるといったそうな。

◆ 1，2，3，…… のような数を **自然数** といいます。ときどき0を自然数だと思っている人に出会う。しかし，これはまちがいです。それにしてもなぜ0を入れないのか，と気になる人があるかもしれません。実は，自然数という概念はギリシアから出ています。ところがギリシアでは0という数はなかったから，0を含めるハズもない，というわけ。

注意深い人なら，ソウカ，0ガナカッタノカ。ソレニシテモ，ナゼ0ガナカッタノカ？と疑問を出すかもしれません。実は，それはギリシアの記数法のせいなんです。ギリシアでは1をαで，2をβで，3をγで，…… といったぐあいに表現していました。これでは0は必要ありません。それにしても，なぜそんな記数法を使ったのか，……と，疑問は次次に出てきますが，ここで深入りすることはやめましょう。

*　*　*

◆ 自然数の集合は N で表すのがふつうです。だから

$$n \in N$$

とあったら，nは集合Nに含まれている。つまりnは自然数である，ということを表しています。

自然数を **正の整数** ともいいます。これに対し，

$$-1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots$$

を **負の整数**，さらに整数0をつけ加えて

$$\cdots\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

のことを **整数** というのです。そして，ふつう整数の集合をZで表します。

つまり，集合は｛　｝で表しますから

$$Z=\{\cdots\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\}$$

と書けます。あるいは

$$Z=\{\text{整数}\}$$

と書いてもかまいません。

さて，整数の性質としてもっとも大切なことは，任意の2つの整数を加えるとやはり整数だということです。記号で書くと

$$a\in Z,\ b\in Z\ \text{ならば}\quad a+b\in Z$$

だということ。このことを整数の集合Zは加法について **閉じている** といいます。加法が可能である，ということもあります。

Zが減法についても，乗法についても閉じていることがわかるでしょう。しかし，除法については閉じていません。なぜなら，整数を整数で割っても一般に整数にならないからです。では，次の練習をやってみませんか。

■練習 1. $a\circ b=a+2b$ のとき次の値を求めよ。

(1) $1\circ 3$　(2) $(1\circ 2)\circ 3$

(解) (1) $1\circ 3=1+2\times 3=7$

(2) $(1\circ 2)\circ 3=(1+2\times 2)\circ 3=5\circ 3$
$=5+2\times 3=11$

■練習 2. $a\circ b=a+b-ab$ のとき $4\circ 3$ と $3\circ 4$ は等しいか。

(ヒント) $4\circ 3$ と $3\circ 4$ を別々に計算してみればいい。　　(答) 正しい。

■練習 3. 自然数の集合Nは次の演算について閉じているか。

$$a*b=ab+a-b$$

(ヒント) $a\in N$，$b\in N$ なら，つまり，a，bが自然数なら $ab+a-b$ が整数であることは確

かです。そこで，$ab+a-b$ が正であることが証明できれば自然数ということになりましょう。ところが

$$ab+a-b=b(a-1)+a$$

の第1項は負にならず，第2項は正であるから，確かに

$$ab+a-b>0$$

これで閉じていることがわかった。

練習 4. 自然数全体の集合Nにおいて，演算$*$を $a*b=|a-b|$ のように定義する。

(1) $3*5$ を求めよ。

(2) $5*x=12$ を解け。

解 (1) $3*5=|3-5|=|-2|=2$

(2) $5*x=|5-x|=|x-5|$

$\therefore\ |x-5|=12 \quad \therefore\ x-5=\pm 12$

$\therefore\ x=17,\ -7$

-7 は自然数でないから適さない。

答 17

*　*　*

◆ 整数について大切なことは4つあります。第1は方程式の整数解を求める問題です。これについては整数解の求め方（☞ p.160）を参照してください。第2は約数の個数だとか，最大公約数・最小公倍数（☞ p.66）だとか，第3は，割りきれるとか余りを求めるとかいった種類のもの（☞ p.68），第4は剰余類の扱い方（☞ p.164）です。これらについては，それぞれ，その項目を参照してください。ここでは，整数と整式の似ている点，ちがう点について述べておきましょう。もし，整式について習っていないなら，このページの終わりまでは読まなくて結構です。

（1） 定義について

-4 とか 5 とかは整数ですが，整式のときはxについて分数式や無理式などでなければいいのです。つまり，係数には分数や無理数が入ってもかまいません。だから

$2x^3+4x^2+x+5$ はもちろん整式ですが，

$\dfrac{2}{3}x^4+\sqrt{3}x^3+5x+1$ も整式です。とくに係数が整数のものをいいたいときには，「整数係数の整式」といえばいいのです。

このことは完全平方数などでも同じ。1や4や9は $1^2,\ 2^2,\ 3^2$ に等しく，いうまでもなく完全平方数です。しかし，$3=(\sqrt{3})^2$ は完全平方数といわない。同じく，$2x^2+2\sqrt{2}x+1$ は $(\sqrt{2}x+1)^2$ に等しいから完全平方式といいますが，$x+1$ は $(\sqrt{x+1})^2$ に等しいからといって，完全平方式とはいわないのです。

いま1つ，$x+1$ は完全平方式ではありませんが，xに数を入れると完全平方数を表すことがあります。例えば $x=3$ とおくと，$x+1=4=2^2$ となるから。このような点がしばしば混乱のもととなって整数問題をイヤにする原因となっています。

では，次にもう1つ。

（2） 整数と整式の除法について

123 を 5 で割ると，商は24，余りは3ですから

$$123=5\times 24+3$$

なる関係が成り立ちます。一般に

整数Nをaで割って商がq，余りがrになると

$$N=aq+r \qquad (r\geqq 0)$$

なる関係が成立します。まったく同じく整式についても，整式 $f(x)$ を整式 $a(x)$ で割って商が $Q(x)$，余りが $R(x)$ になりますと

$$f(x)=a(x)Q(x)+R(x)$$

なる関係が成り立つのです。だから，これをもとにして導かれた関係は整式でも整数でも成り立つ，ということになりましょう。

2/4

練習 5. 整数Nを13で割ったら商は5，余りは3となった。もとの整数Nを求めよ。

解 $N=13\times 5+3=68$

練習 6. 325 をnで割ったら商46，余り3となった。nを求めよ。

解 $325=n\cdot 46+3$ より　$n=7$

素数というもの

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆与えられた任意の数が素数であるかどうかを判定する方法は発見されていない。とはいえ，素数で順々に割るなら話は別だ。

◆ **素数**（そすう）とは，1より大きい整数で，**1とそれ自身以外に正の約数をもたない**ものをいいます。素数を求めるには古代ギリシアの「エラストテネス（B.C. 275～194）のふるい」というのが知られています。

これは：——

~~1~~ ② ③ ~~4~~ ⑤ ~~6~~ ⑦ ~~8~~ ~~9~~
~~10~~ ⑪ ~~12~~ ⑬ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ ⑰ ~~18~~
⑲ ~~20~~ ~~21~~ ……………

のように，自然数を並べておいて

まず1を消す
2を残し，2の倍数をすべて消す
3を残し，3の倍数をすべて消す
5を残し，5の倍数をすべて消す

このように素数を残し，その倍数を消してゆくのです。

ある数が素数であるかどうかを調べるには素数表をもとに順に割ってゆくより仕方がありません。例えば 4294967297 が素数かと問われれば，2, 3, 5, 7, ……で順次割ってみるより仕方がないのです。実は，この数は

$$641\times6700417$$

と表され，素数ではありません。

（注）素数と《互いに素》というコトバを混同してはいけません。互いに素というのは，4と9のように，1以外に公約数をもたないものをいうのです。2つの素数が互いに素であることはいうまでもありません。

＊　＊　＊

◆ さて，素数に関する問題はキマッタ方法がないためイヤな分野ですが，それだけに数学のスキな人は好む傾向があります。無理にやることもありませんが，次の練習を。

7/4

■練習1. n^4+4 が素数となるように，自然数 n を定めよ。

（解） $n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2$
$=(n^2+2)^2-(2n)^2$
$=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$

したがって，n^4+4 が素数になるためには小さいほうの因数が1であることが必要である。すなわち

$$n^2-2n+2=1 \quad \therefore \quad n=1$$

そして，$n=1$ のとき $n^4+4=5$ で，これは素数である。　　（答） $n=1$

7/6

■練習2. n が自然数のとき

$$n(n+1)(n+2)(n+3)-15$$

が素数を表すことがあるか。

（ヒント） $n(n+1)(n+2)(n+3)-15$
$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)-15$

$n^2+3n+1=x$ とおくと
$=(x-1)(x+1)-15=x^2-16$
$=(x+4)(x-4)$
$=(n^2+3n+5)(n^2+3n-3)$

素数を表すためには $n^2+3n-3=1$ が必要です。これから $n=1$ が必要。しかし，このとき $n^2+3n+5=9$ で，これは素数でないので不適。結局，素数を表すことはない。

■練習3. q は正の整数で，$p=2^q-1$ とする。$q=4$ のとき p は素数でないことを確かめよ。　　（神戸商船大）

（ヒント） 考えることとてなし。

$$p=2^4-1=16-1=15=3\times5$$

確かに p は素数ではありませんね。しかし p が素数なら q も素数であることが証明できるのです。

◆素　数　表〔1～10000〕◆

2	307	691	1117	1579	2063	2549	3037	3547	4051	4591	5107	5657	6203	6737	7307	7867	8431	8999	9521
3	11	701	23	83	69	51	41	57	57	97	13	59	11	61	09	73	43	9001	33
5	13	09	29	97	81	57	49	59	73	4603	19	69	17	63	21	77	47	07	39
7	17	19	51	1601	83	79	61	71	79	21	47	83	21	79	31	79	61	11	47
11	31	27	53	07	87	91	67	81	91	37	53	89	29	81	33	83	67	13	51
13	37	33	63	09	89	93	79	83	93	39	67	93	47	91	49	7901	8501	29	87
17	47	39	71	13	99	2609	83	93	99	43	71	5701	57	93	51	07	13	41	9601
19	49	43	81	19	2111	17	89	3607	4111	49	79	11	63	6803	69	19	21	43	13
23	53	51	87	21	13	21	3109	13	27	51	89	17	69	23	93	27	27	49	19
29	59	57	93	27	29	33	19	17	29	57	97	37	71	27	7411	33	37	59	23
31	67	61	1201	37	31	47	21	23	33	63	5209	41	77	29	17	37	39	67	29
37	73	69	13	57	37	57	37	31	39	73	27	43	87	33	33	49	43	91	31
41	79	73	17	63	41	59	63	37	53	79	31	49	99	41	51	51	63	9103	43
43	83	87	23	67	43	63	67	43	57	91	33	79	6301	57	57	63	73	09	49
47	89	97	29	69	53	71	69	59	59	4703	37	83	11	63	59	93	81	27	61
53	97	809	31	93	61	77	81	71	77	21	61	91	17	69	77	8009	97	33	77
59	401	11	37	97	79	83	87	73	4201	23	73	5801	23	71	81	11	99	37	79
61	09	21	49	99	2203	87	91	77	11	29	79	07	29	83	87	17	8609	51	89
67	19	23	59	1709	07	89	3203	91	17	33	81	13	37	99	89	39	23	57	97
71	21	27	77	21	13	93	09	97	19	51	97	21	43	6907	99	53	27	61	9719
73	31	29	79	23	21	99	17	3701	29	59	5303	27	53	11	7507	59	29	73	21
79	33	39	83	33	37	2707	21	09	31	83	09	39	59	17	17	69	41	81	33
83	39	53	89	41	39	11	29	19	41	87	23	43	61	47	23	81	47	87	39
89	43	57	91	47	43	13	51	27	43	89	33	49	67	49	29	87	63	99	43
97	49	59	97	53	51	19	53	33	53	93	47	51	73	59	37	89	69	9203	49
101	57	63	1301	59	67	29	57	39	59	99	51	57	79	61	41	93	77	09	67
03	61	77	03	77	69	31	59	61	61	4801	81	61	89	67	47	8101	81	21	69
07	63	81	07	83	73	41	71	67	71	13	87	67	97	71	49	11	89	27	81
09	67	83	19	87	81	49	99	69	73	17	93	69	6421	77	59	17	93	39	87
13	79	87	21	89	87	53	3301	79	83	31	99	79	27	83	61	23	99	41	91
27	87	907	27	1801	93	67	07	93	89	61	5407	81	49	91	73	47	8707	57	9803
31	91	11	61	11	97	77	13	97	97	71	13	97	51	97	77	61	13	77	11
37	99	19	67	23	2309	89	19	3803	4327	77	17	5903	69	7001	83	67	19	81	17
39	503	29	73	31	11	91	23	21	37	89	19	23	73	13	89	71	31	83	29
49	09	37	81	47	33	97	29	23	39	4903	31	27	81	19	91	79	37	93	33
51	21	41	99	61	39	2801	31	33	49	09	37	39	91	27	7603	91	41	9311	39
57	23	47	1409	67	41	03	43	47	57	19	41	53	6521	39	07	8209	47	19	51
63	41	53	23	71	47	19	47	51	63	31	43	81	29	43	21	19	53	23	57
67	47	67	27	73	51	33	59	53	73	33	49	87	47	57	39	21	61	37	59
73	57	71	29	77	57	37	61	63	91	37	71	6007	51	69	43	31	79	41	71
79	63	77	33	79	71	43	71	77	97	43	77	11	53	79	49	33	83	43	83
81	69	83	39	89	77	51	73	81	4409	51	79	29	63	7103	69	37	8803	49	87
91	71	91	47	1901	81	57	89	89	21	57	83	37	69	09	73	43	07	71	9901
93	77	97	51	07	83	61	91	3907	23	67	5501	43	71	21	81	63	19	77	07
97	87	1009	53	13	89	79	3407	11	41	69	03	47	77	27	87	69	21	91	23
99	93	13	59	31	93	87	13	17	47	73	07	53	81	29	91	73	31	97	29
211	99	19	71	33	99	97	33	19	51	87	19	67	99	51	99	87	37	9403	31
23	601	21	81	49	2411	2903	49	23	57	93	21	73	6607	59	7703	91	39	13	41
27	07	31	83	51	17	09	57	29	63	99	27	79	19	77	17	93	49	19	49
29	13	33	87	73	23	17	61	31	81	5003	31	89	37	87	23	97	61	21	67
33	17	39	89	79	37	27	63	43	83	09	57	91	53	93	27	8311	63	31	73
39	19	49	93	87	41	39	67	47	93	11	63	6101	59	7207	41	17	67	33	
41	31	51	99	93	47	53	69	67	4507	21	69	13	61	11	53	29	87	37	
51	41	61	1511	97	59	57	91	89	13	23	73	21	73	13	57	53	93	39	
57	43	63	23	99	67	63	99	4001	17	39	81	31	79	19	59	63	8923	61	
63	47	69	31	2003	73	69	3511	03	19	51	91	33	89	29	89	69	29	63	
69	53	87	43	11	77	71	17	07	23	59	5623	43	91	37	93	77	33	67	
71	59	91	49	17	2503	99	27	13	47	77	39	51	6701	43	7817	87	41	73	
77	61	93	53	27	21	3001	29	19	49	81	41	63	03	47	23	89	51	79	
81	73	97	59	29	31	11	33	21	61	87	47	73	09	53	29	8419	63	91	
83	77	1103	67	39	39	19	39	27	67	99	51	97	19	83	41	23	69	97	
93	83	09	71	53	43	23	41	49	83	5101	53	99	33	97	53	29	71	9511	

① (整数の)最大公約数と最小公倍数

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆2つあるいは3つ以上の整数の最大公約数や最小公倍数の求め方をよくマスターしておくことが望ましいのデス。

◆ 整数 a の約数の個数を求めるには a を素因数の積に分解します。例えば，720 の約数の個数を求めるには，次々に素数で割って

$$\begin{array}{r|l} 2 & 720 \\ \hline 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$720=2^4\cdot3^2\cdot5$$

とします。そこで，積

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5)$$

を考えてみましょう。これを展開して得られるもの

$$1+2+3+5+2^2+3^2+2\cdot3+2\cdot5+3\cdot5+\cdots$$

は，720 のすべての約数の和になっております。このことからわかるように，約数の個数は次のように求まります。

$$5\times3\times2=30$$

* * *

◆ 2つ以上の整数に

共通な約数を 公約数 といい，

そのうち，最大のものを 最大公約数

といいます。また，2つ以上の整数に

共通な倍数を 公倍数 といい，

そのうち，最小のものを 最小公倍数

といいます。最大公約数 (G.C.M.) や最小公倍数 (L.C.M.) を求めるには次のようにします。例をあげて説明しましょう。

7/4

■練習 1. 60, 75, 108 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(解) 第1の方法は，**素因数に分解** して

$$60=2^2\cdot3\cdot5$$
$$75=3\cdot5^2$$
$$108=2^2\cdot3^3$$

となるから，G.C.M. は $2^0\cdot3^1\cdot5^0=3$ で，L.C.M. は $2^2\cdot3^3\cdot5^2=2700$ となります。しかし，数が大きくなると素因数分解がめんどうです。そこで，第2の方法を：——

第2の方法は次の通り。

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 60 & 75 & 108 \\ \hline 4 & 20 & 25 & 36 \\ \hline 5 & 5 & 25 & 9 \\ \hline & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

つまり，全部を3で割ります。もはや全部に共通な約数は3しかない。ゆえに G.C.M. は3に等しい。

次に4で割るが，25は割れない。そのまま下におろす。こんどは5で割るが，9はそのままおろす，といったぐあい。もはやどの2つも約数をもたなくなった (1, 5, 9)。

ところで，

積 $3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot5\cdot9=2700$

これが L.C.M. です。

(注) L.C.M. や G.C.M. は略語ですから，必ず「．」を3つつけておかなければなりません。それなのに LCM とか L,C,M とか L.C.M などとやる人のいかに多いことか!!

また，最大公約数を求めるときに，ちょっとみただけでは，イヤ，かなり考えても約数があるかどうかわからないときがあります。このようなときに便利なのは **ユークリッドの互除法(連除法** ともいいます) です。これを次に説明しましょう。

* * *

◆ **ユークリッドの互除法**

2つの整数 a, b の最大公約数を (a, b) と書くことにすると，整数 a, b, q, r の間に

$$a=bq+r \qquad \cdots\cdots①$$

なる関係があれば

$$(a, b)=(b, r)$$

なる関係が成り立ちます。

証明は次ページでします。

b, r の公約数は①の右辺の約数ですから，それに等しい左辺 a の約数であるハズ。だから a, b の約数になります。

次に①を変形して

$$a-bq=r \qquad \cdots\cdots②$$

とすると， a, b の公約数は②の左辺の約数ですから，その右辺 r の約数です。したがって，b, r の公約数でもあります。つまり，こういうことがわかったのです。

b, r の公約数は a, b の公約数で，

a, b の公約数は b, r の公約数である。

してみると，b, r の公約数と a, b の公約数は一致する。したがって，最大公約数だって一致するだろう。　　　　（証明終わり）

*　*　*

◆ 上の定理を使うと，最大公約数は次のようにして求められます。

7/4

■練習 2. 25684 と 16342 の最大公約数を求めよ。

ヒント
$$25684=16342\times1+9342$$
$$16342=9342\times1+7000$$
$$9342=7000\times1+2342$$
$$7000=2342\times2+2316$$
$$2342=2316\times1+26$$
$$2316=26\times89+2$$
$$26=2\times13$$

ですから a, b の公約数を $(a,\ b)$ で表すと

$$(25684,\ 16342)=(16342,\ 9342)$$
$$=(9342,\ 7000)=\cdots\cdots=(26,\ 2)=2$$

といったわけで，求める最大公約数は 2 ということになります。つまり割り算をくり返してやるわけ。これを次のような形式で書くのがふつうです。

1	16342	25684	1
	9342	16342	
2	7000	9342	1
	4684	7000	
89	2316	2342	1
	208	2316	
	236	26	13
	234	2	
	2	6	
		6	
		0	

さあ，もう 1 つやってみましょう。

7/6

■練習 3. 5903 と 5414 とは互いに素であることを示せ。

ヒント　ユークリッドの互除法を使って最大公約数を求め，それが 1 に等しいことを示せばいいでしょう。さて，その計算は：——

11	5414	5903	1
	489	5414	
	524	489	13
	489	35	
1	35	139	
	34	105	
	1	34	

なるほど最大公約数は 1，つまり互いに素ということなんです。

7/4

■練習 4. 6292 と 8580 の最大公約数を求めよ。　　　　答　572

7/4

■練習 5. 和が 144 で最大公約数が12である 2 つの正の整数を求めよ。

ヒント　2 つの数を

$$a=12a',\ \ b=12b'$$

とすると

$$a+b=12(a'+b')=144$$
$$\therefore\ \ a'+b'=12$$

a', b' は互いに素であるから 1 と 11， 5 と 7 の 2 組あり，したがって 2 数は 12 と 132, 60と84の 2 組あります。

7/4

■練習 6. 最大公約数が13，最小公倍数が 24570 であるような 2 数を求めよ。

ヒント　2 数を $a=13a'$, $b=13b'$ とすると，最小公倍数は $13a'b'$ ですから

$$13a'b'=24570$$
$$\therefore\ \ a'b'=1890=2\cdot3^3\cdot5\cdot7$$

a', b' は互いに素であるから

1 と 1890， 2 と 945， 5 と 378

7 と 270， 27 と 70， ……

これから 2 数は，次の 8 組となります。

13 と 24570， 26 と 12285， 65 と 4914

91 と 3510， 351 と 910， ……

2/18

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◎（整数の）整除問題の扱い方

◆いわゆる整除問題の中から，比較的総合的な問題をとりあげて，その考え方を中心にまとめておきましょう。

◆ 整数の割りきれるとか，余りがどうとか，いう問題の扱い方はとかくイヤがられる分野です。というのも，とかくクイズ的になりがちだからでしょう。しかし，そうはいっても**剰余類**（☞ p. 164）や**数学的帰納法**（これは基解ですが）を使えばたいていできるものなのですから，それらを中心として，主なテクニックをマスターしていけばよいのです。

ここでは比較的総合的な問題を中心として学ぶことにしましょう。

■**練習 1.** $n^6-2n^4+7n^2-6n+17$ を 12 で割った余りを求めよ。ただし，n は整数である。（同志社大）

ヒント　n の整式で12の倍数となるものはないだろうか？　連続2整数の積 $n(n+1)=n^2+n$ は2の倍数であるし，連続3整数の積 $(n-1)n(n+1)=n^3-n$ は6の倍数であるし，連続4整数の積 $(n-1)n(n+1)(n+2)=n^4+2n^3-n^2-2n$ は $2\cdot3\cdot4=24$ の倍数であることは使えそうですね。

$N=n^6-2n^4+7n^2-6n+17$ を n^3-n で割ってみると，商は n^3-n，余りは $6n^2-6n+17$ ですから

$$N=(n^3-n)^2+6n^2-6n+17$$

と書けます。n^3-n は6の倍数だから $(n^3-n)^2$ は 6^2 で割りきれ，したがって12の倍数であることは確かです。また $6n^2-6n+17$ は $6n(n-1)+17$ と書けるから（12の倍数）+5 となりましょう。したがって，求める余りは5です。

