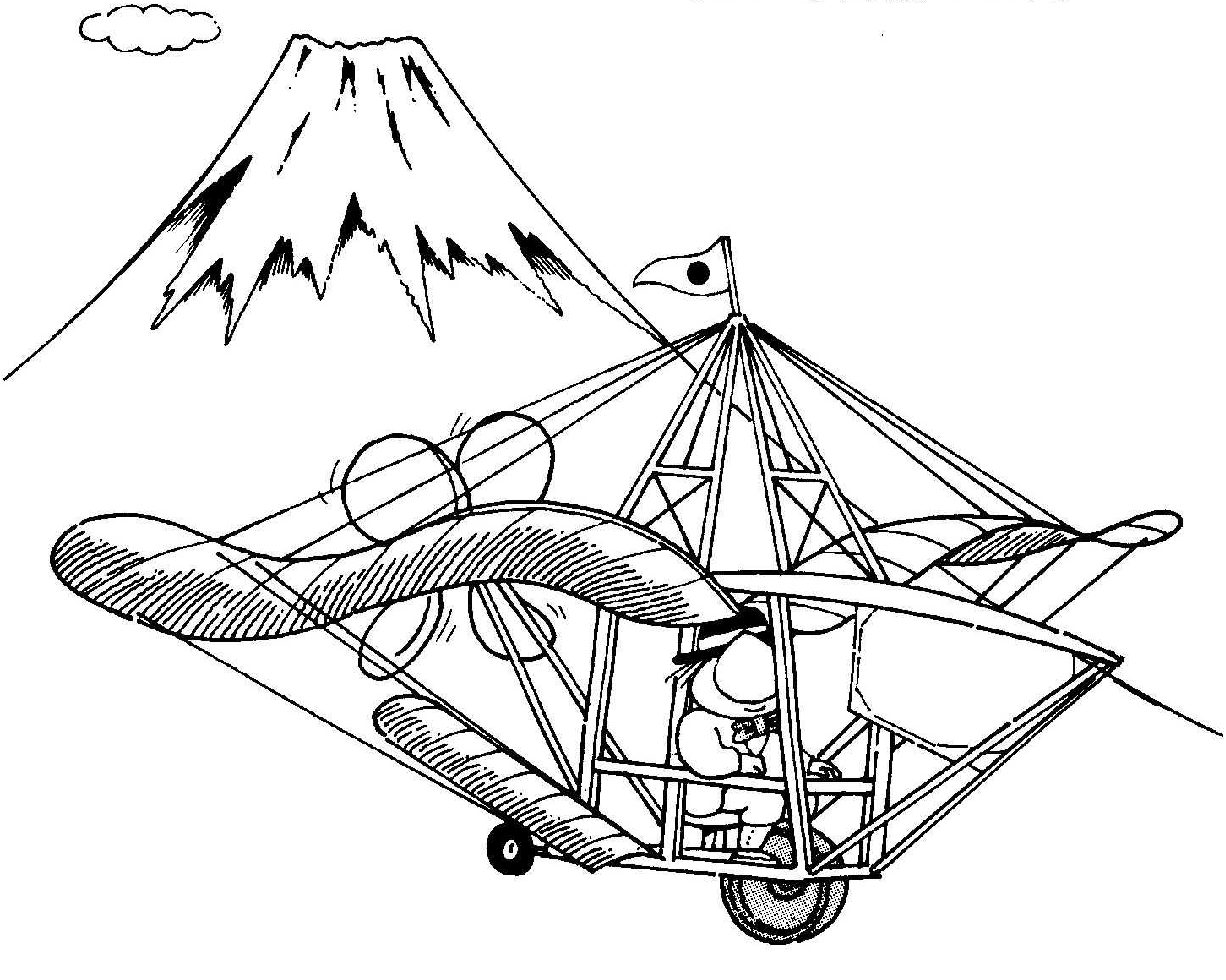
第4章

微分法

§1. 微分係数と導関数

§2. 導関数の応用



○極限とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆極限というのは考えてみれば不思議なもの。0に近いものを0に近いもので割って，その値がどうなろうと知ったことか!?

◆ 極限がわかるためには，何か，というよりも，**いかにするか**，というふうに考えるほうがいいのです。ですから，ここでも，すぐ具体的なものについて説明することにしましょう。

練習 1. $\lim_{x\to1}(4x^2+3x+2)$ を求めよ。

(ヒント) $\lim_{x\to1}$ という記号は「**xが限りなく1に近づくとき**」ということを意味しています。x が限りなく1に近づけば，x^2 は1に，したがって $4x^2$ は4に近づくでしょう。$3x$ なら3に近づく。そして，$4x^2+3x+2$ は9に近づくハズ。このことを

$$\lim_{x\to1}(4x^2+3x+2)=9$$

と書くのです。

(答) 9

練習 2. $\lim_{x\to1}\dfrac{2x^2+4}{x+2}$ を求めよ。

(解)
$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+4}{x+2}=\frac{6}{3}=2$$

(答) 2

上の練習1.，練習2.では

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

でもっとも簡単な場合です。そこで，次は第2段階です。

練習 3. $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ を求めよ。

(ヒント) xが限りなく1に近づくと分母は0に近づきます。しかも，プラスのまま0に近づくのです。ところが分子は2に近づく。

$$\frac{2}{0.1}=20,\ \frac{2}{0.01}=200,\ \frac{2}{0.001}=2000$$

からわかるように，分母が0に近づくにつれこの分数の値はいくらでも大きくなるでしょう。そのことを

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=+\infty$$

と書くのです。これは $+\infty$ という値があるという意味ではなく，

「限りなく大きくなる」

ということを表す記号なのです。なお，この＋は省略してもかまいません。

(答) $+\infty$

練習 4. $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-5}{(x-1)^2}$ を求めよ。

(ヒント) xが1に限りなく近づくと，分母は $+0$ に近づきます（$+0$ というのは，プラスのまま0に近づくという意味です）。ところが分子は -4 に近づく。

$$\frac{-4}{0.1}=-40,\ \frac{-4}{0.01}=-400,\ \cdots\cdots$$

というわけで，絶対値は限りなく大きくなりますが，符号は負です。このことを $-\infty$ と書きます。つまり

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5}{(x-1)^2}=-\infty$$

です。

練習 5. $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ を求めよ。

(ヒント) xが1より大きいほうから近づくか1より小さいほうから近づかによって $+\infty$ にも，$-\infty$ にもなりましょう。このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-1}=\pm\infty$$

と書きます。ていねいに書けば

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2+x+1}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+x+1}{x-1}=-\infty$$

となります。ここで $x\to1+0$ というのは 1 **より大きいほうから 1 に近づく** ということ，$x\to1-0$ は 1 より小さいほうから 1 に近づく，ということなのです。

*　*　*

◆ さて，次が第 3 段階です。

5/5

■練習 6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ を求めよ。

(ヒント) x が 1 に限りなく近づくと，分母も分子も 0 に近づきます。つまり

$$\frac{0}{0}$$

の形。このようなとき **不定形**（ふていけい）といいます。ただし，不定形といわれるものはこれだけではありませんよ。念のため!!

さて，不定形のときには分母，分子を因数分解できます。x が 1 に近づくだけで，1 になるわけではありませんから $x\neq1$ です。そこで，これで分母・分子を割ることもできます。つまり，こんなぐあい。

(解) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$ 答 $\frac{3}{2}$

4/5

■練習 7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$ を求めよ。

(解) 1. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)(\sqrt{x}+1)$$
$$=3\cdot2=6$$ …… 答

(解) 2. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{\sqrt{x}-1}$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)(\sqrt{x}+1)$$
$$=6$$ …… 答

x が有限な値に近づくときの大切なことはこれで終わりです。

*　*　*

◆ 次は，x が無限に大きくなるときです。

4/5

■練習 8. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+1}{3x^2+x+2}$ を求めよ。

(ヒント) 分母も，分子も $+\infty$，つまり

$$\frac{\infty}{\infty}$$

このような形のものも **不定形** といいます。

さて，このときには分母の次数の **もっとも大きいもの** x^2 で分母・分子を割るのがコツです。つまり，

$$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

ところが $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ などが成り立つ。だから，結局，極限値は $\frac{4}{3}$ ということになります。

4/5

■練習 9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x-1}{2x^2-x+5}$ を求めよ。

(解) $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{6}{2}=3$$

答 3

5/5

■練習 10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+x+2}$ を求めよ。

(解) $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

答 0

4/5

■練習 11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+5}{x+2}$ を求めよ。

(解) $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3+\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}}=+\infty$$

答 $+\infty$

これで基本的なことは全部終わりです。

極限の求め方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆警官が泥棒を追かける，つかまえようとしたとき，泥棒が消えうせる。これが極限だといったのは，たしか，ラッセルだった。

◆ 極限とは何か，ということについては(☞ p.176) を参照してください。ここでは，ややめんどうな問題を扱ってみましょう。

練習 1. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ を求めよ。 (阪大)

ヒント 無理関数の入っている不定形ですから，**有理化する**のがコツ。$\sqrt{x}-1$ を有理化するには $\sqrt{x}+1$ を掛けてやればよいのですが，$\sqrt[3]{x}-1$ についても $\sqrt[3]{x}+1$ を掛ける人がはなはだ多いのです。これはいけません。

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

を使って

$$(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=x-1$$

とするのです。

解 与式

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2}{3}$$

答 $\dfrac{2}{3}$

練習 2. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ のとき

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ の値を求めよ。

(東京電機大)

ヒント $f(1+h)-f(1-h)$

$$=\left\{(1+h)^2-\frac{1}{1+h}\right\}-\left\{(1-h)^2-\frac{1}{1-h}\right\}$$

$$=4h+\frac{2h}{1-h^2}$$

$$\therefore\quad 与式=\lim_{h\to0}\left(4+\frac{2}{1-h^2}\right)=6$$

* * *

◆ 極限を求めるのに，**導関数や微分係数の定義** を使うと簡単にできるものがあります。

つまり

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

などです。

では，次をやってみませんか。

練習 3. 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$$

を a，$f(a)$ および $f'(a)$ で表せ。

(山口大)

ヒント 分子から強引に $f(x)-f(a)$ を作り出すのがコツです。つまり

$$af(x)-xf(a)$$
$$=a\{f(x)-f(a)\}-f(a)(x-a)$$

と変形できますから，

$$与式=\lim_{x\to a}\left\{a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\right\}$$
$$=af'(a)-f(a)$$

答 $af'(a)-f(a)$

となるでしょう。

もう1つ：——

練習 4. $f'(a)$ が存在するとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(x)-af(a)}{x-a}$$

(解)

$$与式=\lim_{x\to a}\frac{x\{f(x)-f(a)\}+f(a)(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{x\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\right\}$$

$$=af'(a)+f(a)$$ ……答

これらは，いずれも，上の3つのうち，第3の公式を使ったのですが，次は，第1，第2番目のものにしましょうか。

5/5

■練習5. $f(x)$ はいたるところ微分可能とするとするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}$$

(ヒント) $\lim_{h\to0}\frac{f(x+\square)-f(x)}{\square}$ の形の式であって $h\longrightarrow0$ のとき $\square$ の中に同じものがあって，しかも0に近づくとき，これは $f'(x)$ に等しいのです。ところが，この問題では $4h$ と h でちがっている。だから：——

(解) $$与式=\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{4h}\cdot4$$

$$=4f'(x)$$

5/5

答 $4f'(x)$

■練習6. $f(x)$ は $x=c$ で微分可能とする。

$\lim_{h\to0}\frac{f(c+h^2)-f(c)}{h}$ を求めよ。 (法政大)

(解) $$与式=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h^2)-f(c)}{h^2}\cdot h$$

$$=\lim_{h\to0}f'(c)\cdot h=0$$

答 0

さあ，これはどうですか。

5/5

■練習7. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき次の極限値を求めよ。ただし，p，q は定数。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+ph)-f(a+qh)}{h}$$ (大阪府大)

(解) 与式

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a+ph)-f(a)\}-\{f(a+qh)-f(a)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+ph)-f(a)}{ph}\cdot p-\frac{f(a+qh)-f(a)}{qh}\cdot q\right\}$$

$$=pf'(a)-qf'(a)=(p-q)f'(a)$$

* * *

◆ 次に，意地の悪い問題をやってみませんか。ムリにやるほどのこともありませんが。

5/5

■練習8. $\lim_{x\to1}\frac{x^2+bx+a}{x^2+ax+b}$ を求めよ。

(ヒント) $x\longrightarrow1$ のとき

分母$\longrightarrow1+a+b$，分子$\longrightarrow1+b+a$

ですが，これから，すぐ1だなどといってはいけません。なぜなら0になっては困るからです。

$1+a+b\neq0$ のとき：

与式$=1$

$1+a+b=0$ のとき：

$$与式=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x-b)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{x-b}=\begin{cases}b\neq1\text{ のとき：}\dfrac{1-a}{1-b}\\ b=1\text{ のとき：}\left(\begin{array}{l}a=-2:\\ \pm\infty\end{array}\right.\end{cases}$$

結局，

$$\begin{cases}a+b+1\neq0\text{ のとき} & 1\\ b\neq1,\ a+b+1=0\text{ のとき} & \dfrac{1-a}{1-b}\\ a=-2,\ b=1\text{ のとき} & \pm\infty\end{cases}$$

同じことですが，次のように書いたほうが少し，スマートというものでしょうか。

答 $$\begin{cases}a+b\neq-1\text{ のとき} & 1\\ b=-(a+1)\neq1\text{ のとき} & \dfrac{1-a}{1-b}\\ a=-2,\ b=1\text{ のとき} & \pm\infty\end{cases}$$

* * *

◆ 極限を求める問題にはこのほかに定義にしたがって微分せよ，などというのはすべて入りますし，また，定積分を使って極限を求めるもの，$x\longrightarrow\infty$ のとき，などいろいろありますが，それは，それらの項目を参照してください。

極限の与えられた場合の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆本質的に極限を求める問題にすぎないが，実際にはかなりめんどうになることがあります。本気でやってくださいヨ。

◆ ここでは，極限値が与えられているとき，または極限値に条件がつけられているとき，もとの関数を求めるのが目的です。

では，さっそく次をやってみませんか。

4/5

練習 1. $\lim_{x\to0}\frac{x+a}{x^2+1}=3$ のとき a の値を求めよ。

ヒント 極限値を求めよ，という問題だと思ってやるのがいい。つまり，

$$\lim_{x\to0}\frac{x+a}{x^2+1}=\frac{0+a}{0^2+1}=a$$

$\therefore\quad a=3$ ……答

5/5

練習 2. $\lim_{x\to1}\frac{ax-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$ のとき，a の値を求めよ。

ヒント $\lim_{x\to1}\frac{ax-1}{x^2-1}$ において分母 $\longrightarrow0$，分子 $\longrightarrow a-1$ となりますから $a\neq1$ でなければ $\longrightarrow\pm\infty$ へ，$a=1$ のときは $\frac{0}{0}$ の形，いわゆる不定形になって，その極限が求められる，それが $\frac{1}{2}$ になれば，こういうわけです。答案は次のように書くといいでしょう。

解 $$\lim_{x\to1}\frac{ax-1}{x^2-1}=\begin{cases}a\neq1:\pm\infty\\ a=1:\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\\ \qquad=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ゆえに，求める a の値は1である。

答 1

注 上の解で＝が2つ書いてありますが，これがないと，どちらに続いているかわからない。そこで，こんな書き方をすることもあるのです。

* * *

◆ では，ややめんどうなものにいきましょう。

4/5

練習 3. $\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=1$ となるように定数 a，b を求めよ。 （福島大）

解 $$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}$$
$$=\begin{cases}1+a+b\neq0:\pm\infty\\ 1+a+b=0:\lim_{x\to1}\frac{(x-1)P(x)}{x-1}\end{cases}$$

ここに $P(x)=x^2+x+(a+1)$

$$与式=\lim_{x\to1}\{x^2+x+(a+1)\}$$
$$=a+3=1$$

$\therefore\quad a=-2\qquad\therefore\quad b=1$

答 $a=-2$，$b=1$

5/5

練習 4. $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x^2+2x+8}+b}{x-2}=\frac{3}{4}$ のとき a，b の値を求めよ。 （青山学院大）

解 $4a+b\neq0$ ならば $x\longrightarrow2$ のとき分母のみ0となるから有限な極限値をもたない。ゆえに，$4a+b=0$ であることが必要である。そして，このとき，

$$原式=a\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+2x+8}-4}{x-2}$$
$$=a\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(\sqrt{x^2+2x+8}+4)}$$
$$=a\lim_{x\to2}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x+8}+4}$$
$$=\frac{3}{4}a=\frac{3}{4}$$

$\therefore\quad a=1,\ b=-4$ ……答

* * *

◆ さあ，次はどうですか。

練習 5. 次の2式が同時に成立するように，a, b, c, d を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-3x+2}=2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-3x+2}=3$$

（大阪電通大）

（ヒント）$x\longrightarrow1$ のとき $x^2-3x+2\longrightarrow0$ であるから，

$$a+b+c+d=0 \quad\cdots\cdots①$$

が必要である。このとき

第1式

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{ax^2+(a+b)x+(a+b+c)\}}{(x-1)(x-2)} \quad\cdots\cdots(*)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{ax^2+(a+b)x+(a+b+c)}{x-2}$$

$$=-(3a+2b+c)=2$$

$$\therefore\quad 3a+2b+c=-2 \quad\cdots\cdots②$$

同様にして，第2式から

$$8a+4b+2c+d=0 \quad\cdots\cdots③$$

$$12a+4b+c=3 \quad\cdots\cdots④$$

①，②，③，④を解いて

$$a=1,\ b=-2,\ c=-1,\ d=2$$

（注）なお，上の(*)のところで分子の因数分解で悩む人が多いもの。しかし，組立除法でやるのがもっともラク。つまり，

$\underline{1}$	a	b	c	d
		a	$a+b$	$a+b+c$
	a	$a+b$	$a+b+c$	$a+b+c+d$

からすぐ出るのです。

＊　＊　＊

◆ もう一段難しいのをやって終わりとしましょう。

練習 6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=10$, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-4$, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=26$ となるような多項式 $f(x)$ のうち，次数が最低のものを求めよ。

（福島大）

（ヒント）$x\longrightarrow0$, $x\longrightarrow1$, $x\longrightarrow2$ のとき，この3式の極限が有限な値をとるのですから，分子の $f(x)$ も 0 に近づかなければならないハズ。

$$\therefore\quad f(0)=0,\ f(1)=0,\ f(2)=0$$

このことは $f(x)$ が $x(x-1)(x-2)$ なる因数をもつことを示しています。だから，

$$f(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)$$

とおくことができます。ところで，これを代入してやると，条件式が3つ出てきます。3つの条件で定まる最低次の多項式 $Q(x)$ というのはおそらく ax^2+bx+c にちがいない。そこで，次のように解答を書けばいいでしょう。

（解）$f(x)$ は3つの条件で定まらなければならないから，与えられた条件から

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)$$

とおくことができる。

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\{(x-1)(x-2)\times(ax^2+bx+c)\}$$

$$=2c=10$$

$$\therefore\quad c=5 \quad\cdots\cdots①$$

次に，

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(x-2)(ax^2+bx+c)$$

$$=-(a+b+c)=-4$$

$$\therefore\quad a+b=-1 \quad\cdots\cdots②$$

次に，

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}x(x-1)(ax^2+bx+c)$$

$$=2(4a+2b+c)=26$$

$$\therefore\quad 2a+b=4 \quad\cdots\cdots③$$

①，②，③より

$$a=5,\ b=-6,\ c=5$$

よって，求める多項式 $f(x)$ は

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(5x^2-6x+5)$$

……答

（注）①，②，③の方程式が不定になると一般に $a=0$ にして次数を下げることができます。ともあれ，このように最低次という条件がつくと，急にめんどうに感じるもの。

無限大とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈無限とは何か，これはギリシア以来の大問題です。ギリシアでは，まだ数えられたことがない数，という意味でした。

◆ 無限大とは何か，ここでは，そのような高級な問題を扱うわけではありません。基解に現れる無限大は，主として極限の問題ですから，それをまずとりあげてみることにしましょう。

5/6

■練習 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-4}{x^2+x+1}$ を求めよ。

(ヒント) $\lim\limits_{x\to\infty}$ とは，x が限りなく大きくなるとき $\dfrac{3x^2-x-4}{x^2+x+1}$ がどんな値に近づくか，ということなんです。そして，それを求めるには分母の次数のもっとも大きいもので，分母・分子を割ってみるのがコツ。つまり，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-4}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

ところが x が限りなく大きくなれば $\dfrac{1}{x}$ や $\dfrac{1}{x^2}$ は0に近づくでしょう。だから

$$与式=\frac{3-0-0}{1+0+0}=3$$

5/6

■練習 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+a}{x^2+3x+1}$ を求めよ。

(解) $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{a}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

答 2

* * *

◆ こんなのもあります。

5/6

■練習 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1})$ を求めよ。

(ヒント) $\infty-\infty$ では困ります。このようなときには，分子を有理化してみるとよいでしょう。つまり，こうです。

(解) $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+4)-(3x+1)}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+1}}$$

答 0

次はめんどうですよ。

5/6

■練習 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax+2)\}$ を求めよ。

(解) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax+2)\}$

$a\leqq 0$ のときは明らかに $+\infty$

$a>0$ のときには

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+x+1}-(ax+2)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)-(ax+2)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(1-4a)x-3}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x+(1-4a)-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{2}{x}}$$

$0<a<1$ のとき $+\infty$

$a=1$ のとき $\dfrac{-3}{2}$

$1<a$ のとき $-\infty$

以上をまとめて

$$\left.\begin{array}{l} a<1 \text{ のとき } +\infty \\ a=1 \text{ のとき } -\dfrac{3}{2} \\ 1<a \text{ のとき } -\infty \end{array}\right\} \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ 基解の無限大は区分積分法にもあらわれてきます。すなわち，

5/6
練習 5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^6}$ を求めよ。

（鳥取大）

（解） 与式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}$$

$$=\int_0^1 x^5dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$　　答　$\dfrac{1}{6}$

5/6
練習 6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5+(n+2)^5+\cdots\cdots+(n+n)^5}{n^6}$$

を求めよ。

（解）1.　与式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\left(1+\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right\}$$

$$=\int_0^1(1+x)^5dx=\frac{1}{6}\Big[(x+1)^6\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}(2^6-1^6)=\frac{64-1}{6}=\frac{63}{6}=\frac{21}{2}$$

（解）2.　与式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\left(1+\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right\}$$

$$=\int_1^2 x^5dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2=\frac{2^6-1^6}{6}=\frac{21}{2}$$

（注） 区分求積法や定積分を使って極限を求めることについては微積の分野に入りますので，ここではこの程度にとどめます。

*　　*　　*

◆ 無限大という考えは数列や集合にもあらわれてきますが，これらは原則としてすべて微積の範囲に入っています。なお，ここに無限大というのは

≪いくらでも大きくなる≫

ということなのであって，無限大という数があるというのではありません。しかし，「無限大という数」を数学の対象にした分野があります。それは，ここではやらないのです。

*　　*　　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみるとしましょう。とはいっても基解でめんどうなものはやる必要がありませんよ。

