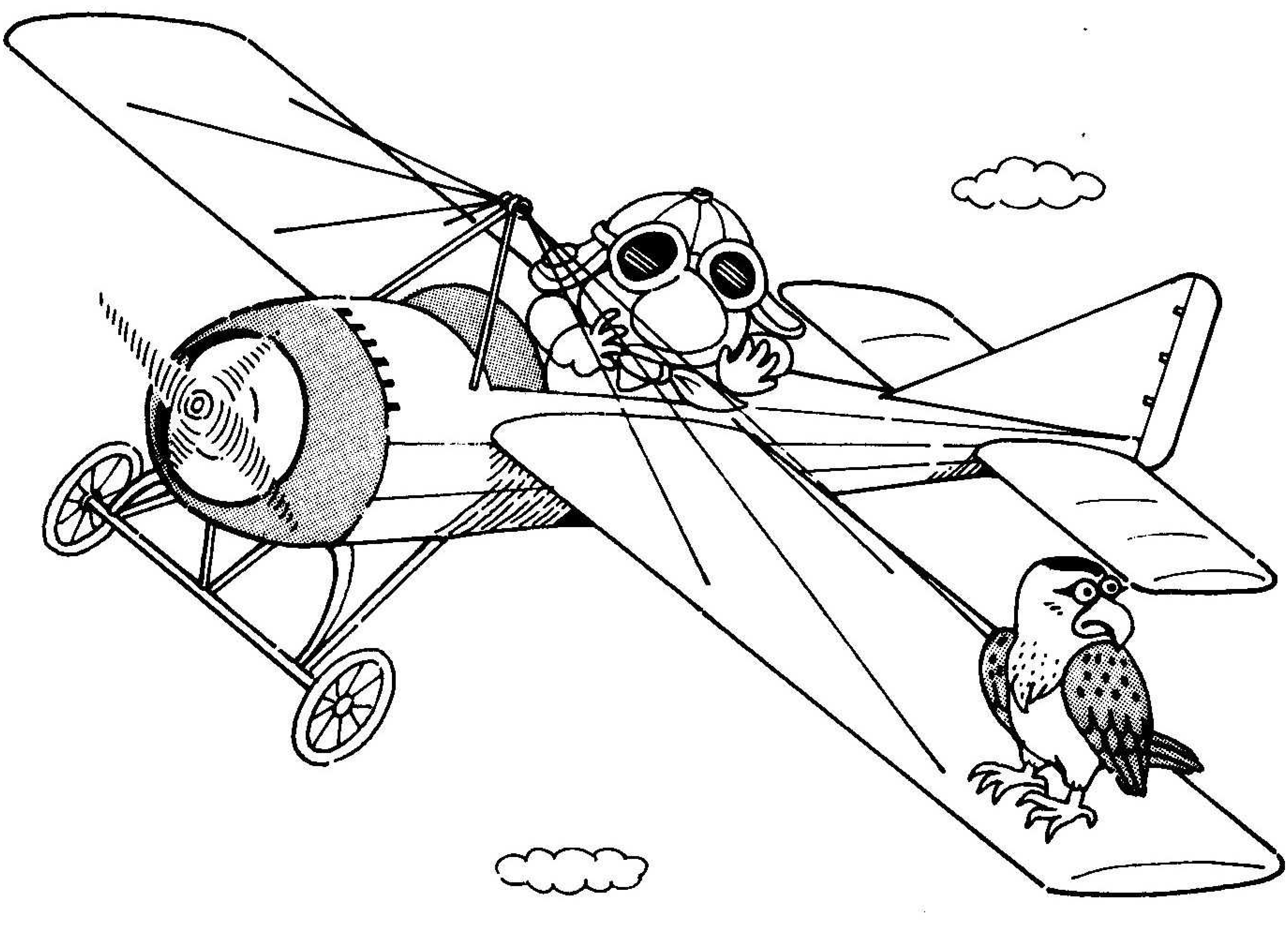
第5章

積分法

§1. 不定積分と定積分

§2. 積 分 の 応 用



○積分法とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆根源的なものほど，説明を求められると困ってしまう。人間とは何か，と聞かれて答えられないようなものだ。

◆ 積分法とは何か？　と聞かれて答えられる人は少ない。元来，このような発想法がいけないのです。次を積分せよ，というべきだ。

では，何はともあれ，これをやってみませんか。

■練習 1. 微分して $3x^2$ となる関数は何か。

(解)　x^3+C （Cは任意の定数）

(注)　x^3+C を $3x^2$ の **不定積分** あるいは **原始関数** といいます。一般に

$f(x)$ を微分して $F(x)$ となるとき $F(x)$ を $f(x)$ から「導いてきた関数」という意味で導関数といい，$f(x)$を$F(x)$ の「もとの関数」という意味で原始関数といったのです。そして

$F(x)$ を表すのに　$f'(x)$

$f(x)$ を表すのに　$\int F(x)dx$

を使います。

■練習 2. $f(x)=x^3$ の不定積分を求めよ。

(解)
$$\int f(x)dx=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$$

Cは積分定数である。

■練習 3. $f(x)=x^4$ の原始関数を求めよ。

(解)
$$\int f(x)dx=\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$$

Cは積分定数である。

*　*　*

◆ 原始関数を求める公式は基解ではただ1つ，これだけです。

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

ここに n は負でない整数で **C は積分定数** です。しかし，実は **$n\neq-1$ であれば任意の実数について成り立つ** のです。例えば

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$
$$\int\frac{1}{x^4}dx=\int x^{-4}dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C$$
$$=-\frac{1}{3x^3}+C$$

といったぐあいです。これは知っていると便利です。

*　*　*

◆ 原始関数を求めるのに使う公式はいくつかあります。

$$\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

kを定数とするとき

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

(注)　しかし，次は成り立ちませんよ。

$$\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$
$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

これはよくやるマチガイです。

では，次の練習をやってみませんか。

■練習 4. $\int 5\,dx$ を求めよ。

(解)
$$\int 5x^0dx=5\int x^0dx=5\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1}+C$$
$$=5x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

(注)　こんなにくどくやる必要もないが，ここでは上の公式をムリに使ってみたのです。

■練習 5. $\dfrac{d}{dx}\boxed{}=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\right)^2$ の$\boxed{}$の中に適当な関数を入れよ。 （茨城大）

（解） $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\right)^2$ の原始関数を求めればよい。すなわち

$$\int\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)^2dx$$
$$=\int\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{9}\cdot x+C$$
$$=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{9}x+C$$

（Cは積分定数）

これが求めるものである。

■練習 6. 2次関数 $f(x)$ とその原始関数 $F(x)$ との間に $F(x)=xf(x)-2x^3$ の関係があり，$f(0)=-3$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。 （川崎医大）

（解） $f(x)=ax^2+bx+c$

とおくと

$$F(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d \quad (d\text{ は定数})$$

と書ける。

$$\therefore\quad \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d$$
$$=x(ax^2+bx+c)-2x^3$$
$$\therefore\quad \frac{a}{3}=a-2,\ \frac{b}{2}=b,\ c=c,\ d=0$$

これから

$$a=3,\ b=0,\ c\text{ は任意},\ d=0$$

ゆえに，求める関数は

$$f(x)=3x^2+c$$

の形である。

しかるに $f(0)=-3$ であるから，

$$c=-3$$

$$\therefore\quad f(x)=3x^2-3 \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

* * *

◆ 積分にはもう1つ，**定積分**（ていせきぶん）というのがあります。すなわち，

$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき

$$F(b)-F(a)$$

を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ または $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表して，定積分という。

では，これを：──

■練習 7. $\displaystyle\int_1^3 2xdx$ を求めよ。

（解） $$\int_1^3 2xdx=\Big[x^2\Big]_1^3=3^2-1^2=8$$

$\boxed{\text{答}}$ 8

■練習 8. $\displaystyle\int_0^1(x^2+3x)dx$ の値を求めよ。

（都立大）

（解） $$\int_0^1(x^2+3x)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{2+9}{6}=\frac{11}{6} \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

■練習 9. $\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx$ を計算せよ。

（大阪市大）

（解） $$\int_a^b(x-a)(x-b)dx$$
$$=\int_a^b\{x^2-(a+b)x+ab\}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{a+b}{2}(b^2-a^2)+ab(b-a)$$
$$=-\frac{1}{6}(b-a)^3 \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

* * *

◆ 定積分の計算に使われる公式として

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

があります。あとのほうはもちろん複号同順です。証明は定義の通りやればいいのですが，まあ，いいでしょう。なお，定積分の計算については（☞ p.238）。

○微分法と積分法の関係

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆区分積分法ならギリシアにもあった，古代中国にもあったらしい。しかし，微分法と積分法の関係はニュートンを必要とした。

◆ 微分法と積分法の関係はわかっているようで，実はよくわかっていないものです。まず不定積分のほうから：——

$F(x)$ を微分して $f(x)$ が得られたとき

$$f(x)=F'(x)$$

と書いて，$f(x)$ を $F(x)$ から≪導いてきた関数≫という意味で導来関数といったのですが，今では **導関数** というようになりました。「導く関数」ではありません。

そして，微分して $f(x)$ になるような関数は1つではなく，無数にあります。というのも，定数のちがいは微分するとき消えてしまうからです。この微分して $f(x)$ になる関数すべてを≪もとの関数≫という意味で **原始関数** あるいは **不定積分** というのです。

* * *

◆ では，次をやってみませんか。

6/12

練習 1. $f(x)=2x+3$ の不定積分で係数の和が10のものを求めよ。

ヒント $f(x)=2x+3$ ですから，この不定積分は

$$F(x)=x^2+3x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

です。この係数の和が 10 だというのですから，（Cも係数ですよ）

$$1+3+C=10$$

$$\therefore \quad C=6$$

$$\therefore \quad F(x)=x^2+3x+6 \quad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

6/12

練習 2. $f(x)=2x+2$ の不定積分で，最小値5のものを求めよ。

解 $f(x)$ の不定積分は x^2+2x+C で，これを変形すると

$$(x+1)^2+(C-1)$$

であるから，最小値が5であることから

$$C-1=5 \qquad \therefore \quad C=6$$

ゆえに，求めるものは x^2+2x+6 である。

* * *

◆ $f(x)$ の不定積分を表すのに

$$\int f(x)dx$$

なる記号を使います。例えば

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

といったぐあい。

6/12

練習 3. $f(x)=2x+4$ のとき

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$$

であることを示せ。

解 $\int f(x)dx=\int(2x+4)dx=x^2+4x+C$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=\frac{d}{dx}(x^2+4x+C)$$

$$=2x+4=f(x)$$

Q. E. D.

注 一般に $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$ が成り立ちます。しかし，次をやってください。

6/12

練習 4. $f(x)=2x+4$ のとき

$\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx=f(x)$ となるか。

解 $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}(2x+4)=2$

$$\therefore \quad \int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx=\int 2dx=2x+C$$

ここにCは積分定数で，したがって $f(x)$ とは定数のちがいがある。

* * *

◆ 次は，定積分と微分法の関係です。

関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき

$$F(b)-F(a)$$

は積分定数が消えてしまいます。これを

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書きます。つまり

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

です。そして $F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ とも書きます。

では，まずこれを：——

9/~

練習 5. $\int_{-1}^2 (x^2+x+1)dx$ を求めよ。

(解)　与式$=\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^2$

$=\dfrac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}$

$+\dfrac{1}{2}\{2^2-(-1)^2\}+\{2-(-1)\}$

$=\dfrac{9}{3}+\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{15}{2}$　　答　$\dfrac{15}{2}$

(注)　いうまでもないことですが，$\int_{-1}^2 f(x)dx$ も $\int_{-1}^2 f(t)dt$ も $\int_{-1}^2 f(p)dp$ も同じ値です。このことを忘れて，とんでもないマチガイをすることが多いのです。

9/~

練習 6. $\int_a^x f(x)dx$ を x で微分せよ。a は定数。

(ヒント)　上の(注)で，述べたように

$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt$$

ですが，

$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^t f(t)dt$$

ではありませんよ。

さて，$\int f(x)dx=F(x)$ としますと，もちろん $F'(x)=f(x)$ ですね。

そこで

$$\int_a^x f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}$$

($F(a)$ は定数ですから，微分すると 0 です)

$$=F'(x)=f(x)$$

答　$f(x)$

(注)　これは重要な関係ですから，公式として，絶対にオボエルこと!!　すなわち，

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)}$$

*　　*　　*

◆ では，やや総合的なものをやってみませんか。

9/1~

練習 7. 関数 $f(x)$ について，

$$f'(x)=3x^2+2(a^2-1)x+2a$$

で，$f(0)=3$，$f(1)=2$ であるという。a の値を求めて，$f(x)$ を求めよ。

(ヒント)　$f'(x)=3x^2+2(a^2-1)x+2a$

ですから

$$f(x)=x^3+(a^2-1)x^2+2ax+C$$

となります。ここに C は積分定数です。

ところが $f(0)=3$，$f(1)=2$ というのですから

$$f(0)=C=3$$

$$f(1)=1+(a^2-1)+2a+C=2$$

$$\therefore\quad a^2+2a+1=0$$

$$\therefore\quad a=-1$$

もはや，きまったね。

$$f(x)=x^3-2x+3\quad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

(注)　$\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると $f(x)$ になりますが，

$$\int_a^x (t-x)f(t)dt$$

を x で微分して $(x-x)f(x)=0$ とはなりません。これは $\int_a^x tf(t)dt-x\int_a^x f(t)dt$ を微分するのです。

○不定積分とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆不定積分というコトバは，この不定というコトバのなじめないことから，ずいぶん損をしているらしいのだが……

◆ 関数 $F(x)$ の導関数を $f(x)$ とするとき，つまり

$$F'(x)=f(x)$$

のとき，$F(x)$ を $f(x)$ の **不定積分**，あるいは **原始関数** といいます。それにしても，原始関数はヒドイ訳ですね。$f(x)$ から見て，もとの関数というだけのことです。

そして，$f(x)$ の不定積分を表すのに

$$\int f(x)dx$$

なる記号を使うのです。

* * *

◆ さて，基解では，不定積分の公式で知っていなければならないのは1つだけです。すなわち，

nが負でない整数のとき

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

です。Cは任意の定数で，これを **積分定数** といいます。では，次の練習1.をやってみませんか。

6/2

練習 1. $\int x^3 dx$ を求めよ。

(解) $\int x^3 dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C$

ここにCは積分定数である。

6/2

練習 2. x^4 の不定積分で $x=1$ のとき1となるものを求めよ。

(解) x^4 の不定積分を $f(x)$ とすると，

$$f(x)=\int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+C$$

しかるに $f(1)=1$

$$\therefore\quad \frac{1}{5}+C=1 \qquad \therefore\quad C=\frac{4}{5}$$

ゆえに，

$$f(x)=\frac{1}{5}(x^5+4) \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ 不定積分を計算する際の公式に次のものがあります。

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k:\text{定数})$$

一般的に書けば u，v を x の関数として

$$\int(hu+kv)dx=h\int udx+k\int vdx$$

なる関係があります。

では，次をやってみませんか。

9/

練習 3. $\int(x+1)(x^2+1)dx$ を求めよ。

(解) 与式$=\int(x^3+x^2+x+1)dx$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C \quad \cdots\cdots \text{答}$$

ここにCは積分定数である。

7/2

練習 4. $f'(x)=3x^2-2x-1$，$f(0)=2$ を満たす $f(x)$ を求めよ。

(解) $f'(x)=3x^2-2x-1$

$\therefore\quad f(x)=x^3-x^2-x+C$ （Cは定数）

ところが

$$f(0)=2 \qquad \therefore\quad C=2$$

$$\therefore\quad f(x)=x^3-x^2-x+2 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ 次の公式はぜひ，というわけではありませんが，~~オボエテおくと便利です。~~

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$$

6/12

■練習 5. $\int (2x+1)^3 dx$ を求めよ。

(ヒント) 上の公式を使うなら

$$\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2(3+1)}(2x+1)^{3+1}+C$$
$$=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C \quad \cdots\cdots(*)$$

展開してやるなら

$$\text{与式}=\int (8x^3+12x^2+6x+1)dx$$
$$=8\cdot\frac{x^4}{4}+12\cdot\frac{x^3}{3}+6\cdot\frac{x^2}{2}+x+C$$
$$=2x^4+4x^3+3x^2+x+C \cdots\cdots(**)$$

(注) ところで (*) と (**) とではちょっとちがいます。つまり，(*) を展開しますと

$$\frac{1}{8}(16x^4+32x^3+24x^2+8x+1)+C$$
$$=2x^4+4x^3+3x^2+x+\left(C+\frac{1}{8}\right)$$

となるからです。しかし，$C+\frac{1}{8}$ を改めて C と書くと (*) と (**) は一致するわけです。

*　*　*

◆ では，やや，総合的な練習をしてみませんか。

6/12

■練習 6. 次の関係を満足する $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x)=-8x^3+3x^2+2x+1$$
$$F(0)=0$$

(解) $F'(x)=-8x^3+3x^2+2x+1$

より

$$F(x)=-8\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+x+C$$
$$=-2x^4+x^3+x^2+x+C$$
$$\therefore\ F(0)=C$$
$$\therefore\ C=0$$
$$\therefore\ F(x)=-2x^4+x^3+x^2+x \quad \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 7. 接線の傾きが，いつでも，接点の x 座標の平方に等しいような曲線のうちで，点 (1, 1) を通るものを求めよ。

(九州工大)

(ヒント) 求める曲線の方程式を $f(x)$ としますと，

$$f'(x)=x^2$$
$$\therefore\ f(x)=\frac{x^3}{3}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

これが点 (1, 1) を通るというのですから

$$1=\frac{1}{3}+C \qquad \therefore\ C=\frac{2}{3}$$
$$\therefore\ f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{x^3+2}{3} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

6/12

●練習 8. 2 定点 A(−1, 0)，B(2, 0) が与えられている。曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 P$(x,\ y)$ において，この曲線に引いた接線の傾きが $\overline{\text{AP}}^2-\overline{\text{BP}}^2$ に等しく，しかもこの曲線は点Aを通る。$f(x)$ を求めよ。

(早大)

(ヒント) 求める関数 $y=f(x)$ について

$$f'(x)=\{(x+1)^2+y^2\}-\{(x-2)^2+y^2\}$$
$$=6x-3$$
$$\therefore\ f(x)=3x^2-3x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

となりましょう。ところが，点Aを通るというのですから，$f(-1)=0$，つまり

$$3+3+C=0 \qquad \therefore\ C=-6$$
$$\therefore\ f(x)=3x^2-3x-6 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 基解では不定積分の計算でめんどうなものはありません。ただ，積分定数をつけるのをうっかり忘れて失敗することが少なからずあるもの。注意してください。

では，最後に 1 つ。

6/12

●練習 9. $f(t)=\int\left\{\int t\,dt\right\}dt$ で，

$f(0)=f'(0)=0$ のとき $f(x)$ を求めよ。

答 $f(x)=\dfrac{x^3}{6}$

⑩ 不定積分計算のテクニック

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆基解における不定積分は，微積のそれとちがってテクニカルなものは少ないのです。しかし，絶無というわけではありませんよ。

◆ 基解の積分に出てくる公式は，ただ1つ

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

だけですからめんどうはありませんが，それでも，いくつか知っておいたほうがいい，というものはあります（定積分の計算については（☞ p.238）。

*　*　*

◆ 第1は1次式の n 乗の積分です。

$$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$$

この $\frac{1}{a}$ をうっかり（ならまだいい，知らないで）落としてしまう人が多いのです。

では，これを：——

■練習 1. $\int(2x+1)^4 dx$ を求めよ。

（解）　与式 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x+1)^5+C$

$=\frac{1}{10}(2x+1)^5+C$　……答

■練習 2. $\int(3-x)^5 dx$ を求めよ。

（解）　与式 $=\int(-x+3)^5 dx$

$=\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{6}(-x+3)^6+C$

$=-\frac{1}{6}(x-3)^6+C$　……答

■練習 3. $\int(x-2)^3(x-1)dx$ を求めよ。

（ヒント）　これを展開してやったらたいへんですが，次のように変形できます。

$$(x-2)^3(x-1)=(x-2)^3\{(x-2)+1\}$$
$$=(x-2)^4+(x-2)^3$$

$\therefore$　与式 $=\int(x-2)^4 dx+\int(x-2)^3 dx$

$=\frac{1}{5}(x-2)^5+\frac{1}{4}(x-2)^4+C$

$=\frac{1}{20}(x-2)^4\{4(x-2)+5\}+C$

$=\frac{1}{20}(x-2)^4(4x-3)+C$

（注）　結果は，微分してもとの関数になるか確かめる習慣をつけるとよい。

*　*　*

◆ ところで，この公式の証明は数学的帰納法でやるのがいいでしょう。次に，簡単にやっておきます。

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^{n+1}=a(n+1)(ax+b)^n$$

を証明すればよいハズ。

（証明）　$n=1$ のとき

左辺 $=\frac{d}{dx}(ax+b)^2$

$=\frac{d}{dx}(a^2x^2+2abx+b^2)$

$=2a^2x+2ab=2a(ax+b)$

$=a(1+1)(ax+b)^1=$ 右辺

で確かに成り立ちます。

$n=k$ のとき成り立つとしますと

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^{k+1}=a(k+1)(ax+b)^k$$

$\therefore$　$\frac{d}{dx}(ax+b)^{k+2}$

$=\frac{d}{dx}(ax+b)^{k+1}(ax+b)$

$=a(k+1)(ax+b)^k\cdot(ax+b)$

$$+(ax+b)^{k+1}\cdot a$$
$$=a(k+1)(ax+b)^{k+1}+a(ax+b)^{k+1}$$
$$=a\{(k+1)+1\}(ax+b)^{k+1}$$
$$=a(k+2)(ax+b)^{k+1}$$

この結果は $n=k+1$ のときにも成り立つことを示しています。

こんなわけで，数学的帰納法で証明できました。ムリにやるほどのことでもないが，この公式はオボエテ，使エルようにしなければなりません。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習を：——

練習 4.　$F'(x)=A(2x+a)+B$, $F(0)=Aa^2+Ba+C$ であるとき，$F(x)$ を求めよ。　（大阪学芸大）

（解）　$F'(x)=A(2x+a)+B$

$$\therefore\quad F(x)=\int\{A(2x+a)+B\}dx$$
$$=Ax^2+(Aa+B)x+D$$

（Dは積分定数）

ところが

$$F(0)=Aa^2+Ba+C$$
$$\therefore\quad D=Aa^2+Ba+C$$
$$\therefore\quad F(x)=Ax^2+(Aa+B)x+(Aa^2+Ba+C)\quad\cdots\cdots\text{答}$$

5/17

練習 5. $\dfrac{d}{dx}f(x)=x^2-a^2$（$a$は正の定数）となる関数 $f(x)$ の極大値が 1 で，極小値が -2 であるという。$f(x)$ を求めよ。　（群馬大）

（解）　$\dfrac{d}{dx}f(x)=x^2-a^2$

$$\therefore\quad f(x)=\int(x^2-a^2)dx=\frac{x^3}{3}-a^2x+C$$

$f'(x)=x^2-a^2=0$ より

$$x=\pm a$$

ゆえに，$x=-a$ で極大値をとり，

$x=a$ で極小値をとる。

$$\therefore\quad f(-a)=-\frac{a^3}{3}+a^3+C=1\quad\cdots\cdots①$$
$$f(a)=\frac{a^3}{3}-a^3+C=-2\quad\cdots\cdots②$$

①＋②より

$$C=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad a=\frac{\sqrt[3]{18}}{2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3\sqrt[3]{12}}{4}x-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

4/13

練習 6. $F(x)=\int f(x)dx$ が次の 3 条件を満足するとき，$f(x)$ を求めよ。

(i)　$F(x)$ は x の 3 次関数である。

(ii)　$F(x)$ の導関数 $F'(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ において極値 2 をとる。

(iii)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=4\int_0^1 f(x)dx$

（神戸商科大）

（ヒント）(i)によって $F'(x)$ は x の 2 次関数ですね。また，(ii)によって

$$F'(x)=a(3x-1)^2+2$$

と書けるハズ。したがって，

$$f(x)=a(3x-1)^2+2$$

となります。これを(iii)に代入して

$$\int_{-1}^{1}\{a(3x-1)^2+2\}dx$$
$$=4\int_0^1\{a(3x-1)^2+2\}dx$$

これを計算して a を求めることができます。それは

$$a=1$$

したがって

$$f(x)=(3x-1)^2+2\quad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ このように，不定積分の計算にめんどうなものはありませんから，要は，**断固として計算するファイトが大切。**計算の途中で，ウマイ方法はあるまいか，などと考えたら，おしまいだ，と知るべきです。

○定積分とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆定積分の計算のよくできる人でも，あらたまって，定積分とは何か，と，開きなおられると，困ってしまうのではないかしら。

◆ まず，具体的な例で考えてみましょう。

$F(x)=x^3$ を微分しますと，$F(x)$ の導関数 $f(x)=3x^2$ が得られます。しかし，逆に何を微分すれば $3x^2$ になるか，と考えてみますと，それは x^3+C （Cは任意の定数）でした。この x^3+Cのことを $3x^2$ の **不定積分** あるいは **原始関数**（げんしかんすう）というのでした。ところで，

$$G(x)=x^3+C$$

とおきますと，$G(x)$ の区間 $[a,\ b]$ における増分は

$$G(b)-G(a)=b^3-a^3$$

となり，積分定数に関係がありません。この値を関数 $f(x)=3x^2$ の a から b までの **定積分**（ていせきぶん）というのです。記号では

$$\int_a^b f(x)dx$$

と表します。そして，bを **上端**（じょうたん）aを **下端**（かたん）というのです。

*　*　*

◆ では，まず，これを：——

練習 1. $\int_0^1(x^2+3x)dx$ の値を求めよ。

（都立大）

（解） 与式 $=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$　　答 $\frac{11}{6}$

練習 2. $\int_0^3(x^2-4x+3)dx$ を求めよ。

（解） 与式 $=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^3=0$ ……答

練習 3. $\int_0^x t(t-1)(t-x)dt=0$ となる x の値を求めよ。

（東京理大）

（解） 左辺 $=\int_0^x\{t^3-(x+1)t^2+xt\}dt$

$=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{x+1}{3}t^3+\frac{x}{2}t^2\right]_0^x$