それでは $n^4+2n^3-n^2-2n$ が24の倍数であることは使えるでしょうか。Nをこれで割ってみると，商は n^2-2n+3，余りは $-6n^3+6n^2+17$ ですから

$$N=(n^4+2n^3-n^2-2n)(n^2-2n+3)$$
$$+(-6n^3+6n^2+17)$$

と変形できます。第1項は24の倍数，もちろん12で割りきれます。第2項は

$$-6n^3+6n^2+17=-6n^2(n-1)+17$$

と変形できますが $n(n-1)$ は2の倍数，したがって $6n^2(n-1)$ は12の倍数。だから結局，求める余りは17を12で割って得る余り5に等しいのです。

*　*　*

◆ このような考え方が，1つのポイントであることがわかったでしょう。では同様な考えで，次をやってみませんか。

2/6

■**練習 2.** n が整数のとき

$$2n^4+4n^3+10n^2+8n$$

は24で割りきれることを示せ。

ヒント　$n^4+2n^3-n^2-2n$ で割ってみること。

■**練習 3.** 7で割ると2余り，17で割ると4余る整数がある。この整数を 7×17 で割ると余りはどうなるか。

2/6

ヒント　7で割ると2余るというから $7m+2$ の形，17で割ると4余るというから $17n+4$ の形，したがって求める数Nは

$$N=7m+2=17n+4$$

とおけます。この不定方程式を解けばNがわかるハズ。さて，これを解く（☞ p. 160）には，これを変形して

$$m=\frac{17n+2}{7}=\frac{14n+(3n+2)}{7}$$
$$=2n+\frac{3n+2}{7}$$

7/6

したがって $\dfrac{3n+2}{7}$ は整数に等しい。これを k とおくと

$$\frac{3n+2}{7}=k \quad \therefore \quad n=\frac{7k-2}{3}=2k+\frac{k-2}{3}$$

そこで，$\dfrac{k-2}{3}=l$（整数） とおくと

$$k=3l+2$$

$$\therefore \quad n=2(3l+2)+l=7l+4$$

$$\therefore \quad N=17(7l+4)+4$$
$$=17\times7l+72$$

ゆえにNを 17×7 で割ると余りは　72。

■練習 4. 5で割れば3余り，13で割れば2余る整数を 5×13 で割れば余りはどうか。

ヒント　まったく同じにやってみればいいでしょう。答は28となります。

*　*　*

◆　整数が2や3や……いくつかの数で割りきれるための条件をまとめておきましょう。

7/6

■練習 5. 第1位の数字が偶数（0を含む）ならば，その整数は2で割りきれることを証明せよ。

解　任意の整数Nは

$$N=10a+b$$

の形に書くことができる。ここにaは負でない整数，bは0，1，2，…，9である。

ところが$10a$は2で割りきれるから，bが2で割りきれるならばNも2で割りきれる。

7/6

■練習 6. 各位の数字の和が3の倍数ならば，その整数は3で割りきれることを4桁の整数について証明せよ。

解　4けたの整数Nの数字を上位から順に a, b, c, d とすると

$$N=1000a+100b+10c+d$$
$$=(999+1)a+(99+1)b+(9+1)c+d$$
$$=9(111a+11b+c)+(a+b+c+d)$$

ゆえに $a+b+c+d$ が3の倍数ならばNは3の倍数である。

■練習 7. ある整数の下2位からなる数が4で割りきれるならば，その整数は4で割りきれることを示せ。

ヒント　意味わかりますか。例えば548は48が4で割りきれる。だから548も4で割りきれる，というのです。証明は簡単です。

任意の整数Nはaを任意の整数，bを高々2桁の整数として　$N=100a+b$

と書けます。100は4の倍数ですから，bが4で割りきれればNも4で割りきれるのは当然です。

7/6

■練習 8. 第1位の数字が0または5の整数は5で割りきれることを示せ。

ヒント　任意の整数Nはaは整数，$b=0$，1，…，9として　$N=10a+b$

という形に書ける。$10a$は5で割りきれるから，$b=0$，5のときNは5で割りきれることがわかります。

■練習 9. 各数の数字の和が9の倍数ならばその整数は9で割りきれることを示せ。

ヒント　練習6.の解とほとんど同じです。

■練習 10. ある整数の1つおきの数字の和の差が11で割りきれるならば，その整数は11で割りきれることを示せ。

ヒント　問題の意味がすぐつかめましたか？

例えば，134257であれば，1つおきの数字の和とは

$$1+4+5 \quad と \quad 3+2+7$$

で，10と12，その差は2，これは11の倍数ではない。だから134257は11で割りきれない。こういうことなんです。さて，

$$N=a_0+10a_1+100a_2+1000a_3+\cdots\cdots$$

とすると

$$N=a_0+(11-1)a_1+(99+1)a_2$$
$$+(1001-1)a_3+\cdots\cdots$$
$$=\{(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)\}$$
$$+11(a_1+9a_2+91a_3+\cdots)$$

といったぐあい。もうおわかりでしょう。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○記数法とは何か

◆私たちはあまりに10進法になれてしまったので，5進法や3進法には抵抗を感じます。しかし，5進法しか知らない未開人もいる。

◆ この2ページでは，便宜上Ⓟで P 進法を表すことにしましょう。例えば，⑤1234 は5進法の1234だという意味(ただし，計算式はすべて10進法) です。さて：——

⑩3467 とは

$$3\times10^3+4\times10^2+6\times10^1+7$$

のことです。この10の代わりに9と書いた

$$3\times9^3+4\times9^2+6\times9^1+7 \qquad \cdots\cdots①$$

を3467と書くと，これは9進法です。①を計算してみると2572となります。つまり

⑨3467＝⑩2572

というわけ。では，次をやってみませんか。

練習 1. ⑤1243 を10進法で表せ。

(解) ⑤1243＝$1\times5^3+2\times5^2+4\times5+3$
＝⑩198

練習 2. ⑦144 の正の平方根を10進法で表せ。

(解) ⑦144＝$1\times7^2+4\times7^1+4$＝⑩81
ゆえに求める平方根は⑩9 である。

次に小数の場合も同じで，

⑩0.1234＝$1\times10^{-1}+2\times10^{-2}+3\times10^{-3}+4\times10^{-4}$

ですが，5進法なら

⑤0.1234＝$1\times5^{-1}+2\times5^{-2}+3\times5^{-3}+4\times5^{-4}$
＝$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}$
＝⑩0.3104

といったぐあいです。

2/6

練習 3. 2進法の0.101は，10進法ではいくらか。

(解) ②0.101＝$\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}$＝⑩0.625

◆ 以上は10進法に表す方法でしたが，次には，10進法で表された数を7進法や5進法で表すことを考えることにしましょう。

例えば⑩527 を7進法で表すということは

⑩527＝$a\times7^3+b\times7^2+c\times7^1+d$

となるような整数 a, b, c, d (いずれも0ないし6まで) を求めることなのです。

両辺を7で割ると左辺では商は75，余りは2ですし，右辺の余りは d です。したがって，$d=2$ です。

$$\therefore\quad 75\times7=a\times7^3+b\times7^2+c\times7^1$$
$$\therefore\quad 75=a\times7^2+b\times7^1+c$$

ここで両辺を7で割ると左辺の余りは5で，これが c に等しい。ゆえに，

$$70=a\times7^2+b\times7$$
$$\therefore\quad 10=a\times7+b$$

また両辺を7で割って b が3であることがわかります。

上のような手順を右のように書きます。そこで求める答は⑦1352ということになります。

```
7)527
 7)75 …… 2
 7)10 …… 5
    1 …… 3
```

2/6

練習 4. ⑩365 を3進法で表せ。

(解) 右の計算からわかるように，求める解は

③111112 ……(答)

である。

```
3)365
3)121 …… 2
 3)40 …… 1
 3)13 …… 1
   3)4 …… 1
      1 …… 1
```

2/6

練習 5. ⑩0.75 を2進法で表せ。

(ヒント) ⑩0.75＝$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots\cdots$

とすると，両辺に2を掛けて

$$1.50=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_1=1$$

$$\therefore\quad 0.50=\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots\cdots$$

両辺に 2 を掛けて

$$1.0=a_2+\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_2=1$$

そして

$$a_3=a_4=\cdots\cdots=0$$

これからわかるように

⑩0.75＝②0.11

となります。

■練習 6. 2 進法表示の数 $0.efg$ を $\frac{1}{2}$ 倍した数を，2 進法で書け。　(上智大)

(解)　②$0.efg=\frac{e}{2}+\frac{f}{2^2}+\frac{g}{2^3}$ であるから，その $\frac{1}{2}$ 倍は

$$\frac{0}{2}+\frac{e}{2^2}+\frac{f}{2^3}+\frac{g}{2^4}$$

ゆえに 2 進法表示では

$0.0efg$　…… 答

となる。

*　*　*

◆ では，ここで，記数法についていくつかの問題を実習してみることにしましょう。

■練習 7. 9 進法で書いた 2 けたの正の整数を 7 進法に書き改めたら，数字が入れかわった。この数を10進法で書け。　(一橋大)

(ヒント)　要するに

⑨ab＝⑦ba

となる a，b を求めればいいわけですね。つまり，だ。

$$9a+b=7b+a$$

$$\therefore\quad 8a=6b$$

$$\therefore\quad 4a=3b$$

だから，b は 4 の倍数で，しかも，$1\leqq b\leqq 7$，

$\therefore\quad b=4$，したがって　$a=3$

よって，求める数は

$9a+b=31$　…… 答

■練習 8. 2 進法で 101101, 1011 と書かれる 2 数の積は，2 進法でどのように書かれるか。　(東大)

(解)　2 つの方法があります。1 つは 2 進法のままで処理する方法，1 つは 10 進法を媒介とするもの。

2 進法の足し算表，掛け算表は下の通り。

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

これから

```
     1 0 1 1 0 1
  ×      1 0 1 1
  ---------------
     1 0 1 1 0 1
   1 0 1 1 0 1
 0 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 1
-----------------
1 1 1 1 0 1 1 1 1
```

が得られる。

しかし，これがスッキリしない人は10進法になおして扱ってみるのがよい。つまり

②101101＝$2^5+2^3+2^2+1$＝⑩45

②1011＝2^3+2+1＝⑩11

そして

$$45\times 11=495$$

これを 2 進法になおせばいいじゃないか。

その計算は右の通り。

```
2)495
2)247 …… 1
2)123 …… 1
 2)61 …… 1
 2)30 …… 1
 2)15 …… 0
  2)7 …… 1
  2)3 …… 1
    1 …… 1
```

かくして

②101101×②1011

＝②111101111

ということになった。

あるいは次のようにやってもいいのです。

②101101×②1011

$=(2^5+2^3+2^2+1)\times(2^3+2+1)$

$=2^8+2^7+2^6+2^5+2^3+2^2+2+1$

＝②111101111

というわけ。

とかく n 進法の問題には抵抗の多いのがわかりますね。

7/29

○無理数とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆無理数が発見されたとき，ピタゴラス学派は，驚きあわてた。彼らの教条をゆるがすからです。ヒタ隠しに隠したのだが，……。

◆ **無理数とは整数の分数で表すことのできない数** をいいます。

例えば，$\sqrt{2}$ は無理数です。ちょっとその証明をしておきましょうか。

≪$\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ≫

いま $\sqrt{2}$ が無理数でないとしますと，有理数の比で表せます。すなわち，

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m} \qquad \cdots\cdots①$$

ここに m，n は自然数で，公約数はないとします。①の分母をはらって

$$\sqrt{2}m=n$$

両辺を2乗すると

$$2m^2=n^2 \qquad \cdots\cdots②$$

②の左辺は2の倍数，つまり偶数ですから，それに等しい右辺の n^2 も偶数です。したがって n も偶数です。（だって，奇数の2乗は奇数ですよ）

n が偶数だから

$$n=2k \quad (k\text{は整数}) \qquad \cdots\cdots③$$

とおくことができます。これを②に代入しますと

$$2m^2=4k^2$$

$$\therefore \quad m^2=2k^2 \qquad \cdots\cdots④$$

④の右辺は2の倍数，つまり偶数ですからそれに等しい左辺の m^2 も偶数，したがって m も偶数です。

つまり，m も n も偶数ということになります。しかし m，n は共約数をもたないと仮定してあったのですから，これは不合理です。なぜこんな不合理が出てきたかというと，$\sqrt{2}$ が有理数に等しいとしたからです。

かくして，$\sqrt{2}$ は有理数でないことが証明されました。

（注）ここで，必ずといっていいくらい，「有理数でなければなぜ無理数なのか」と質問する人がいるものです。いいですか。有理数でない数を無理数（もちろん実数です）と名づけたのですから，当然のことではありませんか。

*　*　*

◆ まったく同様にして $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ や，一般に p を素数とするとき $\sqrt{p}$ が無理数であることが証明できます。次をやってみませんか。

2/16

■**練習1.** $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

（ヒント）偶数という代わりに3で割りきれる，ということでできます。

*　*　*

◆ $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ が無理数であることを使うと，いろいろな問題が解けます。

では，次を：——

2/16

■**練習2.** $\sqrt{2}$ が無理数であることを知って $1+\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

（ヒント）$1+\sqrt{2}=a$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{2}=a-1$$

と変形できて，左辺は無理数，右辺は有理数（有理数に加減乗除を施したものはすべて有理数です）であるから，不合理。

なぜこんな不合理が出てきたか？　それは a が有理数であるとしたからである!!　つまり，無理数です。

■**練習3.** $\sqrt{2}$ が無理数であることを知って $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(ヒント) 背理法でやるべきことはもちろんですが，さて，それは：——

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$$

とおき，aを有理数として不合理であることをいえばいいでしょう。移項して

$$\sqrt{3}=a-\sqrt{2}$$

両辺を2乗して

$$3=a^2+2-2a\sqrt{2}$$

$a \fallingdotseq 0$ ですから

$$\sqrt{2}=\frac{a^2-1}{2a}$$

右辺は有理数ですから，これは不合理。したがって，……

2/6

■練習 4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ は有理数でないことを示せ。ただし，$\sqrt{6}$ は有理数でないことがわかっているとする。（阪大）

(解)

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=a$$

とおいて，分母を有理化すると

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=a$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}+\sqrt{2}=a$$

両辺を2乗すると

$$5+2\sqrt{6}=a^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{6}=\frac{a^2-5}{2}$$

aを有理数とすると，右辺は有理数を表し，これが無理数 $\sqrt{6}$ に等しいことになって不合理。ゆえに，aは有理数でない。

*　*　*

◆ ある与えられた数が無理数であることを証明する便利な方法があります。

整数係数の方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

が有理数解αをもつならば，αはaの約数でcの約数を割ったものである。

という定理を使うのです。もちろん，a，b，cの間に公約数はないとします。

上の定理の応用については（☞ p.36）。

■練習 5. $3+\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ。

(解)

$$3+\sqrt{2}=x$$

とおくと

$$\sqrt{2}=x-3$$

$$\therefore\quad 2=x^2-6x+9$$

$$\therefore\quad x^2-6x+7=0$$

これが正の有理数解をもつならば7の約数1あるいは7である。ところが

$$1^2-6\cdot1+7=2 \fallingdotseq 0$$

$$7^2-6\cdot7+7=14 \fallingdotseq 0$$

であるから，有理数解をもたない。ゆえにxは有理数ではない。

■練習 6. $\sqrt{7}$ は無理数であることを示せ。（早大）

(解) $\sqrt{7}=x$ とおくと

$$x^2-7=0$$

これが正の有理数解をもつならば1か7である。しかし，いずれも解ではない。ゆえに，xは無理数である。

(注) 実は，この問題が早稲田大学に出たときは，次のようになっていました。本質的には同じことです。

≪(1) 整数a，bを係数とするとき2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が有理数の解αをもつならば，αは必ず整数であることを示せ。

(2) 上のことを利用して，$\sqrt{7}$ が無理数であることを示せ≫

*　*　*

◆ ちょっとめんどうですが，いま1つ。

■練習 7. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを示せ。

(ヒント) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおいて両辺を平方しますと

$$x^2=5+2\sqrt{6}$$

5を移項してまた平方して

$x^4-10x^2+1=0$ だから……。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◯有理化の仕方

◆有理化というコトバはかなり乱用されている。それほどポピュラーなのだが，さて，実際にやる段になると意外とできないもの。

◆ 分数の無理数を扱うとき，分母が有理数なら扱いやすいものです。分母を有理数にすることをふつう **有理化** といいます。しかし，分子を有理化する必要もないではありません。では，まず，次の練習をやってみませんか。

練習 1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の分母を有理化せよ。

(解) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……答

練習 2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ の分母を有理化せよ。

(解) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$=\sqrt{2}-1$ ……答

練習 3. $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

(解) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ ……答

*　*　*

有理化でも，ややめんどうな問題もあります。例えば：——

練習 4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$ を有理化せよ。

（大阪府大）

ヒント 分母には $\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}$ と無理数が2つありますね。このようなときには，まず1つだけ有理化することです。つまり，

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}^2-(\sqrt{2}-1)^2}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{3-2-1+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-2+\sqrt{2}}{4}$

ここでやめないで

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4}$

までしておきたいもの。

2/7

練習 5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

（三重大）

(解) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$ ……答

練習 6. $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。

ヒント 分母・分子に $(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$ を掛けるのと，$(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}$ を掛けるのと，2通りやってみませんか。もちろん，結果は同じで，$\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ です。

*　*　*

◆ 有理化することは，いろいろな場合に必要になります。ここでは計算の簡単化，あるいは数値を求める問題に限ってやっておくことにしましょう。では，これを：——

2/7

練習 7. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\dfrac{1}{1+x}$ の値を求めよ。

(解) $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$

$=2(2-\sqrt{3})$

これが答です。これをさらに

$=2(2-1.73\cdots\cdots)=0.54\cdots\cdots$

などとやる必要はありません。いや，やってはいけません。しかし，

$\cdots\cdots=2(2-\sqrt{3})\quad(\fallingdotseq 0.54\cdots\cdots)$

としておくのはかまわない。

■練習 8. $\dfrac{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

を簡単にせよ。　(早大)

(ヒント) $5-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$

$2+\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

に目をつけて $\sqrt{2}+1$ を約してしまうと

与式$=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

ここで分母を有理化してみればよい。

(答) $\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{15}$

*　*　*

◆ しかし，有理化しないほうが簡単ということもあります。例えば，

■練習 9. 2/7 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ を簡単にせよ。

(ヒント) 別々に有理化しなくても，通分すると，有理化されてしまいます。つまり，

与式$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2-1}=2\sqrt{2}$

■練習 10. $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ を簡単にせよ。

(ヒント) これも，すぐ通分したほうがいい。

与式$=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{-4\sqrt{35}}{7-5}=-2\sqrt{35}$

もうできた。

*　*　*

◆ 有理化は平方根とは限りません。立方根のこともあります。しかし，それは基礎解析の範囲ですから，ここにはふれません。ただ二重根号と複合した問題をひとつやっておきましょう。

■練習 11. 2/7 $\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$

$+\dfrac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$ の値を求めよ。

(ヒント) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

$\therefore$ 与式$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{1}$

$=2-1=1$　……(答)

*　*　*

◆ 分数ではないが，有理化が問題となることもあります。

■練習 12. $\sqrt{2}+1$ を解とする有理係数の2次方程式を作れ。

(ヒント) $x=\sqrt{2}+1$ とおいて移項すると

$x-1=\sqrt{2}$

両辺を2乗すると　$x^2-2x+1=2$

$\therefore\ x^2-2x-1=0$

これが求めるものです。

(注) オヤ，コレデイイカナ，別の解もあるのではないか，と思う人はありませんか。実は有理係数の方程式が $a+b\sqrt{2}$ (a, b は有理数) を解としてもつときには必ず $a-b\sqrt{2}$ (これを $a+b\sqrt{2}$ と **共役な無理数** といいます) を解としてもつことがわかっています。だから $\sqrt{2}+1$, つまり $1+\sqrt{2}$ なる解があれば必ず $1-\sqrt{2}$ なる解があるのです。したがって，求める方程式は

$\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}$

$\therefore\ x^2-2x-1=0$

となります。$x-1=\sqrt{2}$ の両辺を平方したのは $x-1=\pm\sqrt{2}$ と同値で，それはほかでもない，上の解をもつのでした。ですから，上の解でよかったのです。

1回目 年 月 日

2回目 年 月 日

3回目 年 月 日

⑪ 二重根号$\sqrt{a+2\sqrt{b}}$の扱い方

◆根号のついた計算の中でもっとも大切なのは，この二重根号の扱い方です。文字の入ったときも使えるようにありたいもの。

◆ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(a，b は有理数)

とおいて，両辺を2乗しますと

$$3+2\sqrt{2}=(a+b)+2\sqrt{ab}$$

$$\therefore\quad a+b=3,\ ab=2$$

つまり，aとbは掛けて2，足して3になるもの，つまり，1と2です。

$$\therefore\quad \sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$$

一般に，

$\sqrt{x+2\sqrt{y}}$ において，

$$\boldsymbol{a+b=x,\ ab=y}$$

となる有理数 a，b が求まれば

$$\boldsymbol{\sqrt{x+2\sqrt{y}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

となります。$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ でも同じですが，上と同様にして 1，2 が得られますが，**大きいほうから小さいほうを引けばよい**，つまり

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1=-1+\sqrt{2}$$

というわけ。では，次の練習をやりましょう。

■**練習 1.** $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ を簡単にせよ。

1/1

(山形大)

ヒント 和が10，積が21のものは3と7で，大きいほうが7ですから

$$\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$$

■**練習 2.** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。

ヒント $4\sqrt{3}=2\sqrt{12}$ と変形してやること。

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}$$
$$=2+\sqrt{3}$$

■**練習 3.** $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ を簡単にせよ。

ヒント $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$$

といったぐあい。何はともあれ，**中の根号の前に2をつけるくふうをする** こと。

* * *

◆ 二重根号の入ったやや複雑な問題をやってみませんか。

1/9

■**練習 4.** $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$，$y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ のとき $\dfrac{x+y}{x-y}$ の値を求めよ。

ヒント $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

ですから

与式$=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$　　　答 $\sqrt{3}$

■**練習 5.** $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$，$y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ のとき $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ の値を求めよ。

解 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\frac{(x+y)+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

ところが

$$x=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$y=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

であるから

$$x+y=\sqrt{6},\ x-y=\sqrt{2},\ xy=\frac{6-2}{4}=1$$

$\therefore$　与式$=\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

答　$\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(注) このように計算すべき式を変形してからやったほうがいいか，すぐ代入したほうがいいか，は，場合によってちがいますが，どっちがいいか判断のつかないときはすぐ代入して，個々に計算してゆくほうがいいようです。いきなり大げさな計算にしないほうがいいのです。

*　*　*

◆ 数字の場合に限りません。文字が入ってていてもずいぶん役に立つもの。

練習 6.

$$y=\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}-\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}$$