5/6
練習 7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-1$，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+1}=0$ となるような関数

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（a，b，c，d は定数）を求めよ。

（ヒント） まず第3条件から：——

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=a$$

ですから，まず $a=0$ でなければなりません。次に

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\neq0,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}\neq0$$

ですから

≪$f(x)$ は $x-1$，$x-2$ なる因数をもつ≫

ハズ。したがって，

$$f(x)=b(x-1)(x-2)$$

と書けます。そして

$$\lim_{x\to1}\frac{b(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}b(x-2)$$

$$=-b=1$$

$$\therefore\quad b=-1$$

こうして

$$f(x)=-(x-1)(x-2)=-x^2+3x-2$$

これを $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ と比べて

$$a=0,\ b=-1,\ c=3,\ d=-2$$

であることがわかります。

しかし，これでは不十分です。$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$ が，-1 になるかどうかまだ確認してないからです。しかし，調べてみると確かに成り立つことがわかります。

答　$f(x)=-x^2+3x-2$

微分法とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆思えば，微分学も身近なものとなったものだ。わずか30年前には，微積分は高等数学，つまり，高等なる数学であったのだ。

◆ 微分する，つまり導関数を求めること，それをいろいろな問題に応用する。これが微分学です。

ところで，基解の微分法で重要なことは3つあります。第1は導関数の定義に関係したこと，第2は微分計算，つまり導関数を求めるいろいろな計算法と計算技術をマスターすること，第3は導関数の応用です。

*　*　*

◆ まず，何はともあれ，導関数の定義から。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき，これを $f'(x)$ で表し，$f(x)$ の導関数といいます。

練習 1. 定義にしたがって，次の関数を微分せよ。

$$f(x)=x^3$$

解　$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

$$=3x^2$$

答　$3x^2$

*　*　*

◆ 微分係数については（☞ p.186）を参照してください。1つだけやりましょう。

練習 2. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

は $x=0$ において微分可能か。

ヒント　微分可能とは微分係数が存在するということですから，定義にしたがって微分してみるとしましょう。

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\sin\frac{1}{h}-0\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

ところが $h\longrightarrow 0$ のとき $\dfrac{1}{h}$ の値はきまらない。したがって $\sin\dfrac{1}{h}$ の値もきまらない。つまり極限値は存在しないことがわかります。だから，この関数は $x=0$ で微分不可能なのです。

*　*　*

◆ 微分係数や導関数に関係したことはもう1つあります。それは，この定義にしたがって極限を求めること。これも，その項目を参照してください。ここではただ1例を：——

練習 3. $f(1)=a$，$f'(1)=b$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$ を求めよ。　（法政大）

解　与式

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\{f(x^2)-f(1^2)\}+f(1)(x^2-1)}{x^2-1^2}\times(x+1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\left\{-\frac{f(x^2)-f(1^2)}{x^2-1^2}+f(1)\right\}\cdot(x+1)\right]$$

$$=\{-f'(1)+f(1)\}\cdot 2$$

$$=2(a-b)$$

答　$2(a-b)$

*　*　*

◆ 微係数や導関数の定義に関係した大切な問題に，関数の加法公式が与えられたときにその関数を求める問題があります。こんな抽

象的なことをいってもピンときませんね。具体例をあげるほうがいいにきまっています。例えばこれです。詳しくは（☞ p.262）を参照してください。

5/7

練習 4. x, y が何であっても

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$$

で，$f'(0)=a$ のとき $f(x)$ を求めよ。

（解）　$y=0$ を代入してみると

$$f(x)=f(x)+f(0)+0 \qquad \therefore \quad f(0)=0$$

$$\therefore \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+5xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+5xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+5x\right\}$$

$$=f'(0)+5x=5x+a$$

$$\therefore \quad f'(x)=5x+a$$

したがって

$$f(x)=\frac{5}{2}x^2+ax+C \quad （C\text{は積分定数}）$$

$$\therefore \quad f(0)=C$$

ところが $f(0)=0$ であるから　$C=0$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{5}{2}x^2+ax \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　　*　　*

◆ 以上で定義に関係したことは終わりです。次は，計算のテクニックです。

まず，微分法の公式から：——

(1)　$y=k$（kは定数）のとき　$y'=0$

(2)　$y=x^n$（nは自然数）のとき $y'=nx^{n-1}$

(3)　$y=kf(x)$（kは定数）のとき

$$y'=kf'(x)$$

(4)　和・差の公式

$y=f(x)\pm g(x)$ のとき

$$y'=f'(x)\pm g'(x) \quad （複号同順）$$

(5)　積の公式

$y=f(x)g(x)$ のとき

$$\boldsymbol{y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

5/7

練習 5. $f(x)=x^2(2x-1)$ を微分せよ。

（解）1.　$f'(x)=x^2(2x-1)'+(x^2)'(2x-1)$

$$=x^2\cdot 2+2x(2x-1)$$

$$=2x^2+4x^2-2x=6x^2-2x$$

（解）2.　$f(x)=2x^3-x^2$

$$\therefore \quad f'(x)=6x^2-2x$$

（注）　こうしてみると明らかに解 2. のほうがラクです。基解では積の公式はかえってめんどうになることが多いのです。次の例もそうです。

練習 6. $y=(x+2)(x-1)(x-5)$ を微分せよ。

（解）　$y=x^3-4x^2-7x+10$

$$\therefore \quad y'=3x^2-8x-7 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　　*　　*

◆ では，やや総合的な問題を：——

5/7

練習 7. $f(x)=ax^2+bx+c$ において，

$$f'(0)=2, \quad f'(1)=4, \quad f(2)=6$$

のとき，定数 a, b, c を求めよ。

答　$a=1$, $b=2$, $c=-2$

5/7

練習 8. $f(x)$ を x^4 の係数が 2 である x の 4 次関数とする。$f(x)$ がその導関数 $f'(x)$ で割りきれて，その商が $\dfrac{x+3}{4}$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。　（慈恵医大）

（ヒント）　$f(x)=2x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

とおきますと

$$f'(x)=8x^3+3ax^2+2bx+c$$

そこで $f(x)=\dfrac{x+3}{4}f'(x)$ とおいて，両辺の対応する項を比較してみると

$$x^3: \quad a=\frac{1}{4}(24+3a)$$

$$x^2: \quad b=\frac{1}{4}(9a+2b)$$

$$x^1: \quad c=\frac{1}{4}(6b+c)$$

$$x^0: \quad d=\frac{1}{4}(3c)$$

これを解いて，……

答　$2x^4+24x^3+108x^2+216x+162$

⑪ 微分係数の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆微係数を数学を知らない人に訳させたらどういうかな？ カスカナ係数，ビビタル係数，ヤレヤレ，これは何ということだ。

◆ **微分係数** または **微係数** といわれるものの定義は2つあります。もちろん，内容は同じものですが，表現がちがっているだけ。それは

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

です。両方とも使えるようにしておくことが必要です。しかし，定義にしたがって微分係数を求めよ，といわれたら，上のほうを使うのがよいでしょう。さて：——

練習 1. 関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数を，定義にしたがって求めよ。

(解) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$ 　　　答 4

練習 2. 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=1$ における微分係数を，定義にしたがって求めよ。

(解) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 　　　答 $\frac{1}{2}$

* * *

◆ 単に微分係数を求めよ，というのであれば導関数を求めて，その上で微分係数を求めればよいのです。

練習 3. $f(x)=x^3+3x+1$ のとき $f'(1)$ を求めよ。

(解) $f'(x)=3x^2+3$

$\therefore\ f'(1)=6$

答 6

しかし，次のようになると，基解の範囲では定義にしたがってやるより仕方がないことになります。

練習 4. $f(x)=\frac{x}{x+1}$ のとき $f'(0)$ を求めよ。

(解) 1. $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0+h}{(0+h)+1}-\frac{0}{0+1}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+1}=1$ ……答

ついでに，第2の定義でやってみると次のようになります。

(解) 2. $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

答 1

* * *

◆ これで微分係数の求め方は終わりましたから，次は使い方の第1号です。

練習 5. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$ を求めよ。

(ヒント) $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるといった条件も必要になるが，いまのところ気にしないでやることにしよう。

与式$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(a)$ ……答

* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

5/8

練習 6. $f'(0)=5$ のとき

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)}{h}$ を求めよ。　(愛知工大)

(解)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2$$
$$=2f'(0)=10$$

答　10

5/8

練習 7. 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数を $f'(a)$ とするとき，

$\lim_{x\to a}\dfrac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を a，$f(a)$，および $f'(a)$ で表せ。　(日本大)

(解)　与式
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}-f(a)(x^2-a^2)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)(x+a)\right\}$$
$$=a^2f'(a)-2af(a)$$

答　$a^2f'(a)-2af(a)$

もう少しめんどうにしますと：――

5/8

練習 8. 関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$，$g'(a)$，$h'(a)$ がそれぞれ存在し，$h'(a)\neq 0$ とする。また，$x\neq a$ のとき $h(x)\neq h(a)$ とする。このとき $\lim_{x\to a}\dfrac{g(a)f(x)-g(x)f(a)}{h(x)-h(a)}$ を $f(a)$，$g(a)$，$h(a)$ および $f'(a)$，$g'(a)$，$h'(a)$ で表せ。　(山口大)

(ヒント)　与式
$$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(a)f(x)-g(x)f(a)}{x-a}\Big/\frac{h(x)-h(a)}{x-a}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(a)\{f(x)-f(a)\}}{x-a}+\frac{-f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}\right\}\Big/h'(a)$$
$$=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{h'(a)}$$

おや，これではヒントでなく解答になってしまった。いや，やはり説明不足だ。

*　　*　　*

◆ では，やや変わった問題をとりあげてみましょう。

練習 9. 3次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(a,\ b,\ c)$ $(\neq(0,\ 0,\ 0))$，$\boldsymbol{x}=(x,\ y,\ z)$ に対し，t の関数 $f(t)=|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x}|$ を考える。ただし，一般にベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ の内積を $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ で表し，$\boldsymbol{u}$ の大きさ $|\boldsymbol{u}|$ を $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})}$ と定義する。

微分係数 $f'(0)$ を求めよ。　(早大)

(ヒント)　$f'(0)$ を求めよ，というのですが，まず $f(t)$ を求めてみようか。
$$f(t)=|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x})}$$
$$=\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2t^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})t+|\boldsymbol{a}|^2}$$

これから $f'(t)$ を求めるのは微積の問題ですが，$f'(0)$ を定義によって求めるなら基解の問題ですね。では：――
$$f'(0)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2h^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})h+|\boldsymbol{a}|^2}-|\boldsymbol{a}|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|\boldsymbol{x}|^2h^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})h+|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{h\{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2h^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})h+|\boldsymbol{a}|^2}+|\boldsymbol{a}|\}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|\boldsymbol{x}|^2h+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2h^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})h+|\boldsymbol{a}|^2}+|\boldsymbol{a}|}$$
$$=\frac{2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})}{2|\boldsymbol{a}|}=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

◆ 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数という代わりに，$x=a$ における **変化率** ということもあります。この変化率ということばを「**平均変化率**」と混同してはいけませんよ。区間 [1, 3] における $f(x)=x^2+1$ の平均変化率といったら，
$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{10-2}{2}=4$$
のことですから。

微分可能とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆微分係数がある，といえば何でもないことなのに，微分可能と大上段に切り込まれると，たいていの人はおそれ入ってしまうのだ。

◆ 関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるというのは $f'(a)$ が存在するということです。もっと，具体的にいうと

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

の値がただ1つ，有限に存在する

では，次の練習1.をやってみませんか。

5/10

練習 1. $f(x)=x^2$ は $x=5$ において微分可能であることを示せ。

ヒント $\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-5^2}{h}$ が存在することをいえばいいのです。さて，それは：——

$$\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-5^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{25+10h+h^2-25}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(10+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(10+h)=10$$

ナルホド，確かに，$f'(5)$ が存在する。つまり，$f(x)=x^2$ は $x=5$ において微分可能である。

5/15

練習 2. $f(x)=|x|$ は $x=0$ において微分可能であるか。

ヒント $$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$=\begin{cases} h>0: & \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1 \\ h<0: & \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1 \end{cases}$$

つまり $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は有限ではあるが，確定しない。つまり，2つある。これでは微分可能の条件に反する。

答 微分不可能

練習 3. 関数 $\sqrt[3]{x}$ は $x=0$ において微分可能か。

ヒント $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$$

これは有限でない。つまり，微分可能の条件に反する。

答 微分不可能

* * *

◆ 次にはややめんどうな問題をやってみましょう。

5/15

練習 4. 次の関数は $x=0$ において微分可能か。

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x & (x\geqq 0) \\ ax & (x<0) \end{cases}$$

ヒント

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdots\cdots①$$

$h>0$ のとき，①の右辺は

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3)=3$$

$h<0$ のとき，①の右辺は

$$\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=a$$

ゆえに

$a=3$ のとき $f'(0)=3$ で，したがって $f(x)$ は $x=0$ において微分可能ですが，

$a\neq 3$ のときには，$f'(0)$ は存在せず，つまり微分不可能であることがわかります。

答 $a=3$ のときのみ微分可能

注 微分可能であるときには，**その点でただ1つの（y軸に平行でない）接線がある**，と考えるほうが直観的でわかりやすいでしょう。

* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. 次の□にあてはまる数は何か。

周期が 3 の周期関数 $f(x)$ があって，そのグラフには切れ目がない。また，

(1) $0\leqq x\leqq 1$ では

$$f(x)=4x^2$$

$1\leqq x\leqq 3$ では

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

と書くことができる。

(2) $f(5)=8$，$f'(5)=-1$ である。

このとき，$a=$□，$b=$□，$c=$□，$d=$□ である。　（東大）

（解） グラフに切れ目がないことから，$x=1$ で，ax^3+bx^2+cx+d の値は $4x^2$ の値と等しくなる。

$$\therefore\quad a+b+c+d=4 \quad\cdots\cdots①$$

周期性の条件から

$$f(x+3)=f(x),\quad f'(x+3)=f'(x)$$

$$\therefore\quad f(5)=f(2),\quad f'(5)=f'(2)$$

ところが

$$f'(x)=8x\quad(0<x<1)$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\quad(1<x<3)$$

で，$f(5)=f(2)=8$ あるから

$$8a+4b+2c+d=8 \quad\cdots\cdots②$$

また，$f'(5)=f'(2)=-1$ であるから

$$12a+4b+c=-1 \quad\cdots\cdots③$$

さらに，$f(3)=f(0)=0$ であるから

$$27a+9b+3c+d=0 \quad\cdots\cdots④$$

①〜④より

$$a=-1,\quad b=0,\quad c=11,\quad d=-6$$

（答） $a=-1$，$b=0$，$c=11$，$d=-6$

（注） このように，グラフに切れ目のないとき，この関数は≪いたるところ連続である≫といいます。微分可能であるためには連続でなければなりませんが，逆に連続であるからといって，微分可能であるわけではありません。どんな場合があるか，すぐ，例を 2 つか 3 つはあげられるようでなければなりません。（例：練習 2.，3.）

練習 6. 次のような関数がいたるところ微分可能であるように定数 a，b，c，d を定め，そのグラフをかけ。

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & (x\leqq -1)\\ cx+d & (-1<x<0)\\ x^3-3x & (0\leqq x)\end{cases}$$

（ヒント） まず連続であることから

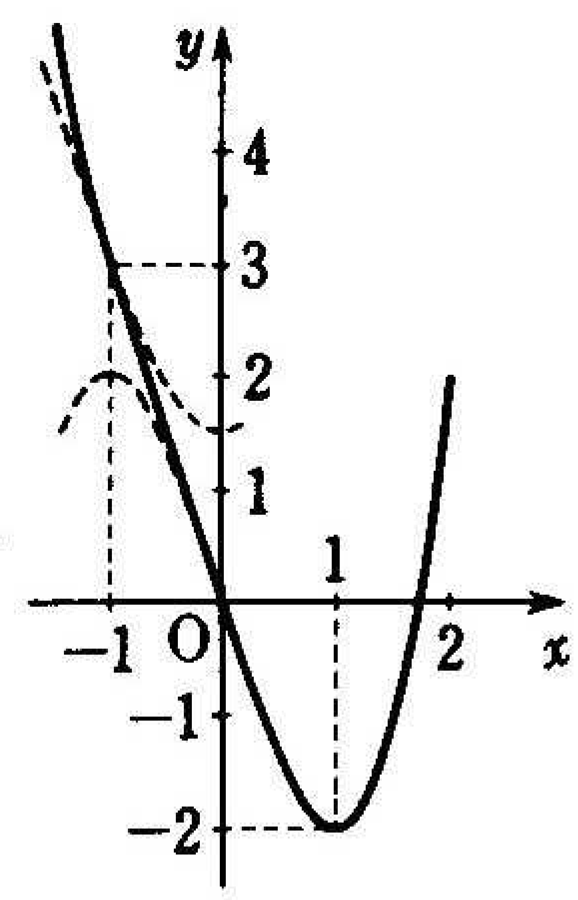
$x=-1$ において

$$a+b=-c+d\cdots\cdots①$$

$x=0$ において

$$d=0 \quad\cdots\cdots②$$

が必要です。



次に，$x=-1$ で微分可能であるためには

$$(2ax)_{x=-1}=(c)_{x=-1}$$

より

$$-2a=c \quad\cdots\cdots③$$

$x=0$ では

$$(c)_{x=0}=(3x^2-3)_{x=0}$$

より

$$c=-3 \quad\cdots\cdots④$$

が必要です。③，④より

$$a=\frac{3}{2}$$

したがって，①より

$$b=-a-c+d=-\frac{3}{2}+3+0=\frac{3}{2}$$

こうしてグラフをかくと，上のようになります。

（答） $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=-3$，$d=0$

なお，上の（ヒント）では $x=-1$ および $x=0$ のところしか考えませんでしたが，他の x について $f(x)$ が微分可能であることはいうまでもないでしょう。

*　　*　　*

◆ 微分可能のやや立入ったことは微積で学ぶことになるハズ。基解としては上の程度で十分です。

○導関数の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆むかしは導来関数というコトバも使われていました。このほうが，確かに，本質をつかんだ訳ではあるわい。

◆ 関数 $f(x)$ の導関数とは何か：——

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が有限で，確定した値をとるとき，これを $f'(x)$ で表し，$f(x)$ の導関数という。

なお，**導関数**（どうかんすう）というのはこのような操作で $f(x)$ から導いてきた関数，という意味です。導く関数ではありません。

＊ ＊ ＊

◆ ところで，導関数の定義に関連して大切なことが3つあります。

第1は，定義にしたがって微分すること

第2は，定義を使って極限を求めること

第3は，微分可能・不可能の問題

です。まず，第1からいきましょう。

練習 1. $f(x)=x^2$ の導関数を定義にしたがって求めよ。

（解） $f'(x)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

答 $2x$

練習 2. $f(x)=\sqrt{x}$ の導関数を定義にしたがって求めよ。（広島大）

（解） $f'(x)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

答 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

練習 3. 定義にしたがって $\sqrt[3]{x}$ の導関数を求めよ。（阪大）

（解） $f'(x)=\lim_{h\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

答 $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

練習 4. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ のとき，定義にしたがって $f'(x)$ を求めよ。

（解） $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x+h}{x+h+1}-\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}$$

答 $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

＊ ＊ ＊

◆ では，次は第2の定義にしたがって極限を求める問題です。これを：——

練習 5. $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}$ を求めよ。

（ヒント） 導関数の定義は，要するに

$$\lim_{\square\to 0}\frac{f(x+\square)-f(x)}{\square}=f'(x)$$

ということだったのです。だから

$f(x+\boxed{2h})$ があるから，分母も $\boxed{2h}$

でなければまずい。さて，こそ，

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot2$$
$$=2f'(x)$$

となります。では，次へ：——

練習 6. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h^2)-f(x)}{h}$ を求めよ。

(解)　与式$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h^2)-f(x)}{4h^2}\cdot4h$

$$=\lim_{h\to0}f'(x)\cdot4h=0$$　答　0

練習 7. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x-2h)}{h}$

を求めよ。

(解)　与式

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[\{f(x+3h)-f(x)\}-\{f(x-2h)-f(x)\}]$$
$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot3-\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}(-2)\right]$$
$$=3f'(x)-(-2)f'(x)=5f'(x)$$

答　$5f'(x)$

(注)　導関数と同じように微分係数の場合を扱うことができます。しかし，微分係数の場合には

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

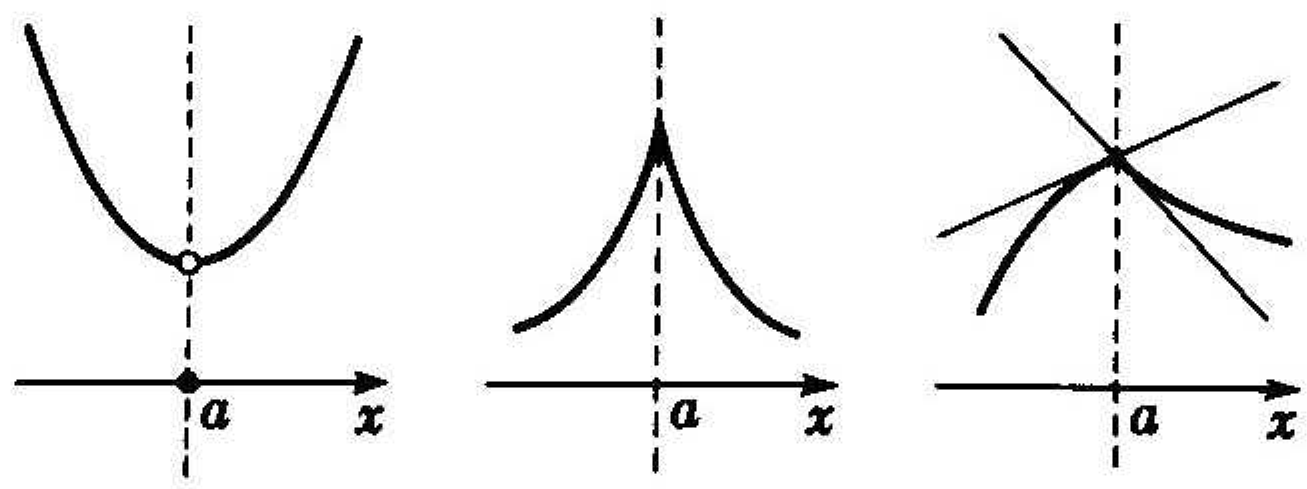
のほかに

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が使われますから，注意してください。詳しくは(☞ p.178)。

*　*　*

◆　第3は，微分可能性の問題です。微分可能ということは，**その点における微分係数が存在すること**，つまり，**有限で1個だけある**ということです。図形的にいえば，その点における接線で，y軸に平行でないものがただ1つ存在する，ということです。下の図は，いずれも $x=a$ で微分不可能な場合です。



では，具体的な問題をやってみましょう。

練習 8. 次のように定義された関数 $f(x)$ がある。xのすべての値に対して微分可能となるように定数 a，b，c の値を定めよ。

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & (x\leqq0)\\ x^2 & (0<x<1)\\ cx^3+d & (1\leqq x)\end{cases}$$