$=\frac{x^4}{4}-\frac{x+1}{2}x^3+\frac{x}{2}x^2$

$=\frac{x^3}{12}(-x+2)=0$

$\therefore\ x=0,\ 2$ ……答

練習 4. $\int_0^3(x^2-ax+6)dx=9$ のとき，定数 a の値を求めよ。

（埼玉大）

（解） 左辺 $=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+6x\right]_0^3$

$=27-\frac{9a}{2}=9$

$\therefore\ a=4$ ……答

（注） 定積分の計算はまちがいやすいもの。暗算をさけて確実に計算すること。特に正負の符号には注意。積分した後は微分して確かめるとよい。

*　*　*

◆ ここでひとつ注意しておきたいことがあります。定積分の上端が下端より大きくなければならない，などということはありませんよ。例えば，これです。

練習 5. $\int_1^{-2}xdx$ を求めよ。

（ヒント） よくこんなふうにする人があります。

$$\int_1^{-2}xdx=-\int_{-2}^1 xdx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^1$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

これはマチガイではありませんが，まったくムダな努力です。次のようにやれば，いいのです。

$$\int_1^{-2} xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{-2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

答　$\frac{3}{2}$

12/15

練習 6. $\int_a^b (x-a)(x-b)dx$ を計算せよ。

（大阪市大）

解 1. $\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

$=\int_a^b \{x^2-(a+b)x+ab\}dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(a+b)x^2}{2}+abx\right]_a^b$

$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{a+b}{2}(b^2-a^2)+ab(b-a)$

$=\frac{1}{6}(b-a)\{2(b^2+ab+a^2)-3(a+b)^2$
$+6ab\}$

$=-\frac{(b-a)^3}{6}$ ……答

注　a，b の大小で場合分けなどしてはいけませんよ。次のようにやることもできます。

解 2. $\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

$=\int_a^b (x-a)\{(x-a)+(a-b)\}dx$

$=\int_a^b (x-a)^2dx+(a-b)\int_a^b (x-a)dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+(a-b)\cdot\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_a^b$

$=\frac{1}{3}(b-a)^3+(a-b)\cdot\frac{1}{2}(b-a)^2$

$=-\frac{(b-a)^3}{6}$ ……答

注　このほうが少し楽です。なお，このほうの詳しいことは（☞ p.238）を参照してください。

*　*　*

◆ 定積分の計算の，やや立ち入ったテクニックについては（☞ p.238）を参照してください。次には，やや総合的な問題をやっておくことにしましょう。

練習 7. 次の値を既約分数で答えよ。

5/15

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+\cdots+\frac{1}{9}x^{10}\right)dx$$

解　与式

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1}{9}\cdot\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1$

$=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{9\cdot11}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\right.$
$\left.\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$ ……答

5/15

練習 8.　(1)　$\int_{n-1}^n\left(x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}\right)dx$ を計算せよ。

(2)　$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4+7^4$
$=\frac{7^5}{5}+\frac{7^4}{2}+\frac{7^3}{3}-\frac{7}{30}$
を示せ。　（愛知教育大）

ヒント　(1)　$\int_{n-1}^n\left(x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}\right)dx$

$=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}\right]_{n-1}^n=n^4$

であることはていねいに計算するとわかります。必ずやってみてください。

(2)　(1)の結果から

$1^4+2^4+\cdots\cdots+7^4=\sum_{n=1}^{7}n^4$

$=\sum_{n=1}^{7}\int_{n-1}^n\left(x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}\right)dx$

これは

$$\int_0^1+\int_1^2+\int_2^3+\cdots\cdots+\int_6^7=\int_0^7$$

となりますから，

$1^4+2^4+\cdots\cdots+7^4$

$=\int_0^7\left(x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}\right)dx$

$=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}\right]_0^7$

$=\frac{7^5}{5}+\frac{7^4}{2}+\frac{7^3}{3}-\frac{7}{30}$

① 定積分計算のテクニック

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆基解の定積分計算には，特に，これといっためんどうさはないが，それでもいくつか知っておきたいものもあるのです。

◆ 基解における積分は整式だけなのですから，微積とちがって，複雑になることは少ないのです。でも，いくつか，計算のテクニックともいうべきものがないでもない。それを，ここでまとめてやっておきましょう。

* * *

◆ まず $\int(x-a)^n dx$ の積分です。これを展開して積分したのではたいへんです。

では，次を：——

6/10

■練習 1. $\int_0^a (x-a)^4 dx$ を求めよ。

(ヒント) 一般に n が自然数のとき

$$\boldsymbol{\int(x+\alpha)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1}+C}$$

となりますが，

$$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$$

ではありません。

$$\int(ax+b)^n dx=\int a^n\left(x+\frac{b}{a}\right)^n dx$$

$$=a^n\frac{1}{n+1}\left(x+\frac{b}{a}\right)^{n+1}+C$$

したがって，

$$\boldsymbol{\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C}$$

となります。

それさえわかっていれば，もはや問題はないでしょう。

$$\int_0^a (x-a)^4 dx=\left[\frac{1}{5}(x-a)^5\right]_0^a$$

$$=0-\frac{1}{5}(-a)^5=\frac{1}{5}a^5$$

答 $\frac{1}{5}a^5$

さて，次はどうですか。

6/9

■練習 2. 次の定積分を計算せよ。

$$\int_0^a (x-b)^2(x-a)^3 dx$$

(解) $\int_0^a (x-b)^2(x-a)^3 dx$

$$=\int_0^a \{\boldsymbol{(x-a)+(a-b)}\}^2(x-a)^3 dx$$

$$=\int_0^a \{(x-a)^5+2(a-b)(x-a)^4+(a-b)^2(x-a)^3\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}(x-a)^6+2(a-b)\cdot\frac{1}{5}(x-a)^5+(a-b)^2\cdot\frac{1}{4}(x-a)^4\right]_0^a$$

$$=-\left[\frac{1}{6}a^6-\frac{2}{5}(a-b)a^5+\frac{1}{4}(a-b)^2a^4\right]$$

$$=-\frac{a^4}{60}[10a^2-24(a-b)a+15(a-b)^2]$$

$$=-\frac{a^4}{60}(a^2-6ab+15b^2) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(注) 上に太字で示したように，

$$x-b=(x-a)+(a-b)$$

と変形し，$(x-a)$ について整理するのがコツ。

* * *

◆ 第2は2次式の積分で

$ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解を α，β とするとき

$$\left|\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx\right|=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

となることです。ここに D は判別式で

$$D=b^2-4ac$$

を表しています。この公式はきわめて有用ですから，よく使いこなせるようにしておきたいもの。詳しくは（☞ p.250）を参照してください。ここでは，省略します。

* * *

◆ 第3は，同じような積分がいくつも出てくるもので，特に絶対値のついた場合によく現れます。例えば，これです。

練習 3. $\displaystyle\int_{-1}^{2}|x(x^2-3)|dx$ の値を求めよ。

（東京電機大）

ヒント　$|x(x^2-3)|$

$$=\begin{cases}-\sqrt{3}\leqq x\leqq 0,\ \sqrt{3}\leqq x : x(x^2-3)\\ x\leqq -\sqrt{3},\ 0\leqq x\leqq\sqrt{3} : -x(x^2-3)\end{cases}$$

ですから，

与式

$$=\int_{-1}^{0}x(x^2-3)dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}\{-x(x^2-3)\}dx$$
$$+\int_{\sqrt{3}}^{2}x(x^2-3)dx$$

となります。そこで $x(x^2-3)$ の不定積分（定数項は不要ですね）を $f(x)$ とおいて

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2$$

としますと，

与式

$$=\{f(0)-f(-1)\}-\{f(\sqrt{3})-f(0)\}$$
$$+\{f(2)-f(\sqrt{3})\}$$
$$=2f(0)-2f(\sqrt{3})+f(2)-f(-1)$$

ところが

$$f(0)=0,\ f(\sqrt{3})=-\frac{9}{4},$$
$$f(2)=-2,\ f(-1)=-\frac{5}{4}$$

ですから，

$$\text{与式}=\frac{9}{2}+(-2)-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{4}\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

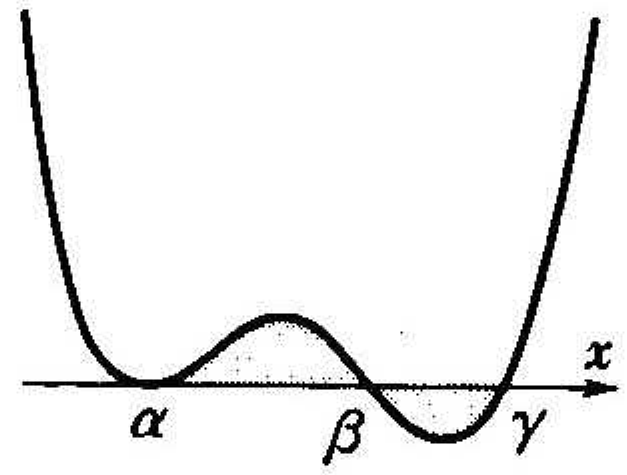
複雑な計算になるほど，このやり方は有効です。詳しくは（☞ p.240）を参照してください。

*　*　*

◆ 以上で，重要なことは，ほぼやりましたが，次に特殊なものをやっておきましょう。

練習 4. $\alpha<\beta<\gamma$ のとき，曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$ と x 軸とで囲まれた2つの面積が等しいとき $(\gamma-\beta):(\beta-\alpha)$ を求めよ。　（姫路工大）

ヒント　これをマトモに積分したのでは，かなりめんどうです。しかし，この曲線は，このまま平行移動しても面積は変わりませんね。各部分の長さも変わらない。してみると，β を原点にもってきてもいいでしょう。つまり，$\beta=0$ としてもいいでしょう。そこで問題は次のようになります。



≪$\alpha<0<\gamma$ のとき，曲線 $y=(x-\alpha)^2x(x-\gamma)$ と x 軸とで囲まれた2つの面積が等しいとき $\gamma:(-\alpha)$ を求めよ≫

あるいは，α を原点にもってくるなら，

≪$0<\beta<\gamma$ のとき，曲線 $y=x^2(x-\beta)(x-\gamma)$ と x 軸とで囲まれた2つの面積が等しいとき $(\gamma-\beta):\beta$ を求めよ≫

となります。後のほうがどうやら計算が楽そうだ。さて，後の方法でやってみるとしましょう。x 軸より上の部分の面積と下の部分の面積が等しいのですから，

$$\int_0^{\gamma}x^2(x-\beta)(x-\gamma)dx$$
$$=\int_0^{\gamma}\{x^4-(\beta+\gamma)x^3+\beta\gamma x^2\}dx$$
$$=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{1}{4}(\beta+\gamma)x^4+\frac{\beta\gamma}{3}x^3\right]_0^{\gamma}$$
$$=\frac{\gamma^5}{5}-\frac{1}{4}(\beta+\gamma)\gamma^4+\frac{\beta\gamma}{3}\gamma^3$$
$$=\frac{\gamma^4}{60}(5\beta-3\gamma)$$

これが0に等しいハズ。

$$\therefore\quad \gamma=\frac{5}{3}\beta$$

$$\therefore\quad (\gamma-\beta):\beta=\left(\frac{5}{3}\beta-\beta\right):\beta$$
$$=\frac{2}{3}\beta:\beta=2:3$$

$\boxed{答}$　2 : 3

注　平行移動してうまくいくことは割合と多いのです。

⑪ 絶対値の入った積分(1)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微積とはちがい，基解の積分はラクですが，ただ1つの例外は絶対値の入った積分問題です。イヤガラズに断固やるべし。

◆ 基解の積分で難しいのは，何といっても絶対値のついた関数の積分です。これは大きく分けて3つになります。

第1は，文字の入らないもの，第2は文字が積分の上端または下端に入っているもの，そして，第3は，文字が被積分関数についているもの，です。具体的にいうとそれぞれ

$$\int_0^3|x^2+x-2|\,dx,\ \int_a^{a+1}|x-1|\,dx$$

$$\int_0^1|x-a|\,dx$$

といったぐあい。ここでは，そのうち第1のものだけをやるとしましょう。

■練習 1. $I=\int_{-1}^2|x|\,dx$ を求めよ。

(ヒント) これを次のようにやる人のいかに多いことか!!

$x\geqq 0$ のとき

$$I=\int_{-1}^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2=\frac{3}{2}$$

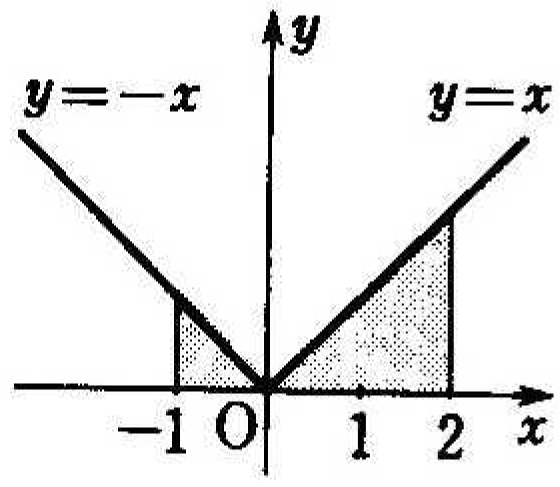
$x<0$ のとき

$$I=\int_{-1}^2(-x)\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2=-\frac{3}{2}$$

答 $\begin{cases} x\geqq 0 \text{ のとき } \dfrac{3}{2} \\ x<0 \text{ のとき } -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

とんでもないマチガイ!! いや，マチガイ以前というべきだ。

絶対値のついているときは，まず**被積分関数のグラフをかいてみる**こと。それは右の通り。そこで



$$I=\int_{-1}^0(-x)\,dx+\int_0^2 x\,dx$$

ということになります。かくして

$$I=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

答 $\dfrac{5}{2}$

これがわかれば第1段階は終わりです。

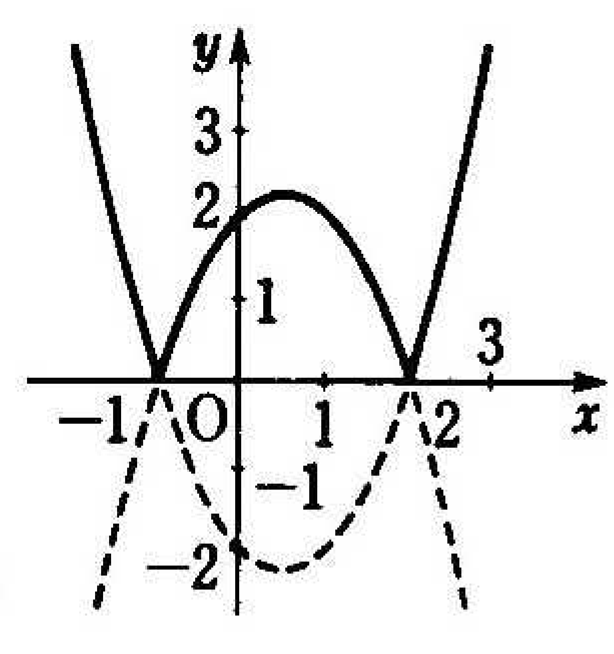
*　*　*

◆ 第2段階は計算のテクニックです。具体的な問題にいきましょう。

■練習 2. $I=\int_{-2}^3|x^2-x-2|\,dx$ を求めよ。

(ヒント)

$$y=|x^2-x-2|$$
$$=|(x-2)(x+1)|$$
$$=\begin{cases} x\leqq -1,\ 2\leqq x: \\ \quad x^2-x-2 \\ -1<x<2: \\ \quad -(x^2-x-2) \end{cases}$$



ですから，

$$I=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)\,dx+\int_{-1}^2-(x^2-x-2)\,dx$$
$$+\int_2^3(x^2-x-2)\,dx$$

となります。これをそのままていねいに計算してもいいのですが，同じような計算がいくつも出てきますね。そこで

$$\int(x^2-x-2)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x=F(x)$$

とおきます(積分定数は不用)と

$$I=\Big[F(x)\Big]_{-2}^{-1}-\Big[F(x)\Big]_{-1}^{2}+\Big[F(x)\Big]_{2}^{3}$$
$$=F(-1)-F(-2)-F(2)$$
$$+F(-1)+F(3)-F(2)$$

$$=2\{F(-1)-F(2)\}+F(3)-F(-2)$$

ところが

$$F(-1)=\frac{7}{6},\ F(2)=-\frac{10}{3}$$

$$F(3)=-\frac{3}{2},\ F(-2)=-\frac{2}{3}$$

ですから

$$I=2\left(\frac{7}{6}+\frac{10}{3}\right)-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{49}{6}$$

答　$\dfrac{49}{6}$

*　*　*

◆ これで大切なことは終わりです。次に，やや総合的な問題をやることにしましょう。

練習 3. $f(x)=x^2-2x^3$ について，次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めて，グラフをかけ。

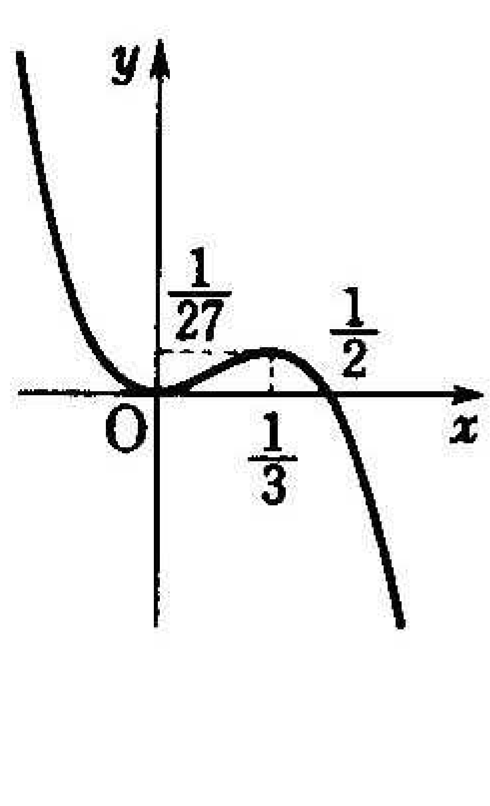
(2) $\int_0^1 |f(x)|dx$ を求めよ。　（新潟大）

ヒント　$f'(x)=2x-6x^2=-6x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

ですから，増減表下の通り。

x		0		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘	0 極小	↗	$\frac{1}{27}$ 極大	↘

ゆえに $f(x)=x^2-2x^3$ のグラフは右のようです。



(2) $\int_0^1 |f(x)|dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2-2x^3)dx$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2-2x^3)dx$$

$$=\cdots\cdots=\frac{3}{16}$$

練習 4. $f(t)=\int_{-1}^1 (x^2-t|x|)^2dx$ の値を最小にする t の値および $f(t)$ の最小値を求めよ。　（工学院大）

ヒント　$(x^2-t|x|)^2$ は x の偶関数ですから

$$f(t)=2\int_0^1 (x^2-t|x|)^2dx$$

$$=2\int_0^1 (x^2-tx)^2dx$$

となります。なぜなら $0<x<1$ においては $|x|=x$ なんですから，かくして

$$f(t)=2\int_0^1 (x^4-2tx^3+t^2x^2)dx$$

$$=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{tx^4}{2}+t^2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{80}\right\}$$

ゆえに $t=\dfrac{3}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{40}\left(=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{80}\right)$ をとります。

練習 5. x の 2 次関数 $f(x)$ はどのような x の 1 次関数 $g(x)$ に対しても

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)g(x)dx=0$$

であり，そのうえ

$$\int_{-1}^1 |x|\{f(x)\}^2dx=1$$

である。$f(x)$ を求めよ。　（電通大）

ヒント　$f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=lx+m$ とおきますと，

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^0 (-x)f(x)g(x)dx+\int_0^1 xf(x)g(x)dx$$

$$=\int_0^{-1} xf(x)g(x)dx+\int_0^1 xf(x)g(x)dx=0$$

$$\therefore\ \int_0^{-1} x(ax^2+bx+c)(lx+m)dx$$

$$+\int_0^1 x(ax^2+bx+c)(lx+m)dx=0$$

$$\therefore\ bl+(a+2c)m=0$$

$$\therefore\ b=0,\ c=-\frac{a}{2}$$

よって，……

答　$f(x)=\pm 2\sqrt{3}\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)$

○ 絶対値の入った積分(2)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆文字の入っている，そして絶対値のついた積分問題の重要な点は，場合分けを的確にやることです。そして，それは，……

◆ 「絶対値の入った積分(1)」(☞ p.240) を通読してからこの項をやってください。

ここで扱うのは，積分の上端または下端に文字の入った場合です。では，さっそく具体的な問題にいきましょう。

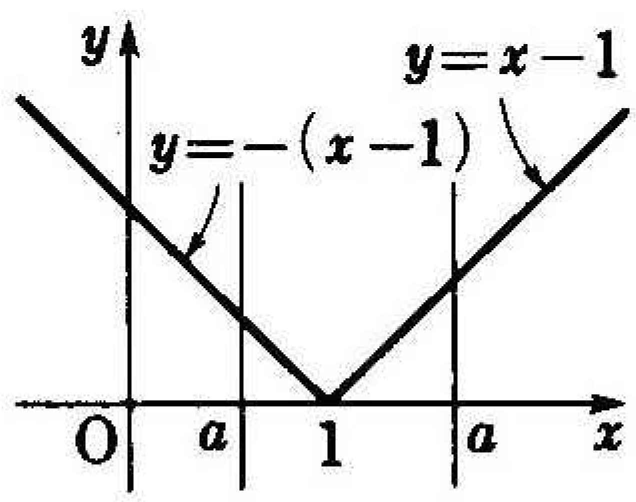
■練習 1. $f(a)=\int_0^a |x-1|\,dx$ のグラフをかけ。

(ヒント) これを次のようにやる人が多い。とんでもないマチガイです。

$x \geqq 1$ のとき　$f(a)=\int_0^a (x-1)dx$

$x<1$ のとき　$f(a)=\int_0^a -(x-1)dx$

これについては (☞ p.240) を参照。ここでマチガワナイ人でも，次のようにやる人がスゴク多いのです。



$0<a \leqq 1$ のとき

$f(a)$

$=\int_0^a -(x-1)dx$

$1<a$ のとき

$$f(a)=\int_0^1 -(x-1)dx+\int_1^a (x-1)dx$$

なぜダメかわかりますか？

マチガイは $0<a$ としているところにあります。**上端 a が下端 0 より大でなければならないなんて思ってはいけませんよ。**解は次のようです。

(解) $a \leqq 1$ のとき

$$f(a)=\int_0^a -(x-1)dx=-\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^a$$

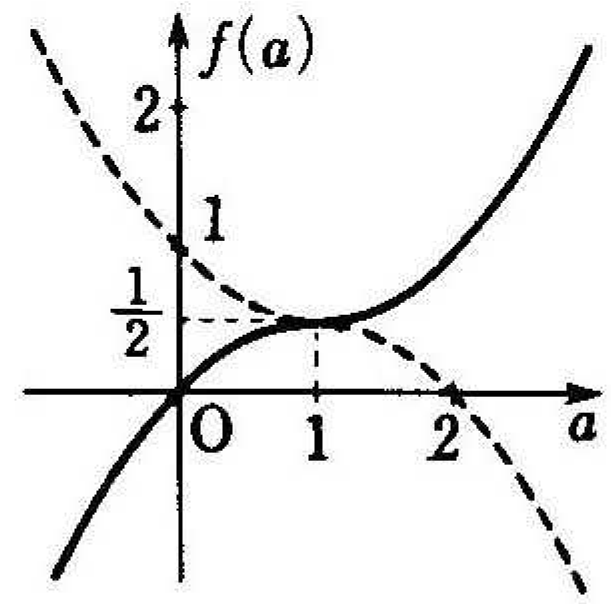
$$=-\frac{a^2}{2}+a$$

$1<a$ のとき

$$f(a)=\int_0^1 -(x-1)dx+\int_1^a (x-1)dx$$

$$=\frac{a^2}{2}-a+1$$

ゆえに求めるグラフは右のようである。



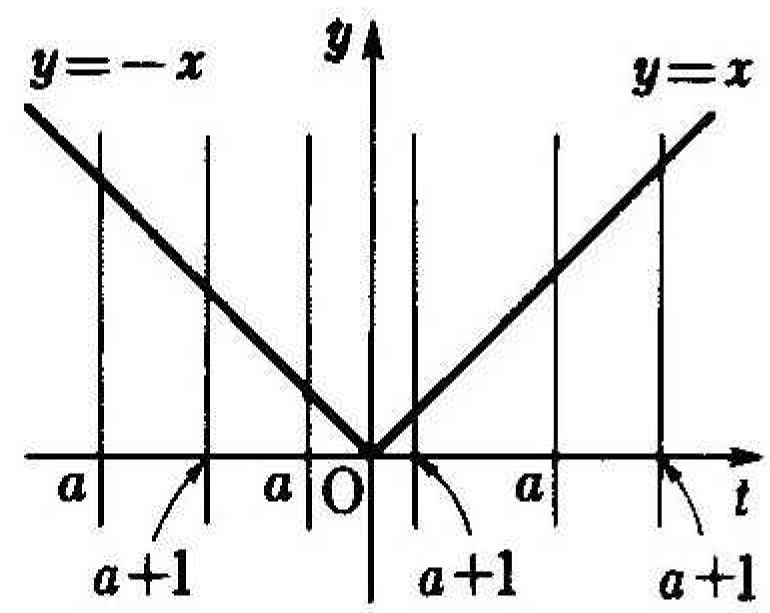
＊　＊　＊

■練習 2.

$$f(x)=\int_a^{a+1} |x|\,dx$$

のグラフをかけ。

(ヒント) 3つの場合に分かれます。第1は a も $a+1$ も負のときです。(実は $a+1$ が負なら a は当然負ですが……)



つまり $a<-1$ のとき

$$f(a)=\int_a^{a+1}(-x)dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_a^{a+1}$$

$$=-a-\frac{1}{2}$$

次に $a<0$ であるが $0<a+1$ のとき，つまり，$-1<a<0$ のときです。このときは

$$f(a)=\int_a^0(-x)dx+\int_0^{a+1}x\,dx$$

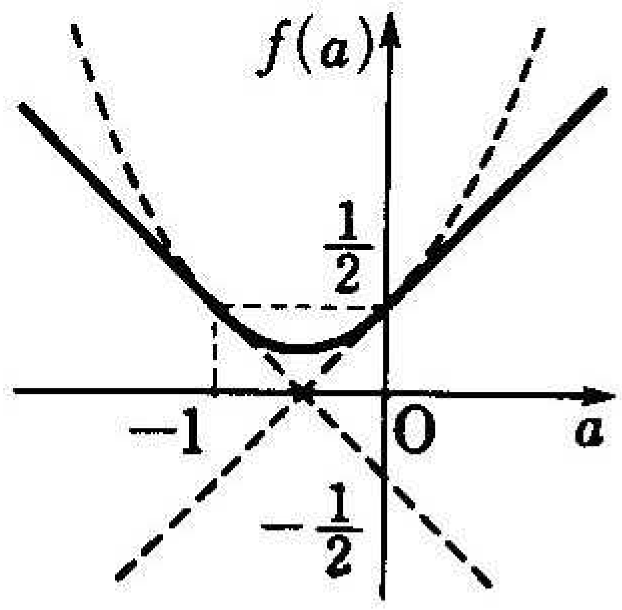
$$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_a^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{a+1}=a^2+a+\frac{1}{2}$$