のグラフをかけ。

(ヒント) 和が $x+1$，積が x というのは，x と 1 ですから

$$\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+1$$

です。しかし，ここでうっかり

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}=\sqrt{x}-1$$

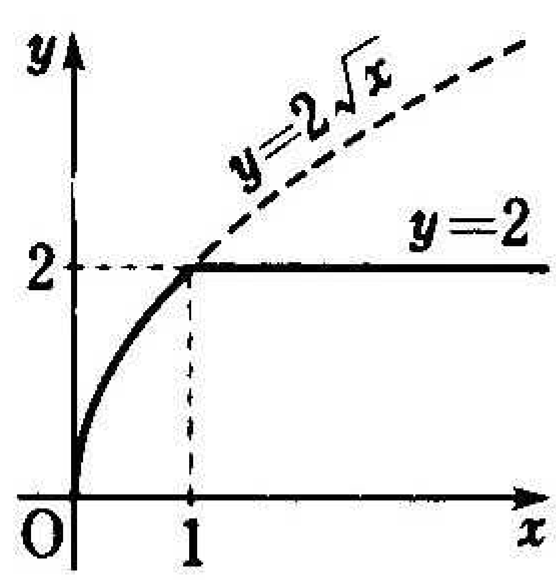
としてはいけません。x と 1 とどちらが大きいか？　それはわからない，だから，場合を分けるのです。すなわち，

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}=\begin{cases}1\leqq x & : \quad \sqrt{x}-1\\ 0\leqq x<1 : & 1-\sqrt{x}\end{cases}$$

そこで，次に解答を：——

(解)　$y=(\sqrt{x}+1)-\begin{cases}x\geqq 1: & \sqrt{x}-1\\ 1>x\geqq 0: & 1-\sqrt{x}\end{cases}$

$=\begin{cases}x\geqq 1: & 2\\ 1>x\geqq 0: & 2\sqrt{x}\end{cases}$



ゆえにグラフは右のようになる。

(注) ちょっと立場を変えると，

$$\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=\sqrt{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1}=\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}=\sqrt{x}+1$$

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}=\sqrt{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1}=\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}=|\sqrt{x}-1|=\begin{cases}x\geqq 1: & \sqrt{x}-1\\ 1>x\geqq 0: & 1-\sqrt{x}\end{cases}$$

ということでもあります。

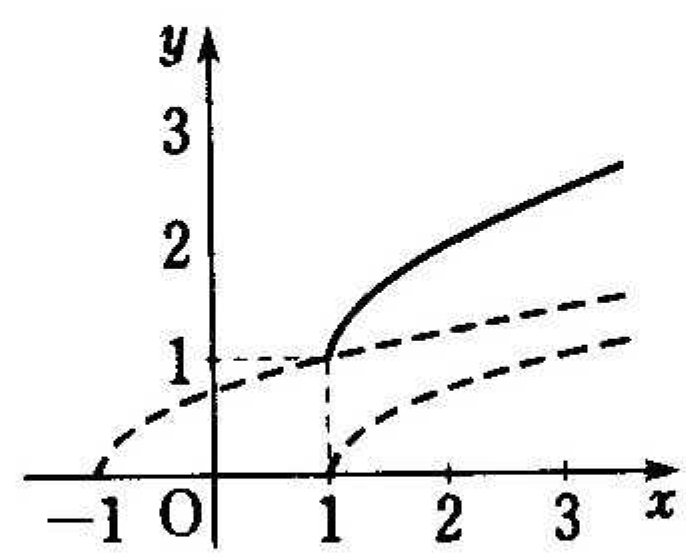
練習 7. $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ のグラフの概形をかけ。

(ヒント)　$y=\sqrt{\dfrac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2}}$

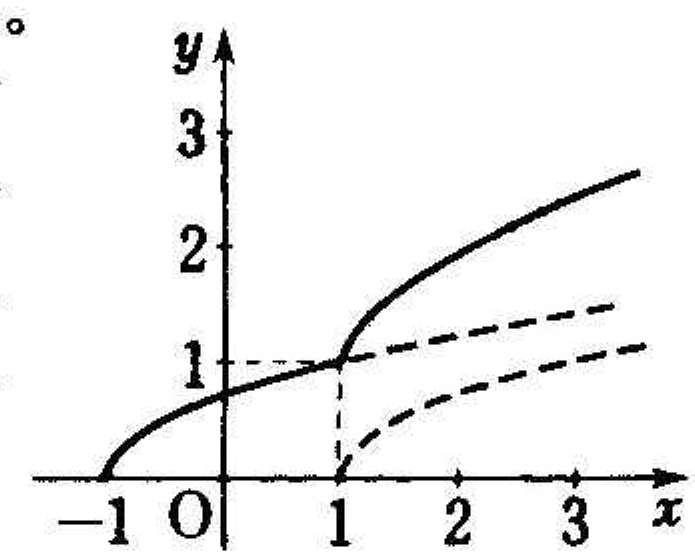
$=\dfrac{\sqrt{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$

そこで $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ と $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$ のグラフを別々にかいて合成するとよい。その結果は右図の通り。



(注) やり方はよいのに最後の合成のところで，右下図のようにやる人が意外と多いもの。しかし $x<1$ では一方のグラフは存在しないのですから合成できないのです。グラフがないから値が 0 だ，と，思うのがマチガイ。



*　*　*

◆ 二重根号の変わりだねとして，こんなのもあります。

練習 8.　$\sqrt{6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$

を簡単にせよ。

(ヒント) これは二重根号にはちがいないが，まったく異なったタイプのものです。$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ と $\sqrt{6}$ があることに目をつけて

$$(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})^2$$

になるのではないか，と考えると，この種のものはたいてい片がつくもの。この場合であれば $a=1$，$b=1$，$c=-1$ にとると，確かに，根号内は $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ となりますから

$$与式=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

となります。この際 $1+\sqrt{2}=2.4\cdots\cdots$，あることを忘れぬように。うっかりして $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$ とやりかねない。

① 開平，つまり平方根を求めること

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平方根を求めることくらい，誰でもできると信じている。しかし，イザとなるとあんがいできなくてイライラする。

◆ 平方根を求める手順を次に書いておくことにしましょう。

練習 1. 254の平方根を小数第2位まで求めよ。

2/9

ヒント 第2位まで求めよ，というのは，第3位まで求めて4捨5入する約束になっています。さて：——

	1 5. 9 3 7
1	)2|54.00|00|00
1	1
25	1 54
5	1 25
309	29 00
9	27 81
3183	1 19 00
3	95 49
31867	23 51 00
7	22 30 69
	1 20 31

(1) 小数点を基準に2桁ずつ区切る。

(2) $\sqrt{2}$ から1が立つ。これを左にも書く。

(3) $1\times1=1$ を引き，次の2けた 54 を下す。さらに左のほうは1と1を加え2とする。

(4) 154の末位をとりさった15を2で割ると7が立つ。この7を上と左に書き 27×7 を作ると189で154より大きい。そこで7の代わりに6としてみる。$26\times6=156$ でやはりダメ。そこで5にすると，$25\times5=125$ となってうまくいく。

(5) 以下同じような手順をくり返す。

(6) 結局15.937を得る。小数第2位までということだったから，結局 15.94 となります。

答 15.94

練習 2. $\dfrac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}$ の値を4捨5入して小数第2位まで求めよ。（埼玉大）

ヒント $\dfrac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}=\dfrac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

$\sqrt{5}=2.236\cdots\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$ などはオボエテおくべきもの。しかし，ここでは $\sqrt{5}$ を求めてみましょう。

	2. 2 3 6
2	)5.00|00|00
2	4
42	1 00
2	84
443	16 00
3	13 29
4466	2 71 00
6	2 67 96
	3 04

$$\text{与式}=\frac{2.2360\cdots+1.7320\cdots}{2}=\frac{3.968\cdots}{2}$$

$=1.984\cdots$　答 1.98

練習 3. 平方根の表によれば $\sqrt{63}=7.937$，$\sqrt{62}=7.874$ である。このことから

$$0.06324<\sqrt{63}-\sqrt{62}<0.06326$$

であることを示せ。（広島大）

ヒント $7.9365\leqq\sqrt{63}<7.9375$

$7.8735\leqq\sqrt{62}<7.8745$

と $\sqrt{63}+\sqrt{62}=\dfrac{1}{\sqrt{63}-\sqrt{62}}$ を使う。

⦿次の値はいますぐ覚えること。

$\sqrt{2}=1.41421356$ （一夜一夜に人見頃）

$\sqrt{3}=1.7320508$ （人並におごれや）

$\sqrt{5}=2.2360679$ （富士山麓オウム鳴く）

$\sqrt{6}=2.44949$ （似よよくよく）

$\sqrt{7}=2.64575$ （菜に虫いない）

$\sqrt{10}=3.1622$ （三色に並ぶ）

＊　＊　＊

◆ 平方根はしばしば必要になるのに，計算はかなりゴタゴタしていますから，何とか簡単に求めたい，ということを多くの人たちが考えたのもふしぎではありません（表は（☞ p. 81））。そこで，いろいろの簡便法が考えられています。では，次を。しかし，きょう必ずやらなければならないというものでもありません。

2/10

練習 4. m, n が正の整数で，$\dfrac{m}{n}$ が $\sqrt{a}$ の1つの近似値であるとするとき，$\dfrac{m+an}{m+n}$ は $\sqrt{a}$ のよりよい近似値であることを示せ。（香川大）

ヒント $\left|\dfrac{m}{n}-\sqrt{a}\right|$ と $\left|\dfrac{m+an}{m+n}-\sqrt{a}\right|$ の大小を調べてみればいいでしょう。

$$E_1=\left|\frac{m}{n}-\sqrt{a}\right|$$

$$E_2=\left|\frac{m+an}{m+n}-\sqrt{a}\right|$$

とおくと，

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\left|\dfrac{m}{n}-\sqrt{a}\right|}{\left|\dfrac{n(1-\sqrt{a})}{m+n}\left(\dfrac{m}{n}-\sqrt{a}\right)\right|}$$

$$=\frac{1}{\left|\dfrac{n(1-\sqrt{a})}{m+n}\right|}$$

$$=\left|\frac{\dfrac{m+n}{n}}{1-\sqrt{a}}\right|=\frac{\left|1+\dfrac{m}{n}\right|}{|1-\sqrt{a}|}$$

ところが，$\dfrac{m}{n}\fallingdotseq\sqrt{a}$ なんですから

$$\left|1+\frac{m}{n}\right|\fallingdotseq|1+\sqrt{a}|>|1-\sqrt{a}|$$

$$\therefore\ \frac{E_1}{E_2}>1 \qquad \therefore\ E_1>E_2$$

ナルホド，E_2 が E_1 より小，さては $\dfrac{m+an}{m+n}$ は $\sqrt{a}$ よりよい近似値であることがわかった。

さて，実際に調べてみましょうか。

$\sqrt{2}\fallingdotseq1.4=\dfrac{7}{5}$ がわかったとしましょう。$a=2,\ n=5,\ m=7$ です。このとき

$$\frac{m+an}{m+n}=\frac{7+2\cdot5}{5+7}=\frac{17}{12}\fallingdotseq1.4167$$

もう一度やってみますと，

$$a=2,\ n=12,\ m=17$$

ですから

$$\frac{m+an}{m+n}=\frac{17+2\cdot12}{17+12}=\frac{41}{29}\fallingdotseq1.4138$$

といったぐあい。

2/11

練習 5. a, b が正の数で，その差が小さいとき $\sqrt{ab}\fallingdotseq\dfrac{a+b}{2}$ としてよい。そして，この近似値の誤差を D とし，$a<b$ とすると $D<\dfrac{(b-a)^2}{8a}$ であることを証明せよ。また，上の近似式を用いて $\sqrt{101}$ の近似値を求め，かつ誤差の限界を求めよ。（九大）

ヒント $D=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)^2$$

$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{(2\sqrt{a})^2}=\frac{(b-a)^2}{8a}$$

これで前半は終わりです。そこで，いよいよ，後半は：——

$$\sqrt{101}=\sqrt{10.1\times10}$$

$$\fallingdotseq\frac{10.1+10}{2}=10.05$$

$$D<\frac{0.1^2}{8\times10}=0.000125$$

注 上の公式を使う例をもう1つ。

$\sqrt{7}$ を求めたい。$\sqrt{7}=2.5$ とすると

$7\div2.5=2.8$

$$\sqrt{7}\fallingdotseq\frac{1}{2}(2.5+2.8)=2.65$$

次に $7\div2.65\fallingdotseq2.6415$ ですから

$$\sqrt{7}\fallingdotseq\frac{1}{2}(2.65+2.6415)=2.64575$$

といったぐあい。$\sqrt{7}$ の正しい値は

2.6457513…

ですから，これはなかなかいい精度といえます。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◯平方表・平方根表などの使い方

◆同じことを何度もやる労を避けるためにあらゆる場合をあっさり計算してしまうのが，表というものの本質なのです。

◆ 右のページには1から100までの自然数について，その**平方**，**立方**，**平方根**，**立方根**を表にしてまとめてあります。ただし，小数以下第5位は4捨5入してありますから3の平方根は，1.732050……ですが，小数第5位の5が切り上がり，1.7321となっているわけです。では，いくつか表の利用法について考えてみましょう。

練習 1. 42^2 を求めよ。

ヒント　表からすぐ1764が得られます。

練習 2. 2.2^2 を求めよ。

ヒント　2.2というのは表にありません。しかし，

$$2.2^2=\left(\frac{22}{10}\right)^2=\frac{22^2}{100}$$

ところが表から　$22^2=484$

$$\therefore\quad 2.2^2=\frac{484}{100}=4.84 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

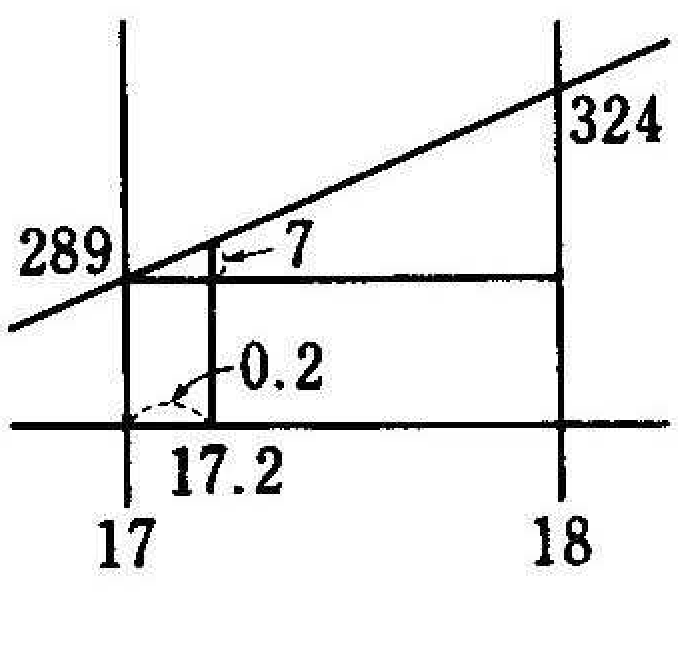
練習 3. 172^2 を求めよ。

ヒント　172も表にはない。しかし

$$172^2=(17.2\times10)^2=17.2^2\times100$$

ところが比例部分の法則から

17	289
17.2	x
18	324



$x=289+(324-289)\times0.2$
$=289+7=296$

$$\therefore\quad 172^2\fallingdotseq29600$$

正しくは $172^2=29584$ で，誤差はありますが，0.05%ですからかなりよいといえます。

実際はもっと詳しい平方表が市販されていますから，それを使えばいいわけですが，表にない部分を調べるときは，このようにふつう比例部分を使うのです。

練習 4. $\sqrt{76.4}$ を求めよ。

解　76 ………… 8.7178　　表差＝572
　　0.4 ………… 229　　572×0.4
　　76.4 ……… 8.7407　　……$\boxed{答}$

正しい値は8.7407093……で，この場合は誤差も0.0001%でした。

なお $\sqrt{76.4}$ を求めるのに平方の表を使うこともできます。それは

76.4を平方の欄から探してみますと

数	平方
8	64
x	76.4
9	81

比例部分の法則を使って

$$x=8+1\times\frac{76.4-64}{81-64}=8+\frac{12.4}{17}\fallingdotseq8.73$$

また，$76.4\times100=7640$ に目をつけて

数	平方
87	7569
x	7640
88	7744

比例部分の法則を使って

$$x=87+\frac{7640-7569}{7744-7569}=87+\frac{71}{175}$$
$$=87.406$$

求める平方根は8.7406で8.73に比べればずいぶんよくなった。

このように，表もいろいろ使い方があるものです。

◆平方・立方・平方根・立方根の表◆

数	平方	立方	平方根	立方根	数	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.0000	1.0000	51	2601	132651	7.1414	3.7084
2	4	8	1.4142	1.2599	52	2704	140608	7.2111	3.7325
3	9	27	1.7321	1.4422	53	2809	148877	7.2801	3.7563
4	16	64	2.0000	1.5874	54	2916	157464	7.3485	3.7798
5	25	125	2.2361	1.7100	55	3025	166375	7.4162	3.8030
6	36	216	2.4495	1.8171	56	3136	175616	7.4833	3.8259
7	49	343	2.6458	1.9129	57	3249	185193	7.5498	3.8485
8	64	512	2.8284	2.0000	58	3364	195112	7.6158	3.8709
9	81	729	3.0000	2.0801	59	3481	205379	7.6811	3.8930
10	100	1000	3.1623	2.1544	60	3600	216000	7.7460	3.9149
11	121	1331	3.3166	2.2240	61	3721	226981	7.8102	3.9365
12	144	1728	3.4641	2.2894	62	3844	238328	7.8740	3.9579
13	169	2197	3.6056	2.3513	63	3969	250047	7.9373	3.9791
14	196	2744	3.7417	2.4101	64	4096	262144	8.0000	4.0000
15	225	3375	3.8730	2.4662	65	4225	274625	8.0623	4.0207
16	256	4096	4.0000	2.5198	66	4356	287496	8.1240	4.0412
17	289	4913	4.1231	2.5713	67	4489	300763	8.1854	4.0615
18	324	5832	4.2426	2.6207	68	4624	314432	8.2462	4.0817
19	361	6859	4.3589	2.6684	69	4761	328509	8.3066	4.1016
20	400	8000	4.4721	2.7144	70	4900	343000	8.3666	4.1213
21	441	9261	4.5826	2.7589	71	5041	357911	8.4261	4.1408
22	484	10648	4.6904	2.8020	72	5184	373248	8.4853	4.1602
23	529	12167	4.7958	2.8439	73	5329	389017	8.5440	4.1793
24	576	13824	4.8990	2.8845	74	5476	405224	8.6023	4.1983
25	625	15625	5.0000	2.9240	75	5625	421875	8.6603	4.2172
26	676	17576	5.0990	2.9625	76	5776	438976	8.7178	4.2358
27	729	19683	5.1962	3.0000	77	5929	456533	8.7750	4.2543
28	784	21952	5.2915	3.0366	78	6084	474552	8.8318	4.2727
29	841	24389	5.3852	3.0723	79	6241	493039	8.8882	4.2908
30	900	27000	5.4772	3.1072	80	6400	512000	8.9443	4.3089
31	961	29791	5.5678	3.1414	81	6561	531441	9.0000	4.3267
32	1024	32768	5.6569	3.1748	82	6724	551368	9.0554	4.3445
33	1089	35937	5.7446	3.2075	83	6889	571787	9.1104	4.3621
34	1156	39304	5.8310	3.2396	84	7056	592704	9.1652	4.3795
35	1225	42875	5.9161	3.2711	85	7225	614125	9.2195	4.3968
36	1296	46656	6.0000	3.3019	86	7396	636056	9.2736	4.4140
37	1369	50653	6.0828	3.3322	87	7569	658503	9.3274	4.4310
38	1444	54872	6.1644	3.3620	88	7744	681472	9.3808	4.4480
39	1521	59319	6.2450	3.3912	89	7921	704969	9.4340	4.4647
40	1600	64000	6.3246	3.4200	90	8100	729000	9.4868	4.4814
41	1681	68921	6.4031	3.4482	91	8281	753571	9.5394	4.4979
42	1764	74088	6.4807	3.4760	92	8464	778688	9.5917	4.5144
43	1849	79507	6.5574	3.5034	93	8649	804357	9.6437	4.5307
44	1936	85184	6.6332	3.5303	94	8836	830584	9.6954	4.5468
45	2025	91125	6.7082	3.5569	95	9025	857375	9.7468	4.5629
46	2116	97336	6.7823	3.5830	96	9216	884736	9.7980	4.5789
47	2209	103823	6.8557	3.6088	97	9409	912673	9.8489	4.5947
48	2304	110592	6.9282	3.6342	98	9604	941192	9.8995	4.6104
49	2401	117649	7.0000	3.6593	99	9801	970299	9.9499	4.6261
50	2500	125000	7.0711	3.6840	100	10000	1000000	10.0000	4.6416

○ベン図の使い方

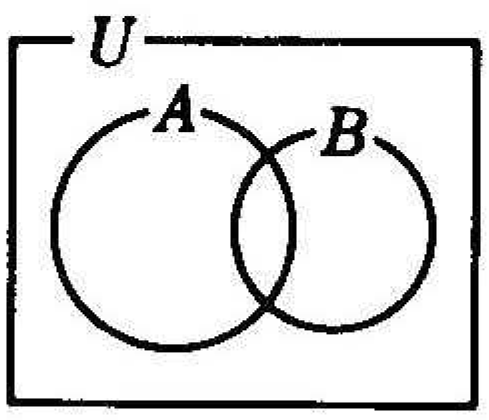
1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆ベン図では解答にならないと思っている人がある。しかし，それはマチガイ。使い方が悪いだけである。

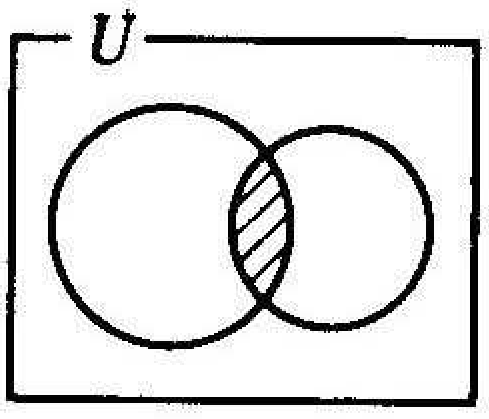
◆ 集合を図で表して考えるのが **ベン図**，あるいは **オイラー図** といわれるものです。

ふつう全体集合を長方形で表し，その部分集合を円形で表します。しかし，あまり複雑なものを表すには適しません。では：——

■**練習 1.** 集合 A, B が右の図のように表せるとき，$A \cap B$ の部分に斜線を引け。

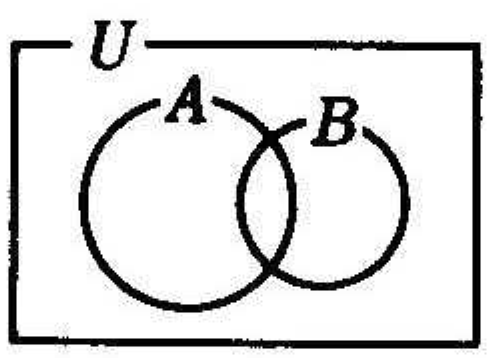


ヒント　$A \cap B$ は A と B の共通部分ですから，右の図のようになります。

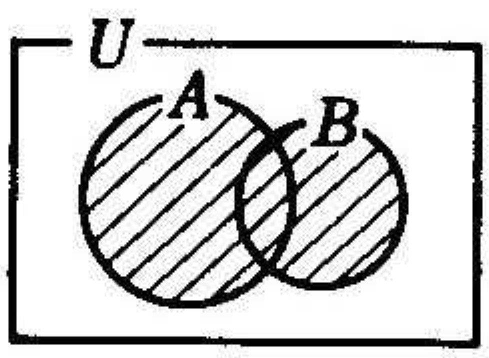


注　この場合 $A \cap B$ は与えられているから問題はありませんが，単に $A \cap B$ をベン図で表せ，といわれると困ってしまう。つまり A, B の包含関係がわからないからです。しかし，ふつうは，上のような場合で代表しているのです。