(ヒント)　$-\infty<x<+\infty$ ($-\infty\leqq x\leqq+\infty$ と書いてはいけません) に対して $f(x)$ が微分可能であるためには，まず切れ目があってはいけません。つまり，連続でなければなりません。このことから，

$a\cdot0+b=0^2$　つまり　$b=0$

$c+d=1$　つまり　$d=1-c$

が必要です。

次に，$x=0$ において微分係数の値が1つあるための条件は

$$(ax+b)'_{x=0}=(x^2)'_{x=0}$$

つまり

$$a=0$$

および $x=1$ については

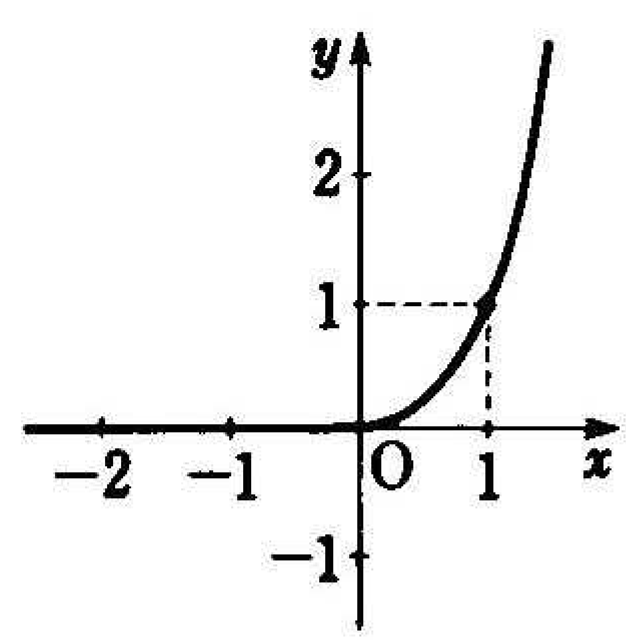
$$(x^2)'_{x=1}=(cx^3+d)'_{x=1}$$

つまり

$$2=c\cdot3$$

したがって

$$c=\frac{2}{3}$$



となります。かくして答は次のようで，念のためグラフをかくと図のようになります。

答　$a=0$，$b=0$，$c=\dfrac{2}{3}$，$d=\dfrac{1}{3}$

① (曲線上の点における)接線の求め方(1)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆接線の問題は大別して4つありますが，そのなかで，もっとも基本的なのは，その上の点におけるそれを求めることなんです。

◆ 接線を求める問題は大きく分けて4つになります。第1は，曲線上の点における接線を求めること，第2は曲線外の点から接線を引くこと，第3は傾きを与えられた接線，そして第4は特殊な難問，です。

ここでは，そのうち第1のものを扱うことにしよう，というわけです。さて，

曲線上の1点 $P(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は

$$y-\beta=m(x-\alpha)$$

(m は点Pにおける微分係数)

です。では，次の練習をやってみませんか。

x|○

練習 1. $y=x^2$ 上の点 $P(1,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(解) $y'=2x$

ゆえに点Pにおける接線の傾き m は

$$m=2\cdot 1=2$$

に等しい。よって，求める接線は

$$y-1=2(x-1)$$

$$\therefore\quad y=2x-1 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 2. $y=x^3$ 上の $x=1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(解) $y'=3x^2$

ゆえに与えられた点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きは3であるから，接線の方程式は

$$y-1=3(x-1)$$

$$\therefore\quad y=3x-2 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

5/4

練習 3. $y=x^4$ 上の $x=\alpha$ に対応する点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(解) Pの座標は $(\alpha,\ \alpha^4)$ で，点Pにおける接線の傾きは

$$(4x^3)_{x=\alpha}=4\alpha^3$$

であるから，求める方程式は

$$y-\alpha^4=4\alpha^3(x-\alpha)$$

$$\therefore\quad y=4\alpha^3x-3\alpha^4 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

(注) このようにPの座標がすぐ求まるのに $(\alpha,\ \beta)$，ただし $\beta=\alpha^4$ などとやるのはマチガイのもとです。注意してください。

* * *

◆ では，ややめんどうなものをやってみませんか。

練習 4. $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$ について，$x=2$ に対する曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

(ヒント) $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$

$$\therefore\quad y'=x^2+2x$$

ゆえに $x=2$ に対する点 $\left(2,\ \dfrac{14}{3}\right)$ における接線の傾きは8ですから，求める方程式は

$$y-\frac{14}{3}=8(x-2)$$

$$\therefore\quad y=8x-\frac{34}{3} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

4/4

練習 5. 曲線 $y=x^4$ 上の点Pにおける接線と x 軸，y 軸との交点をQ，Rとするとき，$\overline{PQ}:\overline{QR}$ を求めよ。ただし，Pは原点でないとする。

(ヒント) $y'=4x^3$ であるから $P(\alpha,\ \alpha^4)$ における接線は

$$y-\alpha^4=4\alpha^3(x-\alpha)$$

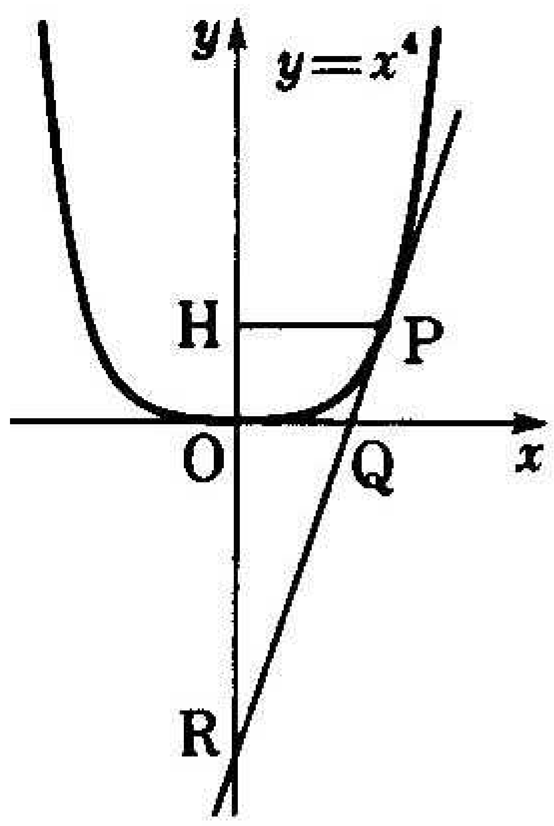
$$\therefore\quad y=4\alpha^3x-3\alpha^4$$

ゆえに y 軸との交点Rの座標は

$$(0,\ -3\alpha^4)$$

です。そこでPからy軸に下した垂線の足をHとしますと

$$PQ:QR$$
$$=HO:OR$$
$$=\alpha^4:3\alpha^4$$
$$=1:3$$



答　1：3

＊　＊　＊

◆　さらに1歩進んで総合的な問題をやってみませんか。

練習 6. 2つの放物線 $y=x^2$, $y=ax^2+b$ の交点において，これらの曲線の接線が直交している。このとき

(1)　定数 a, b の間にどのような関係があるか。

(2)　$(a,\ b)$ を座標とする点はどのような曲線上にあるか，図示せよ。

（関西学院大）

ヒント　交点を $(\alpha,\ \beta)$ としますと

$$\beta=\alpha^2 \qquad \cdots\cdots①$$
$$\beta=a\alpha^2+b \qquad \cdots\cdots②$$

ですね。

さて，$y'=2x$ および $y'=2ax$ ですから，交点における接線の傾き m_1, m_2 は

$$m_1=2\alpha,\quad m_2=2a\alpha$$

直交条件から

$$m_1m_2=(2\alpha)(2a\alpha)=4a\alpha^2=-1 \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③から a, b の関係を求めればいいのですから，まず，①，②より β を消去して

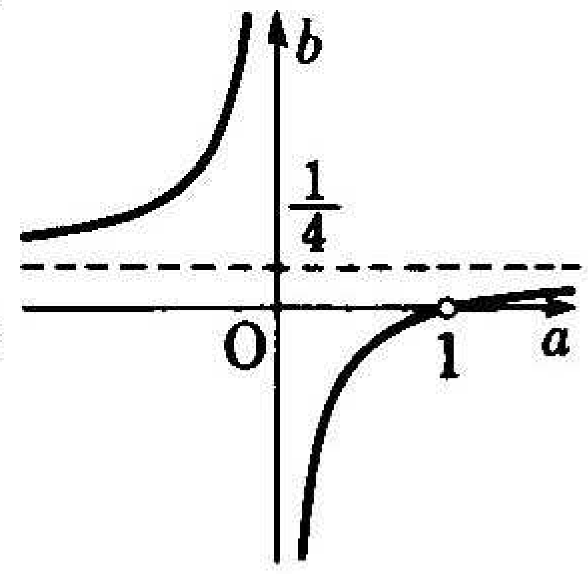
$$\alpha^2=a\alpha^2+b \qquad \cdots\cdots④$$

③より　$\alpha^2=-\dfrac{1}{4a}$

これを④に代入して

$$-\frac{1}{4a}=a\left(-\frac{1}{4a}\right)+b$$
$$\therefore\quad -1=-a+4ab$$
$$\therefore\quad b=\frac{a-1}{4a}\quad (a\neq 0,\ 1)$$

したがって，求めるグラフは右のようになります。



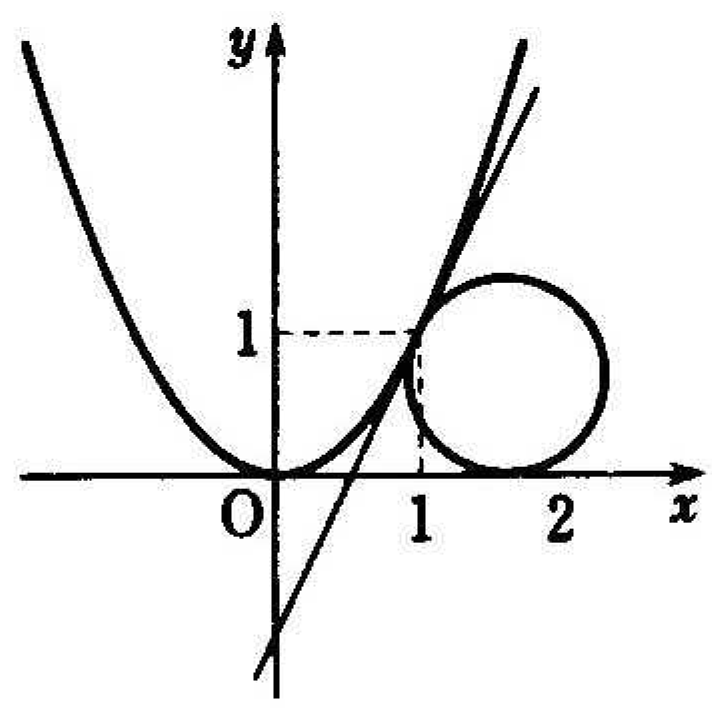
注　$a\neq 1$ という条件が必要なわけ，おわかり？　だって，$a=1$, $b=0$ なら2つの放物線は重なってしまうではありませんか。

練習 7. a, b を実数とする。放物線 $y=x^2$ と円 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ は点 $(1,\ 1)$ を通り，この点において共通の接線をもつとする。a, b の値を求めよ。（東大）

ヒント　円が点$(1,\ 1)$を通ることから

$$(1-a)^2+(1-b)^2=a^2 \quad \cdots\cdots①$$

なる関係がある。



また，点 $(1,\ 1)$ における $y=x^2$ の接線の傾きは2であるから，この点における接線の方程式は

$$y=2x-1$$

で，これが円に接することから，その点を通る半径に垂直で，したがって，

$$\frac{b-1}{a-1}=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②を連立させて解けばいいでしょう。

②より

$$b-1=-\frac{1}{2}(a-1)$$

これを①に代入して

$$(1-a)^2+\frac{1}{4}(a-1)^2=a^2$$
$$\therefore\quad a=5\pm 2\sqrt{5}$$
$$\therefore\quad b=-1\mp\sqrt{5}\quad（複号同順）$$

注　実は東大の問題は

$$a=5-2\sqrt{5},\ b=-1+\sqrt{5}$$

だけを求めさせるようになっていました。円の接線については，上に扱ったように

接線が半径に垂直である

ことを使うほうが一般にラクです。

(曲線外の点から引いた)接線の求め方(2)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆接線に関する問題のうちでもっとも重要なのは，曲線外の点から引いた接線に関係したものなんですよ。

◆ 曲線外の1点Pから引いた接線を求めるには，

曲線上の任意の点における接線を求め，これが点Pを通るようにしてやる

のがコツです。何はともあれ，次の練習1をやってみませんか。

■練習 1. 点 $(0,\ -1)$ を通り，$y=x^2$ に接する直線の方程式を求めよ。

ヒント　曲線上の任意の点を $(t,\ t^2)$ としますと，この点における接線は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

$$\therefore\quad 2tx-y-t^2=0$$

これが点 $(0,\ -1)$ を通るための条件は

$$-(-1)-t^2=0$$

$$\therefore\quad t=\pm 1$$

ゆえに，求める接線は2つで

$$y=\pm 2x-1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

です。

■練習 2. 点 $(0,\ -2)$ を通り，$y=x^3$ に接する直線の方程式を求めよ。

解　曲線上の任意の点 $(t,\ t^3)$ における接線は

$$y-t^3=3t^2(x-t)$$

すなわち

$$y-3t^2x+2t^3=0$$

である。これが，点 $(0,\ -2)$ を通るための条件は

$$-2+2t^3=0$$

$$\therefore\quad t=1$$

ゆえに，求める直線は

$$y-3x+2=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

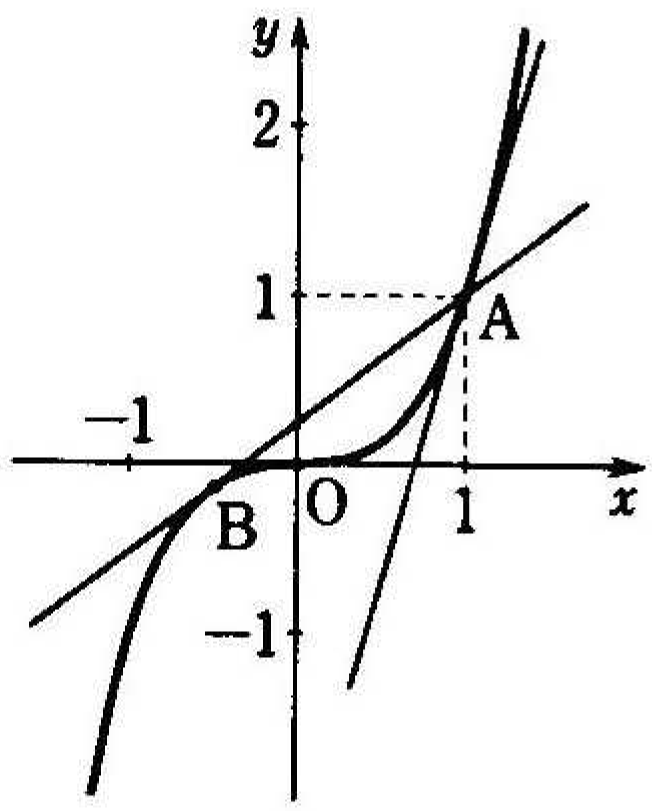
＊　＊　＊

◆ 次には，ややめんどうなものをやってみませんか。

■練習 3. $y=x^3$ の接線で点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通るものを求めよ。

ヒント　点 $(1,\ 1)$ が曲線上にあることはすぐ気がついたでしょう。

ところで，点Aを通る接線は2つあるのです。1つはAにおける接線，1つは右図のBにおける接線で点Aを通るものなんです。



解　曲線上の任意の点 $(t,\ t^3)$ における接線は

$$y-t^3=3t^2(x-t)$$

$$\therefore\quad y=3t^2x-2t^3$$

で，これが点Aを通るための条件は

$$1=3t^2-2t^3$$

$$\therefore\quad 2t^3-3t^2+1=0$$

$$\therefore\quad (t-1)^2(2t+1)=0$$

$$\therefore\quad t=1,\ -\frac{1}{2}$$

ゆえに，求める接線は

$$y=3x-2,\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

である。

注　このような問題に出会うとまずAにおける接線を求め，次にBにおける接線を求める，というふうに2段階でやる人がずいぶん多いもの。まったくムダな努力と知るべし。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。まず，これです。

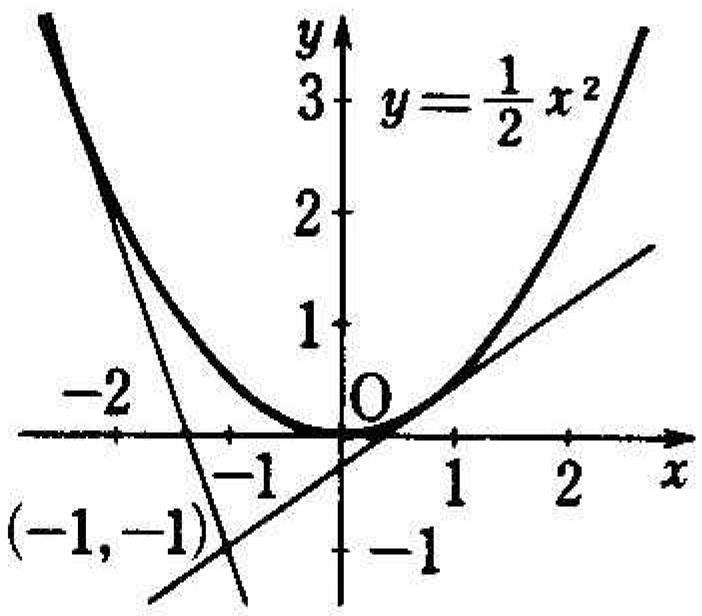
5/15

練習 4. 曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の異なる2点A，Bにおける接線が点 P$(-1,\ -1)$ で交わるとき，$\angle$APB$=\theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ。

（佐賀大）

ヒント　いいかえると，点 P$(-1,\ -1)$ から引いた2つの接線のなす角 θ の余弦を求めよ，というのと同じことですね。

さて，$y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{T}\left(t,\ \frac{t^2}{2}\right)$ における接線の傾きは t ですから，Tにおける接線の方程式は



$$y-\frac{t^2}{2}=t(x-t)$$

$$\therefore\quad y=tx-\frac{t^2}{2}$$

これが点 $(-1,\ -1)$ を通るための条件は

$$-1=-t-\frac{t^2}{2}$$

$$\therefore\quad t^2+2t-2=0$$

$$\therefore\quad t=-1\pm\sqrt{3}$$

つまり，点Pを通る2つの接線の傾きは，$-1\pm\sqrt{3}$ であることがわかります。したがって，2つのベクトル

$$(1,\ -1+\sqrt{3}),\ (1,\ -1-\sqrt{3})$$

のなす角が θ ですから，ベクトルの内積から

$$\cos\theta=\frac{(1,\ -1+\sqrt{3})\cdot(1,\ -1-\sqrt{3})}{|(1,\ -1+\sqrt{3})||(1,\ -1-\sqrt{3})|}$$

$$=\frac{1+(1-3)}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}}=-\frac{1}{\sqrt{13}}$$

ところがグラフから明らかなように θ は鋭角ですから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

である。

注　θ が鋭角であることを図から直接判定しないで，2つのベクトル

$$(1,\ -1+\sqrt{3}),\ (-1,\ 1+\sqrt{3})$$

のなす角と考えれば，もっと安心できるでしょう。

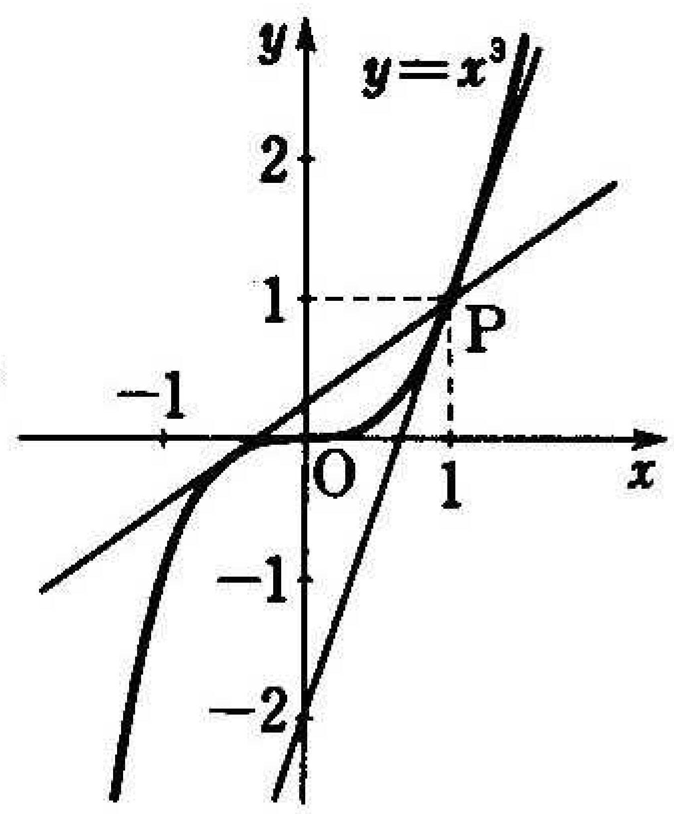
練習 5. 点 P$(x,\ y)$ $(x>0)$ は曲線 $y=x^3$ 上の点とする。Pを通るこの曲線の2本の接線が x 軸と交わる点を A，B とし，$\angle$APB$=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

(1) $\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(2) $\tan\theta$ が最大となる x の値を求めよ。

（阪大）

ヒント　(1) 点Pを通る接線が2つありますが，別々に扱うようではいけませんよ。



$y=x^3$ 上の点 $(t,\ t^3)$ における接線は

$$y=3t^2x-2t^3$$

で，これが，点 P$(x,\ x^3)$ を通るための条件は

$$x^3=3xt^2-2t^3$$

$$\therefore\quad 2t^3-3xt^2+x^3=0$$

$$\therefore\quad (t-x)^2(2t+x)=0$$

$$\therefore\quad t=x,\ -\frac{x}{2}$$

ゆえにPを通る2つの接線の傾きは $3x^2$，と $\frac{3}{4}x^2$ です。そのなす角を求めるには，2つのベクトル $(1,\ 3x^2)$ と $\left(1,\ \frac{3}{4}x^2\right)$ の内積を利用すればいいでしょう。いや，あとのほうが分数なのは目ざわりだ。$(4,\ 3x^2)$ のほうがよさそうだ。こんなわけで

$$\cos\theta=\frac{(1,\ 3x^2)\cdot(4,\ 3x^2)}{\sqrt{1+(3x^2)^2}\sqrt{4^2+(3x^2)^2}}$$

$$=\frac{4+9x^4}{\sqrt{(1+9x^4)(16+9x^4)}}$$

となります。

(2) $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

$$=\frac{(1+9x^4)(16+9x^4)}{(4+9x^4)^2}-1$$

これを最大にする x は $x^4=u$ とおいて実数条件を使うとよい。しかし，それは，このセクションの目的ではない。　答　$\frac{\sqrt{6}}{3}$