最後は a も $a+1$ も正のとき，つまり $0<a$ のときで

$$f(a)=\int_a^{a+1}x\,dx=a+\frac{1}{2}$$

等号をどちらにつけるか？　とよく聞かれるが，どちらにつけてもかまわない。

かくて，求めるグラフは右のようになります。



＊　＊　＊

◆ ここまでくれば，やり方はわかったということです。次に，ややめんどうなものをやるとしましょう。

練習 3. 関数 $f(x)=\int_0^x |t-x^2|\,dt$ について，次の各問に答えよ。

(1) $f(x)$ を x の式で表せ。

(2) $y=f(x)$ のグラフを描け。

（京都府大）

（解） (1) $x^2\geqq x$，すなわち $x\geqq 1$ あるいは $x\leqq 0$ のとき，

$$f(x)=\int_0^x (x^2-t)\,dt=\left[x^2t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x=x^3-\frac{x^2}{2}$$

$x^2\leqq x$，すなわち $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^{x^2}(x^2-t)\,dt+\int_{x^2}^x (t-x^2)\,dt$$

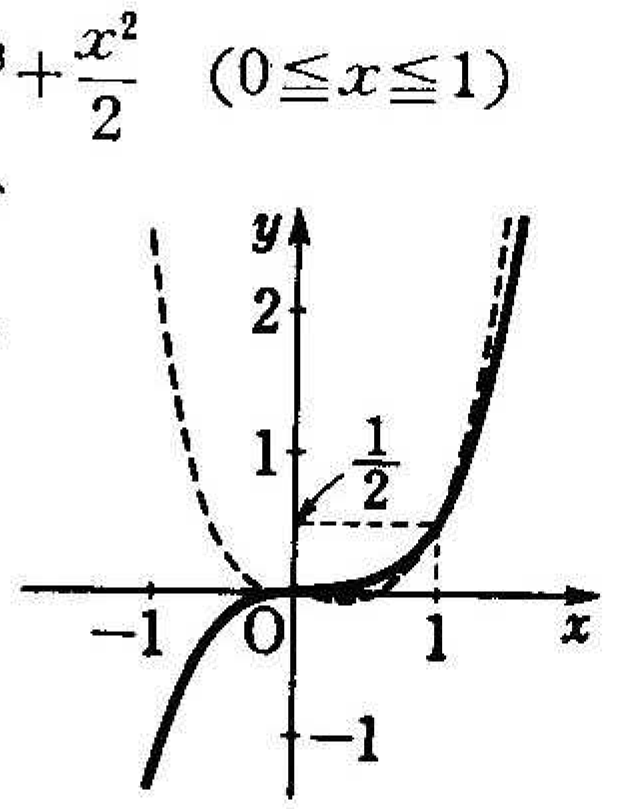
$$=\left[x^2t-\frac{t^2}{2}\right]_0^{x^2}+\left[\frac{t^2}{2}-x^2t\right]_{x^2}^x$$

$$=\left(x^4-\frac{x^4}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-x^3\right)-\left(\frac{x^4}{2}-x^4\right)$$

$$=x^4-x^3+\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases} x^3-\dfrac{x^2}{2} & (x\geqq 1,\ x\leqq 0) \\ x^4-x^3+\dfrac{x^2}{2} & (0\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

(2) $y=f(x)$ のグラフは右のようである。



練習 4. 関数

$$f(x)=\int_0^x \{|t(t^2-1)|-t\}\,dt$$

の極値とそのときの x の値を求めよ。

（信州大）

（ヒント） $t(t^2-1)\geqq 0$ となるのは

$$-1\leqq t\leqq 0,\ 1\leqq t$$

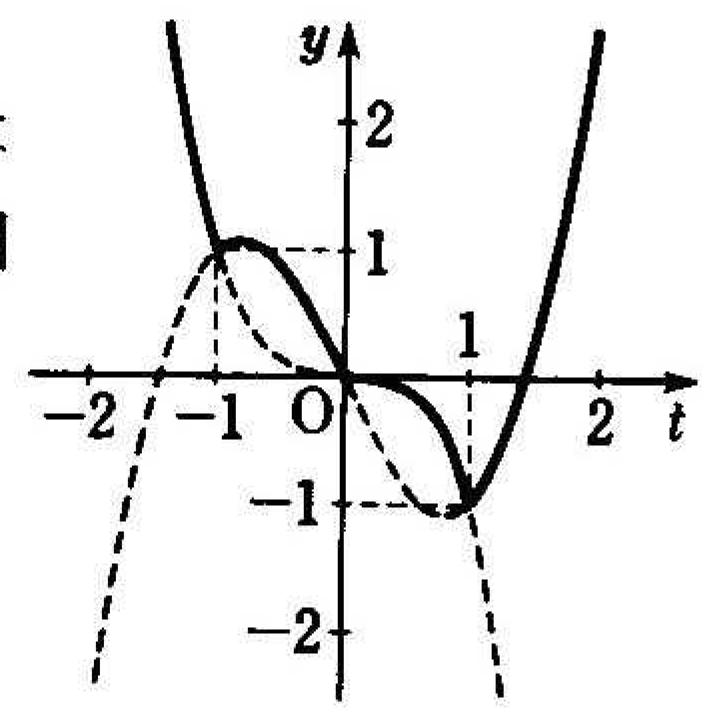
のときです。

そこで積分されるものは

$-1\leqq t\leqq 0$，$1\leqq t$ のとき t^3-2t で，

$t\leqq -1$，$0\leqq t\leqq 1$ のときには $-t^3$

ですから，積分されるもののグラフは下のようになりましょう。



したがって積分は x の値によって範囲がちがってきます。

ここのところで $x>0$ などと思いこんではいけません。

さて：——

$x\geqq 1$ のとき：

$$f(x)=\int_0^1 (-t^3)\,dt+\int_1^x (t^3-2t)\,dt$$

$$=\frac{x^4}{4}-x^2+\frac{1}{2}$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (-t^3)\,dt=-\frac{x^4}{4}$$

$-1\leqq x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (t^3-2t)\,dt$$

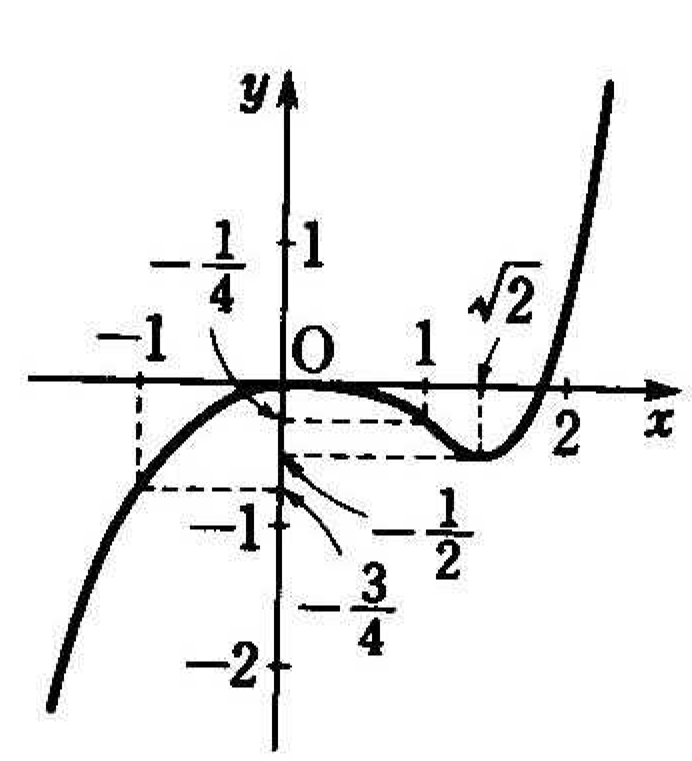
$$=\frac{x^4}{4}-x^2$$

$x\leqq -1$ のとき

$$f(x)=\int_0^{-1}(t^3-2t)\,dt+\int_{-1}^x (-t^3)\,dt$$

$$=-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}$$

となりますから，そのグラフは右のようになり，$x=0$ で極大値 0 をとり，$x=\sqrt{2}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとることがわかります。



絶対値の入った積分(3)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

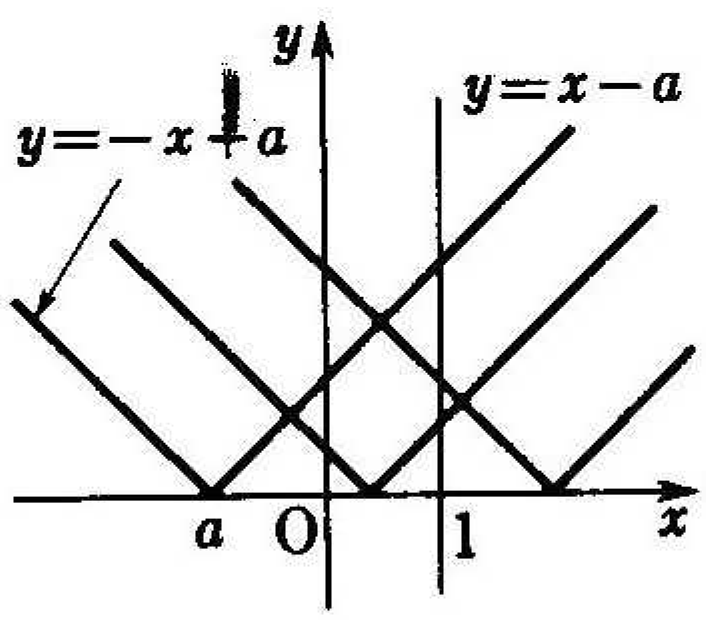
◆絶対値の入った積分がわかれば，積分計算は卒業したといってよい。そして，これは基解の中の数Ⅰ的めんどうさの克服なのだ。

◆「絶対値の入った積分(2)」（☞ p.242）を一読してからやってください。

さて，ここでは積分されるものの中に文字の入っているときをやるのです。こういってもピンとこないかもしれません。まず，これをやってみませんか。

練習 1. $f(a)=\int_0^1|x-a|dx$ のグラフをかけ。

（ヒント）右のグラフでわかるように，3つの場合があります。



第1は $a\leqq 0$ のときです。このときには

$$f(a)=\int_0^1(x-a)dx=\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-a$$

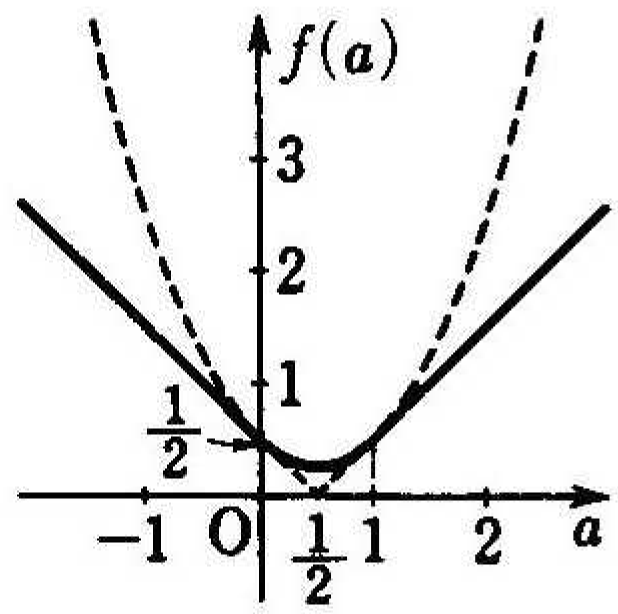
第2は $0<a<1$ のときです。このときには

$$f(a)=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^1(x-a)dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+ax\right]_0^a+\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_a^1$$
$$=\frac{a^2}{2}+\left(\frac{1}{2}-a\right)+\frac{a^2}{2}=a^2-a+\frac{1}{2}$$

第3は $1<a$ のときです。このときには

$$f(a)=\int_0^1(-x+a)dx$$
$$=a-\frac{1}{2}$$

したがって $f(a)$ のグラフは右のようになります。



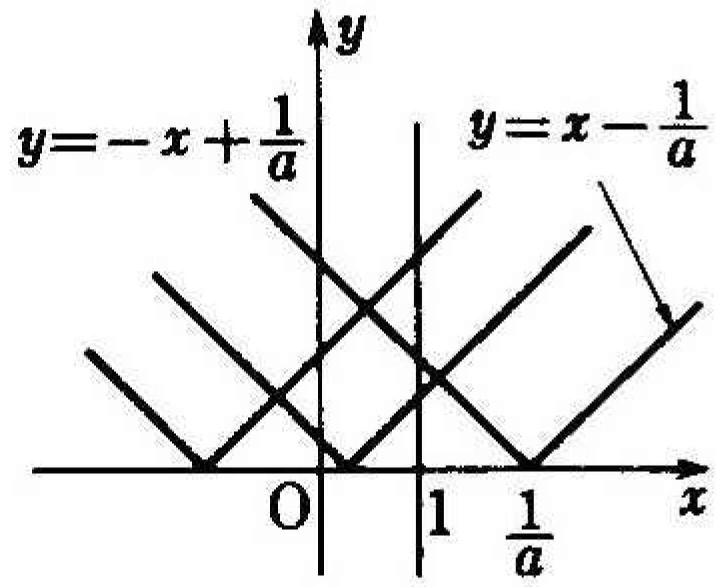
練習 2. $f(a)=\int_0^1|ax-1|dx$ のグラフをかけ。

（解） $a=0$ のとき　$|ax-1|=1$

$$\therefore\quad f(0)=\int_0^1 dx=1$$

$a\neq 0$ のとき

$$f(a)=\int_0^1\left|a\left(x-\frac{1}{a}\right)\right|dx=|a|\int_0^1\left|x-\frac{1}{a}\right|dx$$



$a<0$ のとき

$$f(a)=-a\int_0^1\left(x-\frac{1}{a}\right)dx=-\frac{a}{2}+1$$

$0<a<1$ のとき，$1<\frac{1}{a}$ であるから

$$f(a)=a\int_0^1-\left(x-\frac{1}{a}\right)dx=-\frac{a}{2}+1$$

$1\leqq a$ のとき，$0<\frac{1}{a}\leqq 1$ であるから

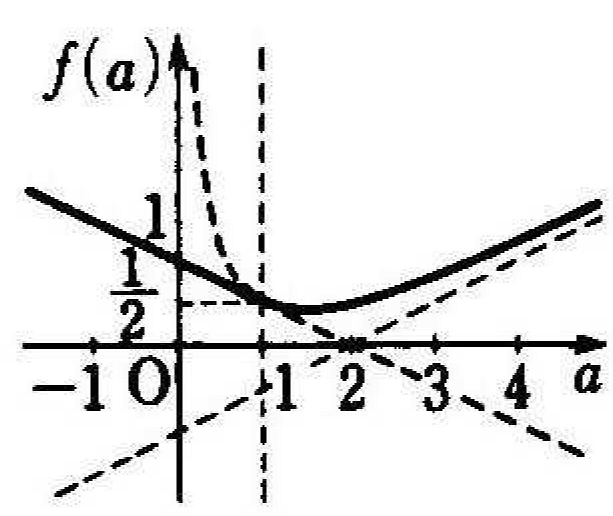
$$f(a)=a\left\{\int_0^{\frac{1}{a}}-\left(x-\frac{1}{a}\right)dx+\int_{\frac{1}{a}}^1\left(x-\frac{1}{a}\right)dx\right\}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}-1$$

となる。したがって

$a<1$ のとき　$f(a)=-\frac{a}{2}+1$

$1\leqq a$ のとき　$f(a)=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}-1$

このグラフは右のようになる。



（注） わかったら，a を外に出さないでもう一度やってください。

＊　＊　＊

◆ では，もっと，総合的なものをやってみませんか。

練習 3. $\int_{-1}^{1}|x^2-a^2|dx$ $(a\geqq 0)$ を最小にする a の値を求めよ。　（三重大）

（解）　$f(a)=\int_{-1}^{1}|x^2-a^2|dx$

とおくと，$|x^2-a^2|$ は偶関数であるから

$$f(a)=2\int_{0}^{1}|x^2-a^2|dx$$

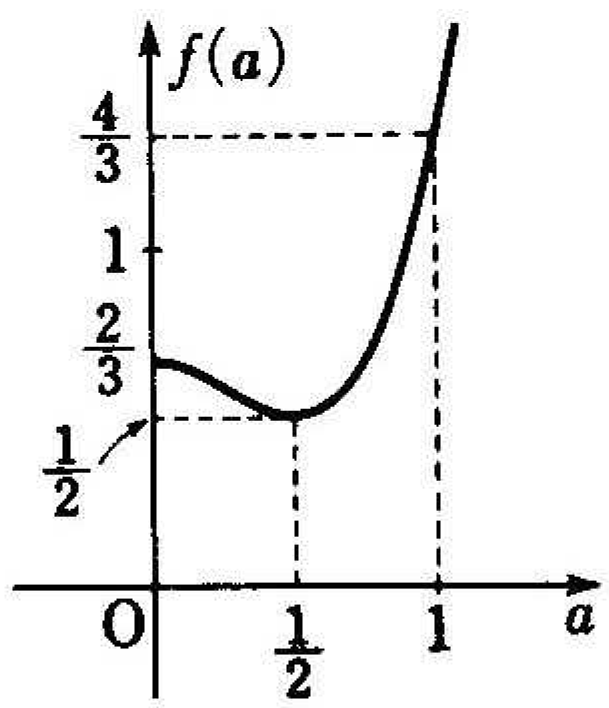
(i)　$a\geqq 1$ のとき

$$f(a)=2\int_{0}^{1}(-x^2+a^2)dx=\frac{2}{3}(3a^2-1)$$

(ii)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$f(a)=2\left\{\int_{0}^{a}(-x^2+a^2)dx+\int_{a}^{1}(x^2-a^2)dx\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(4a^3-3a^2+1)$$



ゆえに $f(a)$ のグラフは右のようになる。

ゆえに，$f(a)$ は $a=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

（注）　$f(a)$ のグラフを描く際に，$0\leqq a\leqq 1$ については

$$f'(a)=\frac{2}{3}(12a^2-6a)=4a(2a-1)$$

ゆえに　$0<a<\frac{1}{2}$ において　$f'(a)<0$

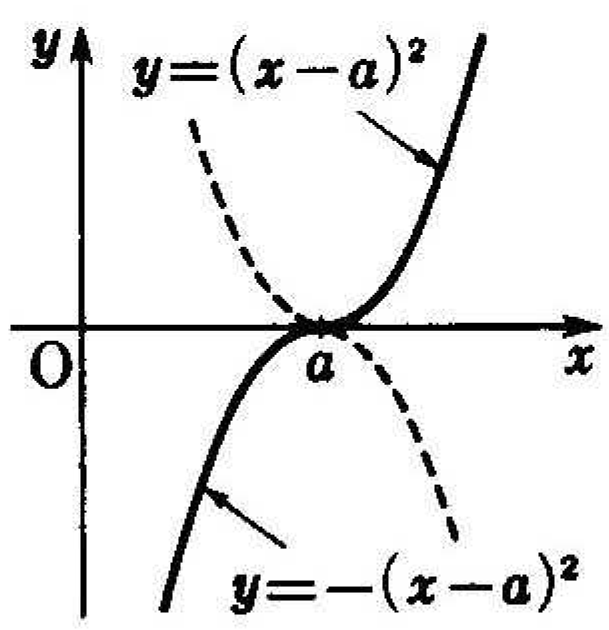
$\frac{1}{2}<a\leqq 1$ において　$f'(a)>0$

であることに注意してください。

練習 4. $F(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|(x-a)dx$ とするとき，$F(a)$ のグラフを描き，$\int_{-2}^{2}F(a)da$ の値を求めよ。　（甲南大）

（解）

$y=|x-a|(x-a)$ のグラフは右のようになるから，



(i)　$a\geqq 1$ のとき

$$F(a)=\int_{-1}^{1}-(x-a)^2dx=-\frac{2}{3}(3a^2+1)$$

(ii)　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

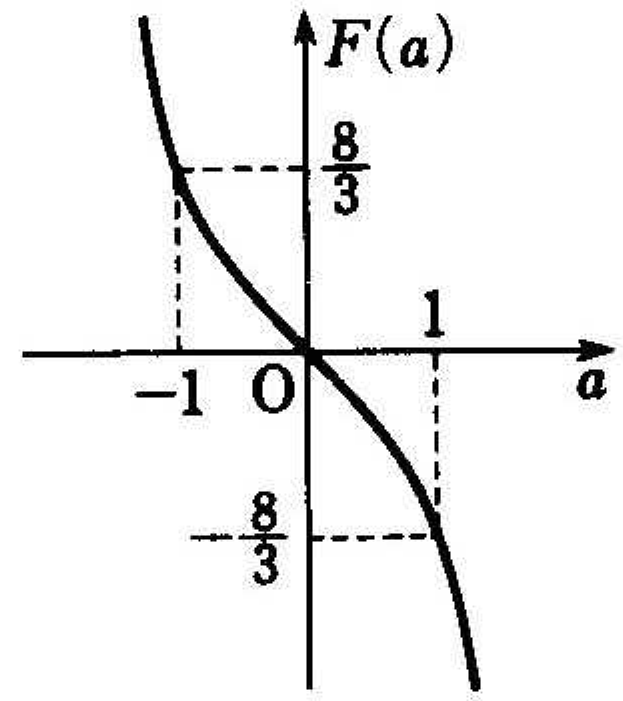
$$F(a)=\int_{-1}^{a}-(x-a)^2dx+\int_{a}^{1}(x-a)^2dx$$

$$=-\frac{2}{3}a(a^2+3)$$

(iii)　$a\leqq -1$ のとき

$$F(a)=\int_{-1}^{1}(x-a)^2dx=\frac{2}{3}(3a^2+1)$$

以上のことから $F(a)$ のグラフをかくと，右のようになる。



また，$F(a)$ は奇関数であるから

$$\int_{-2}^{2}F(a)da=0$$

（注）　$\int_{-2}^{2}F(a)da$

を実際に積分するなら

$$\int_{-2}^{2}F(a)da=\int_{-2}^{-1}\frac{2}{3}(3a^2+1)da+\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{2}{3}a(a^2+3)\right\}da+\int_{1}^{2}\left\{-\frac{2}{3}(3a^2+1)\right\}da$$

を計算することになります。

練習 5. $f(x)$ は $|x|<1$ で 0 とならない1次関数とする。

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}\{f(x+1)\}^2dx=1$$

を満たす $f(x)$ を求めよ。　（三重大）

（ヒント）　$f(x)=px+q$ としますと $|x|<1$ で 0 にならないというから $|x|<1$ で横軸と交わらないですね。

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{1}(px+q)dx\right|$$

$$=\cdots\cdots$$

また，

$$\int_{-1}^{1}\{f(x+1)\}^2dx=\cdots\cdots$$

答　$f(x)=\pm\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{8}x+\frac{1}{2}\right)$

◑(求積法における)縦割と横割

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆面積や体積を求めるときに，もっとも大切なことは，縦割，横割の判定です。ハテ，それは何のことか？

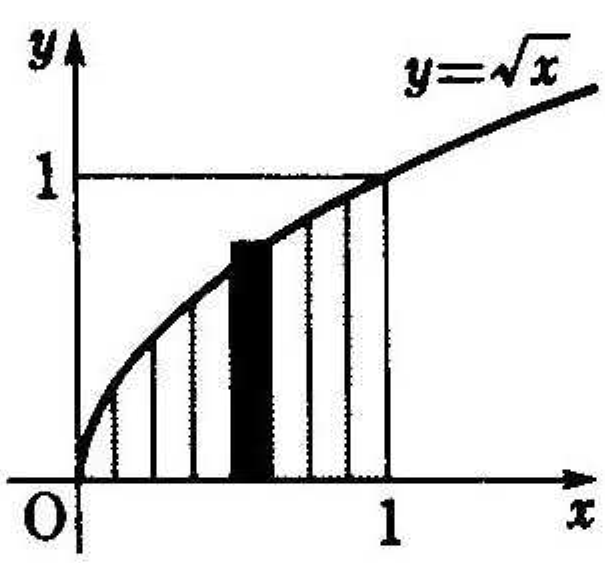
◆ 面積や体積を求めるときに，**どのように積分するかで，労力がグッとちがってくる**ことが多いのです。具体例でいきましょう。

7/6

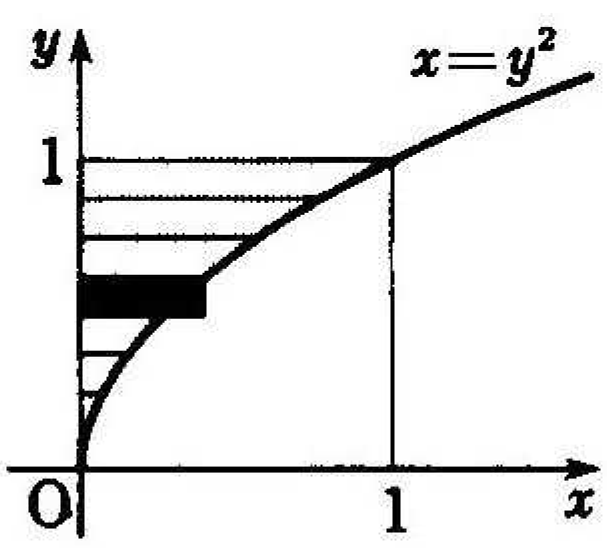
練習 1. $y=\sqrt{x}$ と x 軸および $x=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

ヒント　右図のように縦割にすると，求める面積は

$$S=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$



で与えられますが，この積分は微積の範囲です。それでは面積を求めることは不可能か？



そうではありません。右下の図の小さい部分を横割にしますと，その面積 S' は

$$S'=\int_0^1 x\,dy=\int_0^1 y^2dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