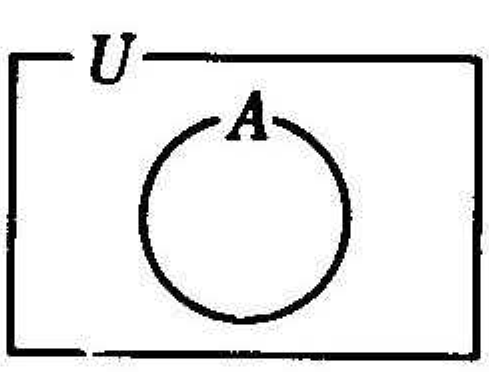
■**練習 2.** 集合 A, B が右の図のように表されているとき，$A \cup B$ の部分に斜線を引け。



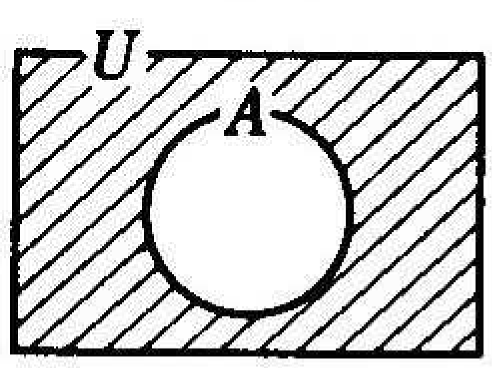
ヒント　$A \cup B$ は A, B のいずれかに属している部分をすべて含んでいるのですから，右のようになります。



■**練習 3.** 集合 A が右の図のように与えられているとき，$\overline{A}$ の部分に斜線を引け。



ヒント　$\overline{A}$ は A の補集合，つまり全体集合 U から A を除いた部分ですから，図のようになります。



*　*　*

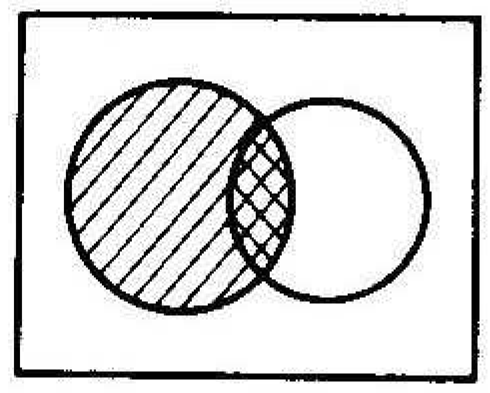
◆ 以上で基本は終わりです。次はこの合成されたものを扱うことになりますが，その段階を順次書いていかなければダメです。例えば：——

■**練習 4.** 集合 A, B について

$$A \cup (A \cap B) = A$$

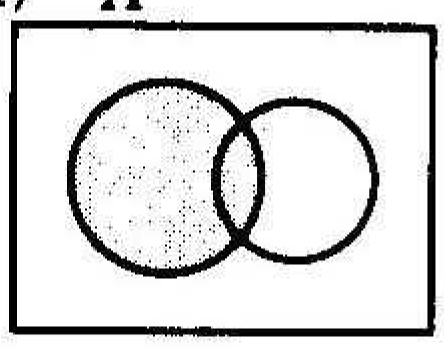
を証明せよ。

ヒント　よく右のような図をかいて，これで満足している人があります。これでは解答になりません。

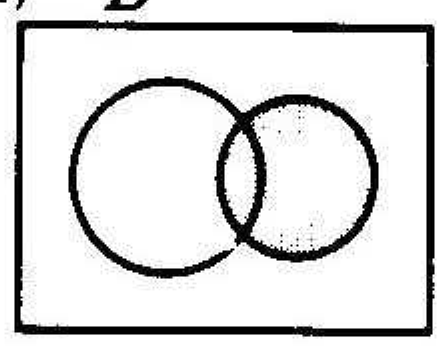


下のようにする。もっとていねいにやってみましょう。

(1)　A

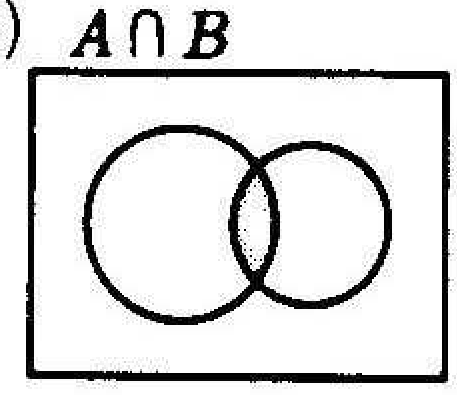


(2)　B



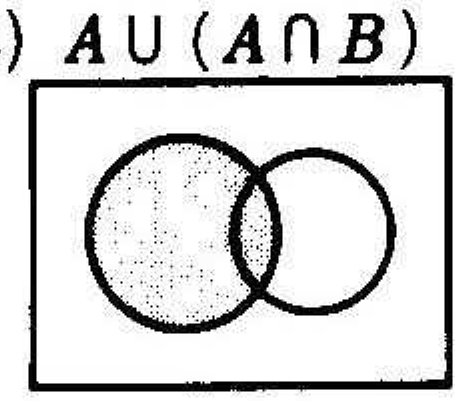
とすると，

(3)　$A \cap B$



であるから (1), (3) より

(4)　$A \cup (A \cap B)$



を得る。これは (1) と一致する。

ゆえに　$A \cup (A \cap B) = A$

である。

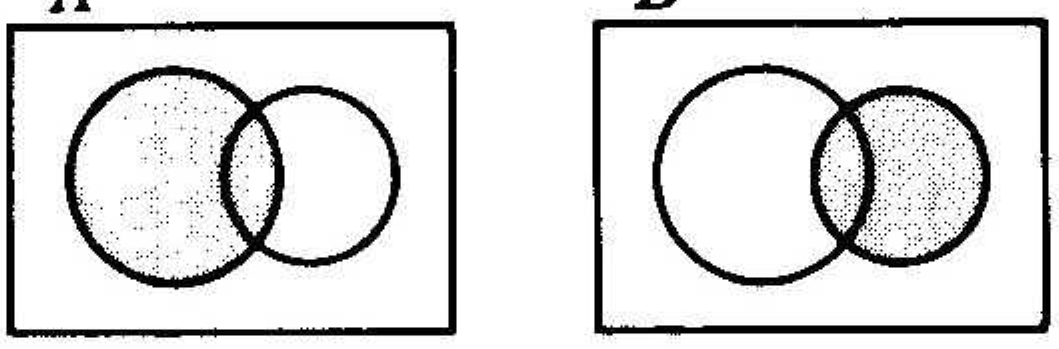
練習 5. 集合 $A,\ B$ について

$$\overline{A}\cup(\overline{A\cap\overline{B}})=A\cap B$$

を証明せよ。

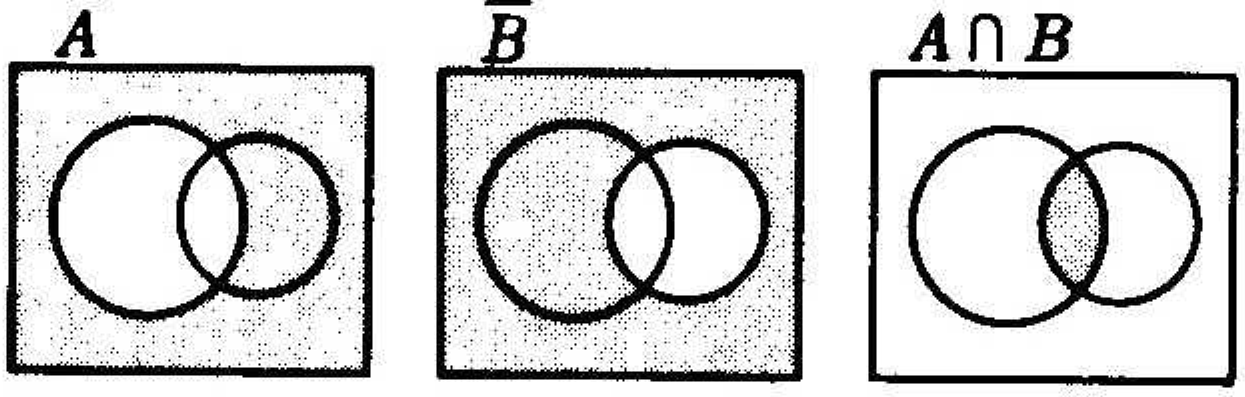
（解） ベン図を使って証明すると次のようである。

A　　B



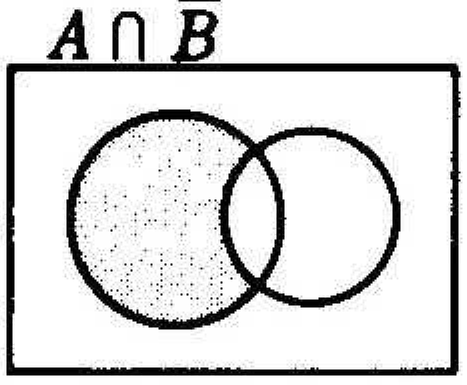
とすると，

$\overline{A}$　　$\overline{B}$　　$A\cap B$



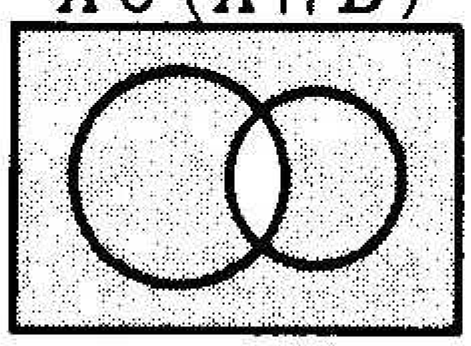
であるから

$A\cap\overline{B}$



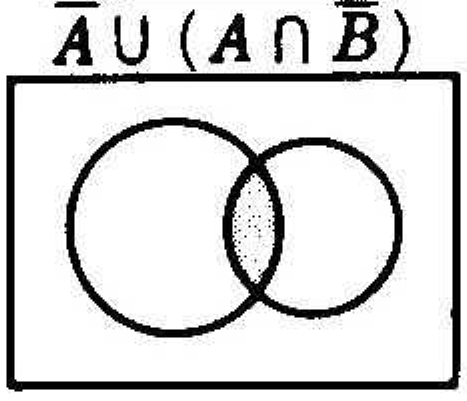
したがって

$\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})$



ゆえに

$\overline{\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})}$



これは上の $A\cap B$ と一致する。

よって証明された。

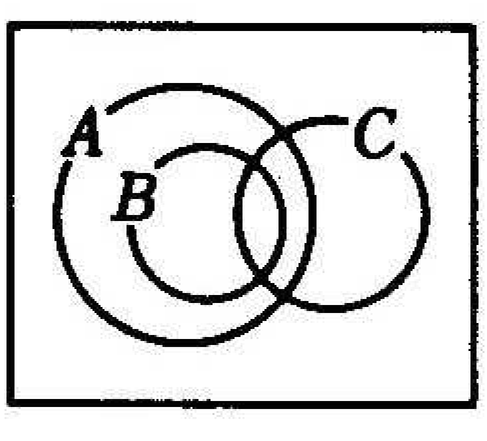
練習 6. 集合 $A,\ B,\ C$ について

$$A\supseteqq B \quad ならば \quad A\cap C\supseteqq B\cap C$$

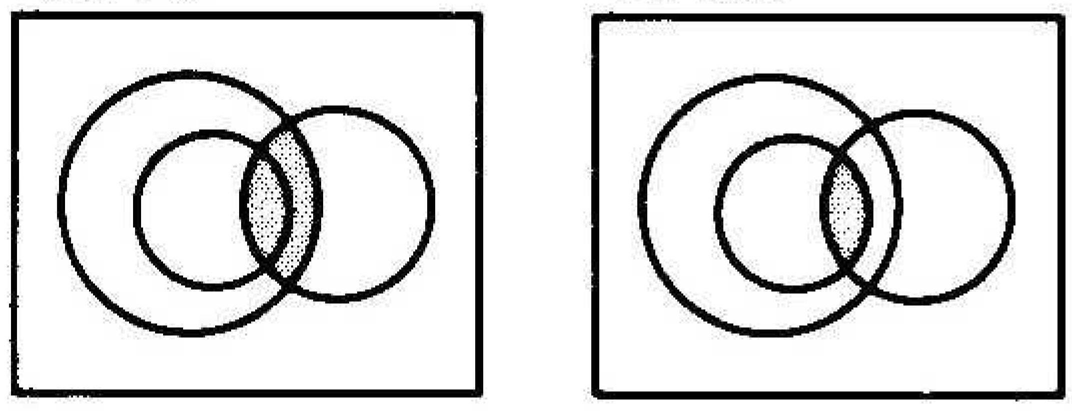
であることを証明せよ。

（解） ベン図によって証明する。

$A\supseteqq B$ であるから $A,\ B,\ C$ を右のように表すことができる。このとき



$A\cap C$　　$B\cap C$



であるから

$$A\cap C\supseteqq B\cap C$$

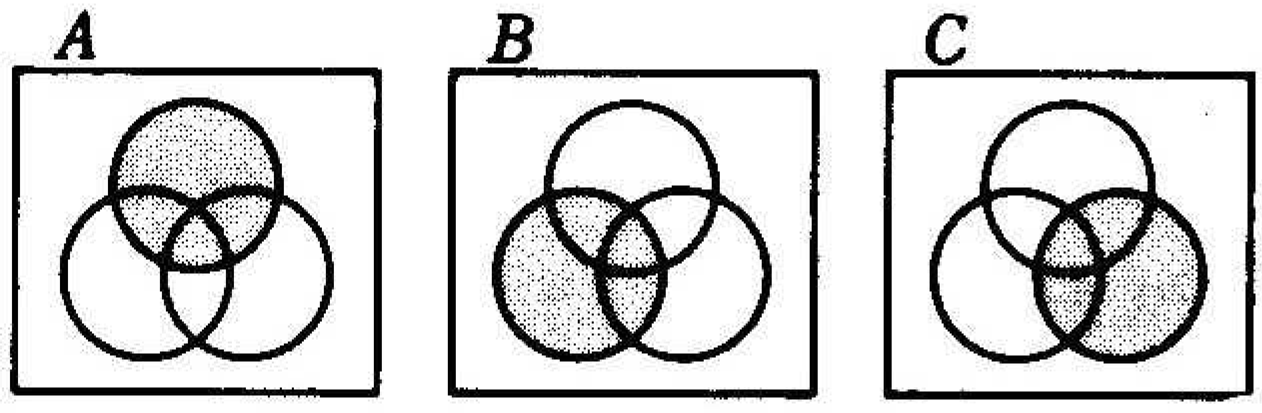
*　　*　　*

◆ ベン図は集合を簡単にする場合にも使えます。

練習 7. 次の集合をなるべく簡単な形に表せ。　$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B})$

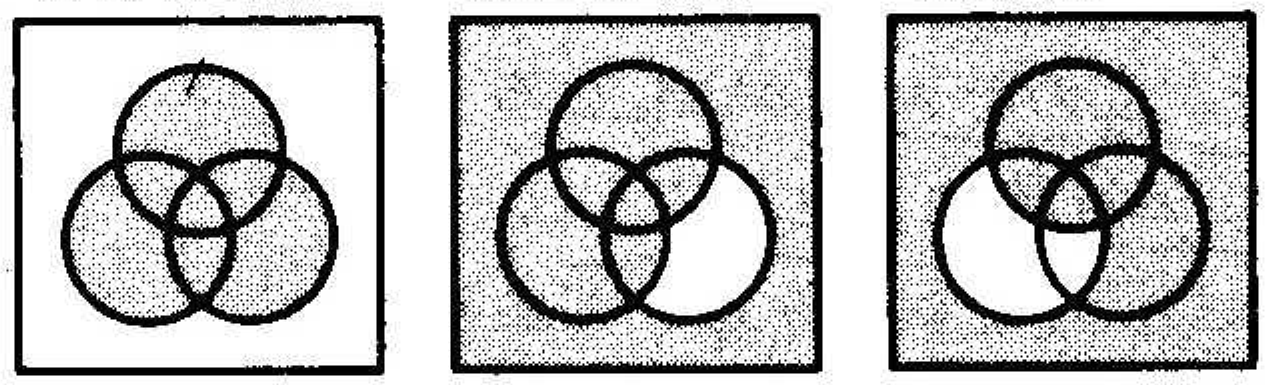
（ヒント） ベン図でやってみます。

A　　B　　C



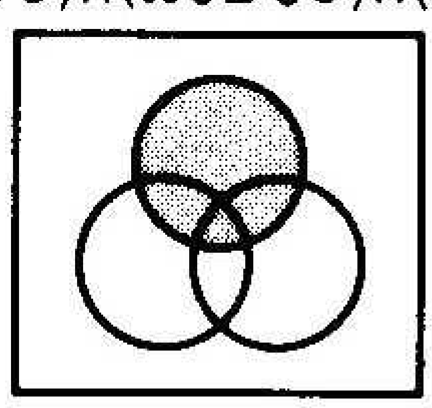
としますと，

$A\cup B\cup C$　　$A\cup B\cup\overline{C}$　　$A\cup\overline{B}$



したがって

$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B})$



となり，これは A を表しています。

（答） A

*　　*　　*

◆ またベン図は集合の要素の個数が有限なときにも補助的に使えます。例えば，

≪あるクラスで 50 人の生徒が夏休みに山と海の少なくとも一方に行くことになった。山へ行くもの 35 人，海へ行くもの 27 人ならば山と海の両方へ行くものは何人か≫

といったもの。これについては（☞ p. 88）。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○包含表の作り方

◆集合演算を扱うとき必ずできる方法が2つある。そのうちの1つがこの包含表を使うことなのだ。

◆ ある元が集合Aに含まれているかいないかによって○，×で表すことにしよう。人によっては○でなく $\in$ を，×でなく $\notin$ を使うが，ここでは書きやすいほうを選んで○，×にしました。

さて，これをどう使うか。具体的な例でいくほうがわかりやすい。では，これです。

■練習1. 集合A，Bについて$A\cup B$の包含表を作れ。

ヒント　右の表が解答です。ところで表の意味は次の通り。xがA，Bの双方に含まれているのが1番上の行で，このとき，xはもちろん $A\cup B$ に含まれているから，そこに○を書いてあります。

A	B	$A\cup B$
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	×

同じく，$x\in A$，$x\notin B$ が第2行で，このときも $x\in A\cup B$ ですから，右のほうに○を書いてある，というぐあい。

■練習2. 集合 A，B について $A\cap B$ の包含表を作れ。

ヒント　$x\in A$ かつ $x\in B$ のときのみ $x\in A\cap B$ ですから右のようになります。とくに説明するまでもないでしょう。

A	B	$A\cap B$
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	×

■練習3. 集合 A について $\overline{A}$ の包含表を作れ。

ヒント　$\overline{A}$はAの補集合を表しています。だから $x\in A$ なら $x\notin\overline{A}$，$x\notin A$ なら $x\in\overline{A}$，だから右のようになります。

A	$\overline{A}$
○	×
×	○

*　　*　　*

◆ 以上が基本で，これを組み合わせたのが問題となってきます。

■練習4. 集合 A，B について $(A\cup B)\cap\overline{B}$ の包含表を作れ。

ヒント　$A\cup B$，$\overline{B}$ の包含表を①，②の順に書いて，その2つから最終結果を③に書いてあります。つまり，$x\in A$，$x\notin B$ のときのみxは $(A\cup B)\cap\overline{B}$ の元となるのです。

A	B	$(A\cup B)\cap\overline{B}$		
○	○	○	×	×
○	×	○	○	○
×	○	○	×	×
×	×	×	×	○
		①	③	②

見やすいように最終結果の両側に‖を引いておくのがよいでしょう。

■練習5. 集合A，B，Cについて

$$D=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$$

の包含表を作れ。

ヒント　A, B, Cの3つあるから組み合わせると8つの場合になります。

A	B	C	$(A\cap B)\cup$	$(B\cap C)\cup$	$(C\cap A)$	D
○	○	○	○	○	○	○
○	○	×	○	×	×	○
○	×	○	×	×	○	○
○	×	×	×	×	×	×
×	○	○	×	○	×	○
×	○	×	×	×	×	×
×	×	○	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×

これからわかるように，xがA，B，Cの少なくとも2つに含まれているなら

$$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$$

に含まれることがわかります。

このように包含表を作って，それが等しくなれば２つの集合が等しいといえるわけ。

＊　＊　＊

◆ 包含表の応用例をいくつかやってみませんか。 7/13

練習 6. 集合 A, B, C について

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

を証明せよ。

(解) 両辺の包含表を作ると，下のようになる。すなわち，右辺を E, $A\cup B\cup C=D$ とすると

ABC	$D=A\cup B\cup C$	$\overline{D}$	$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=E$			
○○○	○	×	×	×	×	×
○○×	○	×	×	×	○	×
○×○	○	×	×	○	×	×
○××	○	×	×	○	○	×
×○○	○	×	○	×	×	×
×○×	○	×	○	×	○	×
××○	○	×	○	○	×	×
×××	×	○	○	○	○	○

$\overline{D}$ と E の包含表はまったく一致するから $\overline{D}=E$, よって証明された。

練習 7. 集合 A, B について

$$A\cap(\overline{A}\cup B)=\overline{A}\cup\overline{B}$$

が成り立つことを示せ。

(解) 両辺の包含表を作ると，下のようである。

		左辺		右辺
A	B	$C=A\cap(\overline{A}\cup B)$	$\overline{C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}$
○	○	○○ ×○○	×	×××
○	×	○× ×××	○	×○○
×	○	×× ○○○	○	○○×
×	×	×× ○○×	○	○○○
		①⑤ ②④③	⑥	①③②

これによると，左辺の包含表 ⑥ と右辺の包含表 ③ は一致する。よって証明された。

＊　＊　＊

◆ 集合を簡単な形に表すのにも包含表は有用です。ともあれ，具体例から：——

練習 8. 次の集合をなるべく簡単な形に表せ。全体集合を U とする。

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

(ヒント) 包含表を作ってみますと

A	B	$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$		
○	○	○	○	○××
○	×	×	○	○○○
×	○	×	×	×××
×	×	×	×	××○
		①	⑤	②④③

これによると，A の包含表とまったく同じです。

$$\therefore\ (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$$

答 A

練習 9. 次の集合 D を簡単にせよ。

$$(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)\cap(\overline{A}\cup B)$$

(解) 包含表を作ると，下のようになる。

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}\cup C$
○	○	○	×	×	×	×	○
○	○	×	×	×	○	○	×
○	×	○	×	○	×	○	○
○	×	×	×	○	○	○	○
×	○	○	○	×	×	○	○
×	○	×	○	×	○	○	○
×	×	○	○	○	×	○	○
×	×	×	○	○	○	○	○

A	B	C	$\overline{A}\cup B$	D
○	○	○	○	×
○	○	×	○	×
○	×	○	×	×
○	×	×	×	×
×	○	○	○	○
×	○	×	○	○
×	×	○	○	○
×	×	×	○	○

この結果によると $D=\overline{A}$ である。

答 $\overline{A}$

なれると，包含表ももっと簡単化することもできます。

8/3

集合演算の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆集合はベン図が見やすいとはいうものの少し複雑になるとお手上げ，また，包含表も機械的に扱えるがめんどうになることもある。

◆ ある元xが集合Aに含まれるとき

$$x\in A$$

で表し，含まれないときは

$$x\notin A$$

で表します。ここではこの$\in$および$\notin$を使って，集合演算の扱い方を学ぶことにしましょう。では，まず，これです。

練習 1. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ であることを証明せよ。

ヒント 2つの集合M，Nについて

$$M\subseteqq N \text{ かつ } M\supseteqq N$$

が証明されれば

$$M=N$$

となります。だから，本問では，まず「ある元xが $\overline{A\cup B}$に含まれると仮定すると，xが$\overline{A}\cap\overline{B}$ に含まれる」ことをいえれば$\overline{A\cup B}$が$\overline{A}\cap\overline{B}$ の部分集合であることがわかります。

次に「xが $\overline{A}\cap\overline{B}$に含まれると仮定すると$x$が $\overline{A\cup B}$ に含まれる」ことがいえれば$\overline{A}\cap\overline{B}$ が $\overline{A\cup B}$の部分集合であることになって証明は完結するわけです。

さて：——

(1) $x\in\overline{A\cup B}$ とすると $x\notin A\cup B$

ゆえに　$x\notin A$ かつ $x\notin B$

$$\therefore\ x\in\overline{A} \text{ かつ } x\in\overline{B}$$

$$\therefore\ x\in(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$\therefore\ \overline{A\cup B}\subseteqq\overline{A}\cap\overline{B}$$

(2) 次に，$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$ とすると

$$x\in\overline{A} \text{ かつ } x\in\overline{B}$$

$$\therefore\ x\notin A \text{ かつ } x\notin B$$

$$\therefore\ x\notin(A\cup B)$$

$$\therefore\ x\in\overline{A\cup B}$$

$$\therefore\ (\overline{A}\cap\overline{B})\subseteqq\overline{A\cup B}$$

(1)，(2)により

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

Q.E.D.