① (傾きの与えられた)接線の求め方(3)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆接線，接線というが，もっとも簡単なのはまさにこれ。つまり傾きの与えられたときの接線なんです。

◆ 傾きが与えられた接線を求めることはもっとも簡単です。つまり，

微分係数が傾きに等しくなればよい

のですから。では，これを：——

練習 1. $y=x^2$ の接線で傾きが2のものを求めよ。

(解) $y'=2x=2$ より　$x=1$

ゆえに接点は $(1,\ 1)$ です。

したがって，求める方程式は

$$y-1=2(x-1)$$

$$\therefore\quad y=2x-1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 2. $y=x^3$ の接線で傾きが3のものを求めよ。

(解) $y'=3x^2=3$ より　$x=\pm 1$

ゆえに接点は

$$\mathrm{A}(1,\ 1) \text{ および } \mathrm{B}(-1,\ -1)$$

である。よって，求める接線の方程式は

$$y-1=3(x-1) \text{ と } y+1=3(x+1)$$

である。これを書きかえて

$$y=3x\pm 2$$

$\boxed{答}$　$y=3x\pm 2$

練習 3. 曲線 $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$ について，傾きが3である接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(ヒント) $y'=x^2+2x=3$ とおくと

$$x^2+2x-3=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ -3$$

$x=1$ に対応する接点は $\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$ で，接線は

$$y+\frac{2}{3}=3(x-1)$$

すなわち

$$y=3x-\frac{11}{3}$$

また, $x=-3$ に対応する接点は $(-3,\ -2)$ で，接線の方程式は

$$y+2=3(x+3)$$

$$\therefore\quad y=3x+7$$

である。

$\boxed{答}$　$y=3x-\frac{11}{3}$，$y=3x+7$

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. $y=x^3$ の接線で傾き $m(>0)$ のものを求め，さらに，その間隔を求めよ。

(ヒント) $y'=3x^2=m$ とおきますと

$$x^2=\frac{m}{3} \qquad \therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{m}{3}}$$

したがって接点は $\left(\pm\sqrt{\frac{m}{3}},\ \pm\frac{m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ です。

ゆえに，求める2つの接線は

$$y-\left(\pm\frac{m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}\right)=m\left\{x-\left(\pm\sqrt{\frac{m}{3}}\right)\right\}$$

$$\therefore\quad y=mx\mp\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

で与えられます。

次に，この2つの間隔を求めるには，原点について対称であることに目をつけて，原点から一方に下した垂線の長さを2倍すればよいでしょう。つまり，

$$mx-y-\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}=0$$

を採用すると，原点から下した垂線の長さ h は

$$\left|\frac{-\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\frac{2m\sqrt{m}}{3\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\,m\sqrt{m}}{9\sqrt{m^2+1}}$$

であることから，求める間隔は

$$\frac{4\sqrt{3}\,m\sqrt{m}}{9\sqrt{m^2+1}}$$

で与えられます。

（注）ここで，

点 $(\alpha,\ \beta)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さの公式

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を使いました。忘れていた人は，この機会に思い出してください。

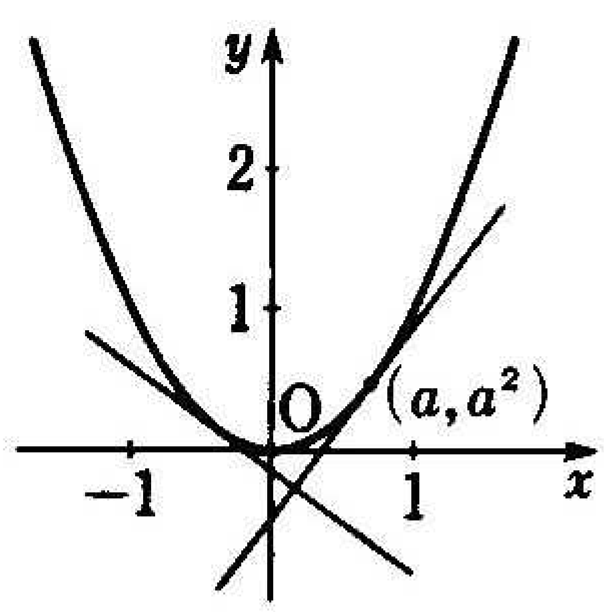
＊　＊　＊

◆ では，やや，総合的な問題をやってみませんか。

5/16

練習 5. 曲線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線と直交する曲線 $y=x^2$ の接線の方程式を求めよ。（慶大）

（解）点 $(a,\ a^2)$ における接線の傾きは $2a$ であるから，これに直交する曲線の接線の傾きは $-\frac{1}{2a}$ で，したがって



$$y'=2x=-\frac{1}{2a}$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{4a},\ y=\frac{1}{16a^2}$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$y-\frac{1}{16a^2}=-\frac{1}{2a}\left(x+\frac{1}{4a}\right)$$

$$y=-\frac{1}{2a}x-\frac{1}{16a^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

5/16

練習 6. y 軸を軸とする放物線 C と直線 $y=ax(a>0)$ が点Pにおいて接している。Pを通り，直線 $y=ax$ に垂直な直線と y 軸との交点をQ，放物線 C の頂点をRとするとき $\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}$ を求めよ。ただし，Oは原点とする。（阪大）

（ヒント）C は y 軸を軸とする放物線ですから，

$$y=px^2+q$$

とおくことができます。これが $y=ax$ に接するというのです。

接点については

$$y'=2px=a$$

より

$$x=\frac{a}{2p}$$

これが傾き a の接線の接点の x 座標です。したがって y 座標は

$$p\left(\frac{a}{2p}\right)^2+q=\frac{a^2}{4p}+q$$

で与えられます。つまり，接点Pは

$$\left(\frac{a}{2p},\ \frac{a^2}{4p}+q\right)$$

で，これが $y=ax$ 上にもあるのですから

$$\frac{a^2}{4p}+q=\frac{a}{2p}\cdot a$$

$$\therefore\quad q=\frac{a^2}{4p}$$

かくて，点Pは $\left(\frac{a}{2p},\ \frac{a^2}{2p}\right)$ となります。

さて，Pを通り $y=ax$ に垂直な直線の方程式は

$$y-\frac{a^2}{2p}=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{2p}\right)$$

これが y 軸と交わる点Qは

$$\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{a^2}{2p}+\frac{1}{2p}\right)$$

また，C の頂点Rは $(0,\ q)$，すなわち $\left(0,\ \frac{a^2}{4p}\right)$ ですから

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\frac{a^2}{4p}\Big/\left(\frac{a^2}{2p}+\frac{1}{2p}\right)=\frac{a^2}{2(a^2+1)}$$

答　$\frac{a^2}{2(a^2+1)}$

（注）厳密には $\mathrm{OR}=\left|\frac{a^2}{4p}\right|$ などとなります。

● (めんどうな)接線の求め方(4)

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

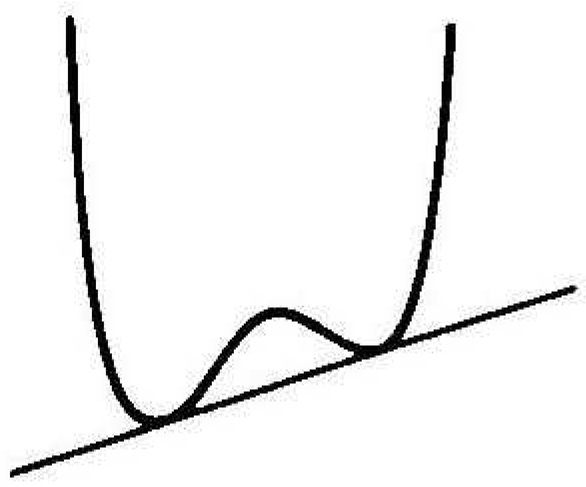
◆接線に関する難問はふしぎと微分法を使わないほうがラクなもの多し。高等な手段が無力な例というべきか。

◆ ここでは接線を求める問題の中から特殊な難問をいくつか選んでやってみましょう。

5/21

●練習 1. $y=x^4-3x^2+2x+4$ と相異なる2点で接する直線の方程式を求めよ。

(ヒント) 相異なる2点で接する，という意味，おわかり？ これは右の図に示すように，2か所で接する，というのです。求める接線の方程式を



$$y=mx+n$$

として，与えられた方程式と連立させると，接点の座標は重複解として出てくるのでしょう。

つまり，yを消去して得られる

$$x^4-3x^2+(2-m)x+(4-n)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

は α, α, β, β ($\alpha \neq \beta$, α, β は実数) なる解をもつハズ。

そこで上の (*) 式の左辺は

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

と変形できるハズ。

かくして，恒等式

$$x^4-3x^2+(2-m)x+(4-n)$$
$$=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

が成り立ちます。

両辺の対応する項の係数を比べて

x^3: $0=-2(\alpha+\beta)$ ……①

x^2: $-3=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$ ……②

x: $2-m=-2\alpha\beta(\alpha+\beta)$ ……③

定数項: $4-n=(\alpha\beta)^2$ ……④

①より

$$\alpha+\beta=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

②より

$$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$$

⑤を代入して $\alpha\beta$ を求めると

$$\alpha\beta=-\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥を③に代入して

$$2-m=0 \qquad \therefore \quad m=2$$

⑥を④に代入して

$$n=4-\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

ゆえに求める接線は $y=2x+\dfrac{7}{4}$ です。

(注) 実は上の解，チョット不備な点があります。気がつきましたか。それは，α, β が相異なる実数であるかどうか調べなかったことです。しかし，⑤，⑥から

$$\alpha+\beta=0, \ \alpha\beta=-\frac{3}{2}$$

βを消去すると，

$$\alpha(-\alpha)=-\frac{3}{2}, \quad \therefore \quad \alpha^2=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \beta=\mp\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (複号同順)$$

で，確かに適することがわかります。いや，解くまでもない。α, β が虚数ならば共役複素数になるハズだから $\alpha\beta>0$ のハズ。それなのに $\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$ ですから，安心してよかったわけです。

6/21

●練習 2. $y=x^4+px^2+x+2$ と相異なる2点で接する直線が存在するための条件を求めよ。 (名大)

(解) 与えられた4次曲線と相異なる2点で接する直線 $y=mx+n$ があるための条件は

$$x^4+px^2+(1-m)x+(2-n)=0$$

が α, α, β, β (α, β は異なる実数) なる解をもつことである。それには，上の左辺が

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

と変形できることが必要かつ十分で，

$$-2(\alpha+\beta)=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=p \quad \cdots\cdots ②$$
$$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=1-m \quad \cdots\cdots ③$$
$$(\alpha\beta)^2=2-n \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立てばよい。

①より $\beta=-\alpha$，これを②に代入して

$$2\alpha^2=-p$$

ゆえに求める条件は $p<0$ である。

答　$p<0$

＊　＊　＊

◆ 次のような問題も，難問の1つ。どうです，やってみませんか。

■練習 3. $y=x^2$ に接し，かつ軸が x 軸に平行で，かつ，2点 $\mathrm{A}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(8,\ -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ。ただし，接点の x 座標は整数である。

ヒント　求める方程式を

$$x=ay^2+by+c \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，2点 A，B を通ることから

$$\frac{5}{2}=c \quad \cdots\cdots ②$$
$$8=a-b+c \quad \cdots\cdots ③$$

また，$y=x^2$ と①が接するから，y を消去して得られる4次方程式

$$ax^4+bx^2-x+c=0 \quad \cdots\cdots ④$$

は重複解をもたなければならない。

②，③より

$$b=a-\frac{11}{2}$$

であるから，④は

$$ax^4+\left(a-\frac{11}{2}\right)x^2-x+\frac{5}{2}=0$$

$$\therefore\quad 2ax^4+(2a-11)x^2-2x+5=0 \cdots\cdots ⑤$$

$2a=A$ とおくと

$$f(x)=Ax^4+(A-11)x^2-2x+5=0$$

と書けます。これが重複解をもつための必要かつ十分な条件は

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$$

ですから，

$$f(\alpha)=A\alpha^4+(A-11)\alpha^2-2\alpha+5=0 \quad ⑥$$
$$f'(\alpha)=4A\alpha^3+2(A-11)\alpha-2=0$$
$$\therefore\quad 2A\alpha^3+(A-11)\alpha-1=0 \quad \cdots ⑦$$

⑦より

$$A=\frac{11\alpha+1}{2\alpha^3+\alpha}$$

これを⑥に代入して分母をはらうと

$$\alpha(11\alpha^4+3\alpha^3-10\alpha^2+\alpha-5)=0$$
$$\therefore\quad \alpha(\alpha-1)(11\alpha^3+14\alpha^2+4\alpha+5)=0$$

この整数解は

$$\alpha=1 \quad (0\text{は不適})$$

$$\therefore\quad A=\frac{12}{3}=4 \qquad \therefore\quad a=2$$

$$\therefore\quad b=-\frac{7}{2}$$

よって，求める放物線は

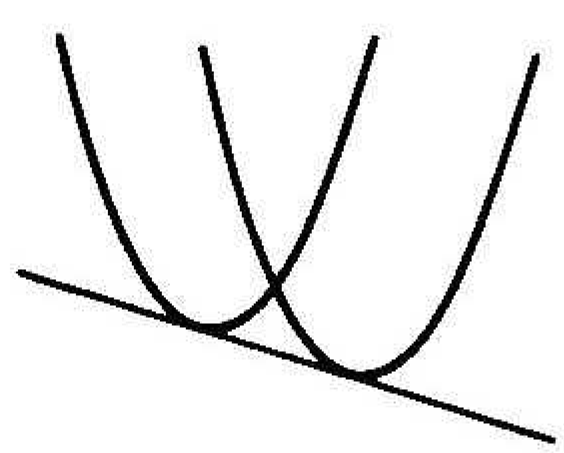
$$x=2y^2-\frac{7}{2}y+\frac{5}{2}$$

です。なお，接点は $(1,\ 1)$ であることもわかります。

＊　＊　＊

◆ このように，これらの難問は，微分法をまともに使うよりは数Ⅰのやり方のほうが簡単なことが多いのです。つまり，接する条件が重解条件となり，それは $(x-\alpha)^2$ で割りきれる条件となるのです。もう1つやってみませんか。

■練習 4. $y=x^2+ax+b$ と $y=x^2+px+q$ の共通接線の方程式を求めよ。ただし，$a\neq p$ とする。



ヒント　共通接線を

$$y=mx+n$$

としますと，接する条件は

$$(a-m)^2-4(b-n)=0$$

および

$$(p-m)^2-4(q-n)=0$$

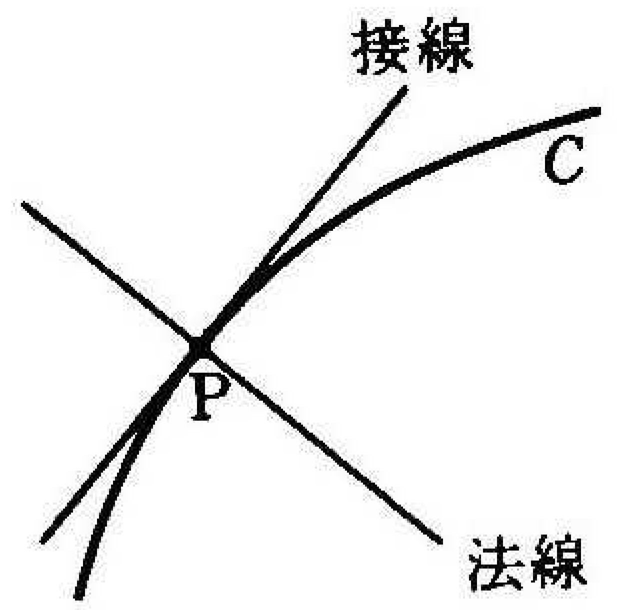
これから m，n を求めればよいでしょう。

① 法線とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆それにしても法線というコトバは何だろう。実は normal line の訳です。normal が<法>とは，ネ。

◆ 曲線C上の1点Pにおける接線をtとするとき，Pを通りtに垂直な直線を，点Pにおける曲線Cの **法線**（ほうせん）といいます。法線に関する問題は一般に接線に関する問題よりもめんどうですが，ここでは主として基礎的な問題を扱ってみましょう。



とりあえず次の問題をやってみませんか。

練習 1. 放物線 $y=x^2$ 上の点 P (1, 1) における法線の方程式を求めよ。

（ヒント）
$$y=x^2$$
$$\therefore\quad y'=2x$$
ですから，点 P(1, 1) における接線の傾きは2に等しく，したがって，法線の傾きは$-\dfrac{1}{2}$ということになります。かくて，法線の方程式は
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$
$$\therefore\quad x+2y-3=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 2. 放物線 $y=x^2+x+1$ 上の点 P (1, 3) における法線の方程式を求めよ。

（ヒント）
$$y=x^2+x+1$$
$$y'=2x+1$$
ゆえにPにおける接線の傾きは 3 に等しく，したがって法線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ に等しい。よって，求める方程式は
$$y-3=-\frac{1}{3}(x-1)$$
$$\therefore\quad x+3y-10=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

もう1つ。次をやってみませんか。

練習 3. 3次曲線
$$y=x^3-3x^2+2$$
上の点 A(1, 0) における法線の方程式を求めよ。

（解）
$$y=x^3-3x^2+2$$
$$\therefore\quad y'=3x^2-6x$$
ゆえに，点 A(1, 0) における接線の傾きは -3 で，法線の傾きは $\dfrac{1}{3}$ である。

ゆえに，求める方程式は
$$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$\therefore\quad x-3y-1=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ 次には，曲線外の定点を通る曲線の法線を求めるにはどうするか，が問題となってきます。このときは，曲線上の任意の点における法線を求め，それがその定点を通るようにしてやればいいのです。

練習 4. 放物線 $y=x^2$ の法線で，点 A (3, 0) を通るものを求めよ。

（ヒント） 曲線上の任意の点 P(t, t^2) における接線の傾きは $2t$ ですから，法線の傾きは $-\dfrac{1}{2t}$ で，したがって，その方程式は
$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$
つまり
$$x+2ty-2t^3-t=0$$
ところで，これが A(3, 0) を通るための条件は $x=3$, $y=0$ を代入して
$$3-2t^3-t=0$$

$$\therefore\quad (t-1)(2t^2+2t+3)=0$$

この実数解は $t=1$ だけ。したがって法線の方程式は

$$x+2y-3=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次には，ややめんどうな問題をやるとしましょう。

▶練習 5. (1) 点 $P(X,\ Y)$ を通って放物線 $y^2=4x$ との交点で接線と直交する直線（法線）の傾きを n とするとき，n，X，Y の間の関係を求めよ。

(2) 点 $P(X,\ Y)$ からこの放物線に3本の接線が引くことができるために X, Y の満たす条件を求めよ。　（中央大）

ヒント (1) $y^2=4x$ 上の点 $A(t^2,\ 2t)$ における接線は

$$2ty=4\cdot\frac{x+t^2}{2}$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{t}x+t$$

です。したがって，Aにおける法線は

$$y-2t=-t(x-t^2)$$

$$\therefore\quad y=-tx+(t^3+2t)$$

でしょう。これが傾き n で，点 $(X,\ Y)$ を通るための条件は

$$-t=n,\quad Y=-tX+(t^3+2t)$$

n と X, Y の関係を求めたいのですから t を消去して，次の結果が得られます。

$$Y=nX-n^3-2n \qquad \cdots\cdots(*)$$

(2) 次は，$(*)$ を n に関する3次方程式と考えたときに，異なる3つの実数解をもてばいいでしょう。さて，それには

$$f(n)=n^3-(X-2)n+Y=0$$

の極大値・極小値が異符号であることが，必要かつ十分で，$Y^2<\frac{4}{27}(X-2)^3$ となります。

注 (1)では，放物線 $y^2=ax$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は，公式

$$y_1y=a\frac{x+x_1}{2}$$

で与えられることを使っています。

では，もう1つ：――

▶練習 6. 曲線 $y=\alpha x^3-\beta x\ (\alpha\neq 0)$ の上にある2点P，Qにおいて，この曲線の接線がいずれも線分PQと垂直になっているという。

(1) このような2点P，Qは原点に関して対称な位置にあることを示せ。

(2) また，このような2点P，Qがあるためには，$(\alpha,\ \beta)$ はどのような範囲になければならないか。　（京大）

ヒント (1) yは奇関数であるから，原点に関して対称です。だから，いうなればアタリマエ!! しかし，それを，もっともらしく説明しなければならない。ここが，いうなれば，つらいところだ。さて，

$$P(x_1,\ \alpha x_1{}^3-\beta x_1)$$
$$Q(x_2,\ \alpha x_2{}^3-\beta x_2)$$

として，P，Q における接線が平行であることから

$$3\alpha x_1{}^2-\beta=3\alpha x_2{}^2-\beta$$

そして，$x_1\neq x_2$ より $x_2=-x_1$

$$\therefore\quad y_2=\alpha x_2{}^3-\beta x_2=\cdots\cdots=-y_1$$

かくて，2点P，Qは原点について対称ということになりました。

次に，(2)のほうですが：――

線分PQの傾きは $\alpha x_1{}^2-\beta$ で示されます。そして，P，Q における接線と線分 PQ の垂直条件から

$$(3\alpha x_1{}^2-\beta)(\alpha x_1{}^2-\beta)=-1$$

$x_1{}^2=X$ とおいて変形しますと

$$3\alpha^2X^2-4\alpha\beta X+\beta^2+1=0$$

$X>0$ なる少なくも1つの解をもてばよいから……，かくて，

$$|\beta|\geqq\sqrt{3}\ \text{かつ}\ \alpha\beta>0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ ともあれ，法線は計算がめんどうになることが多いものですから，基解と思わず，数Ⅰの問題と思ってやるのがコツ。

① (関数の)増減の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆増加する，といい，減少する，という。何が何に対して，増加するのであろう。そして，何が何に対して減少するのであろうか。

◆ 関数 $f(x)$ について，xが増加するとき $f(x)$ の値が増加するとき，この関数 $f(x)$ は増加の状態にあるといいます。逆に，xが増加するとき $f(x)$ の値が減少しているならば，減少の状態にあるというのです。

そして，

$f'(x)\geqq 0$ ならば，増加の状態

$f'(x)\leqq 0$ ならば，減少の状態

にあります。

(注) $f'(x)>0$ でなく，$f'(x)\geqq 0$ であることに注意してください。しかし，いたるところ $f'(x)=0$ ならば $f(x)=$一定 になって，増加でも減少でもないことになりますが，そんな特別な場合は $f'(x)$ を調べるまでもないことなんです。

練習 1. $f(x)=x^3+x^2+x+1$ の増減を吟味せよ。

(ヒント) $f'(x)=3x^2+2x+1$

この2次式は x^2 の係数>0 で，かつ，判別式をDとすると

$$D=2^2-4\cdot 3\cdot 1=4-12=-8<0$$

ですから，つねに正です。つまり $f(x)$ は増加するだけ，これを **単調増加** といいます。しかし，答案としては，判別式をとるより，次のように2乗を完成したほうがわかりやすいでしょう。

(解) $f'(x)=3x^2+2x+1$

$$=3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+1-\frac{1}{3}$$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