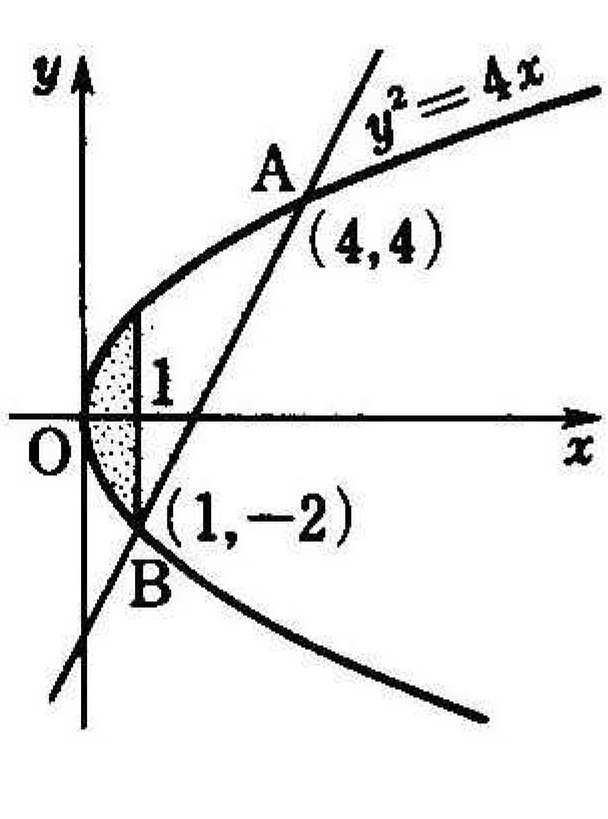
$$\therefore\quad S=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

となってうまくいく。

次のようなこともあります。

練習 2. $y^2=4x$ と，直線 $y=2x-4$ の囲む部分の面積を求めよ。（岡山大）

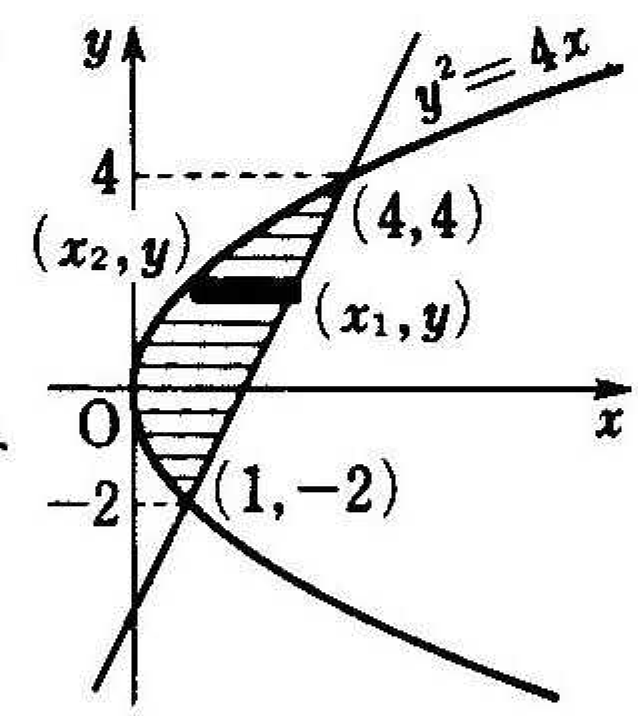
ヒント　グラフをかいてみると右の通りで，その交点は A(4, 4) と B(1, −2) です。さて，この弓形のような部分の面積を求めるわけですが，縦割にしますと，



Bを通り，y 軸に平行な直線で 2 つの部分に分け，それらの面積を別々に求めて加えなければなりません。しかも，無理関数も出てくるのですから，基解の範囲を越えることになります。

ところが，右のように横割にしますと

$$S=\int_{-2}^4(x_1-x_2)dy$$



で，1 回の積分ですみます。ここに，

$$x_1=\frac{y+4}{2},\quad x_2=\frac{y^2}{4}$$

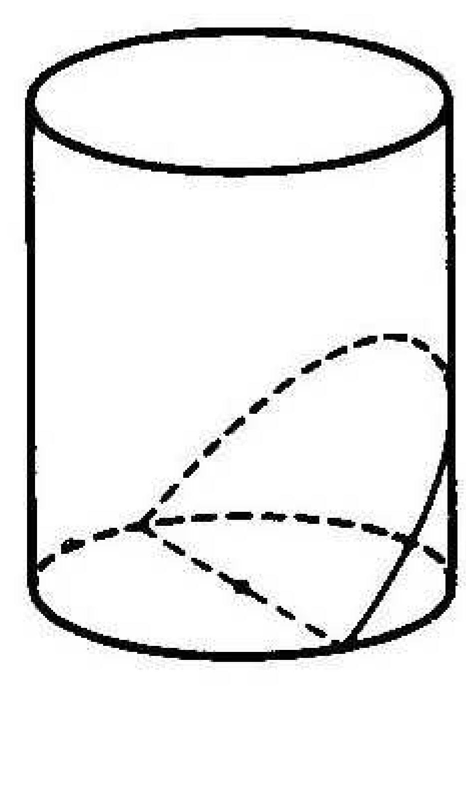
ですから，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^4\left(\frac{y+4}{2}-\frac{y^2}{4}\right)dy\\&=\frac{1}{4}\int_{-2}^4(-y^2+2y+8)dy\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{-y^3}{3}+y^2+8y\right]_{-2}^4\\&=\frac{1}{4}\left\{-\frac{4^3-(-2)^3}{3}+(4^2-(-2)^2)\right.\\&\qquad\left.+8(4-(-2))\right\}\\&=9\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

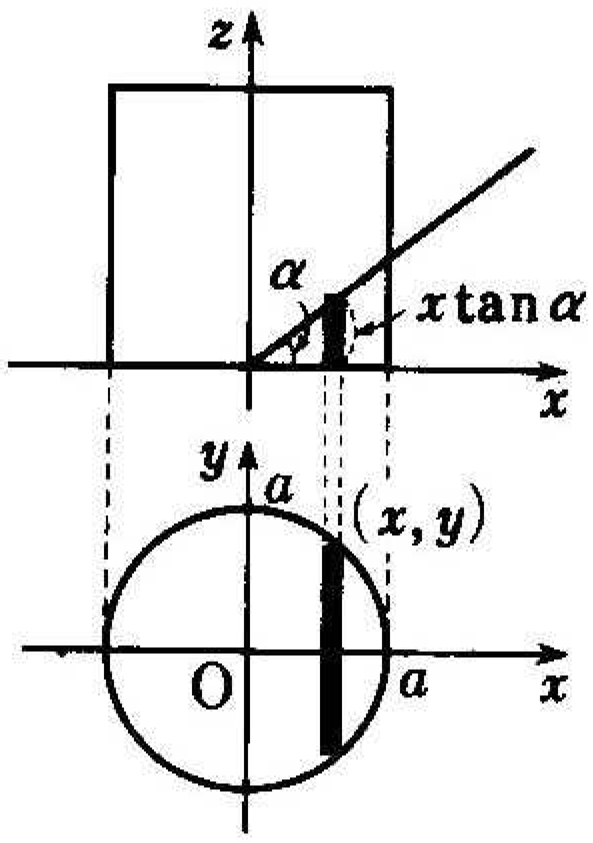
◆ 次には，体積を例にとってみましょう。

練習 3. 底面の半径 a の円柱を，底面の直径を含みこれと α の角をなす平面で切って得られるクサビ状の部分の体積を求めよ。（東大）



(ヒント) 底面の直径に平行に切るか，垂直に切るかで，大きく2つに分かれます。まず，平行に切ると次のようなことになります。

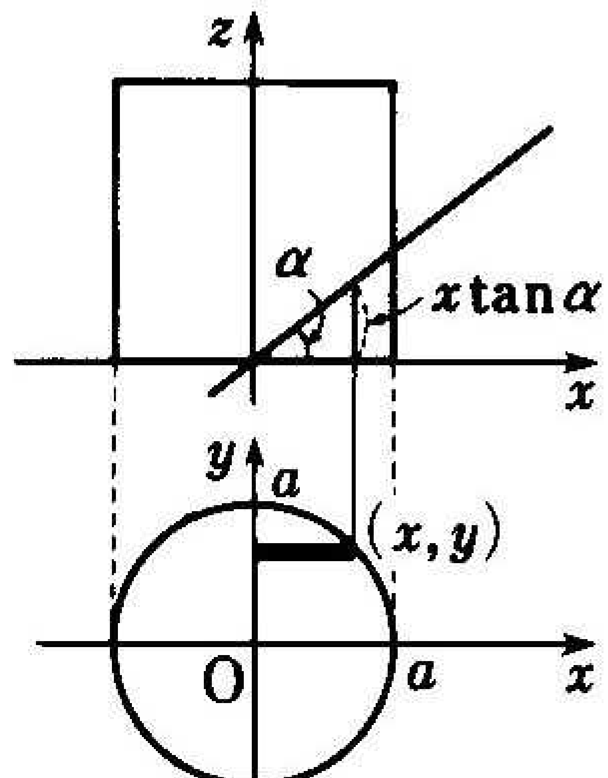
切り口は長方形で底の長さ $2y$，高さ $x\tan\alpha$ ですから，その面積は $(2y)(x\tan\alpha)$ です。したがって，求める体積は



$$V=\int_0^a 2xy\tan\alpha\,dx$$
$$=2\tan\alpha\int_0^a xy\,dx$$
$$=2\tan\alpha\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

これは，微積でなら簡単に積分できますが，基解では不可能です。

次に，直径に垂直に切りますと，こんどは切り口は三角形になります。その面積は



$$\frac{1}{2}x\cdot(x\tan\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\tan\alpha)x^2$$

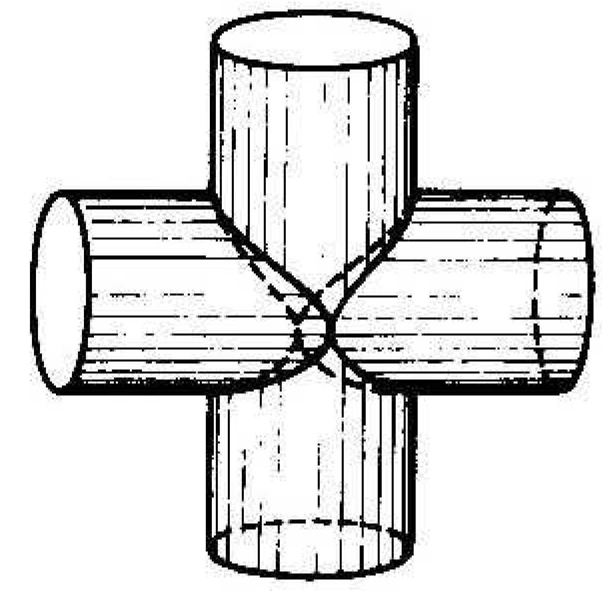
ですから，求める体積は

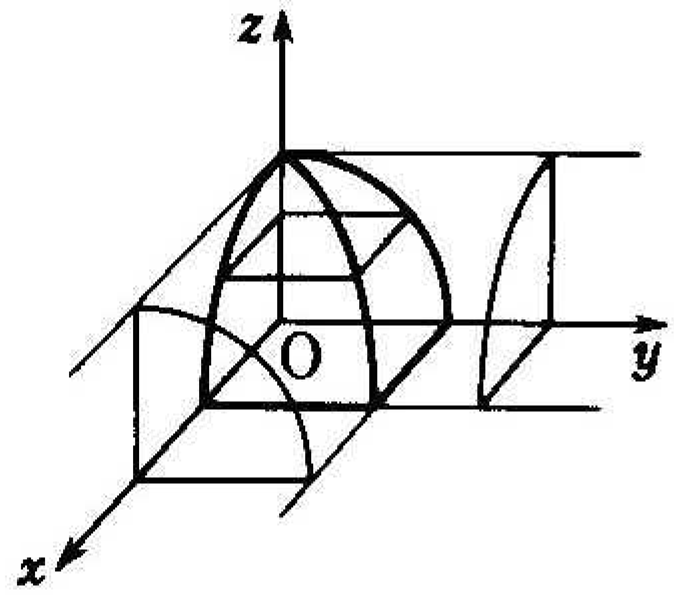
$$V=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(\tan\alpha)x^2dy$$
$$=\frac{1}{2}(\tan\alpha)\cdot 2\int_0^a(a^2-y^2)dy$$
$$=(\tan\alpha)\left[a^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^a$$
$$=\frac{2}{3}a^3(\tan\alpha)\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

と，ごく簡単にできるのです。

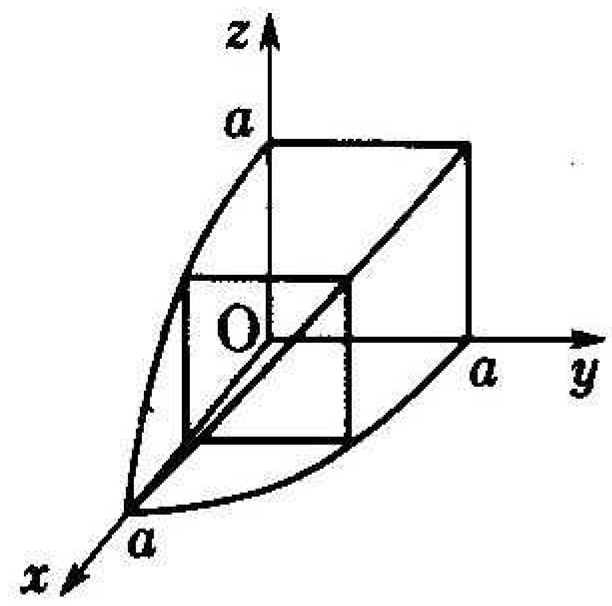
練習 4. 中心軸が直交する共に半径が a の十分長い2本の直円柱がある。共通部分の体積を求めよ。　(東京歯大)

(ヒント) 共通部分がどんな形か，つかみにくいのが欠点。はじめて，この問題をみて，そのイメージがわくなら，相当なものだ。いろいろな表現があるでしょう。そのいくつかを次にあげておきます。このように具体的なもようがわかると，もはやめんどうはあるまい。





(解) 相交わる中心軸に平行で，中心軸からの距離が x の平面で切ったときの共通部分の切り口は正方形で，その面積は



$$4(\sqrt{a^2-x^2})^2=4(a^2-x^2)$$

であるから，求める体積 V は

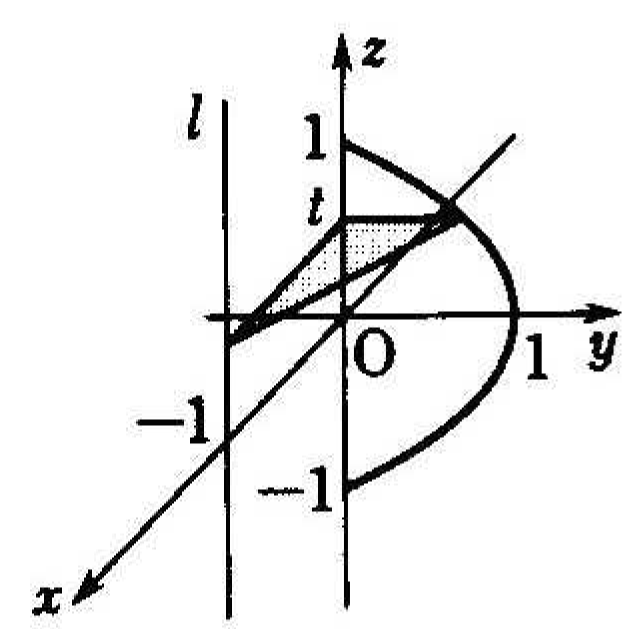
$$V=2\int_0^a 4(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3$$

*　*　*

◆ 次のようなものも求めるべき立体のイメージが浮ばないために手のつけようがない，ということになりがちです。

練習 5. $(x,\ y,\ z)$ を空間の直交座標とし，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を通り，z 軸に平行な直線を l とする。yz-平面内にあって $y=1-z^2$ で表される曲線の $-1\leqq z\leqq 1$ なる部分を，直線 l のまわりに回転してできる曲面と，平面 $z=1$ および $z=-1$ とによって囲まれた部分の体積を求めよ。　(東大)

(ヒント) l に垂直な平面 $z=t$ でこの立体を切ってみますと，その切り口は円で，その半径を r としますと，



$$r^2=1+(1-t^2)^2$$
$$=2-2t^2+t^4$$

ですから，

$$V=2\pi\int_0^1(2-2t^2+t^4)dt=\frac{46\pi}{15}$$

◑ (定積分による) 面積の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆元来積分法は面積や体積を求めるために考えられたものでした。本来のものに戻って扱うなら，めんどうなことはないのだ。

◆ 定積分を使って面積を求める際に大切なことが3つあります。

第1は，縦割にするか，あるいは横割にするかということ，これによってめんどうにもなりやさしくもなるからです。これについては（☞ p.246）。

第2は定積分する際のテクニック，これについては（☞ p.238）。

第3は特に2次式の場合，それも限られた場合しか使えませんが，公式

$$\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2} \text{ あるいは } \frac{a(\alpha\sim\beta)^3}{6}$$

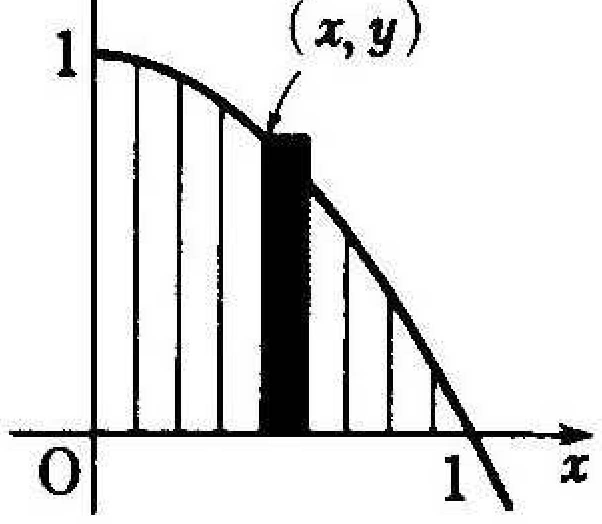
があります。これについては（☞ p.250）。

しかし，ここでは，それらの事項には関係しない基礎的なことをやっておくことにしましょう。

*　　*　　*

■練習 1. 放物線 $y=1-x^2$ と x，y 軸の正の部分とで囲む面積を求めよ。

（ヒント） 右のように縦に細く切ると，黒く塗った部分の面積は，縦の長さ y，横の長さ x のコマギレ dx との積ですから



$$ydx$$

と表され，これを x について0から1まで加えるのだから，

$$S=\int_0^1 ydx$$

と書くのだ，というふうに理解しておくといい。実は，ここに区分積分法でやった操作がウラにあるわけです。

さて，これでは積分が困る。そこで，y を x で表して

$$S=\int_0^1 (1-x^2)dx$$

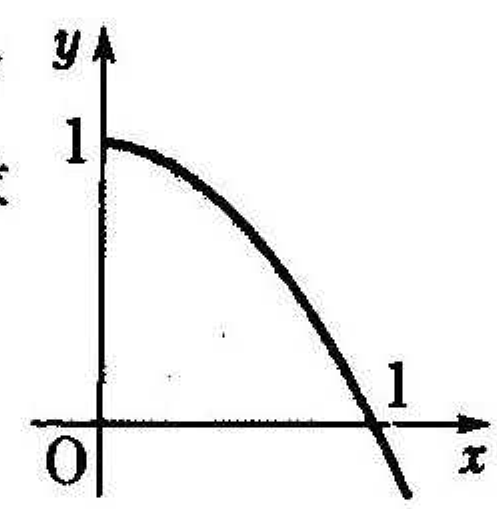
とするのです。（しかし，実は，区分求積法はギリシアにもあったし，パスカルが体系的にも扱ったのですが，微分と積分という立場でその本質を見ぬいたのがニュートンであったわけ。上の考えはそこのところを軽く逃げたということです）

ところで

$$S=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

（注） ここでは手順を覚える方法を述べたのですから，もちろん答案には，次のように簡単に書けばよいのです。

（解） $y=1-x^2$ のグラフは右のようになるから，求める面積を S とすると



$$S=\int_0^1 (1-x^2)dx$$

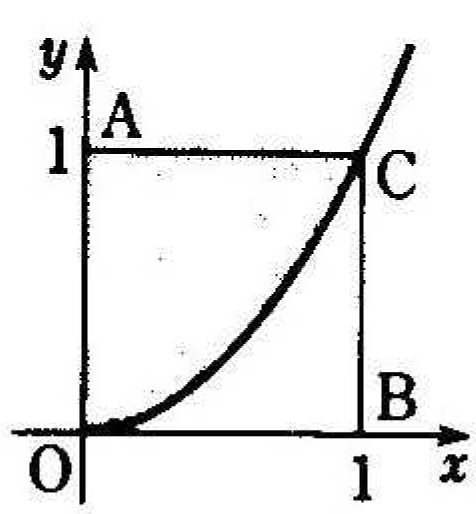
$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

答 $\frac{2}{3}$

9/6

■練習 2. $y=x^2$ と $y=1$ と y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

（ヒント） 2つの考え方があります。



右の図で，AOBC は正方形で面積1ですから，領域 OBC の面積を積分で求めて引くというのが1つです。

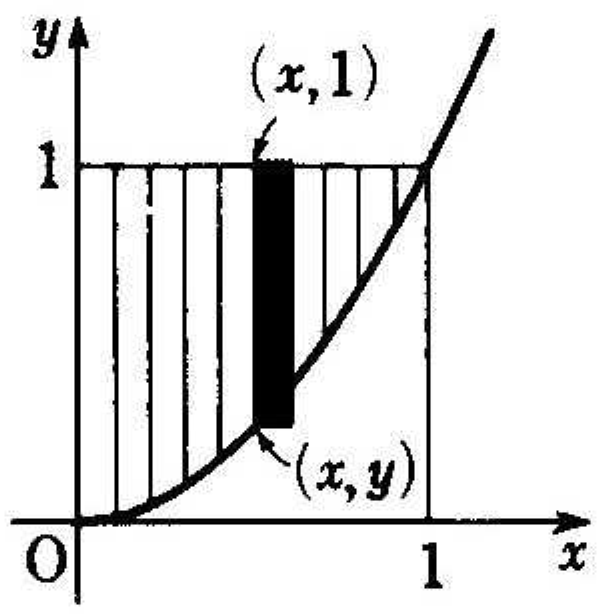
第2のやり方は，領域 AOC を細く切ると

長方形の縦の長さは $(1-y)$，横は dx で，その面積は

$$(1-y)dx$$

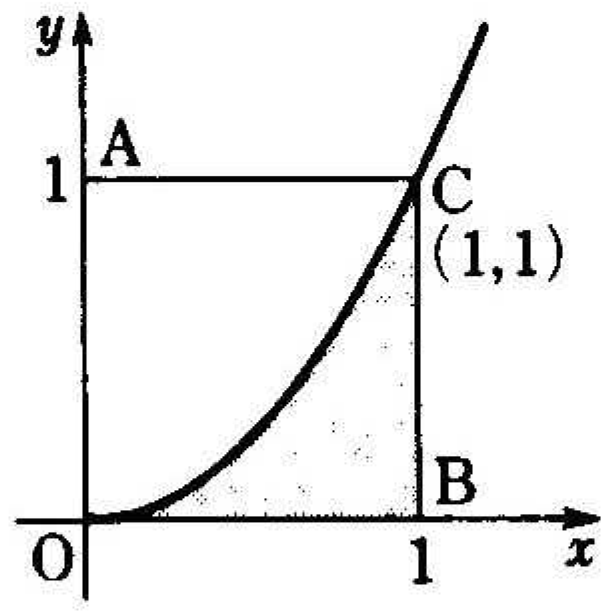
あとはこれを加えて

$$\int_0^1(1-y)dx$$



と考えるのです。本質的には同じですが，複雑なものになると，計算労力がずいぶんちがってくるものです。

(解) 1. 方程式 $y=x^2$ のグラフは右の図に示す放物線であるから，領域 OBC の面積を S' とすると



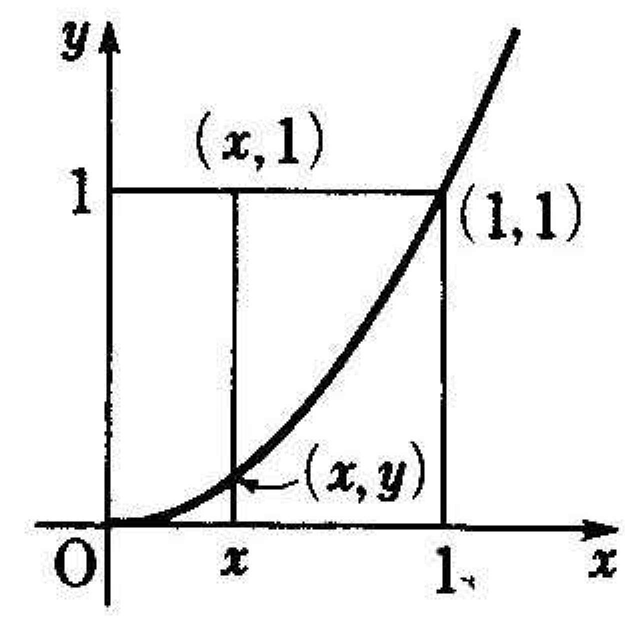
$$S'=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

ゆえに，求める面積 S は

$$S=\text{正方形 AOBC}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

答　$\dfrac{2}{3}$

(解) 2. x を与えると，求める領域の上端の y 座標は 1，下端の y 座標は x^2 であるから，求める面積を S とすれば，



$$S=\int_0^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. 放物線 $y=x^2-2x$ を C とする。放物線 $y=2(x^2+1)$ 上の点 $(a,\ 2(a^2+1))$ における接線を l とするとき，l と C で囲まれる面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

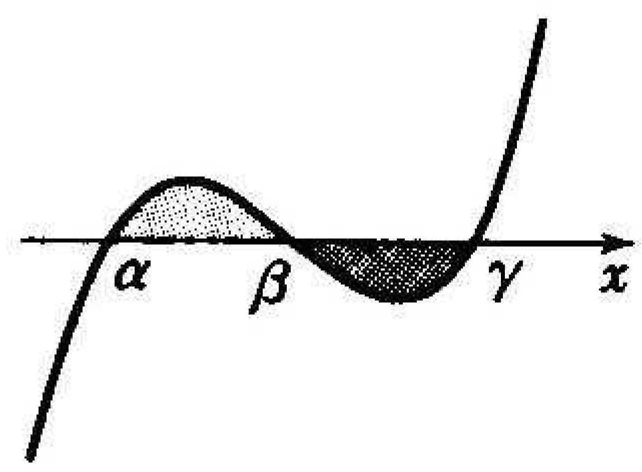
ヒント　l の方程式は $y=4ax-2a^2+2$ で，

$$S(a)=\frac{4}{3}\{2(a+1)^2+1\}^{\frac{3}{2}}$$

ですから，$a=-1$ のとき最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとります。(☞ p.250 参照)