練習 2. 集合A，B，Cについて

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

を証明せよ。

ヒント どうやら**練習1.**を使ったらうまくいきそうな感じ!!

ともかくやってみましょう。

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B\cup C}&=\overline{A\cup(B\cup C)}\\&=\overline{A}\cap\overline{B\cup C}\\&=\overline{A}\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\\&=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\end{aligned}$$

あっ，予定どおり，うまくいったね。

練習 3. 集合A，Bについて

$$\overline{A\cap(\overline{A}\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

が成り立つことを示せ。

ヒント (1) $x\in\overline{A\cap(\overline{A}\cup B)}$

とすると

$$x\notin A\cap(\overline{A}\cup B)$$

$$\therefore\ x\notin A \text{ または } x\notin(\overline{A}\cup B)$$

$$\therefore\ x\in\overline{A} \text{ または } (x\notin\overline{A} \text{ かつ } x\notin B)$$

$$\therefore\ x\in\overline{A} \text{ または } (x\in A \text{ かつ } x\in\overline{B})$$

$$\therefore\ x\in\overline{A} \text{ または } x\in\overline{B}$$

$$\therefore\ x\in\overline{A}\cup\overline{B}$$

$$\therefore\ \overline{A\cap(\overline{A}\cup B)}\subseteqq(\overline{A}\cup\overline{B})$$

(2) $x\in(\overline{A}\cup\overline{B})$ とすると次の3つの場合がある。

(i) $x\notin\overline{A}$ かつ $x\in\overline{B}$

(ii) $x\in\overline{A}$ かつ $x\notin\overline{B}$

(iii) $x\in\overline{A}$ かつ $x\in\overline{B}$

あるいは(i)を変形すると

$$x \notin \overline{A} \text{ かつ } x \notin B \quad \therefore \quad x \notin (\overline{A} \cup B)$$

$$\therefore \quad x \in \overline{A \cap (\overline{A} \cup B)}$$

(ii), (iii)の場合は

$$x \notin A$$

$$\therefore \quad x \in \overline{A \cap (\overline{A} \cup B)}$$

結局　$(\overline{A} \cup \overline{B}) \subseteqq \overline{A \cap (\overline{A} \cup B)}$

上の(1), (2)により

$$\overline{A \cap (\overline{A} \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Q.E.D.

*　*　*

◆ なお，ついでながら注意しておきたいことが2つあります。

ひとつは分配法則です。つまり

$$\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

および

$$\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

が成り立つことです。証明を上の流儀でやってみましょう。

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

とすると

$$x \in A \text{ かつ } x \in (B \cup C)$$

$$\therefore \quad (x \in A \text{ かつ } x \in B)$$

$$\text{または } (x \in A \text{ かつ } x \in C)$$

ゆえに

$$x \in A \cap B \text{ または } x \in A \cap C$$

$$\therefore \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\therefore \quad A \cap (B \cup C) \subseteqq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

逆に，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とすると

$$x \in (A \cap B) \text{ または } x \in (A \cap C)$$

$$\therefore \quad x \in A \text{ かつ } (x \in B \text{ または } x \in C)$$

$$\therefore \quad x \in A \text{ かつ } x \in (B \cup C)$$

$$\therefore \quad x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\therefore \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteqq (A \cap (B \cup C))$$

$$\therefore \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Q.E.D.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

についてもまったく同様にして証明することができます。なるべく，今すぐやってもらいたいところだ。

今ひとつは

$$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$
$$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

が重要な関係で，これを**ド・モルガンの定理**といいます。

この証明はすでに左ページでやってありますから，ここではやりませんが，これを組合せて，いろいろな関係をみちびくことができます。例えば：——

■練習 4. $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})$ を示せ。

ヒント　$\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup (\overline{B \cup C})$

$= \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$

$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$

$= (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})$

Q.E.D.

■練習 5. $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{A \cup B}) \cup (\overline{A \cup C})$ を示せ。

ヒント　$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B \cap C})$

$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$

$= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$

$= (\overline{A \cup B}) \cup (\overline{A \cup C})$

Q.E.D.

*　*　*

◆ ところで，この集合演算はなかなかのみこめない人が多いものですが，もし，いやでいやで仕様のない人はベン図でやってあっさり通過してもかまいません。しかし，おれは，と思う人はこの演算をつかんでおきたいもの。同時に，それらをベン図でもやってみる，包含表でもやってみる，ということが大切なのです。それによって，これらが抵抗なく使えるようになるでしょう。

では，最後に，次の関係はどのように書き換えられるでしょうか。

■練習 6. $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap D)}$ を書き換えてみよ。

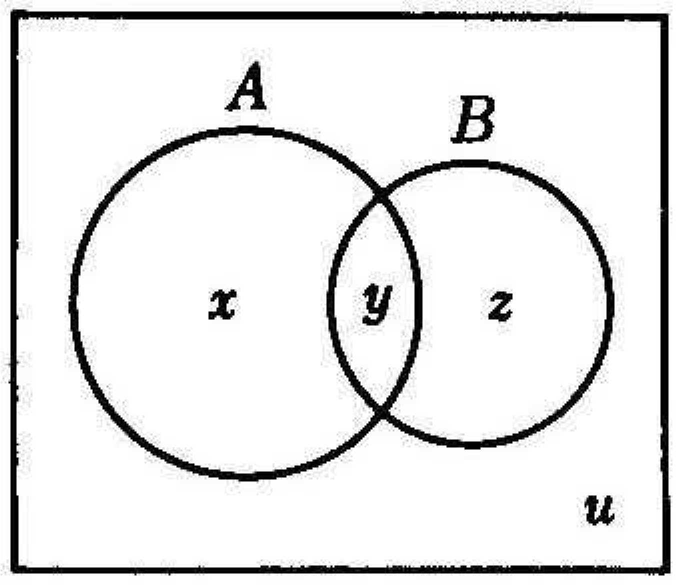
有限集合と応用問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆有限集合こそ，ベン図の活躍舞台です。さあ，応用問題を通して，有限集合の扱い方をマスターしようではないか。

◆ 集合には元の数が有限のものと無限のものとあります。これをそれぞれ **有限集合**，**無限集合** といいます。ところで，ここでは有限集合だけ扱うことにしましょう。

さて，集合Aの元の数を$n(A)$で表すことにしますと，右の図に示すように



$n(A\cup B)+n(A\cap B)$
$=(x+y+z)+y$
$=(x+y)+(z+y)=n(A)+n(B)$

すなわち

$$\boldsymbol{n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)}$$

なる関係があります。ここに，x，y，zは各部分集合の元の個数です。

■練習 1.　$n(A\cup B)+n(A\cap B)=n(A)+n(B)$ を使って $n(A\cup B\cup C)$ を表す関係式を導け。

(ヒント) $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$ を使って変形してゆけばよいでしょう。ともかく，やってみましょう。

$n(A\cup B\cup C)=n((A\cup B)\cup C)$
$=n(A\cup B)+n(C)-n((A\cup B)\cap C)$

ここで　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

だから

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)$
$\quad-[n(A\cap C)+n(B\cap C)$
$\quad-n\{(A\cap C)\cap(B\cap C)\}]$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\quad-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$\quad(\because\ (A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C)$

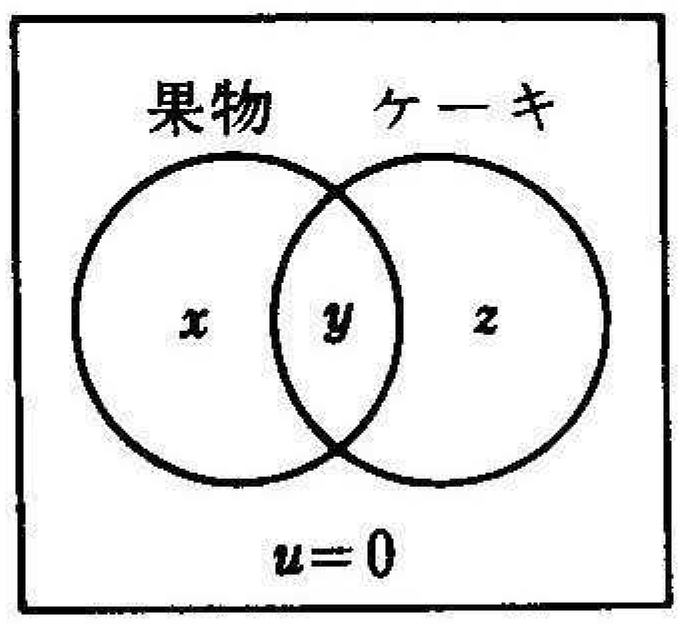
これが求めるものです。こんな変形をしなくても，ベン図からは一目瞭然ですが。ひとつやってみませんか。

＊　＊　＊

◆ 有限集合の場合，ベン図はいろいろな応用問題に役立ちます。では，これをやってみませんか。

■練習 2. あるクラス100人の生徒で，果物の好きなものは70人，ケーキの好きなものは54人いた。両方好きなものは何人か。ただし，両方きらいな人はないものとする。

(ヒント) 右のようなベン図で考えてみますと，果物の好きなものは$(x+y)$人，ケーキの好きなものは$(y+z)$人というわけ。そこで



$x+y=70$　……①
$y+z=54$　……②
$x+y+z=100$　……③

③−② より

$x=46$ (人)

③−① より

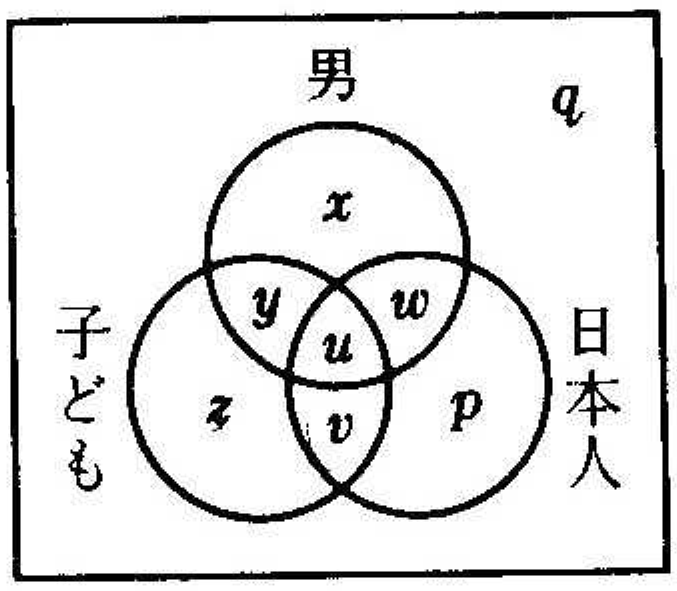
$z=30$ (人)

$\therefore\ y=24$ (人)

となります。　　答　24人

■練習 3. 全部で25人いる。男は14人，子どもは10人，日本人は10人，日本人の子どもは3人，女の子どもは4人，大人の女は7人，日本人の男の子どもは2人いる。外人の大人は何人か。

ヒント　右の図に示すようにベン図で表しますと与えられた条件は次のような連立方程式で与えられます。このように未知数が多いときには，同じものは縦に並ぶようにするのがよい。さて，



$$\begin{array}{lll} x+y+z+u+v+w+p+q=25 & \cdots\cdots ① \\ x+y\quad +u\quad +w \qquad\quad =14 & \cdots\cdots ② \\ \quad y+z+u+v \qquad\qquad =10 & \cdots\cdots ③ \\ \qquad\quad u+v+w+p \quad =10 & \cdots\cdots ④ \\ \qquad\quad u+v \qquad\qquad =3 & \cdots\cdots ⑤ \\ \qquad z \quad +v \qquad\qquad =4 & \cdots\cdots ⑥ \\ \qquad\qquad\qquad p+q=7 & \cdots\cdots ⑦ \\ \qquad\quad u \qquad\qquad\quad =2 & \cdots\cdots ⑧ \end{array}$$

これを解いて $x+q$ を出せばいい。何のことはない。すべてを求める決心をして順に消去してゆくのがコツ。

答　8人

*　*　*

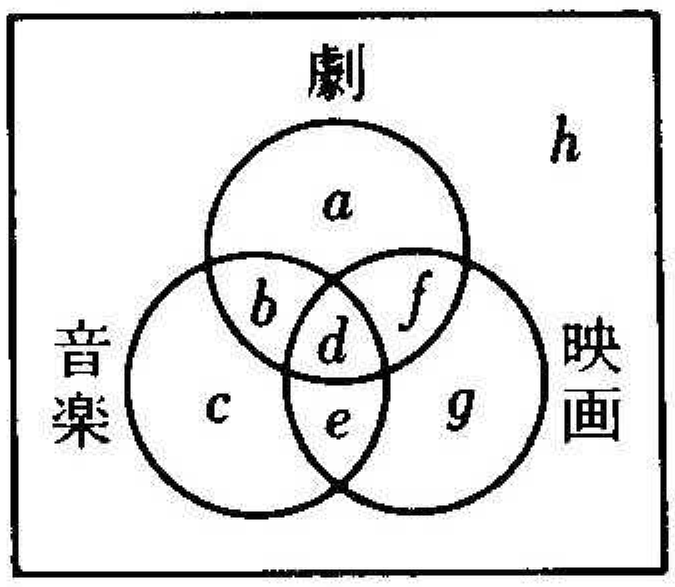
◆　では，次には，ややめんどうなものをやってみませんか。

練習 4. ある学校で文化祭が行われた。その日，講堂で，午前は音楽会，午後は劇，夜は映画の催しがあり，その入場者は第1表の通りであった。その日の来会者全体876人ひとりひとりについて，その催しものの入場料に使った金額を調べたら，第2表のような表を得た。第2表の x，y，z に相当する人数を求めよ。　（神戸大）

第1表		入場料	入場者数	入場料総収入
	音楽会	50円	318	15,900円
	劇	150	465	69,750
	映　画	100	420	42,000

第2表	入場料に使った金額	左の金額を使った人の数
	0円	47人
	50	121
	100	218
	150	193
	200	x
	250	y
	300	z

ヒント　右図のようにベン図を使って表してみましょう。



全部で876人というから

$$a+b+c+d+e+f+g+h=876$$

0円が47人いるということは，図では h が47だということ。50円が121人というのは音楽会だけの人，図では c，これが121人いたということなのです。

これらの方程式を書くときには同じ文字は縦に並ぶように書くと見やすいし，マチガイも少ないもの。ではともかく書いてみますと次のようになります。まず第2表から

$$\begin{array}{lll} a+b+c+d+e+f+g+h=876 & \cdots\cdots ① \\ \qquad\qquad\qquad\qquad h=47 & \cdots\cdots ② \\ \qquad c \qquad\qquad\qquad =121 & \cdots\cdots ③ \\ \qquad\qquad\qquad g \quad =218 & \cdots\cdots ④ \\ \quad b \qquad\qquad\qquad\quad =x & \cdots\cdots ⑤ \\ \qquad\qquad\quad f \qquad\quad =y & \cdots\cdots ⑥ \\ \qquad\quad d \qquad\qquad\quad =z & \cdots\cdots ⑦ \\ a \qquad\quad +e \qquad\qquad =193 & \cdots\cdots ⑧ \end{array}$$

次には第1表から

$$\begin{array}{lll} \quad b+c+d+e \qquad\quad =318 & \cdots\cdots ⑨ \\ a+b \quad +d \quad +f \qquad =465 & \cdots\cdots ⑩ \\ \qquad\quad d+e+f+g \quad =420 & \cdots\cdots ⑪ \end{array}$$

未知数は11個，方程式も11個，多分解けるでしょう。ウマイことをやろうとしないで，1つ1つ消去していくこと。

では，答だけあげておきましょう。

答　$x=120$，$y=125$，$z=52$

*　*　*

◆　ベン図を扱うのは機械的にできる点が利点ですが，その代わり，冗長になる欠点もあります。だから，これでやってみて答が出たら，それをもとにして簡潔な解答を考えてみるのはよい勉強になるでしょう。

8/4

○（集合の）直積とは何か

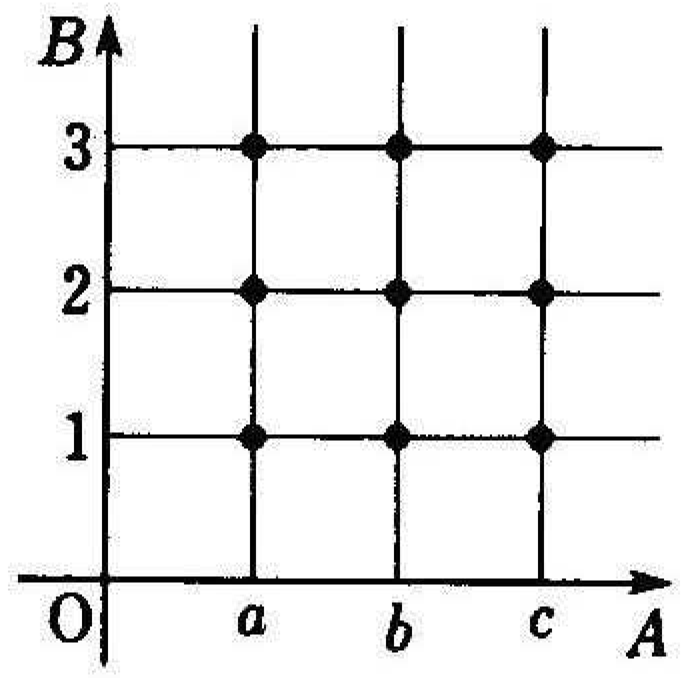
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆直積（チョクセキ）ということばはなぜかなじめない。めんどうそうな予感がしますからね。しかし，なんのことはありませんよ。

◆ 集合 $A=\{a, b, c\}$,　$B=\{1, 2, 3\}$ の直積 $A\times B$ というのは，A のあらゆる元と，B のあらゆる元の組合せの集合をいうのです。つまり

$$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3),$$
$$(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$
$$(c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

です。図に示すと，9つの点で示されます。では，これを。



7/15

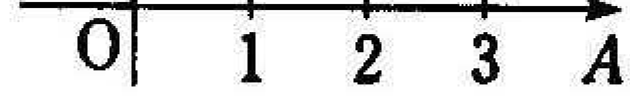
練習 1. $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$ のとき A と B の直積 $A\times B$ を求めよ。

（解）　$\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

7/15

練習 2. $A=\{x|1\leqq x\leqq 2\}$, $B=\{y|2\leqq y\leqq 3\}$ のとき $A\times B$ を図示せよ。

（ヒント）　$A\times B=\{(x, y)|1\leqq x\leqq 2, 2\leqq y\leqq 3\}$ ですから，図に示すと右のようになります。



7/15

練習 3. 9の約数の集合は $\{1, 3, 9\}$ すなわち $\{3^0, 3^1, 3^2\}$ である。これを $A=\{0, 1, 2\}$ と表すことにする。

(1)　81 の約数の集合はどのように表せるか。

(2)　243 の約数の集合はどのように表せるか。

（ヒント）　$\{3^0, 3^1, 3^2\}$ を $\{0, 1, 2\}$ で表すというのは要するに指数だけをとって表した，ということである。してみると 81 の約数の集合は

$$\{1, 3, 9, 27, 81\}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

は　$\{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4\}$

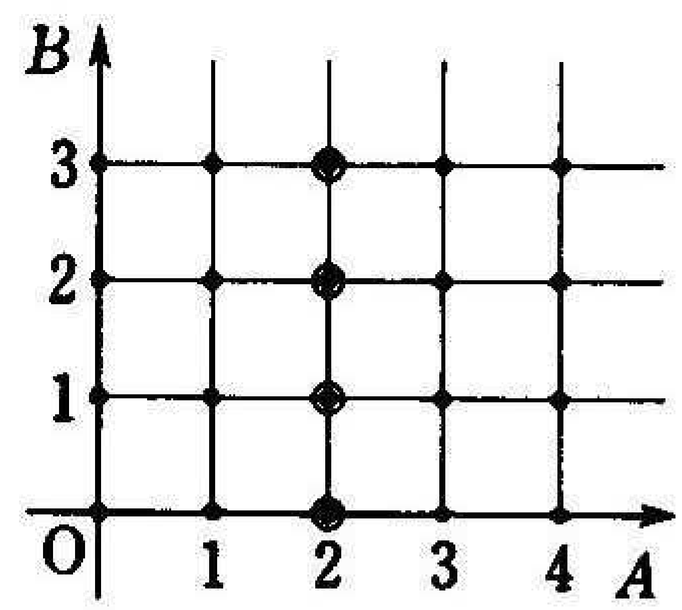
であるから，$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ で表す，ということになる。同じように 243 については $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ で表せる。

（注）　上のように表すと，8 の約数の集合は $\{1, 2, 4, 8\}$，つまり $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$ で，$\{0, 1, 2, 3\}$ で表すことになろう。そして

$$81\times 8=648$$

については，集合 $A\{0, 1, 2, 3, 4\}$ と集合 $B\{0, 1, 2, 3\}$ の直積で表せることになります。ただし，$(2, 3)$ は $3^2\times 2^3=9\times 8=72$ に対応する，ということになります。

また，648 の約数の中で，9 では割りきれるが 27 では割りきれないものは◉で示したものになるといったぐあい。



*　*　*

◆ 直積の意味はほぼわかったでしょう。では次には，やや，めんどうな問題を扱ってみましょう。

7/16

練習 4. 2つの集合 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ がある。X の任意の要素 x に対して $f(x)=x+1$ を対応させるとき，点 $(x, f(x))$ の集合を直積 $X\times Y$ の図表示の上に図示せよ。