ゆえに $f(x)$ は単調増加である。

(注) $3x^2+2x+1=2x^2+(x+1)^2>0$

とやればいささかエレガントというものだが…。

練習 2. $f(x)=x^3-3x^2-6x+5$ の増減を調べよ。

(解) $f'(x)=3x^2-6x-6=3(x^2-2x-2)$

$$=3\{x-(1+\sqrt{3})\}\{x-(1-\sqrt{3})\}$$

ですから，増減表は下のようになります。

x		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	増加		減少		増加

答 $\begin{cases} x<1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}<x & \text{で増加} \\ 1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3} & \text{で減少} \end{cases}$

練習 3. $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+15$ の増減を吟味せよ。

(ヒント) $f'(x)=12x^3+12x^2-24x$

$$=12x(x^2+x-2)$$

$$=12x(x-1)(x+2)$$

ここで，増減表を作ってみますと下のようになります。

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

これからわかるように，

$$\left.\begin{array}{ll} x<-2 & \text{において 減少} \\ -2<x<0 & \text{において 増加} \\ 0<x<1 & \text{において 減少} \\ 1<x & \text{において 増加} \end{array}\right\}\cdots\cdots\text{答}$$

ということになります。もちろん等号をつけてはいけませんよ。なお，$f'(x)=0$ の点では符号が変わるから，増加でも減少でもないわけです。

*　*　*

◆ では，総合的な問題をいくつか扱ってみませんか。

練習 4. a，b が実数のとき，

$$f(x)=x^3+ax^2+bx$$

が実数全体の範囲で単調に増加するための条件を求めよ。特に，$a=b=3$ として，$y=f(x)$ のグラフをかけ。（東北学院大）

（解） $f'(x)=3x^2+2ax+b\geqq 0$ が，$-\infty<x<+\infty$ に対して成り立つための条件式を求めればよい。x^2 の係数は $3(>0)$ であるから，判別式をDとすると，求める条件は

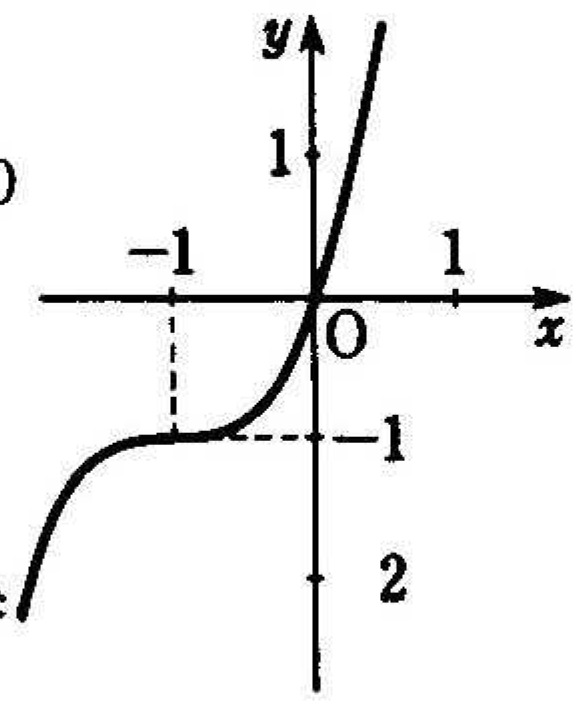
$$\frac{D}{4}=a^2-3b\leqq 0 \quad すなわち \quad b\geqq\frac{a^2}{3}$$

で与えられる。

次に，$a=b=3$ のときには

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$
$$f'(x)=3x^2+6x+3$$
$$=3(x+1)^2\geqq 0$$

これらから右のようなグラフを得る。



（注） 点対称については（☞「数Ⅰ」p.254）を参照してください。

練習 5. 関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-1$ が減少の状態にあるようなxの範囲がちょうど $1<x<5$ であるとき，実数aの値を求めよ。（鹿児島大）

（ヒント） $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-1$

$$\therefore\quad f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$$
$$=6\{x^2-(a+1)x+a\}$$
$$=6(x-a)(x-1)<0$$

この解が $1<x<5$ となるのですから

$$a=5$$

でありましょう。

答　$a=5$

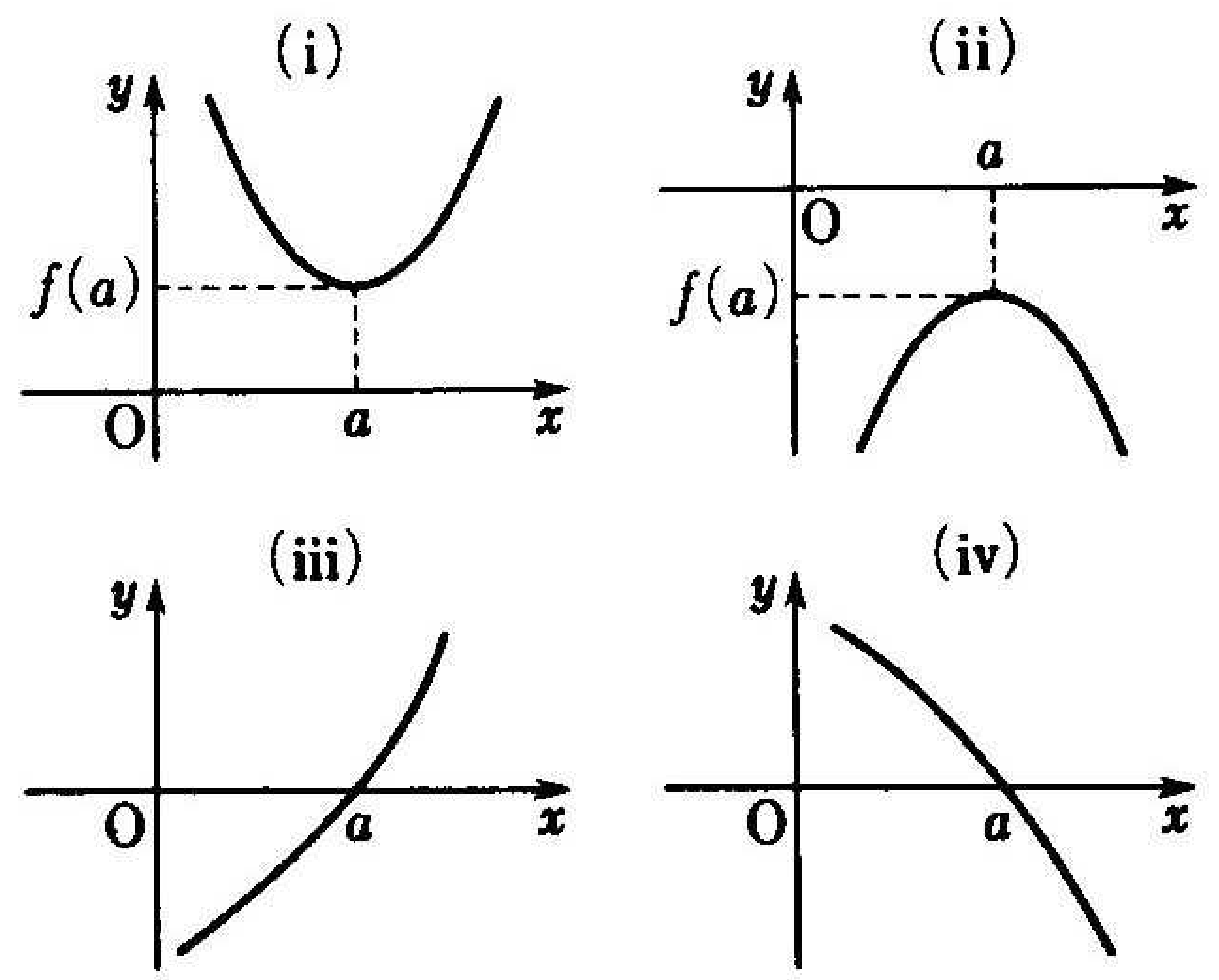
練習 6. $f(x)$ は微分可能な関数で，xが増大しつつaを通過するとき，積 $f(x)\cdot f'(x)$ の符号が負から正に変わるという。$y=f(x)$ のグラフの $x=a$ における状態を調べよ。（大阪教育大）

（ヒント） この種のものはとっつきにくくていやですね。さて：――

$f(x)\cdot f'(x)$ が $x=a$ で負から正に変わるから，$f(x)$ と $f'(x)$ の符号の組合せは次の4つの場合があります。

	x	a	$f(a)$
(i)	$f'(x)$ $f(x)$	$-\quad+$ $+\quad+$	極　小 $f(a)\geqq 0$
(ii)	$f'(x)$ $f(x)$	$+\quad-$ $-\quad-$	極　大 $f(a)\leqq 0$
(iii)	$f'(x)$ $f(x)$	$+\quad+$ $-\quad+$	増加の状態 $f(a)=0$
(iv)	$f'(x)$ $f(x)$	$-\quad-$ $+\quad-$	減少の状態 $f(a)=0$

なお，上の4つを図示しますと次のようになります。



（注） 上の問題で $f(x)\cdot f'(x)$ の符号が正から負に変わるという条件から，正，0，負としましたが，$x=a$ で $f(x)\cdot f'(x)$ が不連続になることは起きないでしょうか。$f(x)$ が微分可能という条件から，その心配はありません。

なお，$f(x)$ が微分可能で $f(x)\cdot f'(x)$ の符号が正から負に変わるときはどうなるでしょうか，考えてみてください。

また，(iii)と(iv)で，$f'(a)=0$ となる場合も起こりましょう。この場合には，$x=a$ でx軸に接していますが，それぞれ，増加の状態および減少の状態にあることに変わりはありません。

極大・極小と微分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆極大・極小をゴクダイ・ゴクショウと読んではいけない。意味はまったくちがってしまう。ハテ，ドンナ意味？

◆ 関数 $f(x)$ が増加から減少に変わる点を極大点といい，その点における関数の値を**極大値**（きょくだいち）といいます。また，減少から増加に変わる点を極小点といい，その点における関数の値を**極小値**といいます。

したがって極大点や極小点を求めるには，関数の増減を表に示すと見やすいわけ。これを**増減表**と呼んでいます。

では，具体的な問題へ：──

練習 1. $f(x)=x^2-4x+3$ の極値を求めよ。

ヒント　極値というのは極大値および極小値ということです。さて

$$f'(x)=2x-4=2(x-2)$$

ですから，増減表を作ってみますと下の通り。

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1 (極小)	↗	$+\infty$

つまり $x=2$ で極小値 -1 をとることがわかります。

練習 2. $f(x)=x^3-3x^2+2$ の極値を求めよ。

解　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

ゆえに下のような増減表を得る。

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	2 (極大)	↘	-2 (極小)	↗	

答　$\begin{cases} 極大値\ \ 2\ (x=0) \\ 極小値\ -2\ (x=2) \end{cases}$

練習 3. $f(x)=x^4-2x^2+3$ の極値を求めよ。

解　$f'(x)=4x^3-4x$
$=4x(x^2-1)$
$=4(x-1)x(x+1)$

ゆえに下のような増減表を得る。

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	2 (極小)	↗	3 (極大)	↘	2 (極小)	↗	

ゆえに $x=\pm1$ で極小値 2 をとり，$x=0$ で極大値 3 をとる。

答　$\begin{cases} 極小値\ 2\ (x=\pm1) \\ 極大値\ 3\ (x=0) \end{cases}$

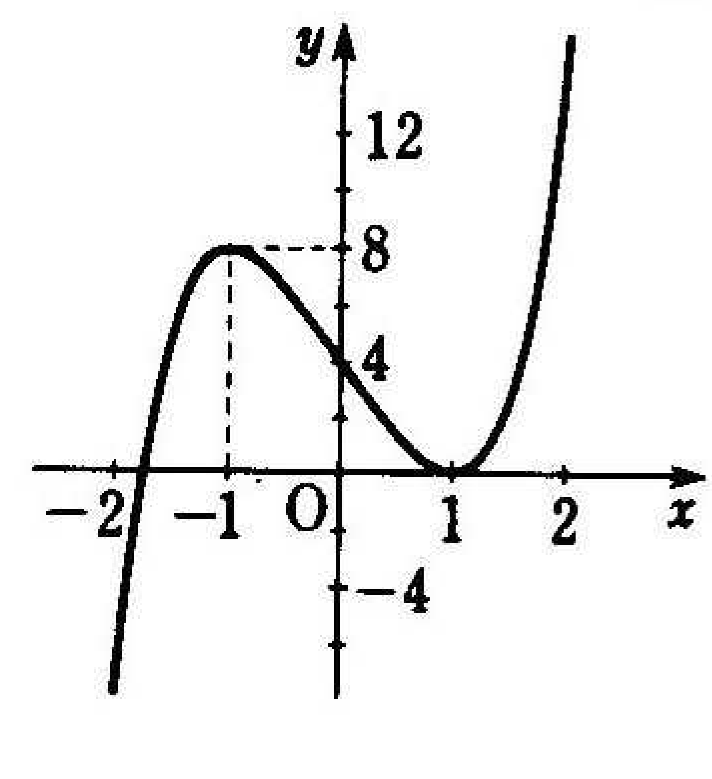
練習 4. $f(x)=x^5-5x+4$ の増減・極値を調べてグラフの概形をかけ。

ヒント　$f'(x)=5x^4-5$
$=5(x^4-1)$
$=5(x^2+1)(x-1)(x+1)$

ゆえに増減表は下のようになります。

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	8 (極大)	↘	0 (極小)	↗	

だから，グラフは右のようになります。実は上の材料だけではまずい。$x=\pm2$ のときの値を押えておくことが必要です。



*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. 関数 $f(x)=x^3-3a^2x+2$ の極大値と極小値の差が4になるように a の値を定めよ。ただし，$a>0$ とする。（学習院大）

ヒント　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

ですから極大値は $2+2a^3$，極小値は $2-2a^3$ です。したがって

$$4a^3=4 \qquad \therefore \quad a=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 6. $|x^3-6x+a|$ の極大値，極小値を求めよ。（早大）

ヒント　まず x^3-6x+a の変化を調べてみましょう。

$$f(x)=x^3-6x+a$$

とおくと，

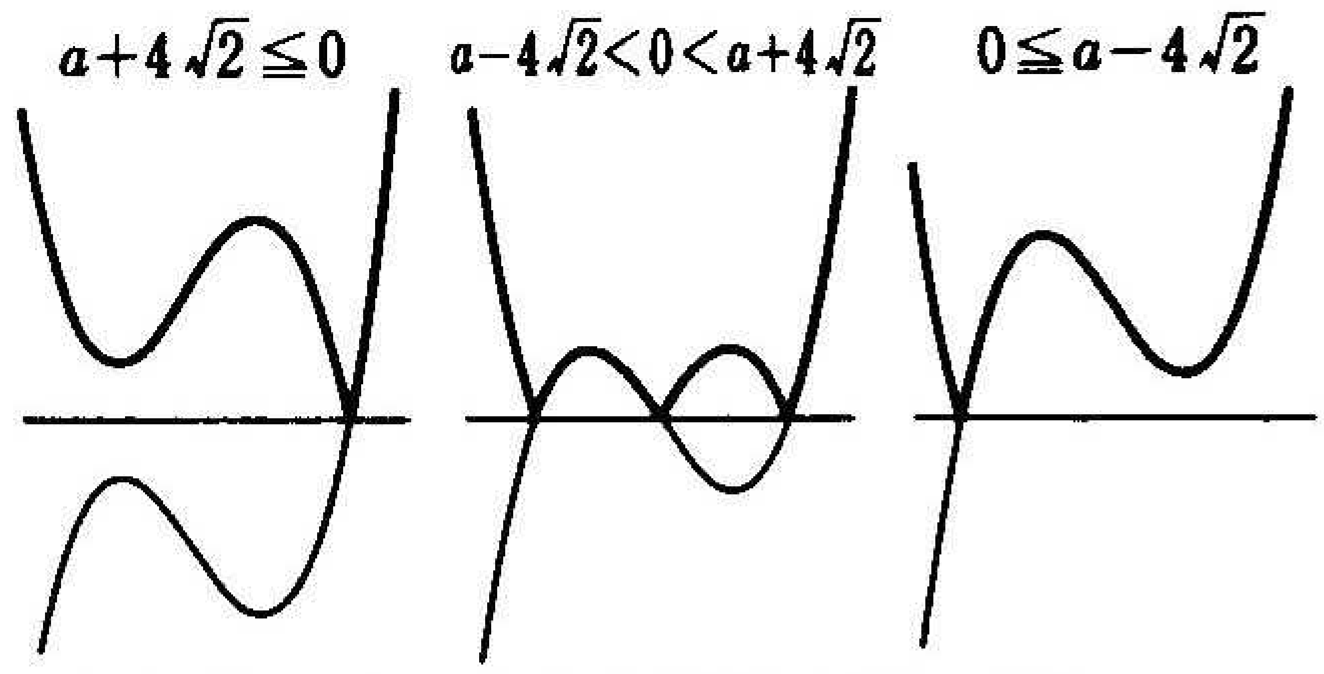
$$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

したがって，

極大点は $(-\sqrt{2},\ a+4\sqrt{2})$

極小点は $(\sqrt{2},\ a-4\sqrt{2})$

です。だから，$|f(x)|$ のグラフは下のようになります。



したがって，求める結果は下の通り。

a	極大値	極小値
$a\leqq-4\sqrt{2}$	$-a+4\sqrt{2}$	$-a-4\sqrt{2}$, 0
$-4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$	$a+4\sqrt{2}$, $-a+4\sqrt{2}$	0
$4\sqrt{2}\leqq a$	$a+4\sqrt{2}$	$a-4\sqrt{2}$, 0

練習 7. x の関数

$$y=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$$

が極大値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。（阪大）

ヒント　4次関数 $y=f(x)$ が極大値をもつのは $y'=f'(x)=0$ が相異なる3つの実数解をもつときでした。これを知っていれば，べつにめんどうはありません。

$$y'=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x$$
$$=4x\{x^2-3(a-1)x+(a^2-1)\}$$

ですから，結局求める条件は

$$x^2-3(a-1)x+(a^2-1)=0$$

が0でない相異なる2つの実数解をもてばいいでしょう。さて，それは

$$a^2-1\neq 0$$

かつ　$\{3(a-1)\}^2-4(a^2-1)>0$

です。これを解くと

$$a<1,\ a>\frac{13}{5} \quad (a\neq-1) \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 8. 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-6x+2$ は $x=\alpha$，$x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるものとし，曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $A(\alpha, f(\alpha))$，$B(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線を l とする。l の方程式を求めよ。また，曲線 $y=f(x)$ と直線 l との交点（A，B を除く）を求めよ。（東大）

ヒント　$f'(x)=6(x^2-x-1)$

ゆえに α，β は $x^2-x-1=0$ の2つの解で

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$

ゆえに l の傾きは

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$
$$=2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)-6$$
$$=2\cdot2-3\cdot1-6=-5$$

したがって，l の方程式は

$$y-f(\alpha)=-5(x-\alpha)$$
$$\therefore \quad y=-5x+(2\alpha^3-3\alpha^2-\alpha+2)$$

$\alpha^2-\alpha-1=0$ より

$$y=-5x+1$$

次に $y=f(x)$ と上の方程式を連立させて解くのはべつにめんどうはない。その結果は

$$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$$

です。　$\boxed{答}$ $y=-5x+1$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

◐ 最大・最小と微分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆最大・最小と微分法とは深い関係にあります。しかし，最大・最小と極大・極小を混同してはいけません。

◆ 基解に出てくる最大・最小問題には，数Iにあるようなめんどうなものがありません。大部分は増減を調べ，グラフをかいて，与えられた限界内で調べると，最大値や最小値が求められる，というしくみになっています。では，やってみませんか。

練習 1. $0\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=x^3-6x$ の最大値，最小値を求めよ。

(ヒント) $y=f(x)$ のグラフをかいて，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲を調べてみればよいでしょう。

$$f'(x)=3x^2-6=3(x^2-2)$$
$$=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

増減表を作ると下の通り。

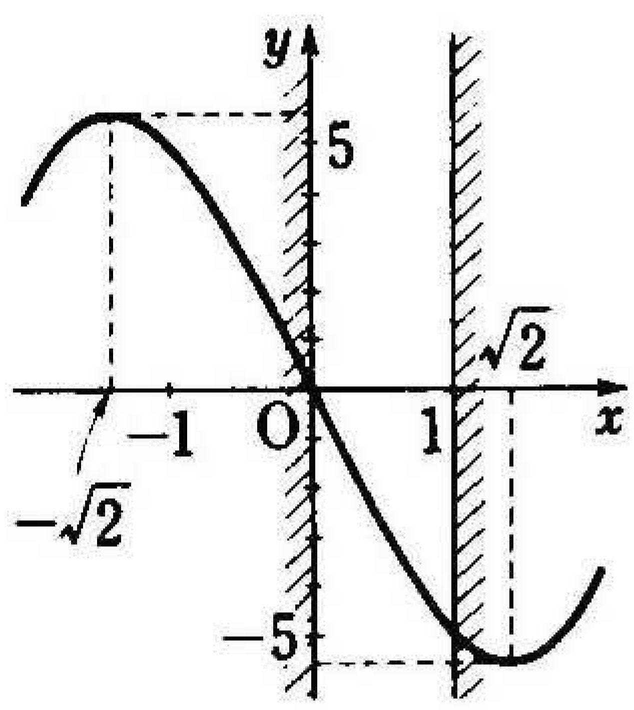
x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$ max.	↘	$-4\sqrt{2}$ min.	↗

そこでグラフは右の通りになります。だから，明らかに

最大値 0 $(x=0)$

最小値 -5 $(x=1)$

となります。



(注) わかってしまえば，グラフをかくほどのこともなかったのです。つまり $0\leqq x\leqq 1$ の範囲では $f'(x)<0$，したがって単調減少，したがって，……というわけ。かくて，増減表も要らなかったわけです。

しかし，一応グラフをかくことにきめておくほうがいいでしょう。

練習 2. $0\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=|x^2-3|x$ の最大値，最小値を求めよ。

(解) $0\leqq x\leqq 1$ において $x^2-3<0$

$$\therefore\quad f(x)=-(x^2-3)x$$
$$=-x^3+3x$$
$$\therefore\quad f'(x)=-3x^2+3$$
$$=-3(x^2-1)\geqq 0$$

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ において最小値 0 をとり，$x=1$ において最大値 2 をとる。

[答] 最小値 0，最大値 2

* * *

◆ では，ややめんどうな問題をやってみましょう。

練習 3. $10n^2-n^3$ の値を最大にする正の整数 n を求めよ。 (中央大)

(ヒント) 2つのやり方があります。1つは数Iのやり方，1つは基解のやり方です。この機会に両方ともやってみましょう。

(解) 1.(数Iによる場合)

$$f(n)=10n^2-n^3$$

とおくと

$$f(n+1)-f(n)$$
$$=\{10(n+1)^2-(n+1)^3\}-(10n^2-n^3)$$
$$=-3n^2+17n+9$$
$$=-3\left(n-\frac{17+\sqrt{397}}{6}\right)\left(n-\frac{17-\sqrt{397}}{6}\right)$$
$$=-3(n-6.15\cdots)(n+0.48\cdots)$$