練習 4. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ は 3 実根 $\alpha,\ \beta,\ \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$ をもち，$y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる 2 つの部分の面積が相等しい。このとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は等差数列をなすことを示せ。(九州芸工大)

ヒント　$y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた 2 つの部分の面積が相等しいことから，点 $(\beta,\ 0)$ は点対称の中心になります。



7/6

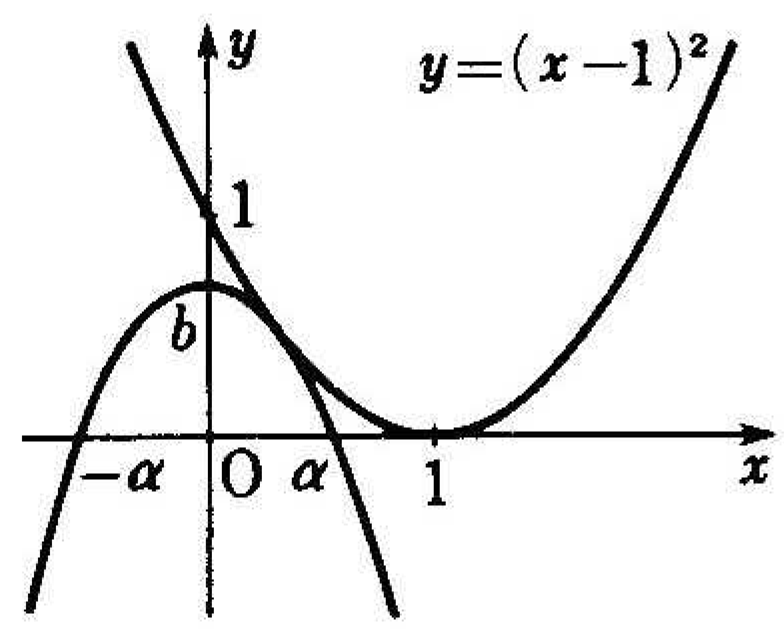
練習 5. 2 次関数 $y=f(x)\cdots\cdots①$ のグラフは，放物線 $y=(x-1)^2$ に接して，y 軸を軸にもつ上に凸な放物線である。このとき，①のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が最大となるように $f(x)$ をきめよ。

(岩手大)

ヒント　$f(x)$ のグラフは y 軸を軸にもつ放物線だというのですから

$$f(x)=ax^2+b$$

とおくことができます。この曲線は上は凸だというから，もちろん $a<0$ でしょう。



さて，これが $y=(x-1)^2$ に接する，というから

$$(1-a)x^2-2x+(1-b)=0$$

は重複解をもち，このことから $b=\dfrac{a}{a-1}$ となります。そして面積 S は

$$S=-\frac{4}{3}a\left(\frac{1}{1-a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

となります。

答　$f(x)=-2x^2+\dfrac{2}{3}$

○公式 $\dfrac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この公式は無理にオボエルことはない。しかし，オボエテしまうと，絶大な力を発揮するでありましょう。

◆ $ax^2+bx+c=0$ が2つの実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつとき

$$\left|\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx\right|=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

なる関係があります。ここに，Dは判別式で

$$D=b^2-4ac$$

です。まず，この使い方からいきましょう。

7/8

練習 1. $y=x^2+x-1$ と x 軸の囲む面積を求めよ。

ヒント　$x^2+x-1=0$ の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ですから，マトモに計算すると，かなりゴタゴタしますが，この公式を使えば簡単です。つまり $\alpha<\beta$ として，

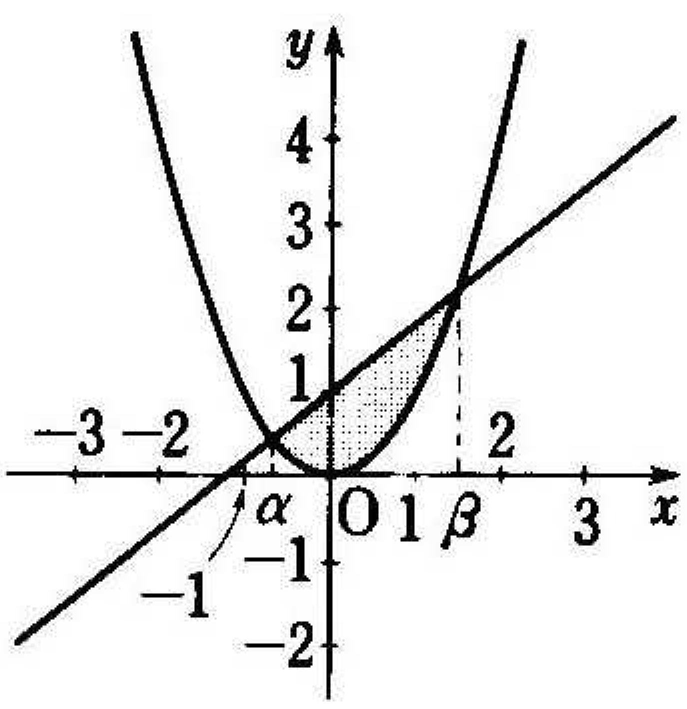
$$S=\int_\alpha^\beta -(x^2+x-1)dx=\int_\alpha^\beta(-x^2-x+1)dx$$

$$=\frac{\{1^2-4(-1)\cdot1\}^{\frac{3}{2}}}{6(-1)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

注　ここに絶対値をつけてありませんが，正であることがわかっていますから，もちろんかまわないわけです。

練習 2. $y=x^2$ と $y=mx+1$ の囲む面積を求めよ。

ヒント　$y=x^2$ と $y=mx+1$ が相異なる2点で交わることは明らかです。その交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ としますと，その囲む面積Sは



$$S=\int_\alpha^\beta\{(mx+1)-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(-x^2+mx+1)dx$$

ところが α, β は

$$-x^2+mx+1=0$$

の解なんですから

$$S=\frac{\{m^2-4(-1)\cdot1\}^{\frac{3}{2}}}{6(-1)^2}=\frac{(m^2+4)\sqrt{m^2+4}}{6}$$

となります。

*　*　*

◆　では，ここで，この公式の証明をしておきましょう。

7/8

練習 3. $ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解を α, β とし，$ax^2+bx+c=0$ の判別式をDとすれば

$$\left|\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx\right|=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

であることを証明せよ。　（東北大）

ヒント

$$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+3b(\beta+\alpha)+6c\}\quad\cdots\cdots(*)$$

ところが

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

ですから，

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=(\beta+\alpha)^2-\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-ac}{a^2}$$

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\beta\alpha=\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{D}{a^2}$$

したがって

$$\beta-\alpha=\pm\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

これらを(*)に代入して

$$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\pm\frac{\sqrt{D}}{|a|}\left\{2a\cdot\frac{b^2-ac}{a^2}+3b\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+6c\right\}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{D}}{6|a|}\cdot\frac{-D}{a}=\mp\frac{D\sqrt{D}}{6a|a|}$$

$$\therefore\quad\left|\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx\right|=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

Q. E. D.

(注) ax^2+bx+c
$=a(x-\alpha)(x-\beta)$
$=a\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}$
と変形してやると，少しキレイにできます。

*　*　*

◆ では，総合的な応用例にいきましょう。

練習 4. 放物線 $y=x^2-2x-2$ を C とする。放物線 $y=2x^2$ 上の点 $(a,\ 2a^2)$ における接線を l とするとき l とCで囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

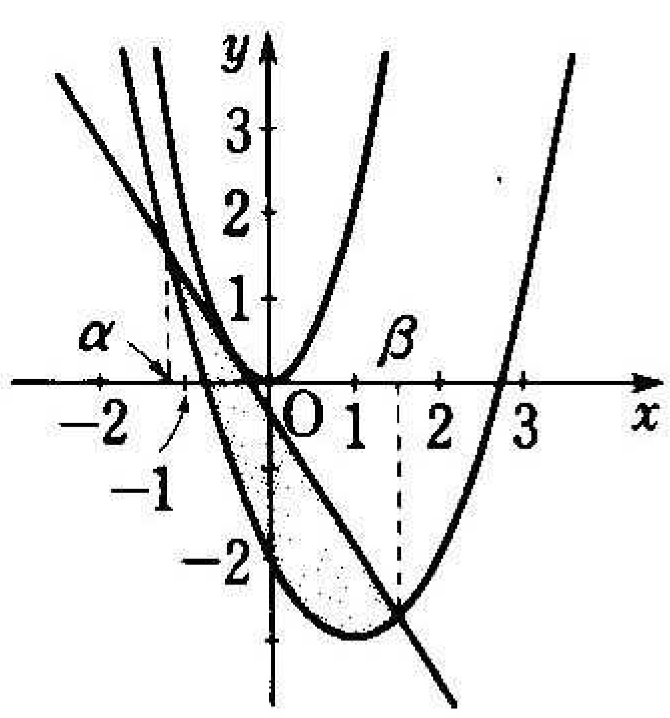
(阪大)

(解) $y=2x^2$

$\therefore\quad y'=4x$

ゆえに，点 $(a,\ 2a^2)$ における接線の傾きは $4a$ であるから，接線の方程式は

$y=4ax-2a^2$



したがって

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{(4ax-2a^2)-(x^2-2x-2)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{-x^2+(2+4a)x+(2-2a^2)\}dx$$

ここに $\alpha,\ \beta$ は

$$-x^2+(2+4a)x+(2-2a^2)=0$$

の２つの実数解で $\alpha<\beta$ である。

$$\therefore\quad S(a)=\frac{\{(2+4a)^2-4(-1)(2-2a^2)\}^{\frac{3}{2}}}{6(-1)^2}$$

$$=\frac{\{4(2a^2+4a+3)\}^{\frac{3}{2}}}{6}$$

$$=\frac{4}{3}(2a^2+4a+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\{2(a+1)^2+1\}^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに $a=-1$ で最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

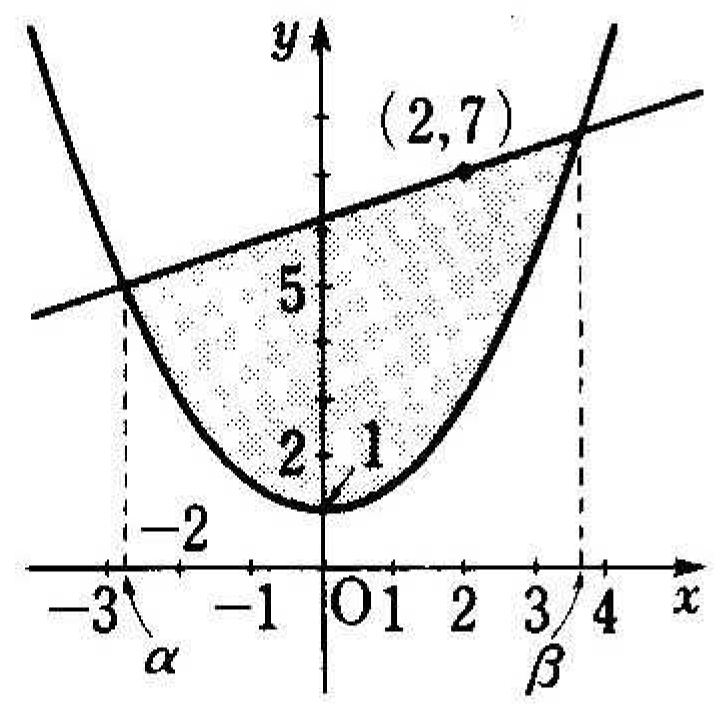
答 $\frac{4}{3}$

練習 5. 次の連立不等式を満たす部分の面積を18にするmの値を求めよ。

$$y\geqq\frac{x^2}{2}+1,\quad y-7\leqq m(x-2)$$

(立教大)

(ヒント) $y\geqq\frac{x^2}{2}+1$，$y-7\leqq m(x-2)$ を満足する領域は右図のようになります。



さて，その面積を$S(m)$ としますと

$S(m)$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\{m(x-2)+7\}-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\right]dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{-\frac{1}{2}x^2+mx+(6-2m)\right\}dx$$

ここに $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ は

$$-\frac{1}{2}x^2+mx+(6-2m)=0$$

の２つの実数解ですから

$$S(m)=\frac{1}{6\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\left\{m^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)(6-2m)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}(m^2-4m+12)^{\frac{3}{2}}$$

したがって

$$\frac{2}{3}(m^2-4m+12)^{\frac{3}{2}}=18$$

これを解いて

$$m=1,\ 3$$

答 1, 3

① (定積分による)体積の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

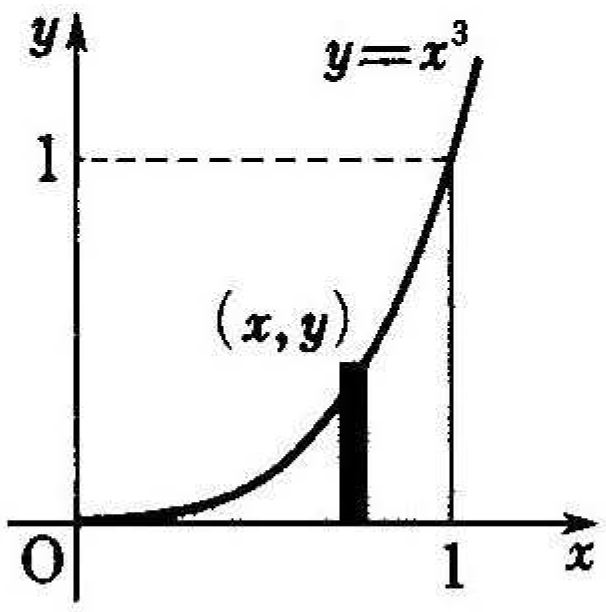
◆定積分というのは，もともと，面積や体積を求めるためのものであった。それは，要するに，微小体積の和を求めて……

◆ 定積分を用いて，体積を求める問題は大きく分けて2つになります。第1は回転体，第2は非回転体，のそれを求めるものです。

ともあれ，次の具体的な練習をやってみませんか。

7/10

■練習 1. $y=x^3$ と x 軸と $x=1$ とで囲まれる部分を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。



(解) 求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1 \pi y^2 dx$$

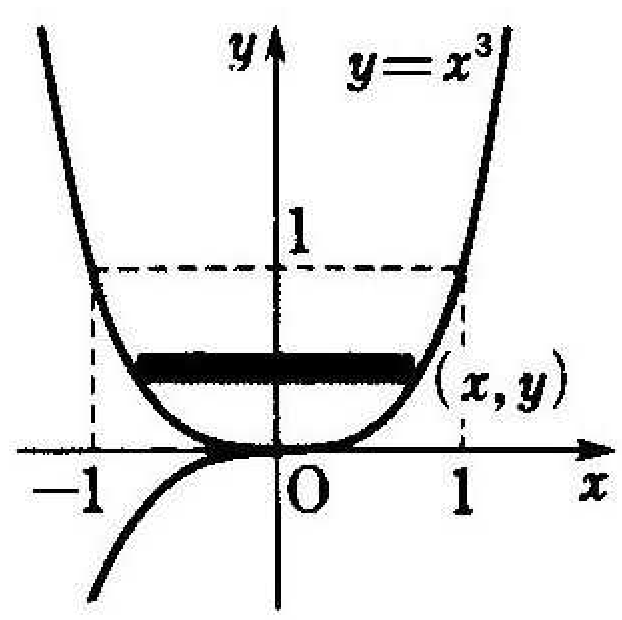
$$=\pi\int_0^1 x^6 dx$$

$$=\frac{\pi}{7}\Big[x^7\Big]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{7}$$ ……答

7/10

■練習 2. $y=x^3$ と y 軸と $y=1$ とで囲まれた部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。



(解) 求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^1 \pi x^2 dy$$

$$=\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy$$

(オヤ，困ッタゾ，

$\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}dy$ ノ積分ナンカ基解ノ範囲デハアルマイ。

サハ，サリナガラ，一般に

$$\int_0^1 y^{\alpha}dy=\left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1$$

くらい知っておきたいもの。かくて，次のようになる)

$$=\pi\left[\frac{y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_0^1=\pi\cdot\frac{3}{5}\Big[y^{\frac{5}{3}}\Big]_0^1$$

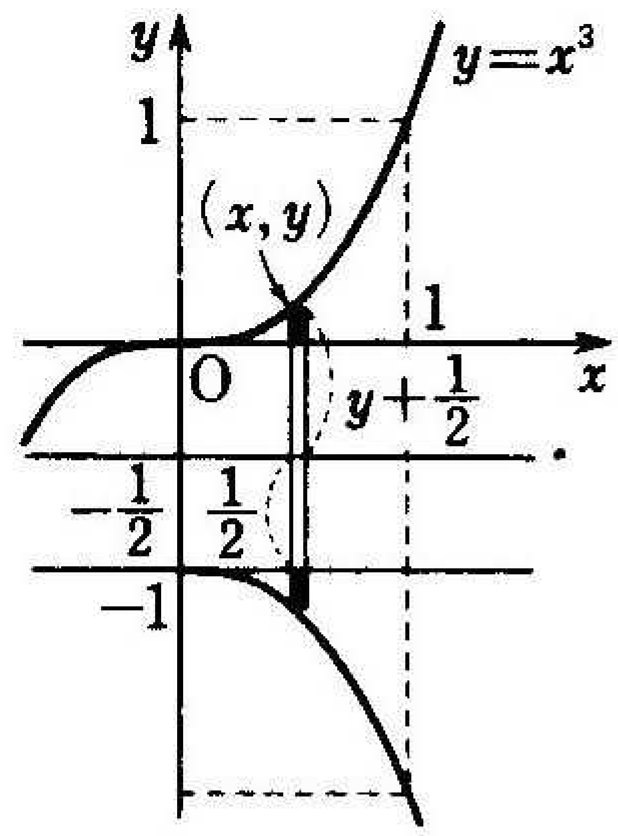
$$=\pi\cdot\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}\pi$$ ……答

＊　＊　＊

◆ では，次にこれを：――

7/10

■練習 3. $y=x^3$ と x 軸と $x=1$ とで囲まれた部分を $y=-\frac{1}{2}$ のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。



(解) 求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^1 \pi\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 dx-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1$$

$$=\pi\int_0^1\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)dx-\frac{\pi}{4}$$

$$=\pi\int_0^1\left(x^6+x^3+\frac{1}{4}\right)dx-\frac{\pi}{4}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{11}{28}\pi$$ ……答

＊　＊　＊

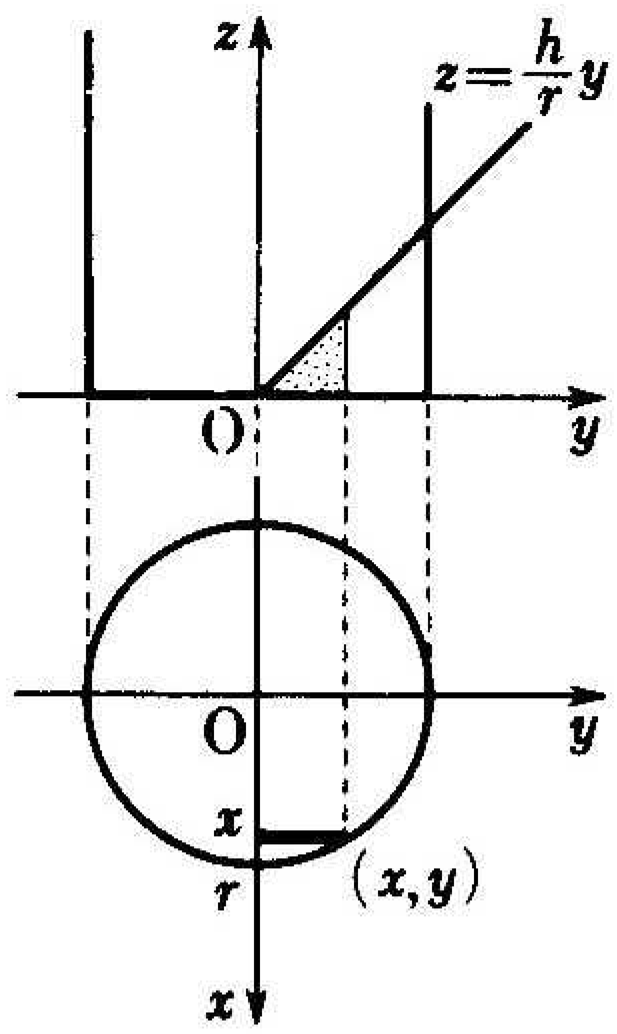
◆ 以上で体積を定積分で求める基本形は終わりです。では，次には総合的なものにいきましょう。

■練習 4. 3つの条件 $x^2+y^2\leqq r^2$, $\frac{y}{r}-\frac{z}{h}\geqq 0$, $z\geqq 0$ を満たす点 (x, y, z) の全体からなる立体の体積を求めよ。ただし，r, h は正の定数とする。　(早大)

(ヒント) $x^2+y^2\leqq r^2$ は，z 軸を軸とし，底面の半径 r の直円柱の内部（もちろん側面を含み

ますよ）を表し，$\dfrac{y}{r}-\dfrac{z}{h}\geqq 0$ は x 軸を含み，yz 平面に垂直な平面の下部を，$z\geqq 0$ は xy 平面の上部を表しています。

だから，x 軸に垂直な平面による切り口は三角形で，したがって求める体積は



$$V=2\int_0^r \frac{1}{2}y\cdot\frac{h}{r}y\cdot dx$$

$$=\frac{h}{r}\int_0^r y^2dx$$

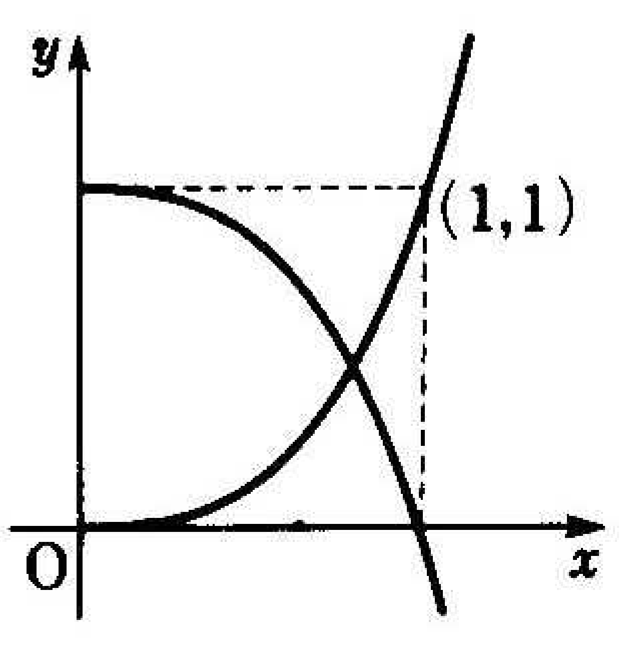
ところが $x^2+y^2=r^2$ ですから

$$V=\frac{h}{r}\int_0^r (r^2-x^2)dx$$

$$=\frac{h}{r}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{2}{3}r^2h \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 5. n を正の整数として，曲線 $y=x^n$ と x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた図形をA，曲線 $y=1-x^n$ と両軸の正の部分とで囲まれた図形をBとする。それぞれを x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積の比を求めよ。 （中央大）

ヒント　A，B を x 軸のまわりに回転して得られる体積をそれぞれ V_A，V_B としますと



$$V_A=\int_0^1 \pi x^{2n}dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=\frac{\pi}{2n+1}$$

$$V_B=\int_0^1 \pi(1-x^n)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1(1-2x^n+x^{2n})dx$$

$$=\pi\left[x-2\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

$$=\pi\left(1-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{2n^2\pi}{(n+1)(2n+1)}$$

$$\therefore\quad V_A : V_B=(n+1):2n^2 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

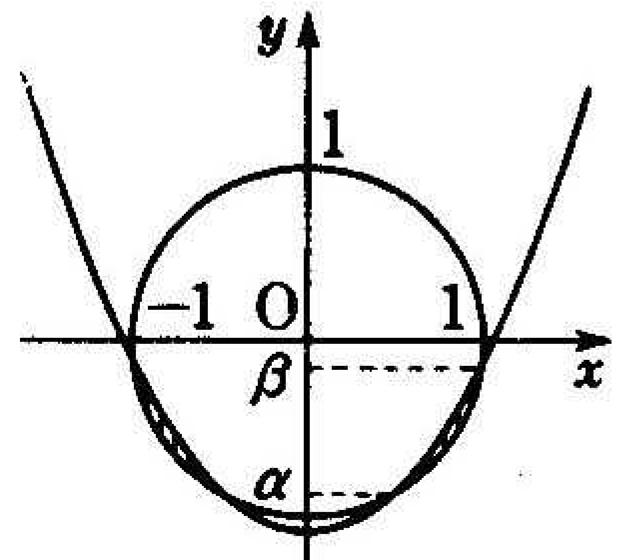
練習 6. 平面上で，次のような2つの集合 A，B を考える。

$$A=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$$

$$B=\{(x,\ y)\,|\,y\leqq x^2+a\}$$

このとき，$A\cap B$ を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ。ただし，$a<-1$ とする。 （愛知教育大）

ヒント　$x^2+y^2=1$ と $y=x^2+a$ とが交わるための条件は何か。

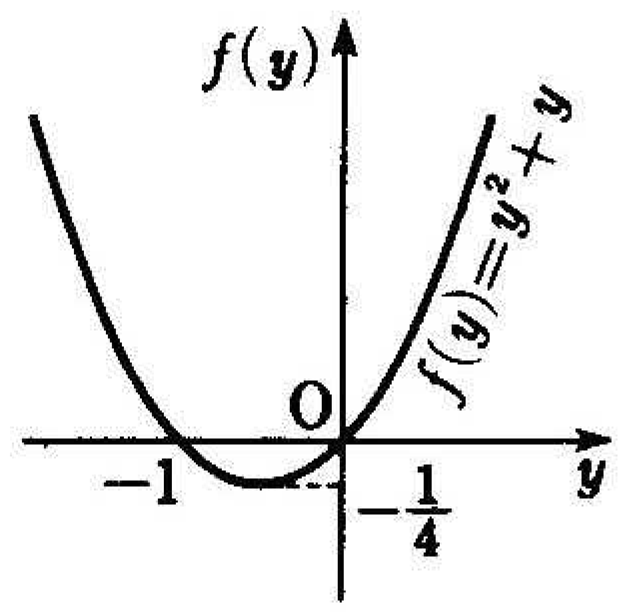


x^2 を消去して

$$y^2+y=1+a$$

これが $-1<y<1$ なる解を2つもたなければならない。

$f(y)=y^2+y$ のグラフは右のようになりますから，そのための条件は



$$-\frac{1}{4}<1+a<0$$

つまり

$$-\frac{5}{4}<a<-1$$

ところで，このとき，$A\cap B$ は上の図の斜線を引いた部分ですから，求める体積は

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\{(1-y^2)-(y-a)\}dy$$

$$=\pi\int_\alpha^\beta\{-y^2-y+(1+a)\}dy$$

$$=\pi\cdot\frac{\{1-4\cdot(-1)(1+a)\}^{\frac{3}{2}}}{6(-1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{6}(4a+5)^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(*)$$

$a\leqq-\dfrac{5}{4}$ のときはいうまでもなく $V=0$.