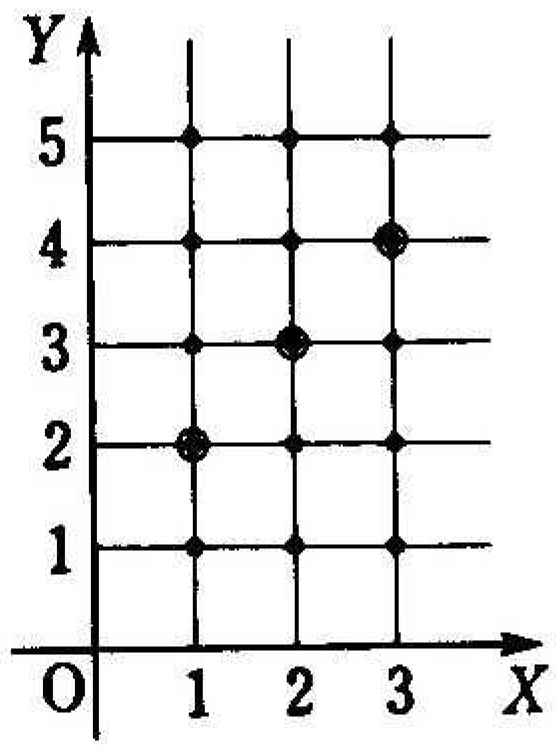
（ヒント）　直線 $X\times Y$ は $(1, 1)$, $(1, 2)$, ……$(1, 5)$, $(2, 1)$, ……$(2, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, ……$(3, 5)$ の $3\times 5=15$ 個の点からな

る。その上に

$(x,\ x+1)$

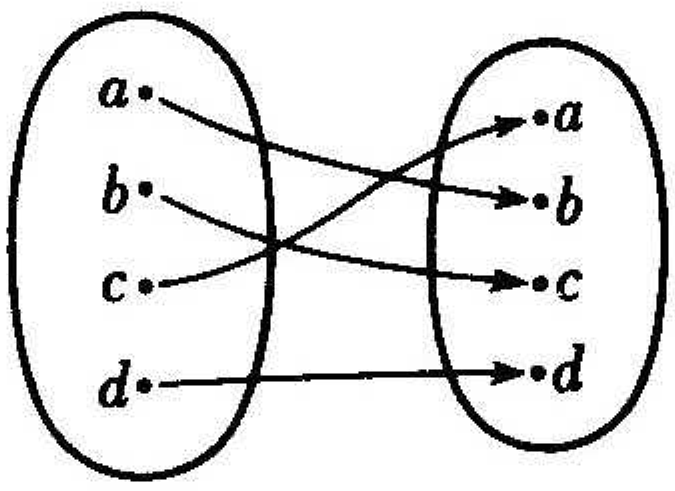
を図示すればよい，というわけ。

そこで，$X \times Y$ の要素を・で図示し，さらに $(x,\ x+1)$ を⊙で図示してあります。

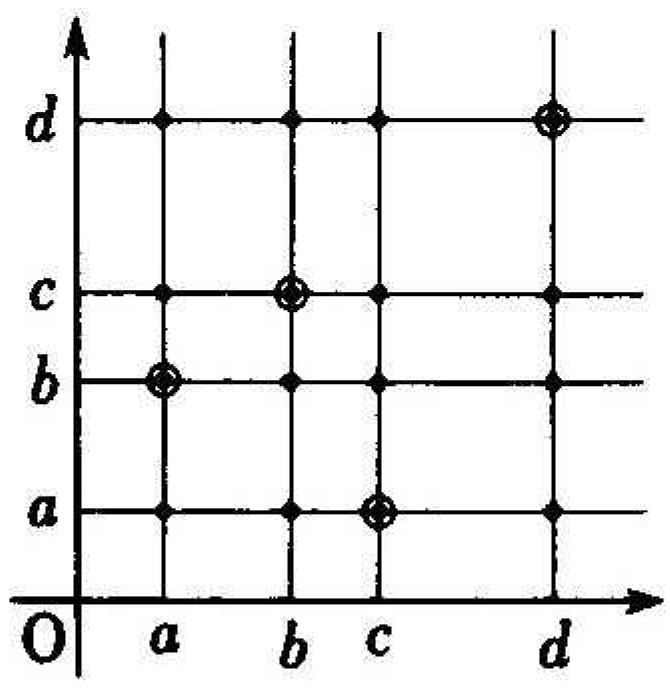


7/16

■練習 5. 1つの集合 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ がある。AからAへの写像fが右のように与えられている。直積 $A \times A$ の図式の上にプロットせよ。



（解）右の図に示してあるように $A \times A$ は 16 個の点からなり，f は⊙で示されている。



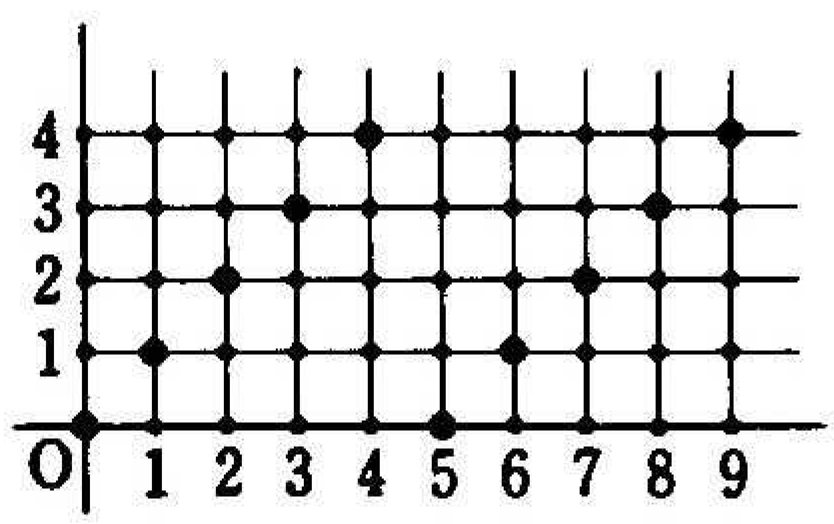
■練習 6. 5で割って得る余りが i ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$) であるような整数を i に移す写像fを考える。整数xの集合Aの直積 $A \times A$ の図式の中にxをiに移す対応をプロットせよ。

（ヒント）$A \times A$ は座標が整数であるような点のすべて，すなわち，格子点のすべてからなっている。そこへ

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \cdots\cdots$

$f(5)=0,\ f(6)=1,\ \cdots\cdots$

をプロットすると上のようになります。



＊　＊　＊

◆ ここでは直積に関係したいくつかの問題をとりあげてみましょう。

■練習 7. $A=\{0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とする。

(i) $A \times B$ の中に要素がいくつあるか。

(ii) 各要素 $(x,\ y) \in A \times B$ を，分数 $\dfrac{x}{y}$ と書くことにすれば，異なる分数がいくつできるか。

（ヒント）(i) $3 \times 5 = 15$

(ii) $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ 1$

全部で 9 個あります。

■練習 8. $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{a,\ b,\ c\}$ のとき，直積 $A \times B$，$B \times A$ の要素をすべて書け。

（解）
$$A \times B=\{(1,\ a),\ (1,\ b),\ (1,\ c),\ (2,\ a),\ (2,\ b),\ (2,\ c),\ (3,\ a),\ (3,\ b),\ (3,\ c)\}$$
$$B \times A=\{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (a,\ 3),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (b,\ 3),\ (c,\ 1),\ (c,\ 2),\ (c,\ 3)\}$$

＊　＊　＊

◆ 集合A, B, Cの直積 $A \times B \times C$ も同じように定義されます。例えば，$A=\{1,\ 2\}$，$B=\{a,\ b\}$，$C=\{イ,\ ロ\}$ なら
$$A \times B \times C=\{(1,\ a,\ イ),\ (1,\ a,\ ロ),\ (1,\ b,\ イ),\ (1,\ b,\ ロ),\ (2,\ a,\ イ),\ (2,\ a,\ ロ),\ (2,\ b,\ イ),\ (2,\ b,\ ロ)\}$$
となります。

では，次はどうです。

■練習 9. $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{a,\ b\}$，$C=\{イ\}$

のとき $A \times B \times C$ を求めよ。

（ヒント）全部書いてみましょう。
$$A \times B \times C=\{(1,\ a,\ イ),\ (1,\ b,\ イ),\ (2,\ a,\ イ),\ (2,\ b,\ イ),\ (3,\ a,\ イ),\ (3,\ b,\ イ)\}$$

○演算とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆◦だの＊だの⊙だのと，変わった記号がチラチラしだすと，気が重くなる。しかし，＋だって，－だって，×だって，÷だって，……

◆ 2と3を加えると5がただ1つきまります。すなわち

$$2+3=5$$

このように，

a と b からある操作＊で c が1つだけ定まるとき，すなわち

$$a*b=c$$

のとき，この操作を 演算 という。

つまり，加えるという操作，掛けるいう操作，割るという操作，すべて演算です。

ある集合 M の要素を a，b としましょう。記号で書けば

$$a\in M,\ b\in M$$

さて，ある集合 M に属する任意の2つの要素に演算＊を施したとき，その結果がやはり M に属するとき，すなわち記号で書けば

$a\in M$，$b\in M$ に対して　$a*b\in M$
のとき，M は演算＊について 閉じている

といいます。

7/16

■練習 1. 奇数の集合 M は加法について閉じているか。

(解) 奇数と奇数の和は偶数であるから，M に属しない。ゆえに，M は加法について閉じていない。

2/16

■練習 2. 偶数の集合 N は乗法について閉じているか。　　答 閉じている

2/16

■練習 3. 集合 $L=\{2m+5n\,|\,m,\ n$ は整数$\}$ は加減乗除の四則演算のどれについて閉じているか。

(ヒント) $(2m_1+5n_1)+(2m_2+5n_2)$
$=2(m_1+m_2)+5(n_1+n_2)$

であるから加法について閉じていることがわかります。

減法についても閉じています。

乗法については

$$(2m_1+5n_1)(2m_2+5n_2)$$
$$=4m_1m_2+10m_1n_2+10n_1m_2+25n_1n_2$$
$$=2(2m_1m_2+5m_1n_2+5n_1m_2)+5(5n_1n_2)$$

となってやはり $2m+5n$ の形ですから，閉じています。もちろん，上のようにくくる必要はありません。

$$=2(2m_1m_2)+5(2m_1n_2+2n_1m_2+5n_1n_2)$$

としてもかまわない。

除法については閉じていないことはすぐわかります。反例を1つあげてみればいいでしょう。

$m_1=1$，$n_1=0$ とすれば　$2m_1+5n_1=2$
$m_2=0$，$n_2=1$ とすれば　$2m_2+5n_2=5$

$$\therefore\ \frac{2m_1+5n_1}{2m_2+5n_2}=\frac{2}{5}\neq\text{整数}$$

よってこれは L に含まれない。(含まれるものも作れます。しかし，すべてが含まれなければならないのです)

＊　＊　＊

◆ ある集合がある演算について閉じているだけでは条件がゆるすぎてあまり役に立たない。そこで，さらに

交換法則：$a*b=b*a$

が成り立つか，

結合法則：$a*(b*c)=(a*b)*c$

が成り立つか，といったことが問題となってきます。詳しいことについては（☞ p.98，☞ p.100）を参照してもらうとして，ここには簡単な例をあげておきます。

7/16

1/16

■練習 4. 任意の実数 a, b について $a \circ b$ を次のように定義する。

$$a \circ b = 2a + 3b$$

交換法則は成り立つか。

(ヒント) $a \circ b = 2a + 3b$, $b \circ a = 2b + 3a$ ですから, a, b がどんな実数でも

$$a \circ b = b \circ a$$

となりません ($a=b=1$ のときなどは成り立つが)。だから, 交換法則は成り立たないのです。

■練習 5. 任意の実数 a, b について $a \triangle b$ を $a \triangle b = a + b + ab$ ように定義する。結合法則は成り立つか。

(ヒント) $(a \triangle b) \triangle c = (a+b+ab) \triangle c$

$= (a+b+ab) + c + (a+b+ab)c$

$= a+b+c+ab+bc+ca+abc$

次に,

$a \triangle (b \triangle c) = a \triangle (b+c+bc)$

$= a + (b+c+bc) + a(b+c+bc)$

$= a+b+c+ab+bc+ca+abc$

ゆえにすべての a, b, c について

$$(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$$

が成り立つ。

つまり, 結合法則が成り立つのです。

* * *

◆ さらに, 単位元や逆元が存在するかどうかが問題となります。

集合 M に属する任意の元 a について

$$a * e = e * a = a$$

が成り立つような e がただ1つあれば, これを **単位元** といいます。また,

$$a * b = b * a = e$$

なる b を a の **逆元** といいます。単位元について詳しくは (☞ p. 94), 逆元については (☞ p. 96), ここでは, 簡単な例をあげておくことにします。

■練習 6. 実数の集合 M において, 乗法についての単位元を求めよ。

(解) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ だから, 単位元は 1

7/16

■練習 7. 集合 $N = \{a\sqrt{5} \mid a \text{ は有理数}\}$ について, 加法に関する単位元は何か。

(解) $a\sqrt{5} + 0 \cdot \sqrt{5} = 0 \cdot \sqrt{5} + a\sqrt{5}$

$= a\sqrt{5}$

ゆえに求める単位元は 0 $(= 0 \cdot \sqrt{5})$

7/16

■練習 8. 集合 $L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \text{ は有理数}\}$ について, 加法および乗法についての単位元および逆元を求めよ。

(ヒント) まず加法について単位元は明らかに 0 $(= 0 + 0 \cdot \sqrt{2})$ です。したがって, 逆元 x は $(a + b\sqrt{2}) + x = 0$

より $x = -a - b\sqrt{2}$

次に乗法については, 単位元は明らかに 1 $(= 1 + 0 \cdot \sqrt{2})$ ですから, 逆元を x とすると, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき

$$(a + b\sqrt{2})x = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

$$= \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) + \left(-\frac{b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2}$$

で, $\dfrac{a}{a^2-2b^2}$ も $-\dfrac{b}{a^2-2b^2}$ も有理数ですから, これが逆元です。ただ $a=b=0$ のときには逆元は存在しないのです。

* * *

◆ さらに, 2つの演算 $\circ$ と $*$ があるとき

$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$

$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$

$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$

$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$

を分配法則といいます。詳しくは (☞ p. 102)。

ここでは1つだけやっておきましょう。

■練習 9. すべての実数について演算 $\circ$ と $*$ を次のように定義する。

$$a \circ b = a - b, \quad a * b = a + b$$

分配法則 $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ は成り立つか。

(ヒント) $a \circ (b * c) = a \circ (b + c) = a - (b + c)$

$= a - b - c$, 右辺 $= \cdots\cdots$ 　答 不成立

⑩ 単位元とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆単位とは1のことである，単位元とは1にあたる元ということだ，と思えばいい。それはいろいろな演算によってちがう。

◆ 数 a に対して1という数は

$$a\times1=1\times a=a$$

なる性質をもっています。つまり，乗法という演算について，1を掛けるのは掛けないのと同じなんです。あるいは掛けても変わらないといってもよいでしょう。一般に

演算 ◦ について

$$a\circ e=e\circ a=a$$

のとき，e を 単位元 という。

* * *

では，具体的な例についてやってみましょう。

2/14

■練習 1. 任意の実数 a，b に対して，演算 $a\oplus b$ を次のように定める。

$$a\oplus b=a+b-ab$$

この演算について単位元を求めよ。

(鹿児島大)

ヒント 単位元を e としますと，定義により

$$a\oplus e=e\oplus a=a$$

でなければなりません。ただし，a は任意の実数値をとれるのです。つまり

$$a+e-ae=e+a-ea=a$$

$$\therefore\quad (1-a)e=0$$

a が何であっても，これが成り立つためには

$$e=0$$

つまり単位元は0です。 答 0

■練習 2. 集合 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$ は乗法に関する単位元をもつか。

ヒント
$$(-1)\times1=1\times(-1)=(-1)$$
$$0\times1=1\times0=0$$
$$1\times1=1\times1=1$$

からわかるように単位元は1です。 答 1

2/16

■練習 3. 集合 $M=\{a+b\sqrt{2}\mid a$ は奇数，b は偶数$\}$ は乗法について単位元をもつか。

ヒント M は $3+2\sqrt{2}$ とか $1-4\sqrt{2}$ とか $-3+8\sqrt{2}$ のように有理項が奇数で，無理項は $\sqrt{2}$ に偶数を掛けたものだというのです。**0は偶数に入れますから，**$7+0\cdot\sqrt{2}$，つまり7もこれに含まれているわけです。

単位元を e とすると

$$(a+b\sqrt{2})e=e(a+b\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$$

でなければならない。つまり，

$$e=1=1+0\cdot\sqrt{2}$$

ですから確かに単位元は存在し，それは $1\ (=1+0\cdot\sqrt{2})$ です。

2/10

■練習 4. 集合 $N=\{ax+b\mid a,\ b$ は整数$\}$ は加法について単位元をもつか。

ヒント N は $4x+3$，$5x-7$，$0\cdot x+1$，$4x+0$ などの集合です。さて，単位元を e とすると

$$(ax+b)+e=e+(ax+b)=ax+b$$

でなければならない。だから，

$$e=0$$

これをていねいに書けば

$$e=0\cdot x+0$$

ということになります。

■練習 5. $\begin{cases}A=\{2n+1\mid n\text{ は整数}\}\\B=\{3n\mid n\text{ は整数}\}\end{cases}$

のとき A，B は加法および乗法について単位元をもつか。

ヒント まず加法について，A では

$$(2n+1)+e=e+(2n+1)=2n+1$$

を満足させる e は0であるが，これは $2n+1$ の形に書けない（n は整数だから）。つまり A は加法について単位元をもたないのです。

次に，Bでは

$$(3n)+e=e+(3n)=(3n)$$

を満足する e は

$$e=0=3\cdot 0$$

で，確かに存在するのです。

では，乗法についてはどうか。Aでは

$$(2n+1)e=e(2n+1)=2n+1$$

を満足する e は

$$e=1=2\cdot 0+1$$

で，確かに存在します。Bでは

$$(3n)e=e(3n)=(3n)$$

を満足する e は

$$e=1$$

しかし，これは $3n$ の形に書けない。したがって存在しない。

■練習 6. x，y 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ で，$x\neq 0$ であるもの全体の集合をGとする。Gの任意の2点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x',\ y')$ に対して，G の点 $\mathrm{P}*\mathrm{Q}$ を $\mathrm{P}*\mathrm{Q}=(xx',\ xy'+y)$ のように定義する。Gの点Eで，Gのすべての点 P に対して $\mathrm{P}*\mathrm{E}=\mathrm{E}*\mathrm{P}=\mathrm{P}$ をみたすものを求めよ。

ヒント $\mathrm{E}(u,\ v)$ とすると

$$\mathrm{P}*\mathrm{E}=(xu,\ xv+y)$$
$$\mathrm{E}*\mathrm{P}=(ux,\ uy+v)$$

ゆえに，x，y のすべての値に対して

$$xu=ux=x \quad \cdots\cdots①$$
$$xv+y=uy+v=y \quad \cdots\cdots②$$

が成り立たなければならない。

そこで，①から　$u=1$

これを②に代入して

$$xv+y=y+v=y$$
$$\therefore\quad xv=v=0$$

がすべての x について成り立たなければならない。これから　$v=0$

したがって

$$\mathrm{E}=(1,\ 0)$$

ということがわかります。

◆ どうやら，単位元の意味がハッキリしてきたでしょう。次には少し変わった例をやってみましょう。

■練習 7. $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$　$(ad-bc\neq 0)$

の集合 M について

$$f(e(x))=e(f(x))=f(x)$$

を満足する $e(x)$ を求めよ。

ヒント $e(x)=\dfrac{rx+s}{px+q}$　$(ps-rq\neq 0)$

とすると

$$f(e(x))=\frac{ce(x)+d}{ae(x)+b}$$

$$=\frac{c\dfrac{rx+s}{px+q}+d}{a\dfrac{rx+s}{px+q}+b}=\frac{(cr+pd)x+(cs+qd)}{(ar+pb)x+(as+qb)}$$

これが恒等的に $\dfrac{cx+d}{ax+b}$ に等しい条件を求めればいい。とはいうものの，これはどうもめんどうそうだ。

こんな場合は，大上段にふりかぶってやらないで $f(x)$ の特別なものについてやって必要条件を出す，その上で十分条件であることを示せばいいのです。

$f(x)=x+1$ としますと（つまり $a=0$，$b=1$，$c=1$，$d=1$ としたわけ）

$$f(e(x))=\frac{rx+s}{px+q}+1$$
$$=\frac{(r+p)x+(s+q)}{px+q}=x+1$$

より $p=0$，$r+p=s+q=q$ でなければならない。第2式から $s=0$，また $r=q$で出てきます。

$$\therefore\quad e(x)=\frac{qx+0}{0+q}=x$$

そこで $e(x)=x$ のときは，明らかに

$$f(e(x))=e(f(x))=f(x)$$

となり，題意に適す。ていねいに書けば

$e(x)=\dfrac{1\cdot x+0}{0\cdot x+1}$ であることがわかったのです。

答 $e(x)=x$

8/5

逆元とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ギャクというコトバはあまりいいイメージを与えない。なんとなく否定的なムードがただようからだろう。

◆　まず，定義を：——

ある集合Mがある演算$*$について単位元eをもつとき

$$a*x=x*a=e$$

であるxがただ1つあれば，xをこの演算$*$について元aの 逆元 という。

では，ちょっと練習を。

練習1. 実数の集合において，加法について，単位元を求め，さらに元aの逆元を求めよ。

2/16

ヒント　単位元をeとすると，任意の元aに対して

$$a+e=e+a=a$$
$$\therefore\ e=0$$

したがって単位元は0である。そしてaの逆元をxとすると

$$a+x=x+a=0$$
$$\therefore\ x=-a$$

答　0，$-a$

2/16

練習2. 実数の集合において演算$*$を

$$a*b=\frac{a+b}{1+ab}$$

で定義するとき，単位元と逆元を求めよ。

ヒント　単位元をeとすると

$$a*e=e*a=a$$
$$\therefore\ \frac{a+e}{1+ae}=\frac{e+a}{1+ea}=a$$
$$\therefore\ a+e=a(1+ae)$$
$$\therefore\ e=a^2e$$
$$\therefore\ (a^2-1)e=0$$

aが何であってもこれが成り立つためには$e=0$でなければならない。こうして単位元は0であることがわかった。

そこで，逆元をxとすると

$$a*x=x*a=e$$

であるから

$$a*x=x*a=0$$
$$\therefore\ \frac{a+x}{1+ax}=\frac{x+a}{1+xa}=0$$
$$\therefore\ x=-a$$

ただし，$1+ax\neq0$ であるから

$$1-a^2\neq0,\ a\neq\pm1$$

つまり ±1 の逆元は存在しないが，それ以外のaについては逆元は $-a$ となる。

＊　＊　＊

◆　次はややめんどうな部類，ムリにやることもありません。

2/16

練習3. 集合 $S=\{a+b\sqrt{5}\,|\,a,\ b\text{は整数}\}$ を考える。

(1)　乗法について単位元を求めよ。

(2)　$1-\sqrt{5}$ の逆元はあるか。

(3)　$a+b\sqrt{5}$ が逆元のあるための条件を求めよ。　(弘前大)