ゆえに，

$n\leqq 6$ のとき

$$f(n+1)>f(n)$$

$n\geqq 7$ のとき

$$f(n+1)<f(n)$$

$\therefore\ f(1)<\cdots\cdots<f(6)<f(7)>f(8)>\cdots\cdots$

ゆえに求める n の値は 7 である。

(解) 2.(基解による場合) x を実数とし，

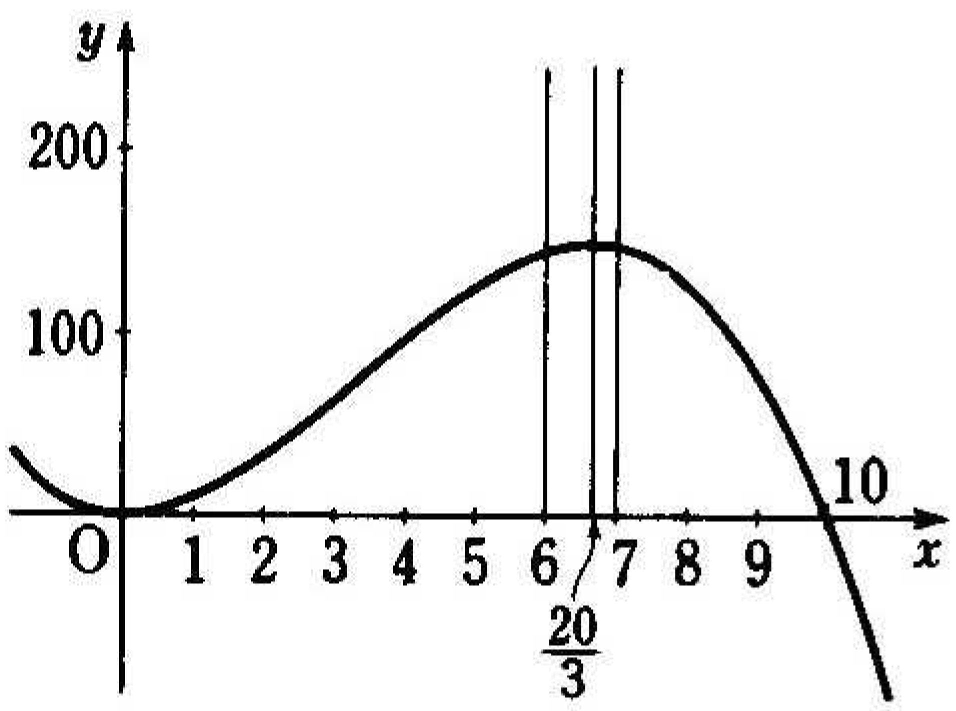
$$f(x)=-x^3+10x^2$$

とおくと

$$f'(x)=-3x^2+20x=-3x\left(x-\frac{20}{3}\right)$$

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとり，$x=\frac{20}{3}$ で極大値 $\frac{4000}{27}$ ($\fallingdotseq 148.15$) をとる。

ゆえにグラフは右のようになる。



ゆえに，求める最大値は $f(6)$ と $f(7)$ のうち大きいほうである。

ところが

$$f(6)=144$$
$$f(7)=147$$

ゆえに，求める n の値は 7 である。

答 7

5/18

練習 4. $x+2y=1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，x^3+2y^3 の最大値，最小値を求めよ。 (慶大)

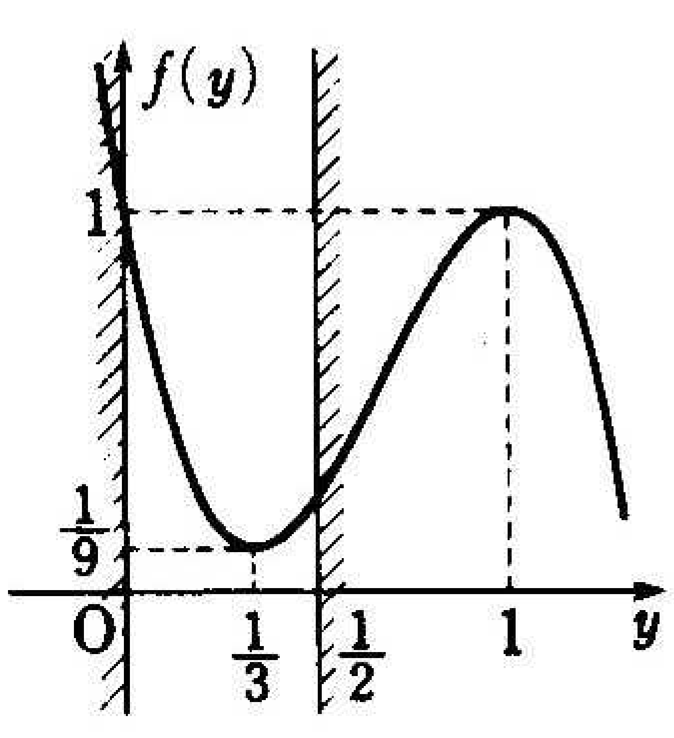
(解) $x=1-2y$

$$\therefore \quad x^3+2y^3$$
$$=(1-2y)^3+2y^3$$
$$=-6y^3+12y^2-6y+1=f(y)$$

とおけば

$$f'(y)=-18y^2+24y-6$$
$$=-6(y-1)(3y-1)$$

ゆえに $f(y)$ のグラフは右のようになる。



ところが与えられた条件から

$$0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}$$

であるから，求める最大値は 1 ($x=1$，$y=0$ のとき)，最小値は $\frac{1}{9}$ $\left(x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3}\right)$ であることがわかる。

答 最大値 1，最小値 $\frac{1}{9}$

4/28

練習 5. a を負でない実数とするとき，関数 $f(x)=2x^3-3(a-1)x^2-6ax$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最小値を a で表せ。 (宇都宮大)

(ヒント) x にも範囲がある。a も 2 か所に入っている。これはめんどうそうな予感がしますね。しかし，このようなものは $f'(x)$ が必ずといっていいくらい因数分解できるものなのです。さて，どうかな。

$$f'(x)=6x^2-6(a-1)x-6a$$
$$=6\{x^2-(a-1)x-a\}$$
$$=6(x+1)(x-a)$$

ここで場合分けが必要になります。

(i) $0 \leqq a < 2$ のとき

$-1<x<a$ では $x+1>0$ ですから $f'(x)<0$ で，$a<x \leqq 2$ では $f'(x)>0$ となります。つまり，$f(x)$ は $x=a$ で減少から増加に変わる。つまり，$x=a$ で最小値をとるでしょう。

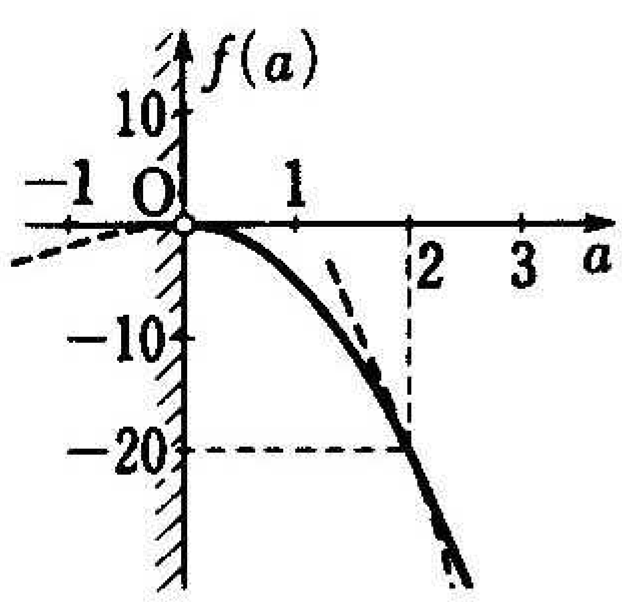
(ii) $a \geqq 2$ のとき

$-1<x<2$ では $x+1>0$，$x-a \leqq 0$ ですから $f'(x)<0$，したがって $f(x)$ は減少します。だから，$x=2$ で最小値をとるハズ。

上の結果をまとめると次のようです。

答 $\begin{cases} 0 \leqq a<2 \text{ のとき，} x=a \text{ で最小で，} \\ \qquad \text{最小値：} -a^3-3a^2 \\ a \geqq 2 \text{ のとき，} x=2 \text{ で最小で，} \\ \qquad \text{最小値：} 4(7-6a) \end{cases}$

(注) これでいいのですが，最小値 $f(a)$ を a の関数と考えてグラフをかいてみると，右のようになります。



グラフのかき方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆グラフをかけること，グラフを使えること。これは高校数学の最重要課題であることを忘るることなかれ。

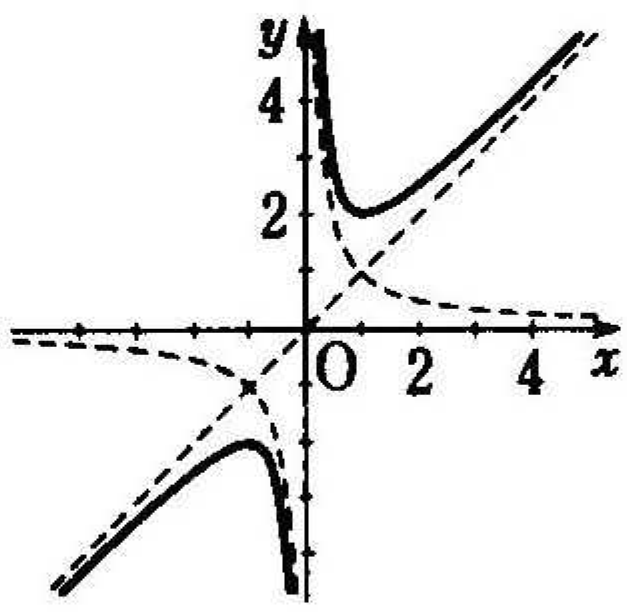
◆ グラフをかく際の手順をまとめておくことにしましょう。

まず第1はグラフのおおよその形がわかるものはすぐかいてみることです。そのことを答案に書く書かぬはべつとして，です。

5/15

練習 1. $y=x+\dfrac{1}{x}$ のおおよその形はどうか。

ヒント $y=x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを合成すればよい。右図参照。



$y=x^2+\dfrac{1}{x}$, $y=x+\dfrac{1}{x^2}$,

$y=x^3+\dfrac{2}{x}$ など，すべてこの方法で大体の形はわかります。また，

$y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ なら $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ と変形してから同じように扱えます。

5/25

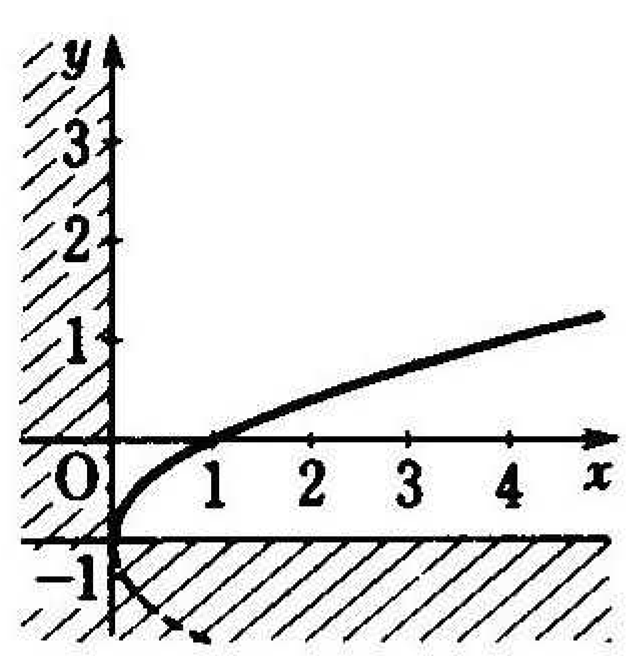
* * *

◆ 第2に，グラフの存在範囲をすぐ求めておくと便利です。少なくも，つまらぬマチガイを防止することができます。

5/15

練習 2. $y=\sqrt{x}-1$ のグラフをかけ。

ヒント $y+1=\sqrt{x}\geqq 0$ ですから $y\geqq -1$. また，いうまでもなく $x\geqq 0$ ですから，グラフは，右図の斜線の部分には存在しません。



$y=|x|-1$ や，

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ や，

$y=x^2(x-1)$ などでも同じことです。

* * *

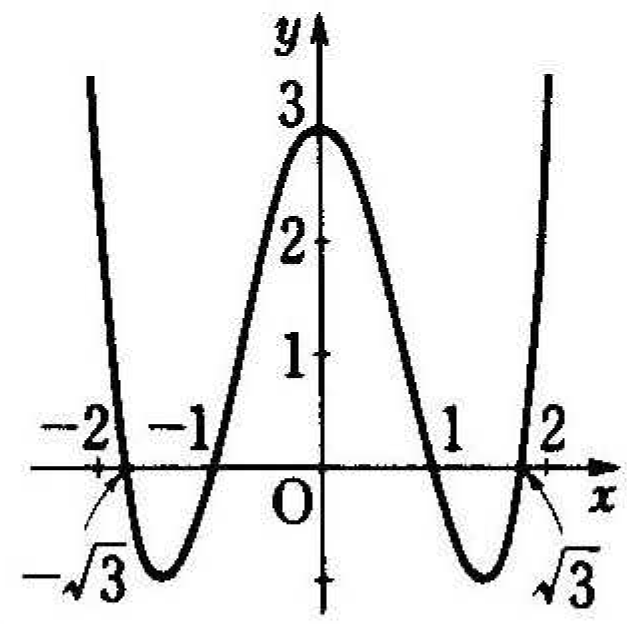
◆ 第3はグラフと座標軸との交点は，求まるものなら必ず求めておくこと。

練習 3. $y=x^4-4x^2+3$ のグラフの概形をかけ。

ヒント $x^4-4x^2+3=0$ とおいてみますと

$(x^2-1)(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\sqrt{3}$



つまり x 軸と4点で交わります。また，y 軸とは (0, 3) で交わります。あとは増減を調べ，対称性に気がつけば，ほぼ正確な形がかけるでしょう。

* * *

◆ 第4は増減，極値を調べること。これはいうまでもないこと。詳しくは（☞ p.204）。

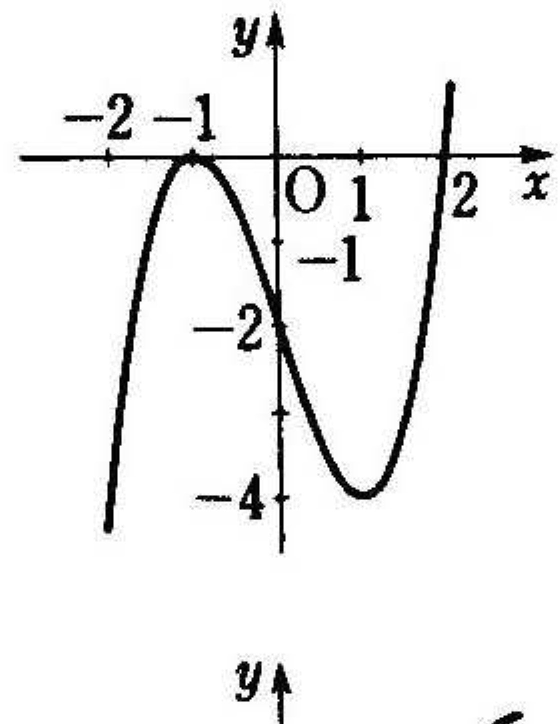
第5は $|x|\longrightarrow\infty$ の部分を必ずチェックすることです。

練習 4. $y=x^3-3x-2$ のグラフをかけ。

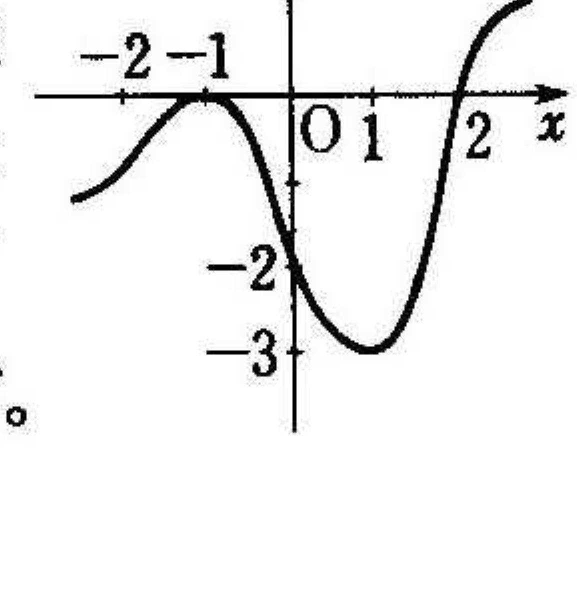
ヒント $y'=3x^2-3$ ですから

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y'=+\infty$



でグラフは急激に右上に上がってゆくハズ。ところが，下のように横に流す人が多い。これでは $\lim\limits_{x\to\infty} y=+\infty$ ではあっても $\lim\limits_{x\to\infty} y'=0$ になるハズ。これはいけない。



* * *

◆ 次には，やや高等なことを2，3やっておきましょう。ムリにやることはないし，ムリに証明することもないし，ムリにオボエルこともないが，……。しかし，便利です。

第6に，いくつかの因数の積になっているときは，その **因数が0になる付近のグラフのもようがすぐわかる** のです。こんなことをいっても何のことかわからないでしょう。具体例にいきましょう。

練習 5. $y=(x-1)^2(x+2)^2$ のグラフをかけ。

ヒント　$y=(x-1)^2(x+2)^2$ の右辺は $(x-1)^2$ と $(x+2)^2$ の積になっていますね。$(x-1)^2$ は $x=1$ で0になります。

そこで，$x=1$ の付近では，このグラフは，ほぼ

$$y=(1+2)^2(x-1)^2=9(x-1)^2$$

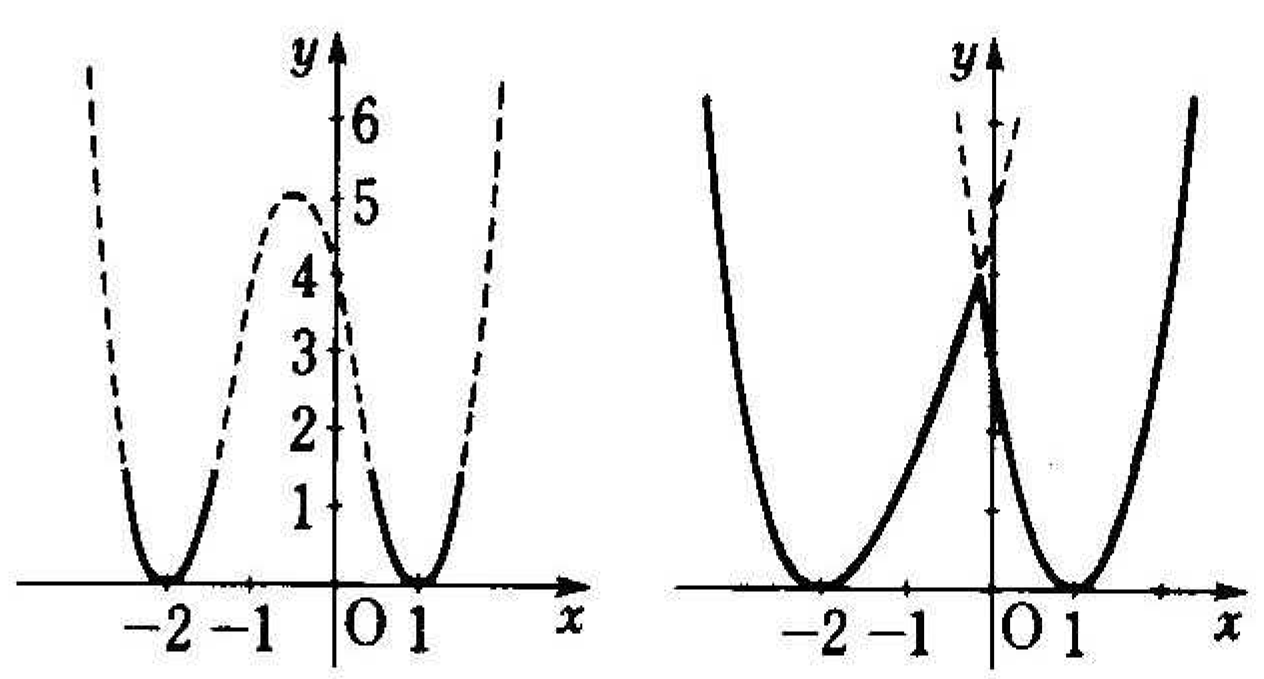
になるのです。

同じく $x=-2$ の付近では

$$y=(-2-1)^2(x+2)^2=9(x+2)^2$$

にほぼ等しくなるのです。あとは，この2つをナメラカに結ぶといい。

もちろん，これは解答に書かないほうがいい。ゴタゴタするから。しかし，こうして，結果がわかってしまうと，あとはふつう通りやるにしてもラクではありませんか。



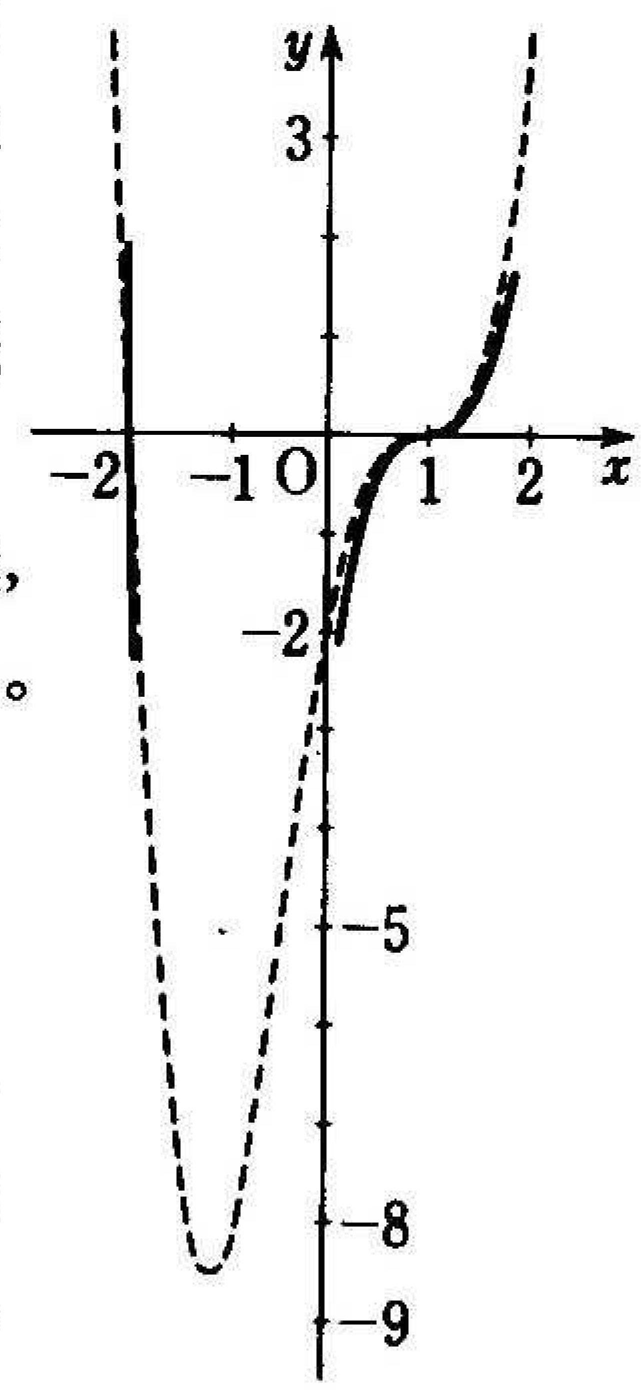
なお，上図の右のほうのように，2つのグラフをかいて結び目をとんがらせたりしてはいけません。やる人が多いので，念のため注意しておくのです。