なお，上の積分で（*）のところでは，公式

$$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

を使いましたが，これについては（☞ p.250）を参照してください。

回転体の体積

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

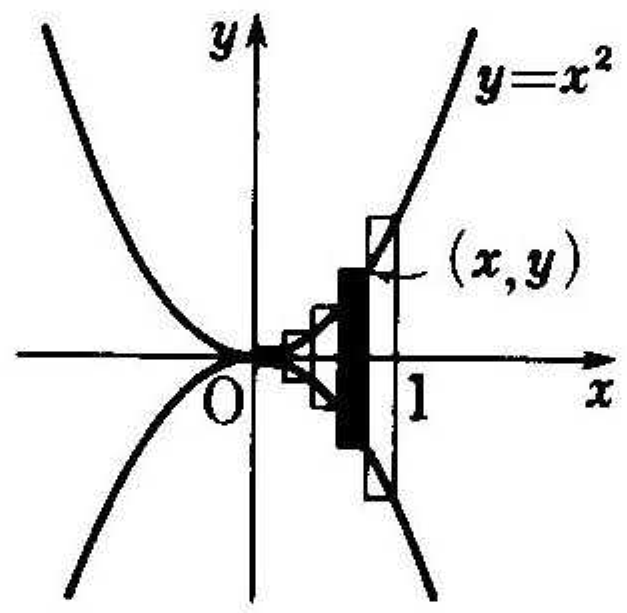
◆回転体の体積なんてものは，キミ，回転軸に垂直に切れば必ずできるのだよ。何を考える余地があろうか。

◆ 積分法によって体積を求める問題は大きく分けて２つになります。第１は回転体，第２は非回転体です。ここでは回転体の体積について学ぶことにしましょう。

さっそく，具体的な問題からいくとしましょう。

練習 1. $y=x^2$ と $x=1$ と x 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

(ヒント) 右の図に示すような図形ができます。これを回転軸，つまり x 軸に垂直な平面で細かく切りますと，ウスイ円盤ができます。その体積を全部加えればいいだろう，というわけです。



この円盤の半径は y ですから，円盤の断面積は πy^2，厚さは x のコマ切れ dx で，その体積は

$$\pi y^2 dx$$

です。それを全部加えるのが積分という操作ですから

$$V=\int_0^1 \pi y^2 dx$$

しかし，これでは計算ができない。ところが，y は x で表せて $y=x^2$ ですから

$$\therefore\quad V=\int_0^1 \pi x^4 dx$$

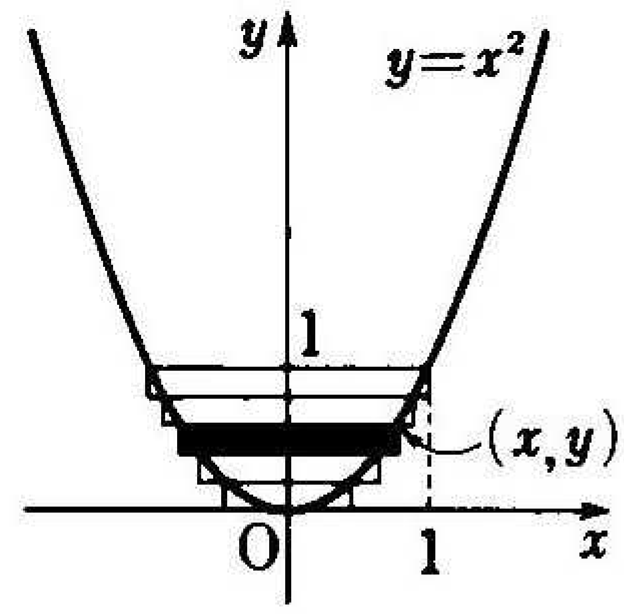
$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$$

(答) $\dfrac{\pi}{5}$

(注) ここに述べたのは考え方の大筋で，これをキチンとやることが数学の理論というものですが，詳しいことは省略します。

練習 2. $y=x^2$ と $y=1$ と y 軸とで囲まれた部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

(ヒント) 回転軸に垂直な平面でウスク切ると右のように円盤の積み重なりになります。この体積を全部加えればよいのです。



円盤の半径は x ですから，円盤の断面積は πx^2，厚さは dy，したがって体積は

$$\pi x^2 dy$$

これを全部加えるのだから，体積を V とすると

$$V=\int_0^1 \pi x^2 dy$$

ところが　　$x^2=y$

$$\therefore\quad V=\int_0^1 \pi y\,dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

答案はもちろん上のようにゴタゴタ書く必要はありません。つまり，次のようです。

(解) 求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1 \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

(答) $\dfrac{\pi}{2}$

*　*　*

◆ 回転体の体積に限らない，面積でもエネルギーでも，曲線の長さでも，このようないわば算術的な方法で本質をつかむことができるのです。数学的操作におぼれては，数学を使うことができないのです。

では，次にやや総合的な問題をやってみませんか。

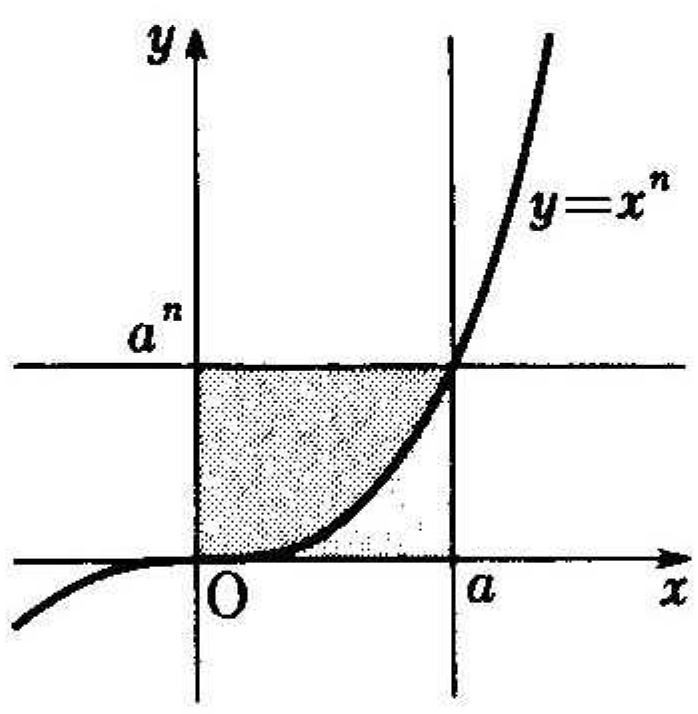
練習 3. $y=x^n$ と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を V_1 とする。$y=x^n$ と直線 $y=a^n$ および y 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を V_2 とする。$\dfrac{V_1}{V_2}$ を求めよ。ただし，n は正の整数とし，$a>0$ とする。

（室蘭工大）

ヒント　$y=x^n$ のグラフは知ってますね。知らなかったら $n=1, 2, 3, 4$ くらいかいて見当をつけてくださいよ。

さて，

$$V_1=\int_0^a \pi(x^n)^2dx$$
$$=\pi\int_0^a x^{2n}dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^a$$
$$=\frac{\pi}{2n+1}a^{2n+1}$$



次に，V_2 を求めるには $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a^n$ の囲む長方形を x 軸のまわりに回転して得られる円柱の体積が V_1+V_2 であることを使えばいいでしょう。

$$\therefore\quad V_2=\pi(a^n)^2\cdot a-\frac{\pi}{2n+1}a^{2n+1}$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\pi a^{2n+1}$$
$$\therefore\quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi}{2n+1}a^{2n+1}\Big/\frac{2n\pi}{2n+1}a^{2n+1}$$
$$=\frac{1}{2n}$$

答　$\dfrac{1}{2n}$

練習 4. 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=mx$ $(m>0)$ とで囲まれる図形について，次の問に答えよ。

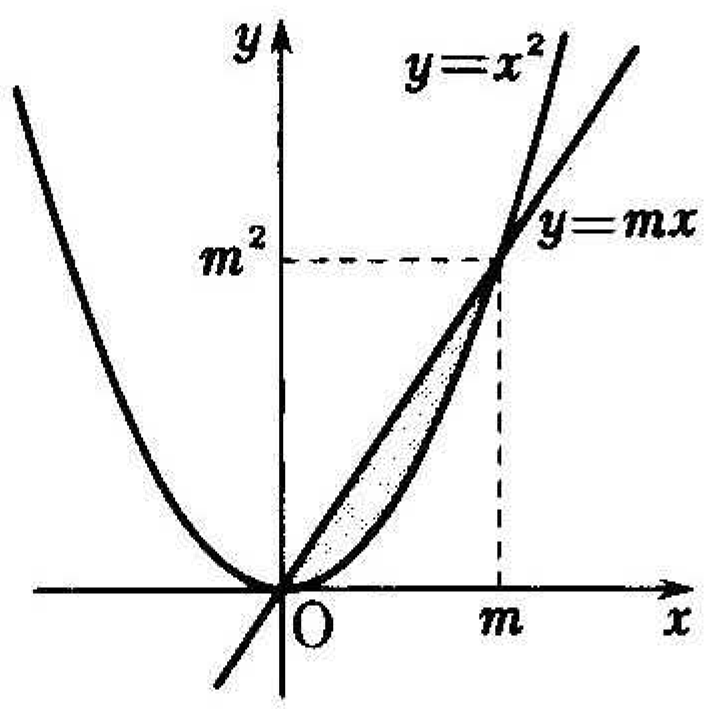
(1)　この図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2)　この図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ。

(3)　V_2-V_1 が最大となる m の値を求めよ。

（九州産業大）

解　$y=x^2$ と $y=mx$ の交点は $(0, 0)$ および (m, m^2) である。いま x 軸，$x=m$, $y=mx$ の囲む図形を x 軸のまわりに回転して得られる直円すいの体積を V_3, y 軸，$y=m^2$, $y=mx$ の囲む図形を y 軸のまわりに回転して得られる直円すいの体積を V_4 とすると，



(1)　$$V_1=V_3-\int_0^m \pi(x^2)^2dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\pi(m^2)^2\cdot m-\pi\cdot\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^m$$
$$=\frac{2}{15}\pi m^5$$

(2)　$$V_2=\int_0^{m^2}\pi\sqrt{y}^2dy-V_4$$
$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{m^2}-\frac{1}{3}(\pi m^2)\cdot m^2$$
$$=\frac{1}{6}\pi m^4$$

(3)　$$V_2-V_1=\frac{1}{6}\pi m^4-\frac{2}{15}\pi m^5=f(m)$$

とおくと，

$$f'(m)=\frac{2\pi}{3}m^3(1-m)\quad(m>0)$$

ゆえに，$m=1$ とおいて $f(m)$ は最大値 $\dfrac{\pi}{30}$ をとる。

*　*　*

◆ 回転体の体積にめんどうなものは少ないのです。ケアレス・ミスをしないようくれぐれも注意してください。

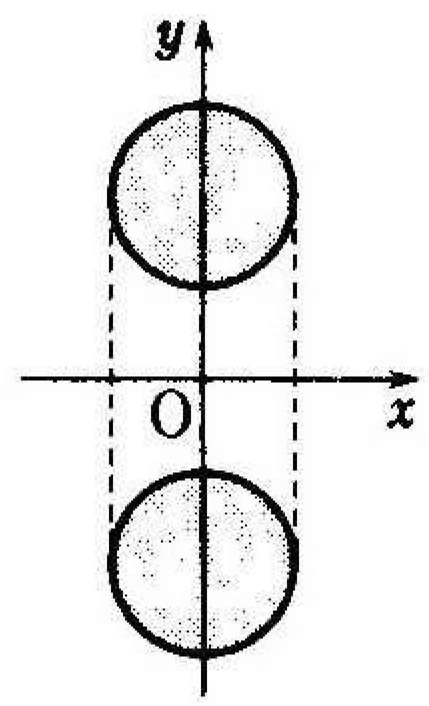
なお，回転体のイメージがとらえられなくてめんどうにみえることがあります。このようなときには，**断面図を作図せよ**，という問題をまずやることです。

円環体の体積

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆円環体という名称はどうもなじめないですね。ドーナツ状となぜいわないのであろうか。いぶかし。

◆ 円を，これと離れている直線のまわりに回転して得られる立体を **円環体**（えんかんたい）といいます。いうなれば，ドーナツです。英語では，この面をトーラスといいます。ここでは円環体および類似のものの体積を求めるのが目的です。



では，さっそく，具体的な問題にいきましょう。

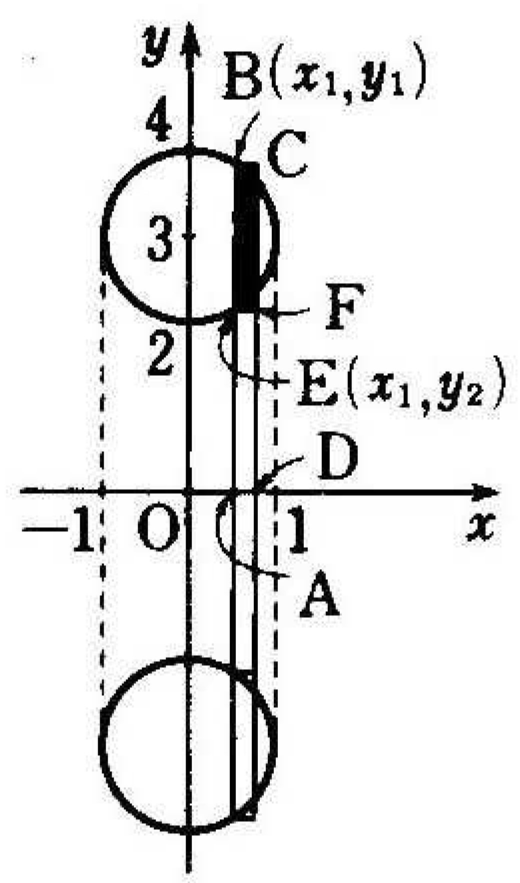
練習 1. 円 $x^2+(y-3)^2=1$ を x 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。

ヒント　右の図で，長方形 ABCD を x 軸のまわりに回転して得る体積は

$$\pi y_1{}^2 dx$$

で，長方形 AEFD を x 軸のまわりに回転して得る体積は

$$\pi y_2{}^2 dx$$



ですから，BCFE の部分を回転して得る体積は

$$\pi(y_1{}^2-y_2{}^2)dx$$

です。これを加えると，つまり積分すると，求める体積が得られるわけです。これを V としましょう。

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(y_1{}^2-y_2{}^2)dx$$

y 軸に関して対称であることから

$$V=2\pi\int_0^1(y_1{}^2-y_2{}^2)dx$$

です。

ところで，y_1，y_2 とは何か。

$$x^2+(y-3)^2=1$$

$$\therefore\quad (y-3)^2=1-x^2$$

$$y-3=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$y=3\pm\sqrt{1-x^2}$$

このうち，大きいほうが y_1，小さいほうが y_2 なのです。つまり

$$y_1=3+\sqrt{1-x^2}$$

$$y_2=3-\sqrt{1-x^2}$$

これを代入すればよいが，次のようにすると少しラクになります。

$$V=2\pi\int_0^1(y_1+y_2)(y_1-y_2)dx$$

$$=2\pi\int_0^1 6\cdot 2\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=24\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

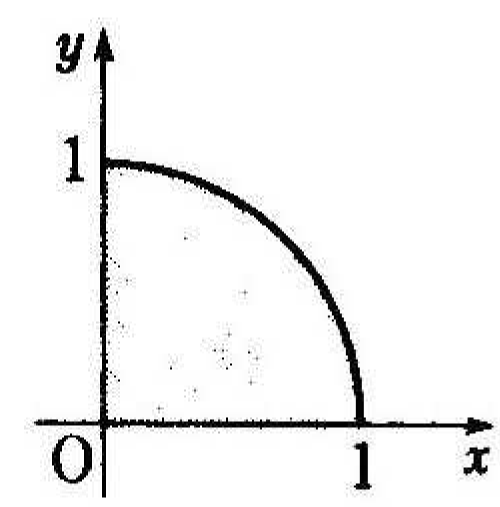
（サテ困ッタネ，コノ積分ハ微積ノハンイデハアルマイカ？　そうなんです。しかし，定積分のそもそものところを思い出してみると，これは半径1の円の面積の $\frac{1}{4}$ に等しいハズ。それに気がつけばラクです）

ところが

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad V=24\pi\times\frac{\pi}{4}$$

$$=6\pi^2\quad\cdots\cdots\text{答}$$



練習 2. だ円 $x^2+4(y-3)^2=4$ を x 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。

解　求める体積を V，x の1つの値に対して，y の値は2つある。大きいほうを y_1，小さいほうを y_2 とすると

$$y_1=3+\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},\quad y_2=3-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

で，

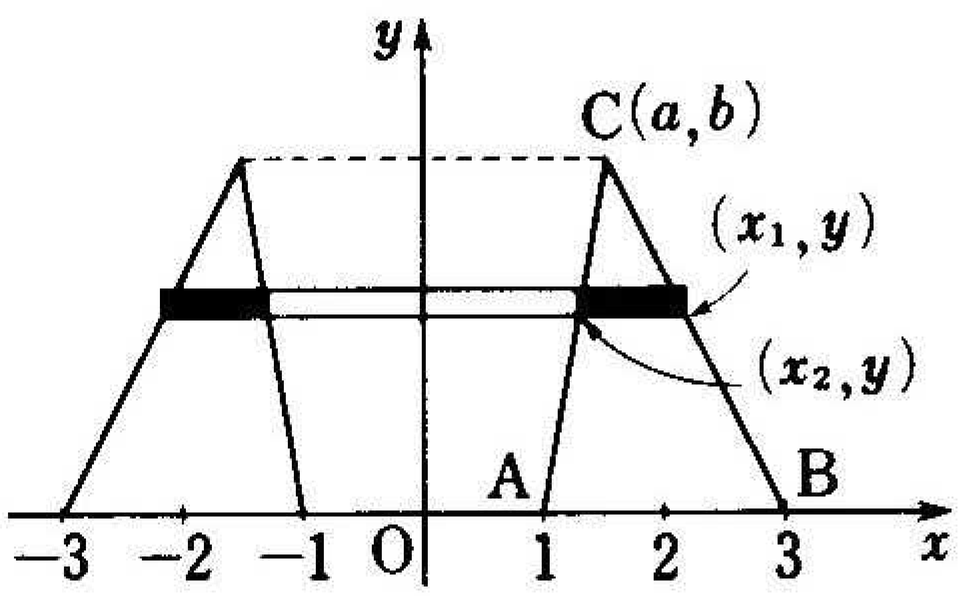
$$V=2\pi\int_0^2(y_1{}^2-y_2{}^2)dx$$
$$=2\pi\int_0^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)dx$$
$$=2\pi\int_0^2 6\cdot\sqrt{4-x^2}dx$$
$$=12\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$$
$$=12\pi\times\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=12\pi^2 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 円環体からはちょっと離れるが同種のものをやることにしましょう。

練習 3. 3点をそれぞれ A(1, 0), B(3, 0), C(a, b) ($a>0$, $b>0$) とするとき，△ABC を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　(松山商大)

ヒント　回転軸に垂直に薄く切りますと右の図のようになります。そして



AC の方程式は　$bx-(a-1)y-b=0$

BC の方程式は　$bx-(a-3)y-3b=0$

ですから，

$$x_1=\frac{1}{b}\{(a-3)y+3b\}$$
$$x_2=\frac{1}{b}\{(a-1)y+b\}$$

そして，求める体積をVとしますと

$$V=\int_0^b\pi x_1{}^2dy-\int_0^b\pi x_2{}^2dy$$
$$=\pi\int_0^b(x_1{}^2-x_2{}^2)dy$$
$$=\pi\int_0^b(x_1-x_2)(x_1+x_2)dy$$
$$=\pi\int_0^b\frac{1}{b}(-2y+2b)\cdot\frac{1}{b}\{(2a-4)y+4b\}dy$$
$$=\frac{4\pi}{b^2}\int_0^b\{-(a-2)y^2+b(a-4)y+2b^2\}dy$$
$$=\frac{4\pi}{b^2}\left[-\frac{(a-2)y^3}{3}+\frac{b(a-4)y^2}{2}+2b^2y\right]_0^b$$
$$=\frac{2}{3}\pi(a+4)b$$

答　$\frac{2}{3}\pi(a+4)b$

練習 4. 3点 A(4, 4), B(8, 6), C(8, 2) を頂点とする三角形をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

解

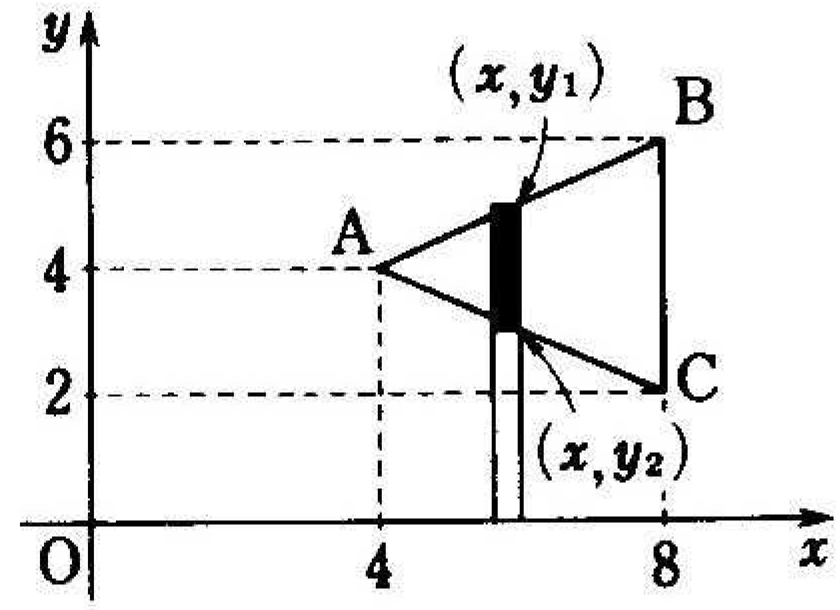
AB :

$x-2y+4=0$

AC :

$x+2y-12=0$

であるから，求める体積をVとすれば，



$$V=\int_4^8\pi y_1{}^2dx-\int_4^8\pi y_2{}^2dx$$
$$\left(\text{ここに } y_1=\frac{x+4}{2},\ y_2=\frac{-x+12}{2}\right)$$
$$=\pi\int_4^8(y_1{}^2-y_2{}^2)dx$$
$$=\pi\int_4^8(y_1+y_2)(y_1-y_2)dx$$
$$=\pi\int_4^8 8\cdot(x-4)dx=64\pi$$

答　64π

＊　＊　＊

◆ 閉じた図形Sを，これを切らない直線のまわりに回転して得られる体積をVとすると，次の **ギュルダンの定理** が成り立ちます。

$$\boldsymbol{V=Sl}$$

ここにSは図形の面積，lはその図形の重心の描く円の周の長さです。知らなければならないということはありませんが，知っていると便利なことは確かです。上の練習 4. であれば△ABC$=8$，重心は$\left(\frac{20}{3},\ 4\right)$ですから，重心の描く円の周の長さは $2\pi\cdot 4=8\pi$，したがって体積は $8\times 8\pi=64\pi$ です。答案としてはともかく，検算用として役に立つでしょう。

非回転体の体積

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

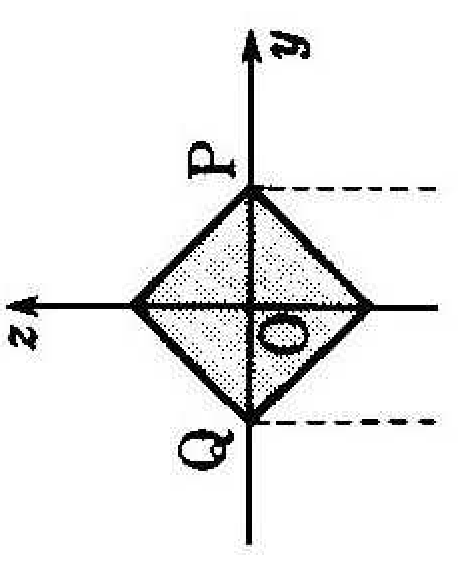
◆回転体に比べて非回転体の扱い方は難しい。というのも，その立体のイメージがつかめないからだ。

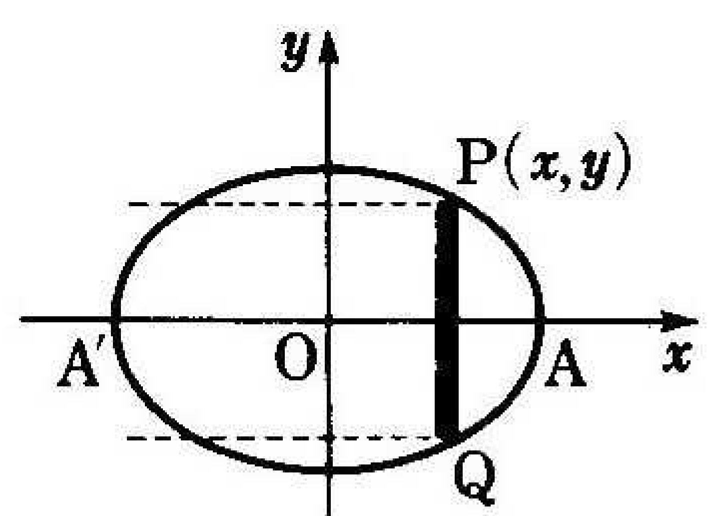
◆ ふつう扱われている体積計算の大部分は回転体ですが，ここでは，非回転体をとりあげて練習しておくことにしましょう。

では，まず，これです。

練習 1. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の長軸 A′A に垂直な弦 PQ を対角線とする正方形を，このだ円の平面に垂直に作る。弦 PQ の中点が A′A 上を A′ からAまで動くとき，これらの正方形の描く立体の体積を求めよ。 (名大)

ヒント 上の問題を読んで，立体の形が頭に浮ぶようなら大したもの。わからない人は下の図をみると見当がつくでしょう。





さて，x 軸に垂直な断面は正方形で，その対角線の長さは $2y$ ですから，1辺の長さは $2y\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,y$ で，面積は $2y^2$ です。