ヒント　(1)　単位元をeとすると

$$(a+b\sqrt{5})e=e(a+b\sqrt{5})=a+b\sqrt{5}$$
$$\therefore\ e=1=1+0\cdot\sqrt{5}$$

ゆえに単位元は1 $(=1+0\cdot\sqrt{5})$ であることがわかります。　答　1

(2)　$1-\sqrt{5}$ の逆元をxとすると

$$(1-\sqrt{5})x=x(1-\sqrt{5})=1$$
$$\therefore\ x=\frac{1}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}$$

これは $a+b\sqrt{5}$ (a，bは整数) の条件に適さない。つまり $1-\sqrt{5}$ の逆元は存在しないのです。　答　存在しない

(3)　$a+b\sqrt{5}$ に逆元xがあるとすると

$$(a+b\sqrt{5})x=x(a+b\sqrt{5})=1$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}$$

つまり

$$x=\frac{a}{a^2-5b^2}+\left(-\frac{b}{a^2-5b^2}\right)\sqrt{5}\quad\cdots\cdots①$$

これが逆元となるためには

$$\frac{a}{a^2-5b^2}\ \text{も}\ \frac{b}{a^2-5b^2}\ \text{も整数}$$

であることが必要十分な条件となります。いいかえると

$$a=(a^2-5b^2)p,\ b=(a^2-5b^2)q$$

となる整数 p, q が存在する条件を求めればよい，ことになります。

この2式から a^2-5b^2 を作ると

$$a^2-5b^2=\{(a^2-5b^2)p\}^2-5\{(a^2-5b^2)q\}^2$$

$$\therefore\quad a^2-5b^2=(a^2-5b^2)^2(p^2-5q^2)$$

a, b は整数ですから $a^2-5b^2\neq 0$（無理数の項（☞ p. 72）参照）

$$\therefore\quad 1=(a^2-5b^2)(p^2-5q^2)$$

右辺は2つの整数の積で，それが1なんですから

$$a^2-5b^2=\pm 1$$

であることが必要。十分であることは①からすぐわかります。　　答　$a^2-5b^2=\pm 1$

このように，この問題はかなりめんどうですが，逆元がめんどうなわけではなく，整数解をもつ条件がめんどうだったわけです。

■練習 4. 相異なる3つの複素数からなる集合Mが，次の2つの条件を満足するものとするとき，集合Mを求め，さらに各元の逆元を求めよ。

(1)　0はMに属さない。

(2)　x, y がMに属するならば，積もMに属する。　（明治大）

ヒント　$x\in M$ とすると，(2)の条件から

$x^2\in M$　　$(\because\quad xx=x^2)$

したがって　$x^3\in M$　　$(\because\quad xx^2=x^3)$

したがって　$x^4\in M$　　$(\because\quad xx^3=x^4)$

つまり $x\in M$ とすると，x^2, x^3, x^4 もMの元ということになります。

ところが M の元は3つしかないのですからx^4 は x, x^2, x^3 のいずれかに等しい，ということになります。

$x^4=x$ なら，(1)により $x\neq 0$ を考えて，

$$x^3=1$$

$\therefore\quad x=1,\ \omega,\ \omega^2$（$\omega$は1の虚数立方根。$\omega$については（☞ p. 122）参照）

そして，$M=\{1,\ \omega,\ \omega^2\}$ であることがわかります。同様にして

$x^4=x^2$ なら　　$x^2=1,\ x=1,\ -1$

$x^4=x^3$ なら　　$x=1$

が得られますが，-1 を元にするものは適しない。なぜなら，-1 を元とすると $(-1)^2=1$ も含まれ，1，-1 の他にもう1つaがあるとすると，$-a$ も含まれて3つではなくなるからです。

こんなわけで

$$M=\{1,\ \omega,\ \omega^2\}$$

そして，1，ω，ω^2 の単位元は明らかに1，逆元はそれぞれ 1，ω^2，ω となります。

■練習 5. m^2+n^2（m, n は整数）の形で表される数の集合を M とすると，M は乗法について閉じていることを示せ。単位元はあるか，また，逆元はあるか。

ヒント　$(m_1{}^2+n_1{}^2)(m_2{}^2+n_2{}^2)$

$$=(m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2$$

であるから M は乗法について閉じています。

単位元は 1 $(=0^2+1^2)$ です。しかし，逆元はもたない。なぜなら2つの整数を掛けて1になるのは ± 1 しかないからです。

＊　＊　＊

◆ どうでした。このところはややめんどう，いや，人によってはかなりめんどうだったでしょう。しかし，はじめの重要点にしぼるなら，とくにいやがるほどのこともないハズ。本項の支葉末節にとらわれてはいけませんよ。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◐結合法則とは何か

◆結合法則はもっとも変化が多く，いろいろな形で数多く出題されるものである。結合法則という名前を直接出さないものも多い。

◆ 加法において，例えば，

$$(1+5)+7=1+(5+7)$$

なる関係があります。一般的に書けば

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

です。これを **結合法則** が成り立つといいます。

乗法においても

$$(ab)c=a(bc)$$

が成り立つのです。このように，

ある演算＊について

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

であるとき，結合法則が成り立つ

というのです。では具体的な問題を：——

■練習 1. 整数 a，b に対して

$$a*b=ab-(a+b)+2$$

と定義する。このとき，結合法則が成り立つことを証明せよ。 (帯広畜産大)

ヒント $(a*b)*c$

$=\{ab-(a+b)+2\}*c$

$=\{ab-(a+b)+2\}c-[\{ab-(a+b)+2\}+c]+2$

$=abc-ac-bc+2c-ab+a+b-2-c+2$

$=abc-ab-bc-ca+a+b+c$

次に

$a*(b*c)$

$=a*\{bc-(b+c)+2\}$

$=a\{bc-(b+c)+2\}-[a+\{bc-(b+c)+2\}]+2$

$=abc-ab-ac+2a-a-bc+b+c-2+2$

$=abc-ab-bc-ca+a+b+c$

$\therefore\ (a*b)*c=a*(b*c)$

ナルホド，結合法則が成り立つことがわかった。

■練習 2. $a\circ b=a$ なる演算について結合法則が成り立つか。 (東京女大)

解 $(a\circ b)\circ c=a\circ b=a$

$a\circ(b\circ c)=a\circ b=a$

$\therefore\ (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

ゆえに，結合法則が成り立つ。

■練習 3. 実数 a，b に対して $a\circ b$ を

$$a\circ b=\frac{a+b}{1-ab}$$

で定義するとき，結合法則が成り立つかどうか調べよ。 (立命館大)

ヒント $(a\circ b)\circ c=\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)\circ c$

$$=\frac{\dfrac{a+b}{1-ab}+c}{1-\dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c}$$

ヤレヤレ，イヤナ計算ニナッテキタナア。シカシ，ココガガマンノシドコロデス。

分母ト分子ニ $(1-ab)$ ヲ掛ケテ

$$=\frac{(a+b)+c(1-ab)}{(1-ab)-(a+b)c}$$

$$=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$$

次に，

$$a\circ(b\circ c)=a\circ\left(\frac{b+c}{1-bc}\right)$$

$$=\frac{a+\dfrac{b+c}{1-bc}}{1-a\cdot\dfrac{b+c}{1-bc}}$$

$$=\frac{a(1-bc)+(b+c)}{(1-bc)-a(b+c)}$$

$$=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$$

なるほど，これも結合法則が成り立つことがわかった。

＊　＊　＊

◆ もちろん結合法則の成り立たないものも多いのです。

練習 4. $a\circ b=a-b$ のとき結合法則は成り立つか。　（東京女大）

（解）
$$(a\circ b)\circ c=(a-b)\circ c$$
$$=(a-b)-c$$
$$=a-b-c$$
$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b-c)$$
$$=a-(b-c)$$
$$=a-b+c$$
$$\therefore\quad (a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$$

ゆえに，結合法則は成り立たない。

（注） 上の場合，次のような解答をしてはいけません。

$c\neq 0$ のとき　結合法則は不成立
$c=0$ のとき　結合法則は成立

なぜなら，a, b, c が何であろうとも成り立たなければならないのです。

そこで，次のような問題にもなります。

2/20

練習 5. 実数 x, y に対して
$$x\circ y=2xy+2(x+y)+k$$
と定めるとき，結合法則が成り立つように k の値を定めよ。　（明治大）

（ヒント）
$$x\circ(y\circ z)=x\circ\{2yz+2(y+z)+k\}$$
$$=2x\{2yz+2(y+z)+k\}$$
$$+2\{x+2yz+2(y+z)+k\}+k$$
$$=4xyz+4xy+4yz+4zx+2(k+1)x$$
$$+4y+4z+3k \qquad \cdots\cdots①$$

次に，
$$(x\circ y)\circ z=\{2xy+2(x+y)+k\}\circ z$$
$$=2\{2xy+2(x+y)+k\}z$$
$$+2\{2xy+2(x+y)+k+z\}+k$$
$$=4xyz+4xy+4yz+4zx+4x+4y$$
$$+2(k+1)z+3k \qquad \cdots\cdots②$$

①，②が x, y, z のすべての値について成り立つための条件は
$$2(k+1)=4 \qquad \therefore\quad k=1$$

（答） $k=1$

ちょっと変わった問題をとりあげよう。

練習 6. 2つの複素数 z, w について，次のように演算⊗を定義する。
$$z\otimes w=\bar{z}w+z\bar{w}$$
ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

複素数 z, w, u について
$$(z\otimes w)\otimes u=z\otimes(w\otimes u)$$
が成り立つか。　（香川大）

（ヒント） こういう問題はちょっとつかみようがなくていやですね。実は，この関係式が成り立たないのです。例えば，
$$z=i,\quad w=2i,\quad u=1$$
としてみますと
$$(z\otimes w)\otimes u=(i\otimes 2i)\otimes 1$$
$$=\{-i\cdot 2i+i\cdot(-2i)\}\otimes 1$$
$$=4\otimes 1=4\cdot 1+4\cdot 1=8$$
また
$$z\otimes(w\otimes u)=i\otimes(2i\otimes 1)$$
$$=i\otimes(-2i\cdot 1+2i\cdot 1)$$
$$=i\otimes 0=-i\cdot 0+i\cdot 0=0$$
となって，等しくないからです。

キミも，これが成立しない例を，つまり反例を1つ作ってみてください。

＊　＊　＊

◆ 結合法則と交換法則などが結合した問題もあります。また整数や実数のほかに剰余系などもとりあげられます。例えば：——

練習 7. 3による剰余系の中での加法を⊕で表すとき，結合法則が成り立つか。

（ヒント） 3による剰余系の加法を表にすると，右表のようになります。さて
$$a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$$
が成り立つか。まず，具体的な例によって調べてみること。例えば
$$1\oplus(2\oplus 2)=1\oplus 1=2$$
$$(1\oplus 2)\oplus 2=0\oplus 2=2$$
といったぐあい。それから一般的に考える。

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

8/12

⑩ 交換法則とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆交換法則だなんて，ナンという大ゲサなことを，と思うかもしれませんが，数学の理論構成上からは大切なんです。でも，……

◆ 数の加法においては

$$7+4=4+7,\ 9+(-2)=(-2)+9$$

のように，一般に

$$a+b=b+a$$

が成り立ちます。これを加法については **交換法則** が成り立つといいます。

同じく，乗法についても交換法則

$$ab=ba$$

が成り立ちます。

しかし，どんな演算でも交換法則が成り立つわけではありません。次に，いくつかの問題について当たってみましょう。

7

練習 1. 2つの実数 a，b について，ある演算を施した結果を $a\circ b$ と書くことにする。この演算について，任意の実数に対して $a\circ b=b\circ a$ となるとき，交換法則が成り立つという。演算 $a\circ b$ を次のように定めるとき，それぞれについて交換法則が成り立つかどうか調べよ。

(1) $a\circ b=a-b$

(2) $a\circ b=2(a+b)$

(3) $a\circ b=a$

(4) $a\circ b=2^a2^b$ （東京女大）

ヒント (1) $a\circ b=a-b$ というのは前のものから後のもの引くというのですから，例えば，

$$5\circ 4=5-4=1,\ 4\circ 5=4-5=-1$$

したがって $5\circ 4\neq 4\circ 5$，つまり交換法則は成り立たないのです。

(2) $a\circ b=2(a+b)$，$b\circ a=2(b+a)$

$$\therefore\ a\circ b=b\circ a$$

つまり交換法則が成り立つのです。

(3) $a\circ b=a$，$b\circ a=b$

$$\therefore\ a\circ b\neq b\circ a$$

したがって不成立。

(4) $a\circ b=2^a2^b$，$b\circ a=2^b2^a$

$$\therefore\ a\circ b=b\circ a$$

したがって成立する。

注 (3)で，$a\circ b=a$ のとき $b\circ a=b$，ここまではいいが，次のようにやる人も少なくない。

ゆえに $a\neq b$ のとき 交換不能

$a=b$ のとき 交換可能

これはいけません。a，b が何であっても成立するかどうかが問題なんですから。

2/20

練習 2. 整数の範囲内で演算⊕を次のように定める。

$$a\oplus b=a+b-ab$$

演算⊕について交換法則は成り立つか。

解 $a\oplus b=a+b-ab$

$b\oplus a=b+a-ba$

ところが整数の範囲では加法，乗法について交換法則が成り立つから

$$a+b-ab=(a+b)-ab=(b+a)-ba$$
$$=b+a-ba$$

$$\therefore\ a\oplus b=b\oplus a$$

よって交換法則は成り立つ。

注 上の解答をみて，いったいどこまで詳しく書けばいいのだろうか，と，とまどう人もありましょう。

$$a+b-ab=b+a-ba$$

は明らかなんですから。ただ，本問では，ワザワザ整数の範囲内で，と断ってあるから，そこまでもどったほうがいいでしょう。

* * *

◆ 交換法則がどんなものかわかったと思いますから，次には，交換法則が成り立つための条件を求める練習をしておきましょう。

2/6

練習 3. 実数 a, b について演算 $a*b$ を
$a*b=a+kb$ （kは定数）
で定義するとき，演算$*$について交換法則が成り立つための条件を求めよ。

ヒント $a*b=a+kb$
$b*a=b+ka$
ゆえに交換法則が成り立つための条件は
$a+kb=b+ka$ ……①
が恒等的に成り立つことです。①を変形すると
$(1-k)a+(k-1)b=0$
$\therefore\ (1-k)(a-b)=0$
これがすべての a, b について成り立つための条件は
$1-k=0$，すなわち $k=1$

答 $k=1$

2/10

練習 4. 実数 a, b について演算 $a\odot b$ が
$a\odot b=\dfrac{a+kb}{1+kab}$ （kは定数）
で定義されているとき，演算$\odot$について交換法則が成り立つための条件を求めよ。

解 $a\odot b=\dfrac{a+kb}{1+kab}$

$b\odot a=\dfrac{b+ka}{1+kba}$

ゆえに交換法則が成り立つための条件は
$\dfrac{a+kb}{1+kab}=\dfrac{b+ka}{1+kba}$ ……①
が恒等的に成り立つことである。
①の分母が同じであるから
$a+kb=b+ka$
$\therefore\ (a-b)(1-k)=0$
これが a, b のすべての値に対して成り立つための条件は
$k=1$
である。(ただし，$ab=-1$ となる a, b については定義されない)

答 $k=1$

＊ ＊ ＊

◆ 交換法則と結合法則を組み合わせて出題されることも多いのです。(結合法則については（☞ p. 98）を参照)

練習 5. 2実数 a, b に対して演算 $a\circ b$ が下の〔1〕～〔10〕で定義されているとき（例えば〔1〕では $a\circ b=a$ で，〔2〕では $a\circ b=2a+b$ でこの演算が定義されている），演算 $a\circ b$ に対して，次の条件をみたすものをそれぞれ選べ。

(1) 交換法則と結合法則が共に成り立つ。

(2) 交換法則も結合法則も成り立たない。

(3) すべての実数 a について $a\circ e=a$ が成り立つ定数 e がただ1つ存在する。(例えば，$a\circ b=ab$ なら $e=1$，$a\circ b=a+b$ なら $e=0$ である)

〔1〕 a
〔2〕 $2a+b$
〔3〕 $a-b$
〔4〕 a^2+b^2
〔5〕 $\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}$
〔6〕 $a+b+3$
〔7〕 $2(a+b)$
〔8〕 $ab+a+b$
〔9〕 $|a-b|$
〔10〕 a^2+ab+b^2 （滋賀医大）

ヒント 数は多いが，いままで通り1つずつやってみればわかるハズ。
(3) $a\circ b=a-b$ のとき，
$a\circ e=a-e=a$ $\therefore\ e=0$
$a\circ b=a+b+3$ のとき，
$a\circ e=a+e+3=a$ $\therefore\ e=-3$
$a\circ b=ab+a+b$ のとき，
$a\circ e=ae+a+e=a$ $\therefore\ (a+1)e=0$
すべての実数について成り立つから $e=0$

答 $\begin{cases} (1)\ 〔6〕,〔8〕 \\ (2)\ 〔2〕,〔3〕 \\ (3)\ 〔3〕,〔6〕,〔8〕 \end{cases}$

① 分配法則とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆交換法則・結合法則に比べて複雑にみえるが，かえって簡単なものです。だから敬遠してはいけません。

◆ 数や式の計算の基本の1つ

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(b+c)a=ba+ca$$

を **分配法則** といいます。一般に

2つの演算 $*$ と $\circ$ があって

$$\boldsymbol{a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)}$$
$$\boldsymbol{(b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)}$$

が成り立つとき，これを分配法則という。

では，次の練習1.にいきましょう。

■練習 1. $a*b=2(a+b)$，$a\circ b=b$ のとき次の値を求めよ。

$$2*(3\circ 4),\quad 2\circ(3*4)$$

（解）$2*(3\circ 4)=2*4=2(2+4)=12$

$2\circ(3*4)=2\circ\{2(3+4)\}=2\circ 14=14$

■練習 2. $a*b=2(a+b)$，$a\circ b=b$ のとき分配法則

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c)\quad\cdots\cdots\text{(A)}$$

は成り立つか。

（ヒント）$a*(b\circ c)=a*c=2(a+c)$

$(a*b)\circ(a*c)=(2a+2b)\circ(2a+2c)$
$=2(a+c)$

ゆえに(A)は成り立つ。

■練習 3. 実数全体の集合において，演算$*$，$\circ$を　$a*b=2ab$，$a\circ b=a+b$ と定めるとき，次の等式は成立するか。

$$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$$　（創価大）

（解）$a\circ(b*c)=a\circ(2bc)=a+2bc$

$(a\circ b)*(a\circ c)=(a+b)*(a+c)$
$=2(a+b)(a+c)$

a，b，c のすべての値に対して

$$a+2bc=2(a+b)(a+c)$$

が成り立つことはない。ゆえに

$$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$$

は成立しない。

＊　＊　＊

◆ では，少し変わった問題をやってみましょう。

■練習 4. 2つの実数 x，y のうち，大きいほうを $x\vee y$，小さいほうを $x\wedge y$ で表す。ただし，$x=y$ のときは $x\vee y=x\wedge y=x=y$ とする。例えば，

$1\vee 2=2$，$1\wedge 2=1$，$2\vee 2=2$，$2\wedge 2=2$

このとき

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

を証明せよ。　（京都府大）

（ヒント）x，y，z の大小関係をすべてあげれば

$x\leqq y\leqq z$，$x\leqq z\leqq y$，$y\leqq x\leqq z$，
$y\leqq z\leqq x$，$z\leqq x\leqq y$，$z\leqq y\leqq x$

の6通りあります。このすべてについて調べてみればよいハズ。

$x\leqq y\leqq z$ のときには

$x\wedge(y\vee z)=x\wedge z=x$
$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=x\vee x=x$

で確かに成り立つ。他の場合もやってみてください。しかし，6通り全部やるのはややゴタゴタしてフユカイです。表にして6行にまとめれば見やすいでしょう。

あるいは，xが特別のものであることに目をつけて，$y\geqq z$ のとき，$y\leqq z$ のときと分けるのも1つの方法です。しかし，いずれにもせよ，あまりうまい方法を考えようとして何もしないのがいちばんよくないのです。

＊　＊　＊

◆ 分配法則について大切なことはこれで終わりましたから，次は総合的なものについて練習してみませんか。

■練習 5. 集合 $\{a,\ b\}$ に対して，2つの演算 $\circ$ と $\triangle$ が次のように定義されている。

$$a\circ a=a,\quad a\circ b=b,\quad b\circ a=b,\quad b\circ b=a$$
$$a\triangle a=a,\quad a\triangle b=a,\quad b\triangle a=a,\quad b\triangle b=b$$

$x,\ y,\ z$ を集合 $\{a,\ b\}$ の任意の元とするとき，分配法則

$$x\circ(y\triangle z)=(x\circ y)\triangle(x\circ z)$$

は成り立つか。表を作ってすべての場合を調べよ。　　　　(大分大)

(ヒント) 「表を作って」というところでたいてい引っかかる。うまい表を作ろうと思うからです。なに，$x,\ y,\ z$ に $a,\ b$ のあらゆる場合を入れてみればいい，どうせ8通りしかないのですから。さて，それは

$x\ y\ z$	$y\triangle z$	$x\circ(y\triangle z)$	$x\circ y$	$x\circ z$	$(x\circ y)$ $\triangle(x\circ)z$
$a\ a\ a$	a	a	a	a	a
$a\ a\ b$	a	a	a	b	a
$a\ b\ a$	a	a	b	a	a
$a\ b\ b$	b	b	b	b	b
$b\ a\ a$	a	b	b	b	b
$b\ a\ b$	a	b	b	a	a
$b\ b\ a$	a	b	a	b	a
$b\ b\ b$	b	a	a	a	a

上の表から $x=b,\ y=a,\ z=b$ のときと，$x=b,\ y=b,\ z=a$ のときは分配法則は成立しない。したがって分配法則は成立しないことがわかります。

■練習 6. $b(a+c)+ca=cb+a(b+c)$

の左辺を右辺に変えるには，どのような法則を用いるとよいか。　　　　(都立大)

(ヒント) ちょっと問題がアイマイです。しかし，どのような法則，というのは

交換法則，結合法則，分配法則

のことにちがいない，と見当がつけば，あとはどうにかなるでしょう。さあ，ともかく，やってみてください。その上で次を読む!!