さあ，次はどうでしょう：——

練習 6. $y=(x-1)^3(x+2)$ のグラフをかけ。

ヒント　$y=3(x-1)^3$ と $y=-27(x+2)$ のグラフをナメラカに結ぶのです。

もちろん，微分して調べないと，極小値は求められませんが，はじめから，グラフの概形がわかってしまう，ということは便利至極，といってよいでしょう。



＊　＊　＊

◆ 次にもう1つ。

与えられた方程式を変形して，グラフの存在範囲や形の要点をみつけることも有効です。これは基解よりは微積で特に大切なことですが……。ともあれ，具体例へ。

練習 7. $y=x^4-x^3+x+1$ のグラフの概形をかけ。

ヒント　$y'=4x^3-3x^2+1=0$ は解けないから困ってしまう。しかし，次のようにして考えることもできます。

$$y-x^4-1=-x(x+1)(x-1)$$

と変形できますから

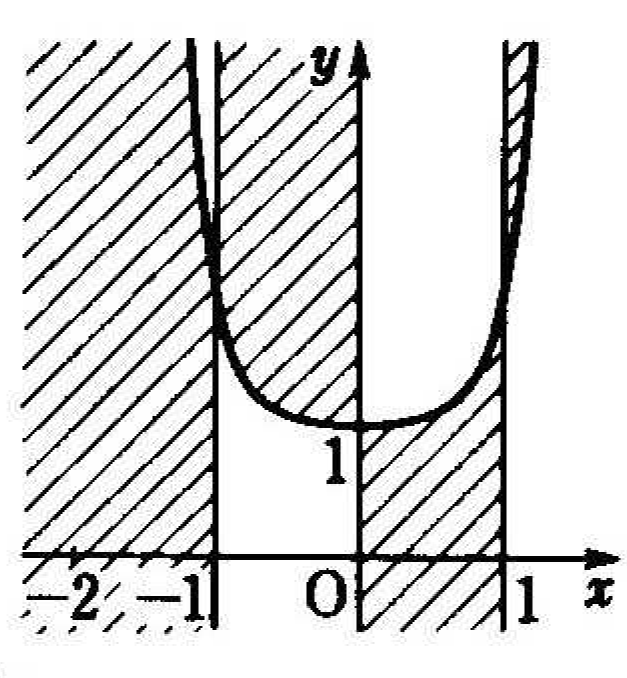
$x>1$ あるいは $0>x>-1$ では

$$y-x^4-1<0$$

$1>x>0$ あるいは $-1>x$ では

$$y-x^4-1>0$$

このことから，グラフは右の図の斜線を引いた部分にはありえないことがわかります。



まだ変形はいろいろできますよ。あとは自分で考えてみてください。

◑ 絶対値のついた関数のグラフ

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆絶対値の入った関数のグラフをかくのに，機械的に覚えるのはキケン至極です。きまった手順を忠実に守るをよしとす。

◆ 絶対値のついた関数の扱い方は，数Ⅰとまったくちがいがありません。ただ，絶対値をとったあとで，微分して増減を調べたり，ということで基解らしくなるわけです。さっそくながら，次の練習1. にいきませんか。

4/5

練習 1. $f(x)=x^2|x-3|$ のグラフをかけ。

ヒント 絶対値記号をとると

$$f(x)=\begin{cases} x\geqq 3: & x^3-3x^2 \\ x<3: & -x^3+3x^2 \end{cases}$$

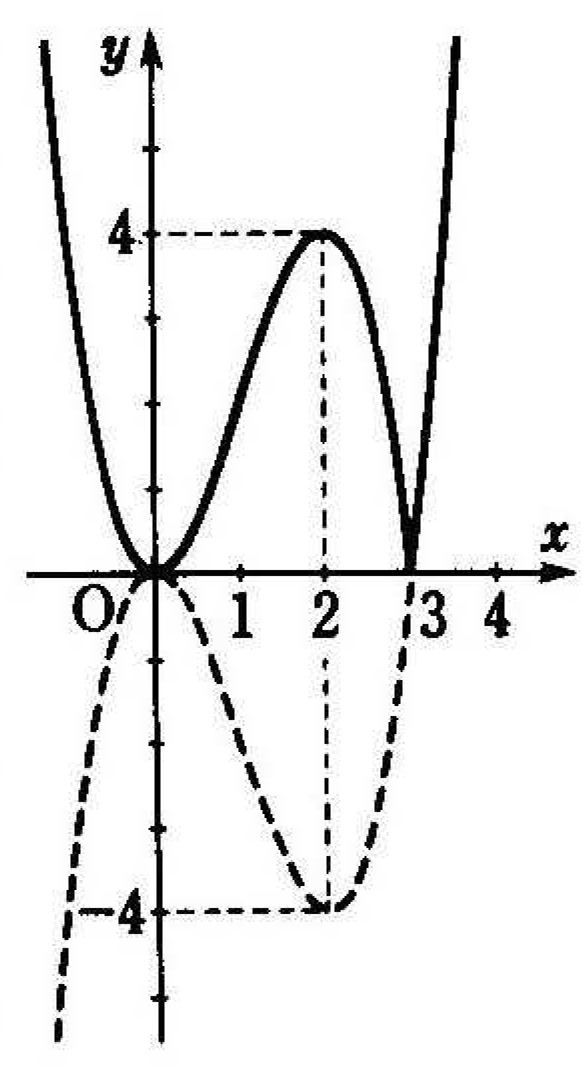
です。さて，$y=x^3-3x^2$ のグラフをかくために微分してみると

$$\begin{aligned} y'&=3x^2-6x \\ &=3x(x-2) \end{aligned}$$

増減表は下のようになります。

x		0		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗	0 max.	↘	-4 min.	↗

これから，$y=x^3-3x^2$ のグラフは下のようになります。せっかくかいたのに，この曲線のうち採用できるのは $x\geqq 3$ の部分というのだからムダなようにも見えますが，サニアラズ!!



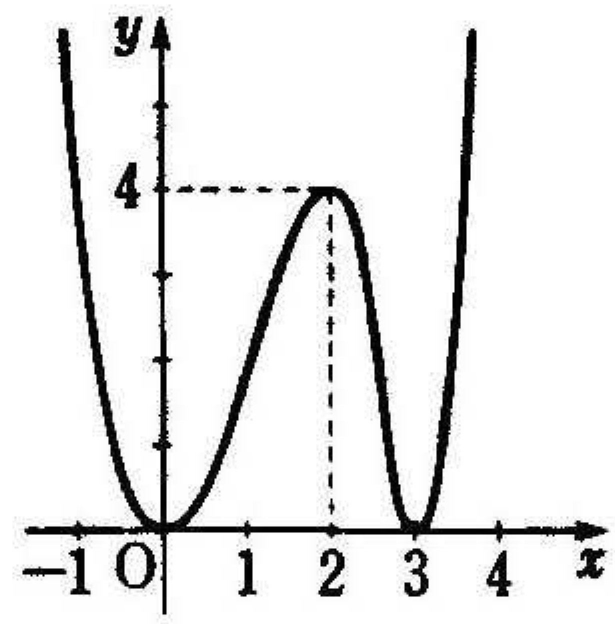
$x<3$ ではちょうど符号を変えただけの

$$y=-x^3+3x^2$$

ですから，x 軸に関して対称にすればいい。

かくして求めるものは右の図の実線部分です。

注 このようなグラフをかく問題を出題していつも意外に思われるのは大部分の人が $x=3$ のところでトンガラセナイで右のようにマルクにすることです。これには何か心理学的な原因があるにちがいない。ご注意ありたし。



練習 2. $f(x)=(x^2-1)|x^2-1|$ のグラフをかけ。

解

$$f(x)=\begin{cases} |x|\geqq 1 \text{ のとき} & (x^2-1)^2 \\ |x|<1 \text{ のとき} & -(x^2-1)^2 \end{cases}$$

いま，

$$y=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$$

とおくと

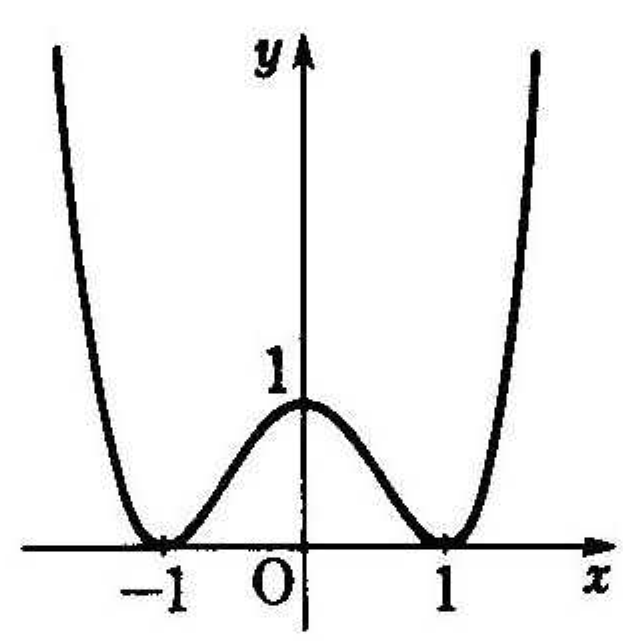
$$\begin{aligned} y'&=4x^3-4x=4x(x^2-1) \\ &=4x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

増減表は下のようです。

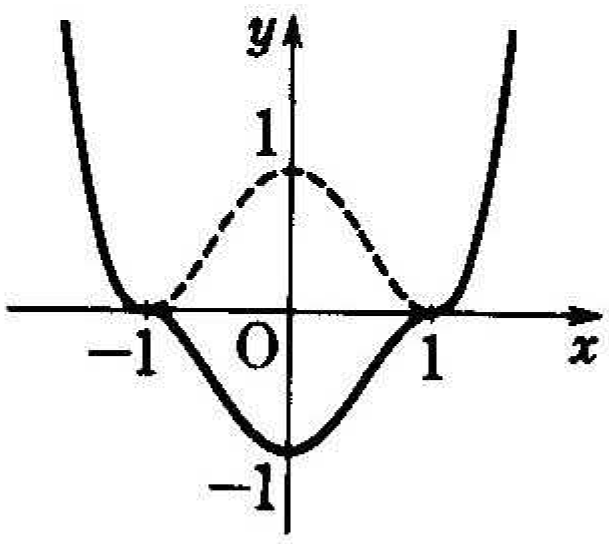
x		-1		0		1	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	↘	0 min.	↗	1 max.	↘	0 min.	↗

したがって $y=(x^2-1)^2$ のグラフは下のようである。

次に，$y=-(x^2-1)^2$ のグラフは，これを x 軸に関して折り返したものであるから，結局求めるグラフは次ページのようになる。



（注）絶対値のついたグラフがすべてこのように折り返しが効くというわけではありませんよ。例えば，次がそうです。



■練習 3. $f(x)=x^3-3|x|$ のグラフをかけ。

（解）$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=x^3-3x$

　　$x<0$ のとき　$f(x)=x^3+3x$

である。

さて，$f(x)=x^3-3x$ $(x\geqq 0)$ について

$$f'(x)=3(x+1)(x-1)$$

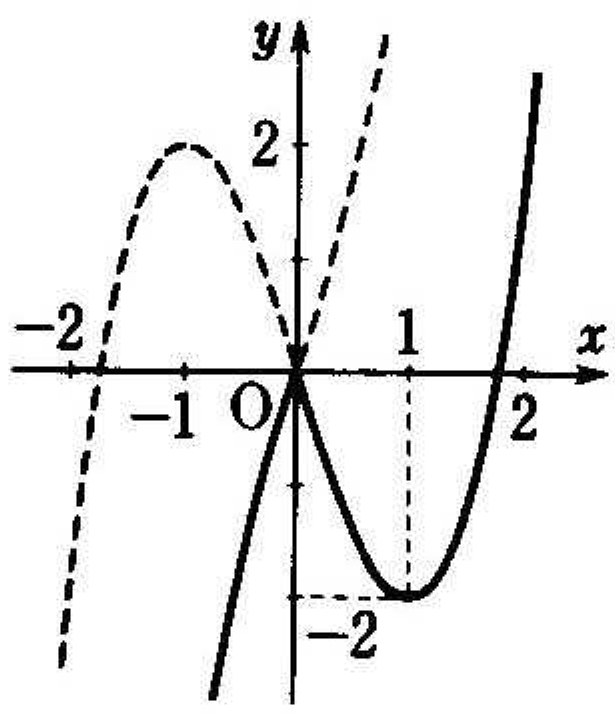
であるから，$x=1$ で極小値 -2 をとり，原点および点 $(\sqrt{3},\ 0)$ を通る。

また，$f(x)=x^3+3x$ $(x<0)$ について

$$f'(x)=3(x^2+1)>0$$

であるから，単調増加で原点を通る。

これらをもとにしてグラフをかくと右のようになる。



（注）$f(x)=x^3-3|x|$ の極値を求めよ，というのであれば

$x=0$ で極大値　0

$x=1$ で極小値 -2

をとることがわかります。

*　　*　　*

◆ 次は，絶対値のついたグラフを利用する問題をやってみませんか。

■練習 4. a を正の定数とするとき，関数

$$f(x)=(a-x)|3a-x|$$

について，次の問に答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかき，極値に対する x，y の座標を記入せよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値 Nを求めよ。　　（法政大）

（ヒント）(1) $f(x)=(a-x)|3a-x|$ $(a>0)$

$x\leqq 3a$ のとき

$$f_1(x)=(a-x)(3a-x)$$
$$=x^2-4ax+3a^2$$
$$=(x-2a)^2-a^2 \quad \cdots\cdots①$$

$x>3a$ のとき

$$f_2(x)=(a-x)(x-3a)$$
$$=-x^2+4ax-3a^2$$
$$=-(x-2a)^2+a^2 \quad \cdots\cdots②$$

ですから，次のような増減表が得られます。

x		$2a$		$3a$	
$f(x)$	↘	$-a^2$ min.	↗	0 max.	↘

したがって，グラフは下のようになります。

そして，極値は

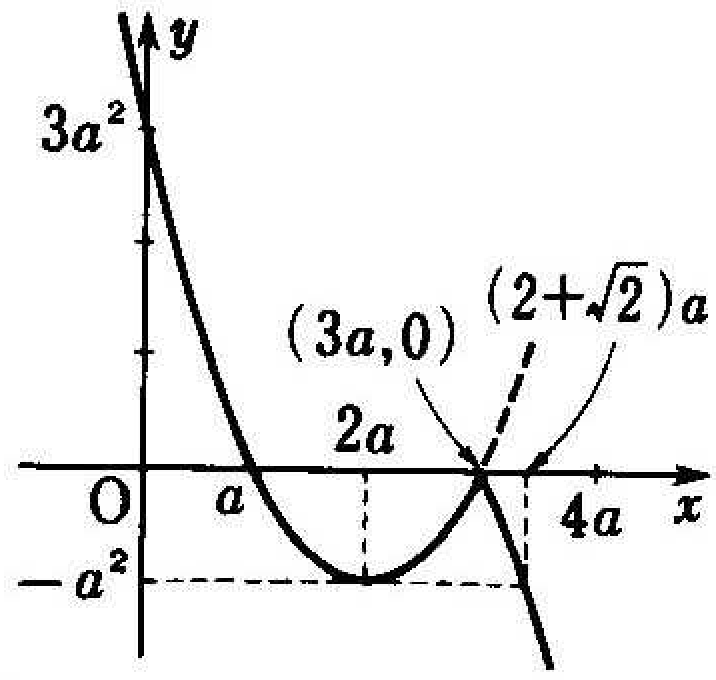
$x=2a$ のとき

極小値 $-a^2$

$x=3a$ のとき

極大値 0

をとるわけです。



(2) $x>3a$ かつ

$$-x^2+4ax-3a^2=-a^2$$

となる x は

$$x^2-4ax+2a^2=0$$

を解いて得られ，$x=(2+\sqrt{2})a$ です。

そこで，1 と $2a$ と $(2+\sqrt{2})a$ の大小によって場合分けをする必要が起こってきます。ここはこのセクションの主眼点ではありませんから，結果のみあげておくことにしましょう。

$\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき

$$N=f_1(1)=(a-1)(3a-1)$$

$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$N=f_1(2a)=-a^2$$

$0<a<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$N=f_2(1)=(a-1)(1-3a)$$

3 次方程式と微分法

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆微分法の方程式への応用に強くなりたいなら，何はともあれ，3次方程式の場合を徹底的にやることです。

◆ 3次方程式の解の吟味に微分法を使ってみよう，というのが，ここの目的です。

■練習1. 3次方程式 $x^3+2x^2+3x+1=0$ は実数解をいくつもつか。

ヒント　$f(x)=x^3+2x^2+3x+1$ のグラフが x 軸と共通点をいくつもつか，調べてみればよいでしょう。さて，

$$f'(x)=3x^2+4x+3$$

ところが，この式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-3\cdot3=4-9=-5<0$$

ゆえに

$$f'(x)>0$$

だから，$f(x)$ は単調増加します。つまり $y=f(x)$ のグラフは $-\infty$ から $+\infty$ まで単調に増加するのですから，x 軸とただ1回だけ交わることがわかります。ゆえに，実数解は1個です。

答　1個

5/20

■練習2. 3次方程式 $x^3-3x^2-a=0$ の実数解の個数を吟味せよ。

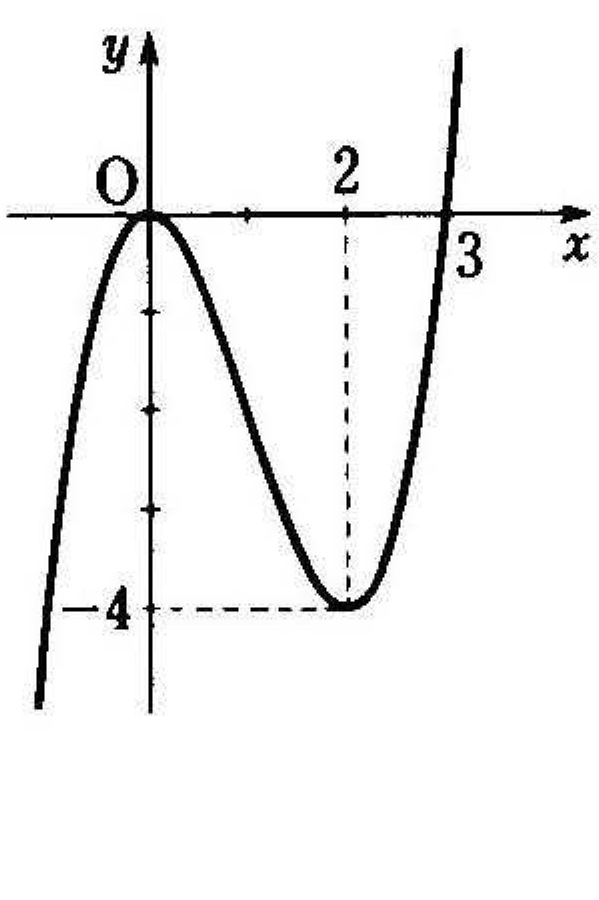
ヒント　$f(x)=x^3-3x^2-a$ のグラフが x 軸と何回交わるか調べてみればいいが，それよりは，与えられた方程式を

$$x^3-3x^2=a$$

と変形し，$y=x^3-3x^2$ と $y=a$ との共通点を調べたほうがぐっと楽になります。

$$y=x^3-3x^2$$

のグラフは右のようになります。ゆえに



$a>0$　：1個
$a=0$　：3個（2つは重複解）
$0>a>-4$：3個
$a=-4$：3個（2つは重複解）
$-4>a$　：1個

5/20

■練習3. 3次方程式 $x^3-3a^2x+1=0$ の実数解の個数を求めよ。

解　$f(x)=x^3-3a^2x+1$

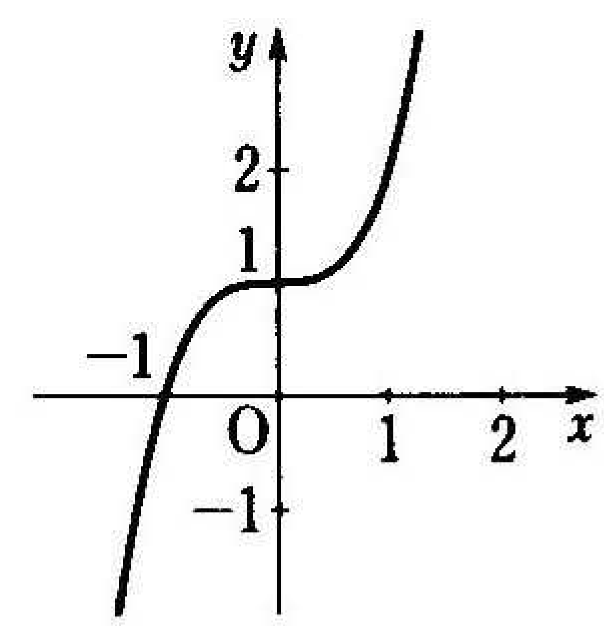
とおくと

$$f'(x)=3x^2-3a^2$$
$$=3(x+a)(x-a)$$

$a=0$ のときは

$$f'(x)\geqq0$$

ゆえに $f(x)$ は単調増加で，グラフは右のようになるから，実数解は1個である。



$a\neq0$ のときは極大値，極小値をもち，その積は

$$f(a)f(-a)=(1-2a^3)(1+2a^3)$$

であるから

$a>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ あるいは $a<-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき x 軸と3点で交わり，異なる3つの実数解をもつ。

また $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}<a<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき極大値，極小値は同符号で，実数解は1個ある。

$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のときには，極大値，あるいは極小値は0となり，3つの実数解のうち2つは重複解である。

注　グラフで考えるとわかりやすい。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや，総合的な問題をやることにしましょう。

練習 4. 曲線 C : $x^3-x^2+y^2=0$ と直線 L : $y=x+k$ との交点の数は，k が動くとき，どのように変わるか。　（滋賀大）

ヒント　C : $x^3-x^2+y^2=0$ と L : $y=x+k$ の交点については　$x^3-x^2+(x+k)^2=0$ が成り立つのですから，この3次方程式の異なる実数解の数を調べればよいでしょう。

さて，
$$f(x)=x^3-x^2+(x+k)^2=x^3+2kx+k^2$$
とおきますと，
$$f'(x)=3x^2+2k$$
$k\geqq0$ なら $f'(x)\geqq0$ ですから $f(x)$ は単調増加で，したがって，$f(x)=0$ の実数解は1個だけです。