ところが

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \therefore\quad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

なんですから，面積は

$$2b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

です。ゆえに，求める体積は

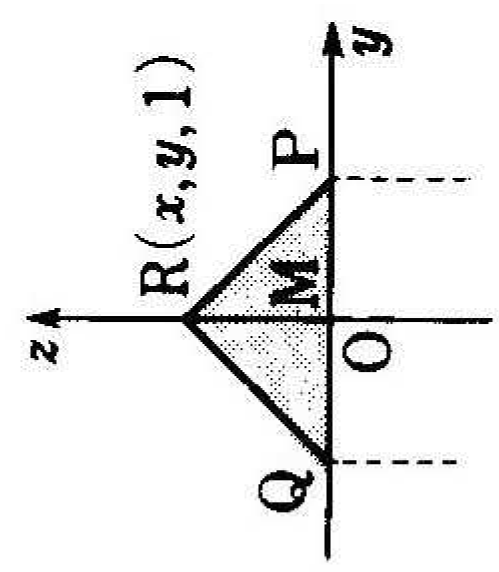
$$V=2\int_0^a 2b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{8}{3}ab^2 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

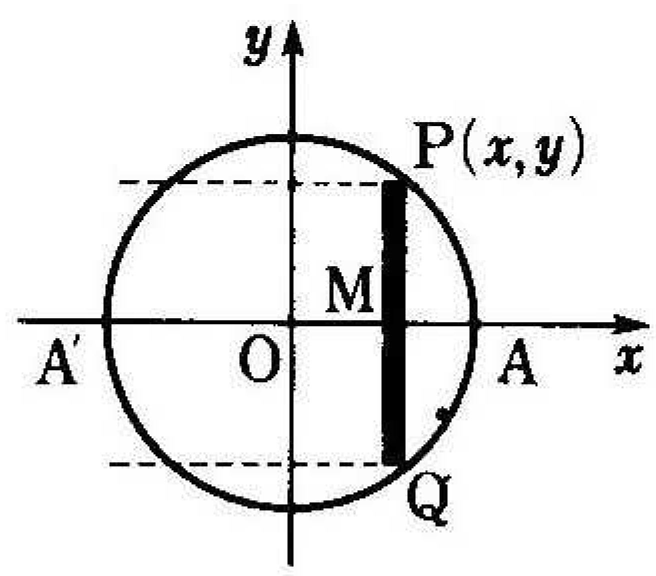
* * *

◆ では，もう1つ：──

練習 2. 円 $x^2+y^2=1$ の直径 A′A に垂直な弦 PQ を引き，PQ の中点Mからこの円を含む平面に対して長さ1の垂線 MR を一方の側に作る。Mが A′A 上を A′ からAまで動くとき，この △PQR の描く立体の体積を求めよ。

ヒント 大体の形は見当がついたのではありませんか。





さて，

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 1=y$$

$$\therefore\quad V=2\int_0^1 y\,dx=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

この積分は基解の範囲でない。とはいうものの，四分円（円の4分の1）の面積に等しいのですから $\dfrac{\pi}{4}$ に等しく，すなわち

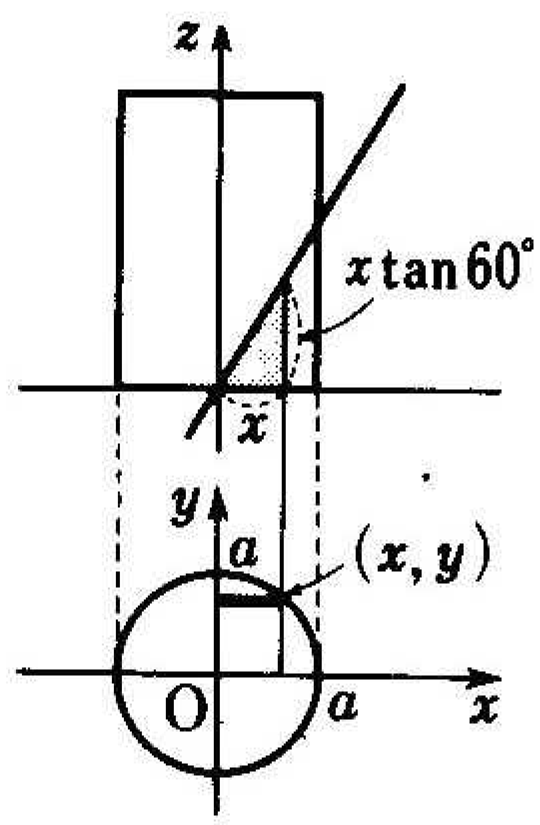
$$V=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ 非回転体でキワメテ，といってよいほど，よく入学試験に出題されるのは，円柱を斜めに切って得られるクサビ状の部分の体積を求める問題です。ともあれ，次に，やってみませんか。なお，この問題は，毎年入試に出題されない年はないといっていいくらいです。では：──

練習 3. AB$=2a$ を直径とする半円を底面とする半円柱がある。AB を含み，底面と $60°$ の角をなす平面で切りとられる立体の体積を求めよ。

（解） AB に垂直に切った切り口は三角形で，その底辺の長さ x，高さ $x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$ であるから，求める立体の体積は

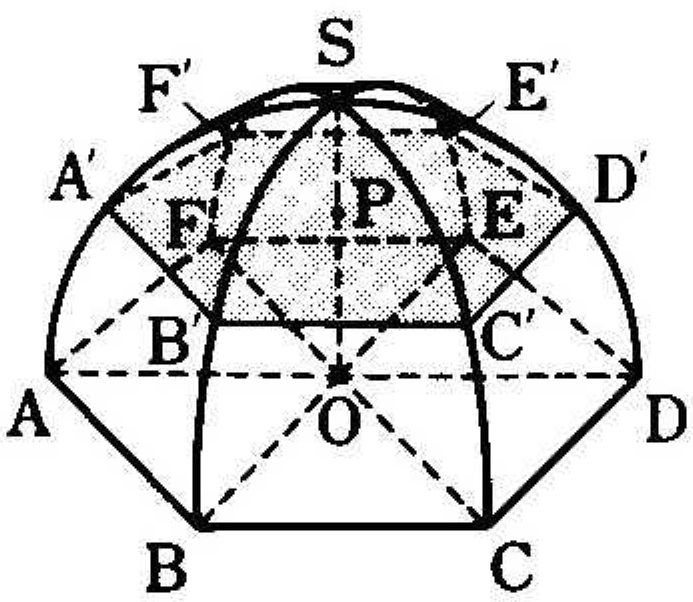


$$V=2\int_0^a \frac{1}{2}x\sqrt{3}x\,dy$$
$$=\sqrt{3}\int_0^a x^2dy$$
$$=\sqrt{3}\int_0^a (a^2-y^2)dy$$
$$=\sqrt{3}\left[a^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^a=\sqrt{3}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a^3$$

答 $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a^3$

練習 4. ABCDEF は1辺 a の正六角形，ASD, BSE, CSF はそれぞれ AD, BE, CF を直径とする半円で，Sはこの3つの半円の中点である。この正六角形と3つの半円を針金で作り，この枠に紙をたるまないように張ってできる立体の体積を求めよ。 （神戸大）

（ヒント） 底面 ABCDEF の中心Oと頂点Sを結ぶ線分上の点Pを通り，底面に平行な平面でこの立体を切ると，切り口は正六角形になります。



そしてその面積は， OP$=x$ としますと，切り口 A′B′C′D′E′F′ の辺の長さは $\sqrt{a^2-x^2}$ ですから，その面積は

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-x^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2)$$

となりましょう。したがって，

$$V=\int_0^a S(x)dx$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^a (a^2-x^2)dx=\sqrt{3}\,a^3$$

となります。 答 $\sqrt{3}\,a^3$

練習 5. だ円面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c>0)$$

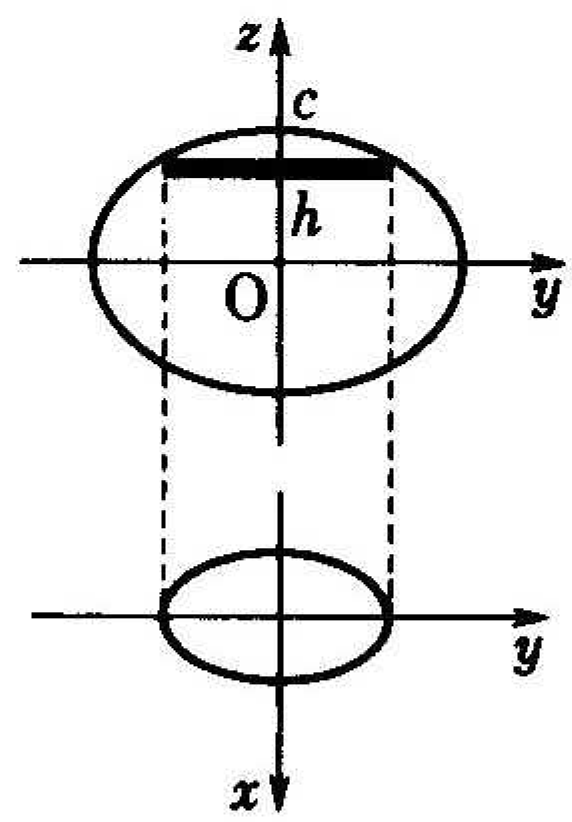
の囲む体積を求めよ。

（ヒント） z 軸に垂直な平面 $z=h$ による切り口は，

だ円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$

です。すなわち

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$



です。このだ円の囲む面積は

$$\pi\cdot a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}=\pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)$$

ですから，求める体積 V は

$$V=2\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)dh$$
$$=2\pi ab\left[h-\frac{h^3}{3c^2}\right]_0^c$$
$$=2\pi ab\left(c-\frac{c}{3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\pi abc$$

です。 答 $\frac{4}{3}\pi abc$

（注） 特に，$a=b=c=r$ とおきますと，半径 r の球になって，その体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$，なるほど，これは，すでに知っているハズのものだった。

では，もう1つ：——

練習 6. 一葉双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ および2平面 $z=c$，$z=-c$ の囲む部分の体積を求めよ。ただし，a，b，$c>0$ とする。

答 $\frac{8}{3}\pi abc$

◎関数方程式の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

7/18

◆いろいろな条件の下で関数を求める問題をやるのが目的です。入試に出るのはごく簡単なものばかり。おそれるべからず!!

◆ ひとくちに **関数方程式** といっても，その内容はいろいろ，要するにある条件を満足する関数を求める問題を総称することにしましょう。いや，それでも範囲が広すぎる。ここでは，直接微積分に関係するもの，ということにしましょう。

では，第1のタイプから：——

7/18

練習 1. $f'(x)=2x+3$, $f(1)=0$ である関数 $f(x)$ を求めよ。

(ヒント) $$f'(x)=2x+3$$

ですから

$$f(x)=\int(2x+3)dx$$
$$=x^2+3x+C$$

となります。ここにCは積分定数です。ところが $f(1)=0$ というのですから

$$f(1)=1+3+C=0 \qquad \therefore \quad C=-4$$

$$\therefore \quad f(x)=x^2+3x-4 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

7/18

練習 2. $\int_a^x f(t)dt=x^2+x-1$

のとき $f(x)$ を求めよ。

(ヒント) aを定数とするとき

$$\int_0^x f(t)dt$$

をxで微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

となります。そこで，与えられた式の両辺をxで微分しますと

$$f(x)=2x+1$$

これが求めるものです。

7/18

練習 3. $\int_a^x f(t)dt=x^3-2x^2-2x+3$

のとき $f(t)$ と定数 a の値を求めよ。

(解) 両辺をxで微分しますと

$$f(x)=3x^2-4x-2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

また，与式はxについての恒等式であるから $x=a$ を代入すると

$$0=a^3-2a^2-2a+3$$

右辺を因数分解して

$$(a-1)(a^2-a-3)=0$$

$$\therefore \quad a=1,\ \frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 第2のタイプは加法公式についてのものです。これは，きまったものですから，1つオボエテおくより仕方がない。いいですか。1つさえオボエテしまえば，他はほとんど同じなのですから，べつにめんどうはないのです。

7/18

練習 4. x, y の任意の値に対して

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy$$

で，かつ $f'(0)=a$ のとき

$$f(0),\ f'(x),\ f(x)$$

を求めよ。

(ヒント) $f(0)$ を求めるにはxかyを0にするとよいでしょう。$y=0$ にしてみますと

$$f(x)=f(x)+f(0)+8\cdot x\cdot 0$$

$$\therefore \quad f(0)=0$$

(チョット注意を!! $x=y=0$ としますと

$$f(0)=f(0)+f(0)+2\cdot 0\cdot 0$$

で同じく $f(0)=0$ が得られます。しかし，困ることもあるのです。例えば

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

というのであれば $f(0)$ は正しい値 0 のほかに±1 が出て，どれがいいかきまらない，といったことが起こるのです)

さて，次は $f'(x)$ ですが，定義にしたがってやります。つまり

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ところが，

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+8xh$$

ですから

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+8xh-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+8xh}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+8x\right)\\&=f'(0)+8x=8x+a\end{aligned}$$

（ここのところは，オボエテイナケレバ，とてもこうはいきませんよ）

さて，第3段階です!!

$$f'(x)=8x+a$$

ですから，

$$f(x)=4x^2+ax+C$$

ここにCは積分定数です。

ところが $f(0)=0$ なんですから

$$0=0+a\cdot 0+C \qquad \therefore\quad C=0$$

$$\therefore\quad f(x)=4x^2+ax$$

答 $\begin{cases}f(0)=0,\ f'(x)=8x+a\\ f(x)=4x^2+ax\end{cases}$

7/18 もう1つやってみませんか。

練習 5. x，y のすべての値に対して

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3x^2y+3xy^2$$

かつ $f'(0)=a$ のとき，$f(0)$，$f'(x)$，$f(x)$ を求めよ。

答 $\begin{cases}f(0)=0,\ f'(x)=3x^2+a\\ f(x)=x^3+ax \quad (a=f'(0))\end{cases}$

*　*　*

◆ 次は積分の入ったややめんどうなものです。しかし，1次関数とか2次関数とか指定されているのは，単なる計算問題で，ここに入れるものではありません。例えば

≪$f(x)$ は $|x|<1$ で0とならない1次関数とする。

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}\{f(x+1)\}^2dx=1$$

を満たす $f(x)$ を求めよ。（三重大）≫

などは $f(x)=ax+b$ とおいてしまえば，あとは積分の計算練習だからです。

練習 6.

$$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。（福岡工大）

ヒント $f(x)$ はわからなくても $\int_0^2 f(x)dx$ や $\int_0^1 f(x)dx$ が **xを含まぬ定数** であることは確かです。これをそれぞれ A，B とおきますと

$$f(x)=x^2-Ax+2B$$

となって形がきまる。あとは両辺に代入して A，B を求めればよいのです。さあ，やってみてください。

答 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

練習 7. 多項式 $f(x)$ で，等式

$$f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)dt=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}$$

を満たしているものをすべて求めよ。

（京大）

ヒント $f(x)$ が n 次式としますと，$f(x)f'(x)$ は $n+(n-1)=2n-1$ 次式，$\int_1^x f(t)dt$ は $(n+1)$ 次式です。ところが $(2n-1)-(n+1)=n-2$ ですから $n>3$ なら左辺は $(2n-1)$ 次式，したがって $2n-1=1$，$n=1$（不適）です。したがって，$n\leqq 2$，そこで $f(x)=ax^2+bx+c$ とおいて代入して両辺を比較するとよいでしょう。

答 $\begin{cases}f(x)=\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{1}{6}x^2+x-\dfrac{5}{6},\\ -\dfrac{1}{6}x^2\pm\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}\end{cases}$

◐ 加法定理を与えられた関数を求めること

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆加法定理が与えられると関数がきまってしまう，ということ。これは考えてみるとふしぎなことだと思いませんか。

◆ ここでは加法定理が与えられたときに，その条件を満足するような関数を求めるのが目的です。とはいっても，やったことのない人には何のことかわからないでしょう。何はともあれ，具体的な練習をやるのが早道というもの，です。

練習 1. x，y が何であっても

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

が成り立つ関数 $f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ は x のすべての値に対して微分可能であるとする。また $f'(0)=a$ とする。

ヒント　この種の問題はいろいろありますが，1つは暗記しておくより仕方がありません。1つさえ，わかっていれば，他は類似の方法で解けるからです。

さて，この問題は3段階でやります。第1段階は $f(0)$ を求めること：——

x，yは何を入れても成り立つのですから，$y=0$ としても，もちろん成り立ちます。そして，それは

$$f(x)=f(x)+f(0)$$
$$\therefore\quad f(0)=0$$

次は，第2段階，導関数の定義によって，導関数を求めるのです。すなわち

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ところが，仮定により

$$f(x+h)=f(x)+f(h)$$

なんですから

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

ところが，微分係数の定義により $f'(0)$ に等しく，したがって a に等しいのです。

$$\therefore\quad f'(x)=a$$
$$\therefore\quad f(x)=ax+C$$

ここにCは積分定数です。

第3段階はこのCをきめることです。ところが $f(0)=0$ でしたね。

$$\therefore\quad f(0)=C=0$$
$$\therefore\quad f(x)=ax$$

これが求める結果です。

答　$f(x)=ax$

7/77

練習 2. x，y のすべての値に対して

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

を満足するような微分可能の関数 $f(x)$ を求めよ。ただし，$f'(0)=a$ とする。

(明治大)

解　$y=0$ とすると

$$f(x)=f(x)+f(0)+0$$
$$\therefore\quad f(0)=0$$

次に，定義により

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+2x\right\}$$
$$=2x+f'(0)=2x+a$$
$$\therefore\quad f(x)=x^2+ax+C$$

ところが　$f(0)=C=0$

$$\therefore\quad f(x)=x^2+ax \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 本質的には同じことですが，ややめんどうなものを扱ってみませんか。

練習 3. x, y のすべての値に対して

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

が成り立ち，$f(x)>0$ のとき $f(x)$ と $f'(x)$ の関係を求めよ。ただし，$f'(0)=a$ とする。

ヒント　このような問題はふしぎとよく出題されます。例えば，早大，富山大など。さて，どうするか。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

オヤ，困ったな!!　そうだ，今までのことから考えて，**$f(0)$ が必要になるハズ** だ。

そこで，$f(x+y)=f(x)f(y)$ において，$y=0$ とおいてみると

$$f(x)=f(x)f(0)$$

ところが $f(x)>0$ という仮定があった。さては，

$$f(0)=1$$

いや，

$$1=f(0)$$

だ。かくて

$$f'(x)=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f(x)f'(0)$$

となるわけだ。ところが，$f'(0)=a$ というのだから

$$f'(x)=af(x)$$

となる。ナルホド，これが求めるものだな。

注　微積を使うと，$f(x)=e^{ax}$ であることがわかるのだが，……

練習 4. x, y のすべての正の値に対して

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

のとき $f(1)$ を求めよ。また，$f'(x)$ の形を求めよ。ただし，$f'(1)=a$ とする。

ヒント　なんだか，無気味な感じがするね。形を求めよ，だって!!

ともあれ，$f(1)$ からいこう。

$f(xy)=f(x)+f(y)$ において $y=1$ とおいてみますと

$$f(x)=f(x)+f(1)$$
$$\therefore\quad f(1)=0$$

早くも第1段階は終わったのだ。次に，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ここで困ってしまうのだな。$f(x+h)$ をどう扱うか，なんです，……。だが，

$$f(x+h)=f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)$$
$$=f(x)+f\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

なんです。だから

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$
$$=f'(1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{a}{x}$$

なるほど，もうできたぜ!!　次はどうだ。

練習 5. $f(x+y)=f(x)+f(y)+3x^2y$ を満足する $f(x)$ を求めよ。ただし，$f'(0)=1$ とする。

ヒント　$y=0$ とおいて $f(0)=0$ であることがわかります。そして

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+3x^2h-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3x^2$$
$$=f'(0)+3x^2=3x^2+1$$
$$\therefore\quad f(x)=x^3+x+C$$

(ところがこれはマチガイ!!　ワカラナカッタラ，検算ダ)

◐ 積分方程式の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆積分方程式というコトバに驚いてはいけません。これほどカンタンなものはないのです。ただし，高校では，だ。

◆ 積分される関数が未知の関数である方程式が **積分方程式** で，入学試験などで出題されるのは，ふつう次のような型の問題です。

さあ，やってみましょう。

■練習 1.　$f(x)=x+4\int_0^1 f(t)dt$

を満足する $f(x)$ を求めよ。

(ヒント) $f(t)$ がどんな関数かわかりませんが，0から1まで積分したものは x を含んでいないハズ。つまり定数です。そこで，これを A とおきます。つまり，

$$A=\int_0^1 f(t)dt \quad \cdots\cdots①$$

そうすると，与えられた式から

$$f(x)=x+4A \quad \cdots\cdots②$$

つまり

$$f(t)=t+4A$$

これを①に代入しますと

$$A=\int_0^1 (t+4A)dt=\left[\frac{t^2}{2}+4At\right]_0^1$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{2}+4A$$

$$\therefore\quad A=-\frac{1}{6}$$

これを②に代入して

$$f(x)=x-\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

べつにめんどうはないでしょう。ではもう1つ，次をやってみませんか。

■練習 2.　$f(x)=x+2\int_0^2 tf(t)dt$

なるとき，$f(x)$ を求めよ。

(解)　$A=\int_0^2 tf(t)dt$

とおくと

$$f(x)=x+2A$$

$$\therefore\quad A=\int_0^2 t(t+2A)dt=\left[\frac{t^3}{3}+At^2\right]_0^2$$

$$\therefore\quad A=\frac{8}{3}+4A$$

$$\therefore\quad 3A=-\frac{8}{3}$$

$$\therefore\quad A=-\frac{8}{9}$$

$$\therefore\quad f(x)=x-\frac{16}{9} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 基解にはほとんど現れませんが，積分の上界または下界に x の入ったものもあります。

■練習 3.　$xf(x)=x^3+\int_0^x f(t)dt$

を満足する $f(x)$ を求めよ。

(ヒント) 大事な公式がありました。それは

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)} \quad \textbf{（}a\textbf{ は定数）}$$

ということです。

さて，与えられた方程式の両辺を x で微分しますと

$$xf'(x)+f(x)=3x^2+f(x)$$

$$\therefore\quad f'(x)=3x$$

$$\therefore\quad f(x)=\int 3xdx=\frac{3}{2}x^2+C$$

ここに C は積分定数です。

ところで，この $f(x)$ が与えられた方程式を満足することは代入してみるとすぐわかります。

答　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+C$

*　*　*

◆ 次には，やや総合的なものを練習してみませんか。

練習 4. $f(x)=x+1$ であるとき

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt=x^4+x^2+26x$$

を満たす x の多項式 $g(x)$ を求めよ。

（東京医歯大）

（解） $f(x)=x+1$ であるから

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt=\int_0^x (x-t+1)g(t)dt$$

$$=x\int_0^x g(t)dt+\int_0^x (-t+1)g(t)dt$$

となるから，与えられた式の両辺を x で微分して

$$\int_0^x g(t)dt+xg(x)+(-x+1)g(x)$$

$$=4x^3+2x+26$$

$$\therefore\quad \int_0^x g(t)dt+g(x)=4x^3+2x+26$$

右辺は 3 次式であるから，左辺も 3 次式で，したがって $g(x)$ は 2 次式でなければならない。そこで

$$g(x)=ax^2+bx+c$$

とおくと，

$$\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)+(ax^2+bx+c)$$

$$=4x^3+2x+26$$

$$\therefore\quad \frac{a}{3}=4,\ \frac{b}{2}+a=0,\ c+b=2,\ c=26$$

$$\therefore\quad a=12,\ b=-24,\ c=26$$

ゆえに，

$$g(x)=12x^2-24x+26\quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 5. 多項式 $f_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を

$$f_0(x)=x^2$$

$$f_n(x)=f_n'(x)+f_{n-1}(x)+\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

で定義するとき，次の問に答えよ。

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ を求めよ。　　（静岡大）

（ヒント） $\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$ が x を含まない数，つまり定数ですから，これを A_{n-1} とおきましょう。つまり，

$$\int_0^1 f_{n-1}(t)dt=A_{n-1}$$

とおくと，与えられた式は

$$f_n(x)=f_n'(x)+f_{n-1}(x)+A_{n-1}\quad\cdots①$$

となります。そこで，$f_n(x)$ が k 次の多項式としますと，左辺は k 次の多項式だから，右辺も k 次の多項式；ところが $f_n'(x)$ は $(k-1)$ 次ですから，$f_{n-1}(x)$ が k 次式でなければなりません。つまり，$f_n(x)$ はすべて k 次の多項式であることがわかります。

さて，上の①で，$n=1$ とおきますと，

$$f_1(x)=f_1'(x)+f_0(x)+A_0$$

$$=f_1'(x)+x^2+\frac{1}{3}$$

ゆえに $f_1(x)$ は 2 次の多項式であること，したがって，$f_n(x)$ が 2 次の多項式でなければならないことがわかります。そこで，

$$f_n(x)=a_nx^2+b_nx+c_n$$

とおきますと，

$f_0(x)=x^2$ より $a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

です。そして，

$$A_{n-1}=\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

$$=\int_0^1 (a_{n-1}t^2+b_{n-1}t+c_{n-1})dt$$

$$=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+c_{n-1}$$

これを①に代入して，両辺の対応項の係数を比べて

$$a_n=a_{n-1}$$

$$b_n=2a_n+b_{n-1}$$

$$c_n=b_n+2c_{n-1}+\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}$$

これから $f_1(x)$，$f_2(x)$ など求められます。

それにしてもずいぶんやりがいのある問題だったなあ。

$\boxed{答}$

$$\begin{cases} f_1(x)=x^2+2x+\dfrac{7}{3},\ f_2(x)=x^2+4x+10 \\ f_n(x)=x^2+2nx+\dfrac{16}{3}(2^n-1)-3n\ (n\geqq 0) \end{cases}$$

ⓘ 道のりの求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆道のりの計算は，基解になじまない。というのもたいてい積分できないからだ。だから，結局簡単なものしか出題されないのです。

◆ ともあれ，具体的な問題からはじめるとしましょう。

練習 1. 1直線上を運動する質点 P があって，P が点 O を出発してから t 秒後における速度を v，O からの距離を s とする。この場合，v は t の1次関数で，$t=0$ のとき $v=-4$，$t=3$ のとき $v=2$ であるものとすると，v と t の関係式はどうなるか。また，s と t の関係式はどうなるか。さらに，s と t の関係を示すグラフをかけ。　（慶大）