$b(a+c)+ca$	分配法則
$=(ba+bc)+ca$	加法の交換法則
$=(bc+ba)+ca$	加法の結合法則
$=bc+(ba+ca)$	乗法の交換法則
$=cb+(ba+ca)$	分配法則
$=cb+(b+c)a$	乗法の交換法則
$=cb+a(b+c)$	

もちろん，多少ちがった方法もとれます。例えば，下から3行目のところで，

$=cb+(ba+ca)$	乗法の交換法則
$=cb+(ab+ac)$	分配法則
$=cb+a(b+c)$	

といってもいいでしょう。

■練習 7. 次の式

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

の左辺から右辺に変えるには，どのような法則を用いるとよいか。

(解)

$(x+a)(x+b)$	分配法則
$=(x+a)x+(x+a)b$	分配法則
$=(x^2+ax)+(xb+ab)$	乗法の交換法則
$=(x^2+ax)+(bx+ab)$	加法の結合法則
$=\{(x^2+ax)+bx\}+ab$	加法の結合法則
$=\{x^2+(ax+bx)\}+ab$	分配法則
$=\{x^2+(a+b)x\}+ab$	加法の結合法則
$=x^2+(a+b)x+ab$	

何も，これだけ，ということはありません。いずれにせよ，等式を変形してゆくとき法則を1つずつ使って進んでゆくことが大切です。

＊　　＊　　＊

◆ **分配法則**は集合にも出てきます。それは

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

です。こうしていろいろの分野に出てくることがわかりましょう。同時に，それがいかに本質的な制約であるかも知られるわけ。しかし，ここで立入ることはできません。ともかく，分配法則の意味をしっかりとらえること。

○絶対値記号の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆絶対値なんて，べつにめんどうじゃありませんね。しかし，絶対値の入った式は急にめんどうになる，これはどういうわけ？

◆ 絶対値の扱い方は実数と複素数ではぜんぜんちがいます。ここでは実数を主とし，あとのほうでちょっと複素数の場合にふれることにしましょう。さて，実数の絶対値の扱い方で大切なことは２つあります。それは

$$|a|^2=a^2$$

および

$$|a|=\begin{cases} a\geqq 0: & a \\ a<0: & -a \end{cases}$$

だということ，なんです。

＊　＊　＊

◆ では，まず第1のほうから，はじめるとしましょうか。

■練習 1. 方程式 $|x-1|=|x+2|$ を解け。

ヒント 両辺とも負ではありませんから２乗しても同値です。ゆえに

$$|x-1|^2=|x+2|^2$$

$$\therefore\ (x-1)^2=(x+2)^2$$

$$\therefore\ x^2-2x+1=x^2+4x+4$$

$$\therefore\ 6x=-3$$

$$\therefore\ x=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 2. 方程式 $|x^2-4|=3|x|$ を解け。

解 $|x^2-4|=3|x|$ ……①

は

$(x^2-4)^2=(3x)^2$ ……②

と同値である。②より

$$(x^2-4)^2-(3x)^2=0$$

$$\therefore\ (x^2-3x-4)(x^2+3x-4)=0$$

$$\therefore\ (x-4)(x+1)(x+4)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=4,\ -1,\ -4,\ -1$$

答 $\pm1,\ \pm4$

■練習 3. 不等式 $|x-1|\geqq 2$ を解け。

解 $|x-1|^2\geqq 2^2$

$$\therefore\ (x-1)^2-2^2\geqq 0$$

$$\therefore\ \{(x-1)+2\}\{(x-1)-2\}\geqq 0$$

$$\therefore\ (x+1)(x-3)\geqq 0$$

$\therefore\ x\geqq 3$ あるいは $x\leqq -1$

答 $x\geqq 3$ あるいは $x\leqq -1$

さあ，次はちょっとばかりめんどうです。

■練習 4. 不等式 $|ax+1|\leqq b$ の解が $-1\leqq x\leqq 5$ であるとき a，b の値を求めよ。（東京理大）

解 $b\geqq 0$ であることは明らかである。そして，このとき，

$$|ax+1|^2\leqq b^2$$

と同値で，

$$(ax+1)^2-b^2\leqq 0$$

$\therefore\ (ax+1+b)(ax+1-b)\leqq 0$ ……①

$a=0$ のとき①を満足する x は $-1\leqq x\leqq 5$ とならないから，$a\neq 0$．ゆえに

$$\left(x+\frac{1+b}{a}\right)\left(x+\frac{1-b}{a}\right)\leqq 0$$

$a>0$ ならば

$$\therefore\ -\frac{b+1}{a}\leqq x\leqq \frac{b-1}{a} \quad (\because\ b\geqq 0)$$

このとき $\dfrac{b-1}{a}=5,\ -\dfrac{b+1}{a}=-1$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

これは $a>0$ の条件に反するので適さない。

$a<0$ ならば

$$\frac{b-1}{a}\leqq x\leqq -\frac{b+1}{a}$$

$$\therefore\ \frac{b-1}{a}=-1,\ -\frac{b+1}{a}=5$$

これを解いて

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots 答$$

＊　＊　＊

◆ 次には，a の符号を考えて絶対値をとる方法で練習してみましょう。

練習 5. $|x|-|2x-1|\geqq 3$ を解け。

（解） $x>\frac{1}{2}$ のとき

$$x-(2x-1)\geqq 3$$
$$\therefore\ -x+1\geqq 3$$
$$\therefore\ -x\geqq 2$$
$$\therefore\ x\leqq -2$$

これは $x>\frac{1}{2}$ に反する。よって適さない。

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$x+(2x-1)\geqq 3$$
$$\therefore\ 3x\geqq 4$$
$$\therefore\ x\geqq\frac{4}{3}$$

これは $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ の条件に適さないから，不適。

$x<0$ のとき

$$-x+(2x-1)\geqq 3$$
$$\therefore\ x\geqq 4$$

これは $x<0$ の条件に反するから適さない。

結局，求める x は存在しない。

答　解なし

（注） グラフをかいてみると解のないわけがよくわかります。余裕があったら $y=|x|-|2x-1|$ のグラフをかいてみてください。

練習 6. $y=x|x|+2|x|-x-2$ のグラフをかけ。（武蔵大）

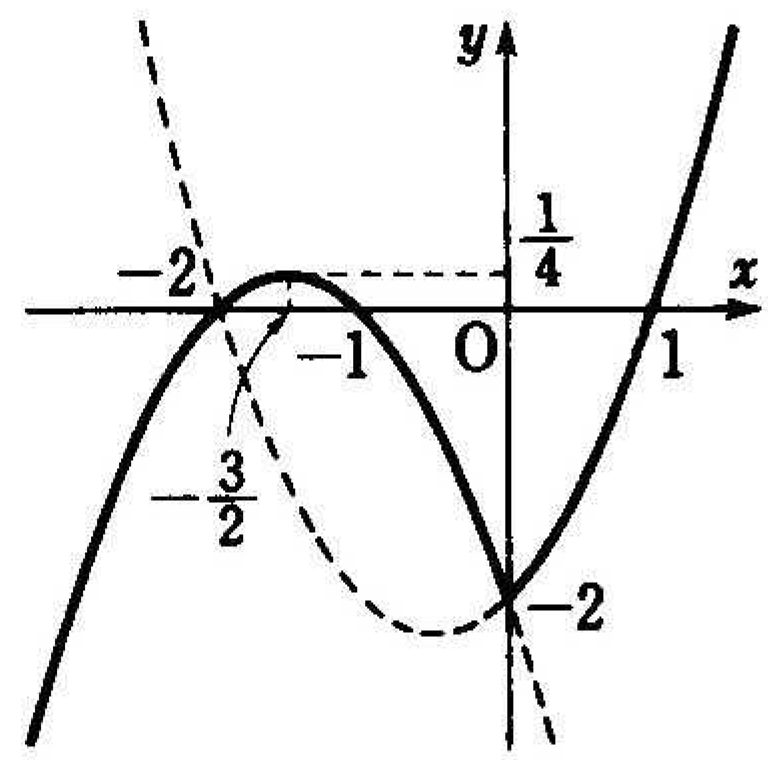
（ヒント） $x\geqq 0$ のとき

$$y=x^2+2x-x-2$$
$$\therefore\ y=x^2+x-2$$

$x<0$ のとき

$$y=-x^2-2x-x-2$$
$$=-x^2-3x-2$$

そこで求めるグラフは右のようになります。



練習 7. $y=x^2-|x-3|$ のグラフをかけ。

（ヒント） $x\geqq 3$ と $x<3$ とに分けてやってみてください。

＊　＊　＊

◆ こんなことも大切です。例えば，

練習 8. $y=x^2+3|x|+2$ のグラフをかけ。

（ヒント） $x^2=|x|^2$ なんですから

$$y=|x|^2+3|x|+2$$

そこで $x\geqq 0$ の場合のグラフをかいて，あとは y 軸について折り返せばいいでしょう。

2/20

練習 9. $x^2+3|x|-4<0$ を解け。

（解） $x^2+3|x|-4<0$

$x^2=|x|^2$ だから

$$\therefore\ |x|^2+3|x|-4<0$$
$$\therefore\ (|x|+4)(|x|-1)<0$$
$$\therefore\ |x|-1<0$$
$$\therefore\ |x|<1$$
$$\therefore\ -1<x<1 \qquad \cdots\cdots 答$$

＊　＊　＊

◆ z が複素数のときには，z の共役複素数を $\bar{z}$ としますと

$$|z|^2=z\bar{z}$$

ですから，$|z|^2=z^2$ とはなりません。また，$z\geqq 0$, $z<0$ と分けることもできません。**実数の場合と混同しないように** してください。

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\quad (a,\ b\ は実数)$$

なお，z がとくに実数のときには $z=\bar{z}$ ですから $|z|^2=z^2$ となるのです。

◐ ガウス記号について

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この偉大な数学者ガウスでも，ナポレオン戦争の重圧に「こんなことをして生きているより死んだほうがましだ」と記した!!

◆ 数学では必要に応じていろいろな記号を使いますが，その中で，とくに大切なものは**ガウス記号**でしょう。ガウス記号というのは［　］です。いわゆるカギカッコで，角度は90°です。(92° デハイケマセンヨ!!) それをよく〔　〕と書く人が多い。注意してください。

ところで，この記号は何を表すのか。

xを実数とするときxを越えない最大の整数を［x］で表す

のです。例えば，

$[4.5]=4,\ [8.2]=8,\ [5.0]=5$

といったぐあい。このことから，小数点以下をとりされぱいいのだ，とオボエている人があります。これはとんでもないまちがい。［-4.3］は -4 ではなく -5 です。-4 では -4.3 より大きいではありませんか。

だから，［x］と出たら，すぐ，次の関係を思い出して使うことがコツです。

$$[x]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\leqq x<3 & : \ 2 \\ 1\leqq x<2 & : \ 1 \\ 0\leqq x<1 & : \ 0 \\ -1\leqq x<0 & : \ -1 \\ -2\leqq x<-1 & : \ -2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

上の，右のような複雑な関係を［x］で表すのだ，とオボエルのです。では：——

練習 1. ［π］を求めよ。ただし，π は円周率である。

(解) $[\pi]=[3.1415\cdots]=3$ ……答

練習 2. $\left[\dfrac{10\sqrt{5}}{3}\right]$ を求めよ。

(解) $\dfrac{10\sqrt{5}}{3}=\dfrac{10\times2.236\cdots}{3}=7.45\cdots$

$\therefore\ \left[\dfrac{10\sqrt{5}}{3}\right]=[7.45\cdots]=7$ ……答

2/4
練習 3. ［x］$=4$ のときxを求めよ。

(解) $4\leqq x<5$

練習 4. $0\leqq x\leqq3.5$ ならば［x］は有限個の異なる値しかとらない1つのxの関数と考えることができる。その値を求めよ。

（電通大）

(解) $[x]=0,\ 1,\ 2,\ 3$ ……答

7/2
練習 5. $[x]^2+[x]-6=0$ を解け。

(ヒント) ［x］$=u$ とおくと

$u^2+u-6=0$

これなら解けますね。

$(u+3)(u-2)=0$

$\therefore\ u=-3,\ u=2$

$u=-3$ なら　$[x]=-3$

$\therefore\ -3\leqq x<-2$

$u=2$ なら　$[x]=2$

$\therefore\ 2\leqq x<3$

答　$-3\leqq x<-2,\ 2\leqq x<3$

練習 6. $[x]^2-6[x]+5<0$ を解け。

(ヒント) ［x］$=u$ とおきますと

$u^2-6u+5<0$

$\therefore\ (u-5)(u-1)<0$

$\therefore\ 1<u<5$

$\therefore\ 1<[x]<5$

$\therefore\ [x]=2,\ 3,\ 4$

$[x]=2$ なら　$2\leqq x<3$

$[x]=3$ なら　$3\leqq x<4$

$[x]=4$ なら　$4\leqq x<5$

$\therefore\ 2\leqq x<5$ ……答

＊　＊　＊

◆ ガウス記号の入ったグラフをかく問題はよく入試問題としても出題されます。

■練習 7. $y=[x-1]$ のグラフをかけ。

ヒント

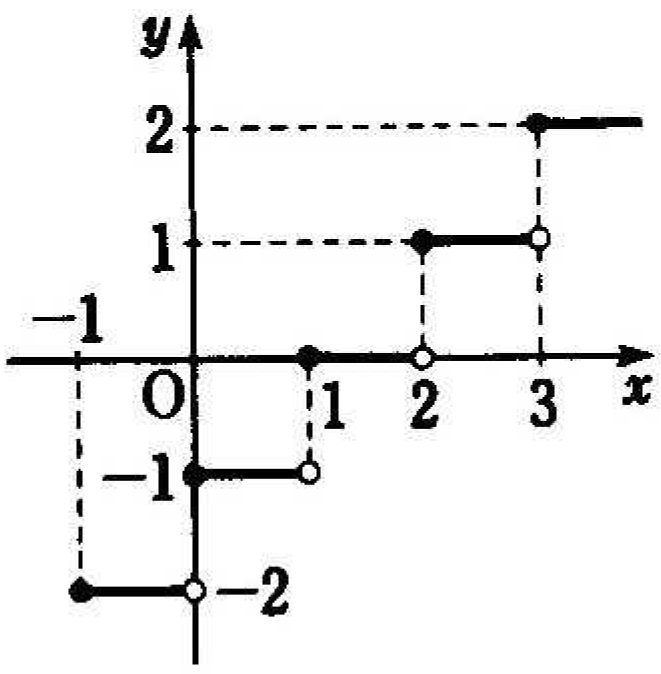
$$[x]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\leqq x<2: & 1 \\ 0\leqq x<1: & 0 \\ -1\leqq x<0: & -1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ですから，xの代わりに $x-1$ を代入して

$$[x-1]=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\leqq x-1<2: & 1 \\ 0\leqq x-1<1: & 0 \\ -1\leqq x-1<0: & -1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

つまり，…………

といったぐあい。グラフをかくと右図のようになります。



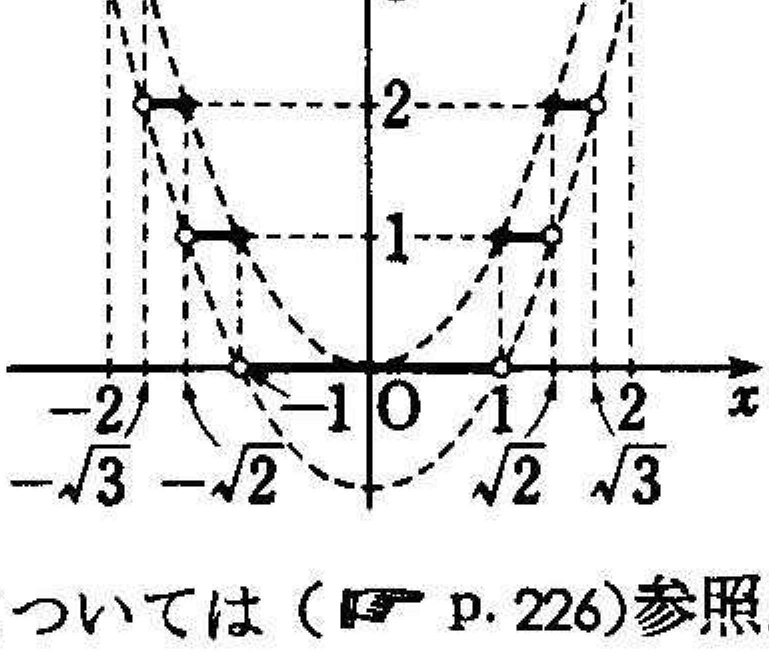
■練習 8. $y=[x^2]$ のグラフをかけ。ただし，

$-2\leqq x\leqq 2.$

ヒント $[x]$ の定義から

$$[x^2]=\begin{cases} 4=x^2 & : \ 4 \\ 3\leqq x^2<4: & 3 \\ 2\leqq x^2<3: & 2 \\ 1\leqq x^2<2: & 1 \\ 0\leqq x^2<1: & 0 \end{cases}$$

これからグラフは右の通りになります。全体としてみると，やはり放物線 $y=x^2$ の形が表れています。なお，ガウス記号の入ったグラフについては（☞ p. 226）参照。



＊　＊　＊

◆ ガウス記号をほかの記号と複合した問題もあります。次の練習をやってみませんか。

■練習 9. 整数 n に対して $n=4q+r$（qは整数，$0\leqq r<4$）をみたす r を $\{n\}$ で表すとき，$\{[x]\}+\{[y]\}=4$ を満足する点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図で示せ。ただし，$0\leqq x\leqq 2,\ -2\leqq y\leqq 2$ とする。

ヒント $0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$

$\therefore\ \{[x]\}=0$

$\therefore\ \{[y]\}=4$

これを満足する y はない。

次に，$1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$

$\therefore\ \{[x]\}=1$

$\therefore\ \{[y]\}=3$

ところが $-2\leqq y\leqq 2$ ですから

$[y]=-1$

$\therefore\ -1\leqq y<0$

最後に，$x=2$ のとき $[x]=2$

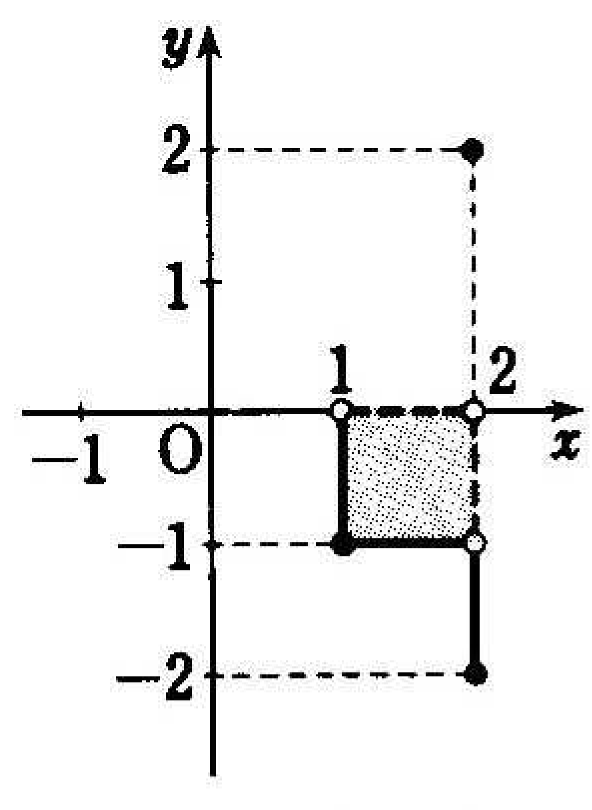
$\therefore\ \{[x]\}=2$

$\therefore\ \{[y]\}=2$

$\therefore\ [y]=-2$ または $[y]=2$

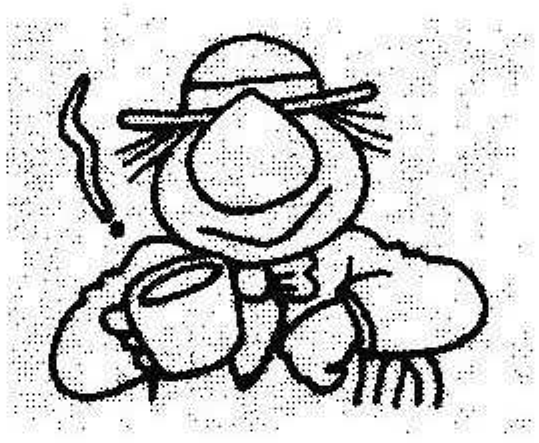
$\therefore\ -2\leqq y<-1$ または $y=2$

以上をまとめて求める範囲は右の図の陰影部と太い実線の部分とわかります。



■練習 10. 正の実数 x の小数以下を4捨5入したものを $\{x\}$ で表すとき $[x]=\{x\}$ を満足する x を求めよ。ただし，$0<x\leqq 3$ とする。

ヒント $[x]$ と $\{x\}$ のグラフをかいてみればいいでしょう。あるいは x の値によって場合分けをしてもいい。ともあれ，この種の問題は与えられた条件通り忠実にやること。答は $0<x<\frac{1}{2},\ 1\leqq x<\frac{3}{2},\ 2\leqq x<\frac{5}{2},\ 3$ です。



ガウス記号についての蛇足

◆数学こそ記号の本山である。ところで，その記号は乱用してはいけない。1つの記号はなるべく1つだけの用途に使うのだ。

◆ 数学の記号は乱用してはいけません。たとえば，ギリシャ文字にθというのがある。θと書いてもいいし，ϑと書いてもいい。しかし，数学ではθと書いたときはふつう角を表すのに用い，ϑと書いたときには，だ円関数（高校ではやりませんが）を表すのです。

◆ ～という記号はいろいろの意味に使われ，ときには混乱をおこします。

$$a\sim b$$

は，ふつう《aとbの差》を表すのですが，ときには《aからbまでの変域》を表すこともあり，物理学では《aとbは近似的に等しい》という意味にも使います。いつか，予備校の生徒が，物理の問題で$a\sim b$をaとbの差と考えてまったくわからなくなり一晩徹夜してしまったと語ったものだ。

◆ (5) は5の倍数を表し，(7) は7の倍数を表します。この記号は，スゴク便利です。

$$\begin{aligned}(5k+1)^3&=125k^3+75k^2+15k+1\\&=5(25k^3+15k^2+3k)+1\\&=(5\text{の倍数})+1\end{aligned}$$

などと書かないで

$$((5)+1)^3=(5)+1$$

とすぐ書けるところがいい。

◆ ところで，ガウス記号と似ているのに，4捨5入したものを{ }で表すこともあります。例えば：——

$\{4.215\}=4$

$\{5.52\}=6$

$\{\pi\}=3$

といったぐあい。しかし，ガウス記号ほど，ポピュラーではありませんから，使うときには説明をしておくべきです。さて，2，3練習をしておきましょう。

■練習 1. $\{x\}$が負でない実数xの小数第1位を4捨5入したものを表すとき$\{x\}$を不等式で表せ。

ヒント

$$\{x\}=\begin{cases}0\leqq x<0.5: & 0\\0.5\leqq x<1.5: & 1\\1.5\leqq x<2.5: & 2\\2.5\leqq x<3.5: & 3\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

■練習 2. $\{x\}$が負でない実数xの小数第1位を4捨5入したものを表すとき$\{x\}$とガウス記号$[x]$の関係を表せ。

ヒント　nを整数として

$$n\leqq x<n+1 \qquad \cdots\cdots①$$

なら

$$[x]=n$$

で表せる。①の両辺から0.5を引くと

$$n-0.5\leqq x-0.5<n+0.5$$

$$\therefore\ (n-1)+0.5\leqq x-0.5<n+0.5$$

したがって

$$\{x-0.5\}=n$$

つまり

$$[x]=n\ \text{と}\ \{x-0.5\}=n$$

はおなじことを表しています。

こうしてみると{ }の扱い方も全くおなじであることがわかるでしょう。

■練習 3. $\{x\}^2-6\{x\}-7<0$を解け。ただし，$x\geqq 0$。

ヒント　$\{x\}=u$とおいて，まず解いてみるとよい。その上でxの範囲を求めるのです。

*　*　*