（解）　$v=at+b$　（a，b は定数）

とおくと，$t=0$，$v=-4$；$t=3$，$v=2$ を代入して

$$-4=b,\ 2=3a+b$$

$$\therefore\ a=2,\ b=-4$$

$$\therefore\ v=2t-4$$

したがって

$$\frac{ds}{dt}=2t-4$$

これを t で積分すると

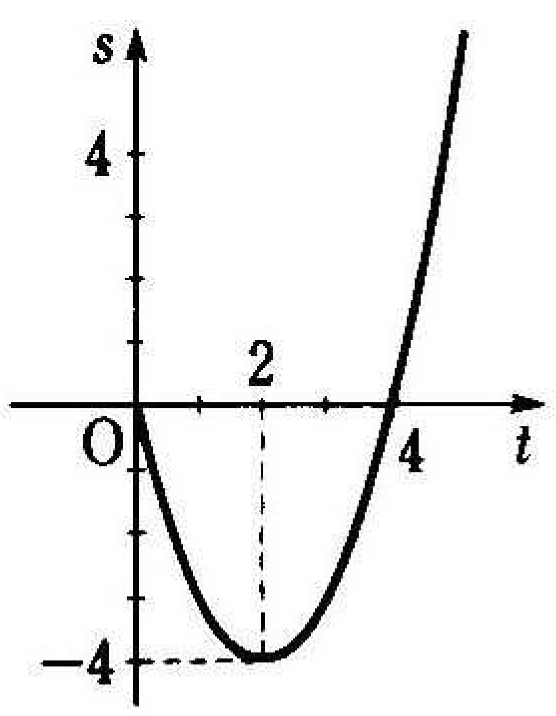
$$s=t^2-4t+c$$

ところが，

$t=0$ のとき $s=0$

$$\therefore\ c=0$$

$$\therefore\ s=t^2-4t$$



s と t の関係を示すグラフは上のようである。

練習 2. 1直線上を運動する点 P が直線上の点 O を通過してから t 秒後の速度が t^2-5t+6 であるとき，次の問に答えよ。

(1)　$t=0$ のとき動いていた向きと反対の向きに点 P が動いている時間は何秒か。

(2)　(1)において，反対向きに動いた距離はいくらか。

(3)　(1)において，反対向きに動いているときの速さが最大となるところから O までの距離を求めよ。　（鹿児島大）

（解）(1)　$v(t)=t^2-5t+6$ とおくと，

$$v(0)=6>0$$

であるから，反対向きに進むときは $v(t)<0$ である。

$$v(t)=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)<0$$

を解いて

$$2<t<3$$

ゆえに，求める時間は出発後2秒後から3秒後までの1秒間である。

(2)　$$-\int_2^3(t^2-5t+6)dt=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{5t^2}{2}+6t\right]_2^3=\frac{1}{6}$$

であるから，求める距離は $\frac{1}{6}$ である。

(3)　$$v(t)=t^2-5t+6=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

であるから，$t=\frac{5}{2}$ のとき反対向きの速さは最大である。ゆえに，求める距離は

$$\int_0^{\frac{5}{2}}(t^2-5t+6)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_0^{\frac{5}{2}}=\frac{55}{12}$$

答 (1) 1秒　(2) $\frac{1}{6}$　(3) $\frac{55}{12}$

（注）こうしてみると，べつにめんどうはありませんね。ところが，ふしぎとみんないやがるのです。どういうわけかな？

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 3. 25m隔てて2地点P，Qがある。いまA，B 2人がそれぞれP，Qに立ち，同時に向かいあって走り出す。走り出してからt秒後のA，Bの速度を，PからQに向かう方向を正の向きとして，それぞれu m/秒，v m/秒とすれば，uは一定で，$v=\frac{3}{4}t^2-3t$ である。このとき，BがQに帰るまでにAがBに出会うかまたは追いつくためには，uが少なくともどれほどの大きさがなければならないか。　（東大）

ヒント　ちょっと読んだだけでは意味がとれないね。しかし，よくみると，べつにめんどうな問題でもないことに気がつくにちがいない。A，Bのt秒後のPからの距離をそれぞれ x_1 m，x_2 m としますと

$$\frac{dx_1}{dt}=u$$

$$\frac{dx_2}{dt}=v=\frac{3}{4}t^2-3t$$

ところが，$t=0$ のとき $x_1=0$，$x_2=25$ だというのですから

$$x_1=ut$$

$$x_2=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25$$

となります。

ところで，上の2つをグラフにかいてみると，2人が接触する条件がわかるハズ。あとは自分でやってみてください。

答　$u=\frac{15}{4}$(m/秒)

*　*　*

◆ 今までは1直線上の単純な運動を扱ってきましたが，次には，落下運動を扱ってみることにしましょう。べつに，めんどうなことはありませんよ。

練習 4. 物体Mを初速度60m/秒で真上に投げるとき，t秒後の速度v m/秒はおよそ $v=-10t+60$ であるという。このとき，次の各問に答えよ。

(1) Mの最高点の高さは何程か。

(2) 投げ上げてから10秒間にMが実際に動いた道のりを求めよ。

(3) 投げ上げてから11秒後のMの高さは何mか。

(4) Mが再び地面に落ちてくるまでの時間は何程か。

(5) 地面に落ちる瞬間の速度を求めよ。

（宮崎大）

答　(1) 180m　(2) 260m　(3) 55m　(4) 12秒　(5) −60m/秒

練習 5. 2つの物体を同じ地点から，ある時間をおいて1つずつ落とすとき，両者は一定の速さで離れていくことを証明せよ。ただし，これらの物体は一定の加速度で落ちるものとする。　（群馬大）

ヒント　まるで，物理の問題みたいで不愉快に感ずる人もありましょう。これは，医・工学部の共通問題だから，もちろん，物理学の初歩は知っていると考えていいのではありませんか。さて：——

加速度をg，初速度を両物体とも0としましょう。最初に落とす物体の出発時刻を時間の原点とし，$t=t_1$ 秒後に第2の物体を落とすとしましょう。

t秒後には

第1の物体の落下距離 s_1 は

$$s_1=\int_0^t gt\,dt=\frac{g}{2}t^2$$

第2の物体の落下距離 s_2 は

$$s_2=\int_0^{t-t_1} gt\,dt=\frac{g}{2}(t-t_1)^2$$

そして，$s_1-s_2=gt_1t-\frac{gt_1^2}{2}$，つまり，1秒について gt_1 ずつ離れていく。

○物理への応用(1)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

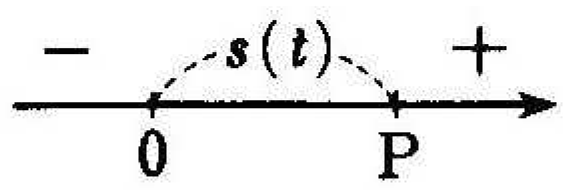
◆基解の物理学への応用は特にとりあげておく必要があろう。というのも，基解の中に物理的応用が侵入しつつあるからだ。

◆ 基解の範囲で物理学に応用されている筆頭はなんといっても微積分ですが，空間座標はもちろん，ベクトルでも，行列でも大きな分野を占めています。ベクトル解析などは物理学のために発展した，といってもいいすぎではありません。行列力学といった分野もあるのです。しかし，ここでは，もっとも応用範囲の広い微積分に重点をおいて考えてみることにしましょう。

＊　＊　＊

◆ **直線運動の速度**　動点Pの定点Oからの距離 s が時間 t の関数 $s(t)$ で表されるとき

速度 $v=\dfrac{ds}{dt}$



で与えられます。$v>0$ ならば，正の方向へ，$v<0$ ならば負の方向へ，動いていることを示しています。では，次をやってみませんか。

7/17

練習1. 動き始めてから t 秒間に $(3t^2+2t)$ cm 動く物体がある。この物体の初速度は毎秒何 cm か。また，動き始めてから5秒間の平均の速さは毎秒何 cm であるか。

（三重大）

(解)　$f(t)=3t^2+2t$

とおくと，t 秒後の速度 v cm/s は

$$v=f'(t)=6t+2$$

で与えられる。ゆえに，初速度は

$$f'(0)=2 \ \text{(cm/s)}$$

また，$f(5)=3\times5^2+2\times5=85$ で，これだけ進むのに5秒かかるから，平均の速さは

$$\frac{85}{5}=17 \ \text{(cm/s)}$$

である。　　答 2 cm/s，17 cm/s

7/10

練習2. 直線道路を走っている自動車がある。ブレーキをかけてから t 秒間に進む距離を s m とすると $s=27t-0.54t^2$ で与えられるという。この自動車はブレーキをかけてから，何秒後に停止するか。また，その間に何m進むか。

(解)　$s=27t-0.54t^2$

であるから，速度を v とすると

$$v=\frac{ds}{dt}=27-1.08t$$

で，停止するのは $v=0$ のときであるから，

$27-1.08t=0$　　$\therefore$　$t=25$（秒）

ゆえに，25秒後に停止する。その間に進む距離は

$27\times25-0.54\times25^2=337.5$ (m)

である。

答 25秒，337.5 m

＊　＊　＊

◆ **直線運動の加速度**　動点Pの速度 v が時間 t の関数 $v(t)$ で表されているとき

加速度　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}$

で与えられます。$\alpha>0$ ならば加速していることを表し，$\alpha<0$ ならば減速していることを表しています。

7/17 では，次をやってみませんか。

練習3. x 軸上を動いている点Pの，t 秒後の原点からの距離 s が $s=t^3-3t^2$ で表されているとき，$t=1, 2, 3$ における加速度を求めよ。

(解)　速度を v とすると

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-6t$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{dv}{dt}=6t-6$$

$$\therefore\quad \alpha_{t=1}=0,\ \alpha_{t=2}=6,\ \alpha_{t=3}=12$$

答　0, 6, 12

*　*　*

◆ **速度と位置**　数直線上を動く点Pがあって，時刻 t における座標が x，速度が $v(t)$ で与えられるとき，$t=a$ から $t=b$ $(a<b)$ までの間に進む距離 s は

$$s=\int_a^b v(t)dt$$

で与えられます。

練習 4. x 軸を動く点Pの速度 v が

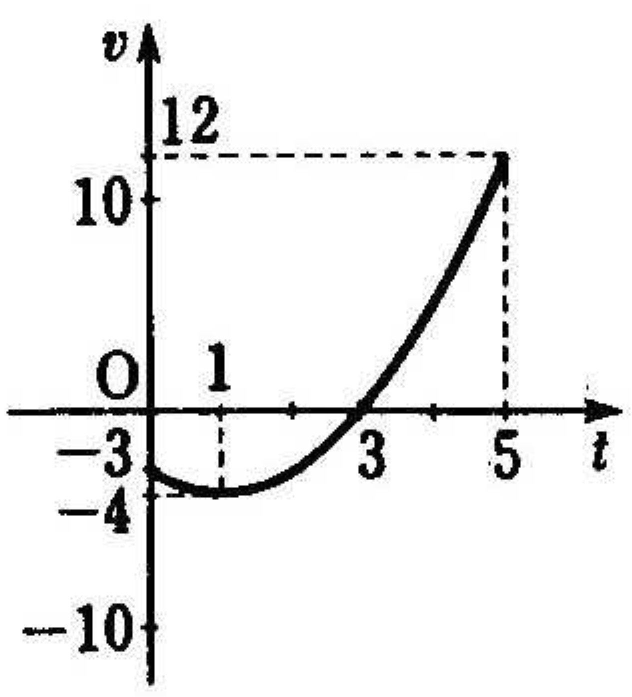
$$v=t^2-2t-3$$

で与えられ，$t=0$ において原点にあったとすると $t=0\sim5$ における移動距離を求めよ。

ヒント　$v=t^2-2t-3$ のグラフは右のような放物線ですから

$0\leqq t\leqq3$ において $v\leqq0$

$3\leqq t\leqq5$ において $v\geqq0$



です。つまり，はじめ左に進み3秒後から右に進むのです。だから距離は $\int_0^5 v(t)dt$ ではいけません。求める移動距離を s として，

$$s=\int_0^5|v(t)|dt$$

$$=\int_0^3(-t^2+2t+3)dt+\int_3^5(t^2-2t-3)dt$$

となります。したがって，……

答　$\dfrac{59}{3}$

*　*　*

◆ **時間的に変化する量の時間変化**　ある量 Q が時間 t の関数 $Q(t)$ で与えられるとき，

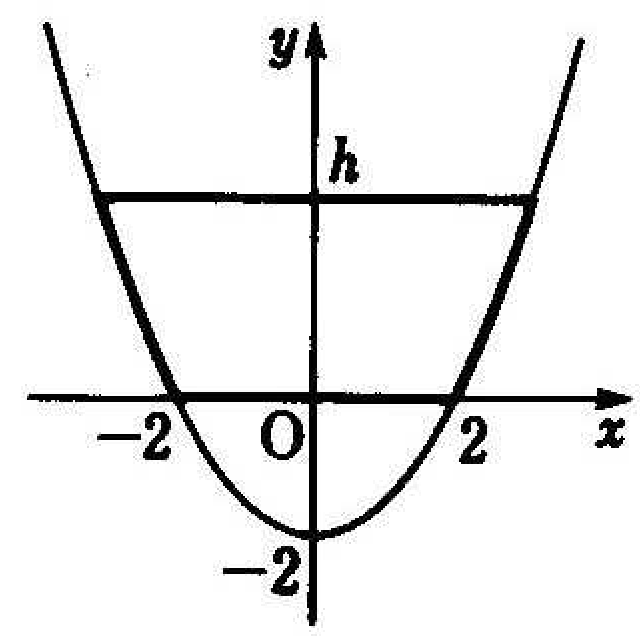
$$\frac{dQ}{dt}$$

を Q の変化する **速さ** ということがあります。水面の上昇する速さ，体積の増加する速さ，といったぐあい。

では，これをやってみませんか。

練習 5. 曲線 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ $(y\geqq0)$ が y 軸を軸として回転してできる曲面を側面とし，x 軸 $(y=0)$ を軸として回転してできる平面を底面とする容器がある。この容器に毎秒1の割合で水を入れるとき，入れ始めから t 秒後の水面の上昇する速度を求めよ。　（名古屋市大）

ヒント　水の深さ h のときの容積を V としますと



$$V=\int_0^h \pi x^2dy$$

$$=\pi\int_0^h(2y+4)dy$$

$$=\pi\Big[\,y^2+4y\,\Big]_0^h=\pi(h^2+4h)$$

ですから，t 秒後の水の深さが h なら

$$\pi(h^2+4h)=1\cdot t \qquad \cdots\cdots①$$

両辺を h で微分して

$$\pi(2h+4)=\frac{dt}{dh}$$

$$\therefore\quad \frac{dh}{dt}=\frac{1}{\pi(2h+4)}$$

ところが，①から

$$h=-2+\sqrt{4+\frac{t}{\pi}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

ですから

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{4\pi^2+\pi t}} \qquad \cdots\cdots 答$$

となります。

注　(*) の h を求めるときに①を解の公式を使って解くと2つの解が得られますが，ひとつは負で，もうひとつは正です。もちろん，正のほうを採用したのです。

ここでは，速度，加速度に関係したものをあげましたが，ほかのものについては次ページの「物理への応用(2)」でやってみましょう。

物理への応用(2)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数学は自然を記述する言葉である。これはデカルトのそれであるが，なんという含蓄の深い提言であろうか!!

◆ 物理への応用(1)（☞ p.268）では主として，速度，加速度についての応用について練習しましたが，このセクションでは，そのほかのものについて考えてみましょう。

*　*　*

◆ **確率の計算**　物理学における確率現象は数多くあります。例えば，これです。

■練習 1. ある地点で1日のうちに雨が降る確率は，前日に雨が降った場合は p，降らなかった場合は $1-p$ であるという。この地点で，雨が降らなかった日に続く3日間のうち，1日だけ雨が降る確率を Q とする。Q の最大値を求めよ。　（大阪市大）

ヒント　ハレを○，アメを●で表すことにしますと，1日だけ雨が降るのは

○○○● の確率　$pp(1-p)$
○○●○ の確率　$p(1-p)(1-p)$
○●○○ の確率　$(1-p)(1-p)p$

ですから，

$$Q=p^2(1-p)+p(1-p)^2+p(1-p)^2$$
$$=p^3-3p^2+2p$$
$$\therefore\ \frac{dQ}{dp}=3p^2-6p+2$$
$$=3\left(p-\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(p-\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$$

となり，したがって，$p=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ をとることがわかります。

■練習 2. ある町で，雨の降った日の翌日また雨の降る確率は 0.2，雨の降らなかった日の翌日また雨が降らない確率は0.6である。ある日に雨が降っているとし，n 日後の日に雨が降る確率を r_n，雨が降らない確率を f_n ($n=1, 2, \cdots\cdots$) とする。r_{n+1}，f_{n+1} と r_n，f_n の関係を行列を用いて表せ。

ヒント
$$\begin{cases} r_2=\dfrac{1}{5}r_1+\dfrac{2}{5}f_1 \\ f_2=\dfrac{4}{5}r_1+\dfrac{3}{5}f_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_3=\dfrac{1}{5}r_2+\dfrac{2}{5}f_2 \\ f_3=\dfrac{4}{5}r_2+\dfrac{3}{5}f_2 \end{cases}$$

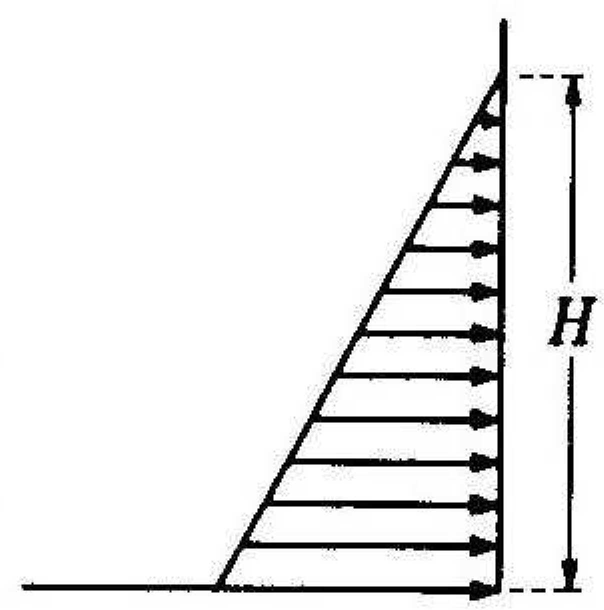
などが成り立つのですから，一般に

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

なる関係があります。

*　*　*

◆ **水圧の計算**　例えば右の図に示すように，ダムに水を入れ，側壁にかかる圧力を考えてみますと，水の深さ H として，水面から y の深さのところの圧力は，水の密度を ρ，重力加速度を g として，単位幅に対して



$$\rho g y$$

で与えられます。したがって，側壁に加わる全圧力は，単位幅に対して

$$\int_0^H \rho g y\,dy=\rho g\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H$$
$$=\frac{1}{2}\rho g H^2$$

となりましょう。

では，具体的な練習をやってみませんか。

練習 3. ダムの側壁にかかる全圧力は，ちょうど，真中の深さにおける圧力に側壁の面積を掛けたものに等しいことを示せ。

ヒント　単位幅の側壁で考えれば十分。そして上の $\frac{\rho}{2}gH=\rho g\left(\frac{H}{2}\right)$ から明らかでしょう。

練習 4. 液体の表面から h cm の深さにおける圧力は，その液体の比重を w とすれば 1 cm² 当たり hw g である。1辺 a cm の正方形の底面をもつ直方体の水槽を水平におき，6 cm の深さまで水を入れたとき，水槽の1つの側面にかかる全圧力はいくらか。　　（姫路工大）

ヒント　$P=\int_0^6 whadh=wa\int_0^6 hdh$

$$=wa\left[\frac{h^2}{2}\right]_0^6=18wa \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 基解の物理学への応用はまだまだいろいろあります。その主なものをあげておきます。ムリにやることはありません。

◉流水量　時刻 t における水流の速さが $v(t)$ で，水流の断面積が A のとき，$t=a$ から $t=b$ まで流れた水の量は $\int_a^b Av(t)dt$ です。例えば：——

練習 5. 断面積 2 cm² の水管から流出する水の速さ v は時間 t の関数で $v=kt$（k は定数）なる関係がある。水を出し始めてから10秒間に流出する水量が 300 (cm³) ならば，k はいくらか。　　答　3

◉仕事量　力と動いた距離の積を仕事といいますが，その力 F が一定で，距離が s なら，もちろん Fs で与えられます。しかし，F が s の関数なら積分で与えられます。すなわち，基点からの距離を x，力が $f(x)$ で与えられていれば $x=a$ から $x=b$ までの仕事は $\int_a^b f(x)dx$ で与えられます。例えば，ばねを自然の長さから x (m) だけ伸ばすに必要な仕事は，十分短い長さ Δx (m) ずつ伸ばすときの仕事の和として求められます。

練習 6. ばね定数 k (N/m) のつる巻きばねの一端を固定し，自然の長さから x (m) だけ伸ばすときの仕事量を求めよ。

答　$\frac{1}{2}kx^2(J)$

◉力積　力とそれが働いた時間との積を力積といいます。その力 F が一定で，働いた時間が t なら，もちろん Ft で与えられます。しかし，F が時間 t の関数なら，$t=a$ から $t=b$ までの力積は $\int_a^b Fdt$ で与えられます。

◉電気量　時刻 t における電流の強さが $i(t)$ であれば，$t=a$ から $t=b$ までに流れた電気量は $\int_a^b i(t)dt$ で与えられます。

練習 7. 電流の強さ i が時間の関数 $i=t+t^2$ で与えられるとき，$t=0$ から $t=5$ までに流れた電気量を求めよ。

答　$\frac{325}{6}$ (C)

＊　＊　＊

◆ これらのほか，重心を求めたり，静電エネルギーを求めたり，いろいろなところに微積分が入ってきます。しかし，物理学の問題だからここでは，立入らないことにします。では，最後に1つ：——

練習 8. 一定の角速度 $\frac{\pi}{4}$ ラジアン/秒 で回転している円板にブレーキをかけて，角速度を $\frac{\pi}{96}$ ラジアン/秒 ずつ減少させると，この円板はブレーキをかけてから何回転して静止するか。　　（芝浦工大）

ヒント　$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{96}t=0 \qquad \therefore \quad t=24$

回転数を n とすると

$$2\pi n=\int_0^{24}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{96}t\right)dt$$

よって，……　　答　1.5 回転

ベクトル・行列と微積分の蛇足

◆ベクトルの微積分学もあります。しかし，入試に出るのはそんな大ゲサなものではありません。おそるべからず。

◆ ベクトルと微積分のかかわりあった問題を眺めてみることにしましょう。

■練習 1. $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$ のとき

$|\vec{x}|^2$ を t で微分せよ。

ヒント $|\vec{x}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$

$$=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+|\vec{b}|^2t^2$$

$$\therefore\ \frac{d|\vec{x}|^2}{dt}=2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2|\vec{b}|^2t$$

$$=2\{|\vec{b}|^2t+(\vec{a}\cdot\vec{b})\}$$ ……答

■練習 2. $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$ のとき

$\int_0^1|\vec{x}|^2dt$ を求めよ。

ヒント $\int_0^1|\vec{x}|^2dt$

$$=\int_0^1\{|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+|\vec{b}|^2t^2\}dt$$

$$=\left[|\vec{a}|^2t+(\vec{a}\cdot\vec{b})t^2+\frac{|\vec{b}|^2}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=|\vec{a}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})+\frac{1}{3}|\vec{b}|^2$$ ……答

■練習 3. 円 $x^2+y^2=1$ を1次変換 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ で変換した図形の囲む面積を求めよ。

ヒント

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=\frac{-3x'+2y'}{5},\ y=\frac{4x'-y'}{5}$$

したがって円 $x^2+y^2=1$ の像は

$$(-3x'+2y')^2+(4x'-y')^2=5^2$$

$$25x'^2-20x'y'+5y'^2=25$$

ここで $'$（ダッシュ）をとり去って像の方程式は次のようになります。

$$5x^2-4xy+y^2=5$$

さて，この囲む面積はどうか？

y について整理しますと

$$y^2-4xy+(5x^2-5)=0$$

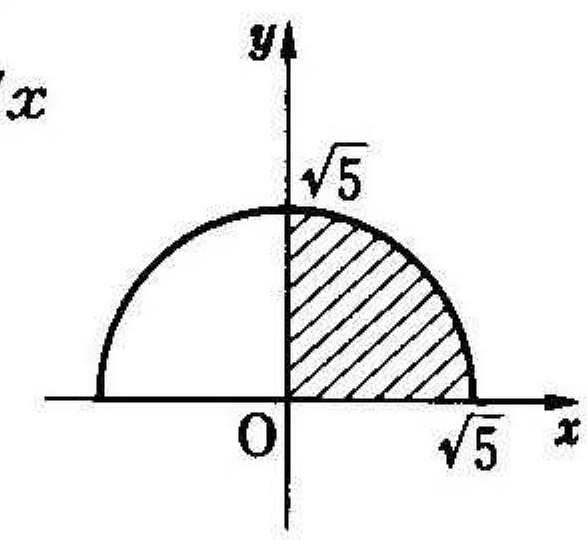
$$y=2x\pm\sqrt{5-x^2}$$

そこで求める面積は

$$S=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\{(2x+\sqrt{5-x^2})-(2x-\sqrt{5-x^2})\}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}2\sqrt{5-x^2}dx$$

$$=4\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{5-x^2}dx$$



ところが $\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{5-x^2}dx$ は半径 $\sqrt{5}$ の円の面積の $\frac{1}{4}$ ですから $\frac{1}{4}(\pi\sqrt{5}^2)=\frac{5}{4}\pi$ に等しいのです。かくて

$$S=4\cdot\frac{5}{4}\pi=5\pi$$

答　5π

*　*　*

◆ こんな分野はいろいろと発展の余地があるでしょう。これがやがていろいろとおもしろい分野を開拓するでしょう。では最後にひとつ：——

■練習 4. $\lim_{t\to 0}\frac{|\vec{x}+t\vec{a}|-|\vec{x}|}{t}$ を求めよ。

ヒント $t\to 0$ のとき 分子$\to 0$ となりますから

$$\lim_{t\to 0}\frac{|\vec{x}+t\vec{a}|^2-|\vec{x}|^2}{t(|\vec{x}+t\vec{a}|+|\vec{x}|)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\vec{x}+t\vec{a})\cdot(\vec{x}+t\vec{a})-\vec{x}\cdot\vec{x}}{t(|\vec{x}+t\vec{a}|+|\vec{x}|)}=\cdots\cdots$$