. $k<0$ のときには
$$f'(x)=3\left(x^2+\frac{2}{3}k\right)=3\left(x+\sqrt{-\frac{2k}{3}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{2k}{3}}\right)$$
ですから

極小値
$$f\left(\sqrt{\frac{-2k}{3}}\right)=k\sqrt{-k}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{-k}\right)<0$$
極大値
$$f\left(-\sqrt{\frac{-2k}{3}}\right)=k\sqrt{-k}\left(-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{-k}\right)$$
これは k の値によって正にも，0にも，負にもなりうるのです。すなわち，

$-\frac{32}{27}<k<0$ のとき　極小値<0，極大値>0 ですから3個。

$k=-\frac{32}{27}$ のとき　極小値<0，極大値$=0$ ですから，1点で交わり，1点で接しますから，2個（接点も交点に入れて）。

$k<-\frac{32}{27}$ のとき　極小値<0，極大値<0 ですから，1点で交わるだけ。結局，

答
$$\begin{cases} k\geqq0 \text{ または } k<-\frac{32}{27} : 1\text{個}; \\ k=-\frac{32}{27} : 2\text{個}; -\frac{32}{27}<k<0 : 3\text{個} \end{cases}$$

練習 5. 3次方程式 $x^3-ax^2+ax-\frac{a^2}{9}=0$ が相異なる3つの実数解をもつために，実の定数 a の満たすべき必要十分条件を求めよ。　（京大）

ヒント　$f(x)=x^3-ax^2+ax-\frac{a^2}{9}$

とおきますと
$$f'(x)=3x^2-2ax+a=0 \quad \cdots\cdots①$$
は，相異なる2つの実数解をもたなければなりません。
$$\therefore\ a^2-3a>0$$
$$\therefore\ a<0 \text{ かつ } a>3 \quad \cdots\cdots②$$
つまり，このとき，$f(x)$ は①の解のうち小さいほう α で極大値，大きいほう β で極小値をとるハズです。さて，①を解いて
$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-3a}}{3}$$
$$\therefore\ \alpha=\frac{a-\sqrt{a^2-3a}}{3},\quad \beta=\frac{a+\sqrt{a^2-3a}}{3}$$
です。$f(\alpha)$ や $f(\beta)$ を求めるために $f(x)$ を $f'(x)$ で割って
$$f(x)=\frac{1}{9}(3x-a)(3x^2-2ax+a)+\frac{2a(3-a)}{9}x$$
$$\therefore\ f(\alpha)f(\beta)=\left\{\frac{2a(3-a)}{9}\right\}^2\alpha\beta<0$$
ところが，①より　$\alpha\beta=\frac{a}{3}$
$$\therefore\ \frac{a}{3}<0 \qquad \therefore\ a<0 \quad \cdots\cdots \text{答}$$
（答案をキチンと書いておいてくださいよ）

練習 6. 方程式 $x^3-2x+k=0$ は k がどんな値をとるとき重複解をもつか。　（京大）

ヒント　$f'(x)=0$ より $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，したがって，$f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$ より $k=\pm\frac{4\sqrt{6}}{9}\cdots$ 答

◎ 4 次方程式と微分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆4次方程式の理論に微分法を応用してみましょう。入試問題としては，3次方程式よりかえってやさしいのですよ。

◆ 4次方程式の実数解の吟味をするのに微分法はたいへん有効。それはどのように扱ったらよいか，それが，ここの目的です。

練習 1. $x^4-5x+2=0$ の実数解はいくつあるか。

ヒント $f(x)=x^4-5x+2$ のグラフが x 軸と何回で交わるか調べてもよいし，

$$x^4=5x-2$$

と変形し，両辺のグラフの交点の数を調べてみてもよいでしょう。

まず，前者の方法では：——

$$f(x)=x^4-5x+2$$

$$\therefore\quad f'(x)=4x^3-5=4\left(x^3-\frac{5}{4}\right)$$

ゆえに $f(x)$ は $x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ でただ1つの極小値

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)=\frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{5}{4}}-5\sqrt[3]{\frac{5}{4}}+2$$

$$=2-\frac{15}{4}\sqrt[3]{\frac{5}{4}}<0$$

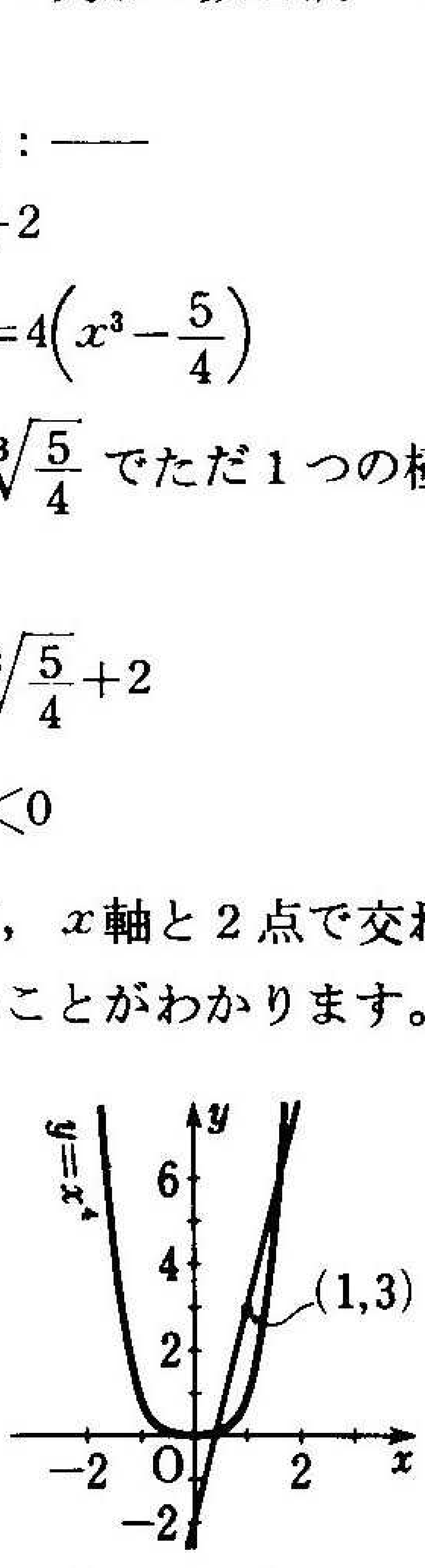
をとります。したがって，x 軸と2点で交わり，実数解は2個であることがわかります。

次に後者の方法では

$y=x^4$

$y=5x-2$

は右のようで，直線 $y=5x-2$ は4次曲線の内部の点 $(1,\ 3)$ を通ります。したがって，2点で交わることは明らか。どうやら，このほうが楽ですね。



練習 2. $x^4-4x^3-x^2+6x+3=0$ の実数解の個数を吟味せよ。

解 $f(x)=x^4-4x^3-x^2+6x+3$

とおくと

$$f'(x)=4x^3-12x^2-2x+6$$

$$=2(x-3)(2x^2-1)$$

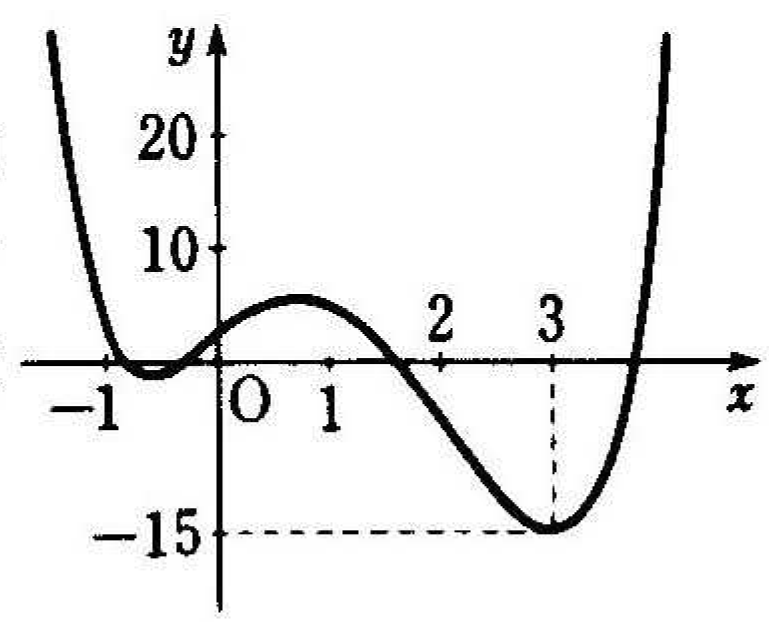
$$=4(x-3)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ゆえに $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		3	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘	$\frac{11-8\sqrt{2}}{4}$ (min.)	↗	$\frac{11+8\sqrt{2}}{4}$ (max.)	↘	-15 (min.)	↗

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフはおおよそ下のようになる。

したがって x 軸と相異なる4点で交わるから，実数解は4つある。



答 4個

練習 3. $x^4-4x-a=0$ の異なる実数解の個数を吟味せよ。

ヒント $x^4-4x=a$

$f(x)=x^4-4x$ とおくと

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

ここまでくれば，増減表を作ってみるまでもなく，極値は極小値1個だけであり，それは $x=1$ で -3 であることがわかります。かくて，求める答は次の通りです。

$$\begin{cases} a>-3 \text{ のとき } & 2\text{個} \\ a=-3 \text{ のとき } & 1\text{個} \\ a<-3 \text{ のとき } & \text{なし} \end{cases}$$

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。まず，これです。

練習 4. 与えられた実数 a，b に対して，関数 $F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2-bx$ を考える。

(1) $a=1$，$b=0$ のとき，$F(x)$ の極小値を与える x の個数を求めよ。

(2) $a=0$，$b=1$ のときは何個か。

(3) $F(x)$ の極小値を与える x の個数が 2 個となるために，a，b が満たす条件を求めよ。

(4) $F(x)=0$ が相異なる 4 つの実数解をもつ条件を求めよ。

ヒント (1) 2 個　(2) 1 個　(3) $4a^3>27b^2$

(4) $F(x)=\frac{1}{4}x(x^3-2ax-4b)$ ですから，$x^3-2ax-4b=0$ が 3 個の実数解をもつ条件を求めればいいでしょう。そのためには

$$f(x)=x^3-2ax-4b$$

の極値の積が負になればよい。いや，重複解のときも考えなければなりませんよ。詳しくは（☞ p.212）参照。

練習 5. 多項式 $f(x)=x^4+ax^2+b$ が $(x-1)^2$ で割りきれるとき，

(1) a，b の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，グラフをかけ。　（九州産業大）

ヒント (1) 組立除法がいいでしょう。

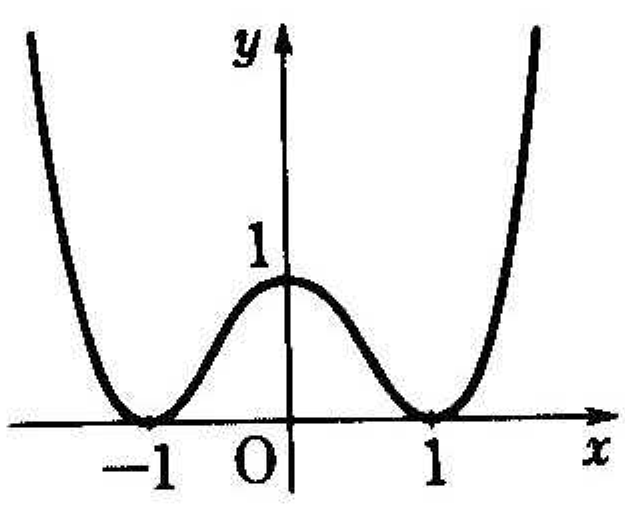
1	1	0	a	0	b
		1	1	$a+1$	$a+1$
1	1	1	$a+1$	$a+1$	$a+b+1=0$
		1	2	$a+3$	
	1	2	$a+3$	$2a+4=0$	

$$\therefore\quad a=-2,\ b=1$$

(2) (1)より

$f(x)$
$=(x-1)^2(x+1)^2$

グラフのおおよその形は右の通り。



練習 6. 4 次方程式

$$2x^4-(3a+2)x^3+3ax^2+(a-b)x-(a-b)=0$$

が相異なる 4 つの実根をもつような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。　（広島大）

ヒント 与えられた方程式の左辺は因数分解できることに気がつけば，もはや，本質的には 3 次方程式の問題です。すなわち

$$(x-1)(2x^3-3ax^2+a-b)=0$$

と書けますから

$$f(x)=2x^3-3ax^2+a-b$$

とおきますと，

$$f'(x)=6x(x-a)$$

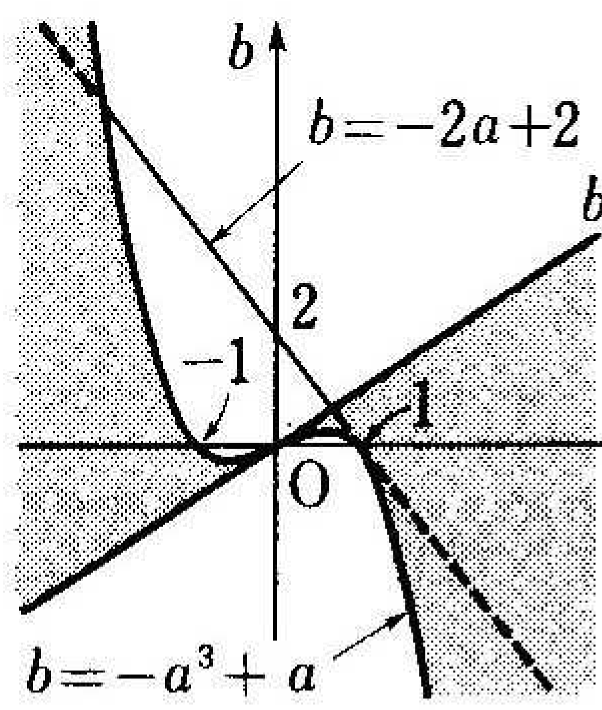
ですから，$f(x)$ は $x=0$，a で極値をもち，それが異符号である条件から

$$f(0)f(a)=(a-b)(-a^3+a-b)<0$$

から点 $(a,\ b)$ の存在範囲が求まります。なお $f(x)=0$ が $x=1$ なる解をもってはいけないから

$f(1)$
$=-b-2a+2\neq0$

が必要です。こんなわけで，求める範囲は右の通りです。



練習 7. 実係数の 4 次方程式 $x^4+ax+b=0$ が実数解をもつための必要かつ十分な条件を求めよ。　（日本女大）

ヒント $f(x)=x^4+ax+b$ とおきますと

$$f'(x)=4x^3+a=0$$

$$\therefore\quad x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$$

したがって，実数解をもつための必要かつ十分な条件は

$$\left(-\frac{a}{4}\right)\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b\leqq0$$

これを書きかえますと

$$\left(\frac{a}{4}\right)^4\geqq\left(\frac{b}{3}\right)^3$$

◑ 5 次以上の高次方程式と微分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆5次以上だからといって，べつにちがったところはないが，ムリに探せば，計算のめんどうなことが多い，といったところ。

◆ 方程式の実数解をもつ条件だとか，実数解のとりうる範囲であるとか，いう問題に微分法の有用であることはいうまでもありません。そして，3次方程式でも4次方程式でも，あるいは，5次以上でも，大したちがいはありませんが，ここでは5次以上のものに重点をおいて考えてみよう，というわけです。不得意な人は，まず，3次方程式，4次方程式の場合（☞ p.212, p.214）をやってから次へ進んでください。

* * *

·14

練習 1. $3x^5-5x^3+1=0$ の正の解および負の解の数を調べよ。（関西学院大）

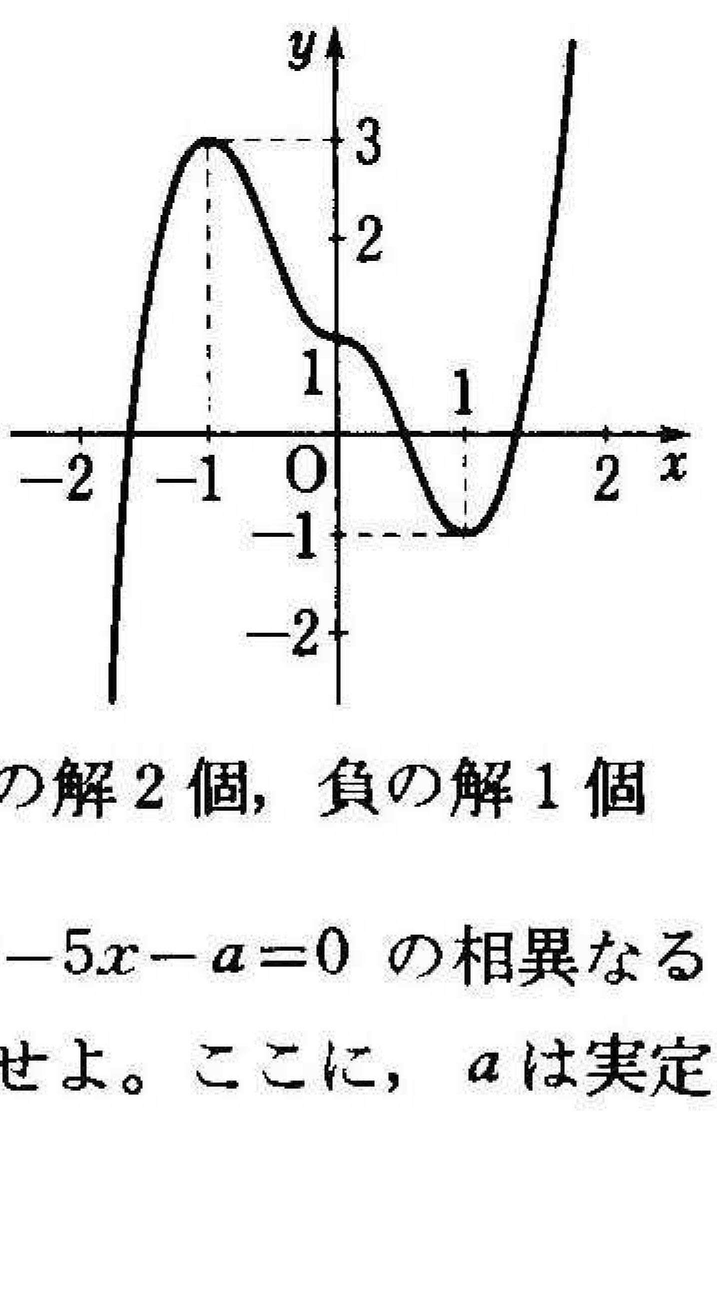
ヒント $y=3x^5-5x^3+1$ とおくと

$$y'=15x^4-15x^2=15x^2(x+1)(x-1)$$

ゆえに，増減表は次のようになります。

x		-1		0		1	
y'	$+$		$-$	0	$-$		$+$
y	↗	3 max.	↘	1	↘	-1 min.	↗

したがって，グラフは右のようになりましょう。



これからわかるように2つの正の解と1つの負の解があるのです。

答 正の解2個，負の解1個

6/4

練習 2. 方程式 $x^5-5x-a=0$ の相異なる実数解の数を吟味せよ。ここに，a は実定数である。

ヒント $y=x^5-5x-a$ のグラフをかいて，x 軸といくつの点で交わるかを調べるよりは，

$$x^5-5x=a$$

と変形して，左辺と右辺のグラフを別々にかいて調べるのがよいでしょう。

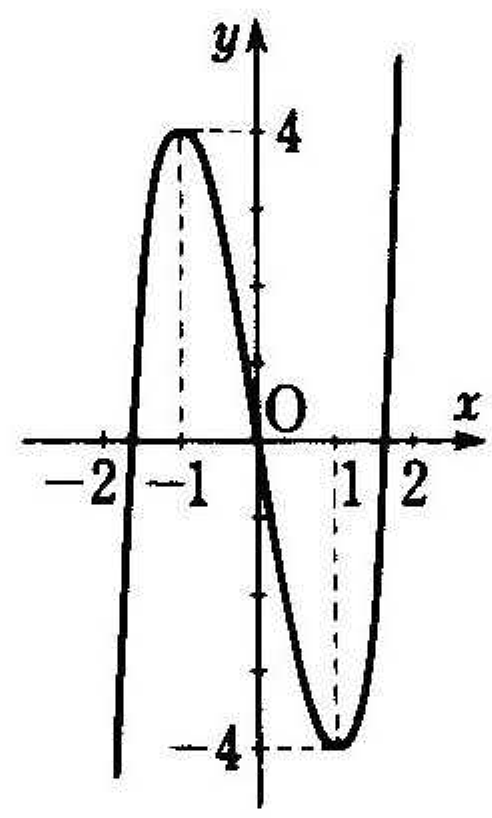
さて，$y=x^5-5x$ とおきますと

$$y'=5(x^4-1)$$
$$=5(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

したがって，増減表は次のようになります。

x		-1		1	
y'	$+$		$-$		$+$
y	↗	4 max.	↘	-4 min.	↗

グラフは右図の通り。



他方 $y=a$ のグラフは x 軸に平行な直線ですから，異なる実数解の個数は

$a>4$	のとき	1
$a=4$	のとき	2
$4>a>-4$	のとき	3
$a=-4$	のとき	2
$-4>a$	のとき	1

ということになります。

練習 3. $x^5+10a^2x^3-35a^4x-24a^3=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし $a>0$ とする。（島根大）

解 $y=x^5+10a^2x^3-35a^4x-24a^3$ とおくと

$$y'=5x^4+30a^2x^2-35a^4$$
$$=5(x+a)(x-a)(x^2+7a^2)$$

増減表を作ると，次のようになる。

すなわち：

x		$-a$		a	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$24a^3(a^2-1)$ max.	$\searrow$	$-24a^3(a^2+1)$ min.	$\nearrow$

$a>0$ であるから 極小値<0 で，極大値は $a>1$ のとき正，$a=1$ のとき 0，$a<1$ のとき負である。ゆえに

$a>1$ のとき　3つ

$a=1$ のとき　2つ

$0<a<1$ のとき　1つ

もつ。

*　*　*

◆ 次にはめんどうな問題をやってみませんか。

練習 4. 方程式

$$f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

は，n が奇数ならば1つの実数解をもち，n が偶数ならば実数解をもたないことを数学的帰納法を用いて証明せよ。　(東大)

(ヒント) $n=1$ (奇数) のときは明らかです。また，$n=2$ (偶数) のときには

$$f_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}>0$$

ですから，$f_2(x)=0$ が実数解をもたないことは確かです。

さて，『$f_{2k-1}(x)=0$ はただ1つの実数解をもち，$f_{2k}(x)=0$ は実数解をもたない』と仮定しますと $f_{2k}(x)$ の符号は一定で正です。

$$f_{2k+1}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

について

$$f'_{2k+1}(x)=f_{2k}(x)>0$$

ゆえに $y=f_{2k+1}(x)$ は単調増加です。しかも

$$\lim_{x\to-\infty}f_{2k+1}(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f_{2k+1}(x)=+\infty$$

ですから，$f_{2k+1}(x)=0$ は，ただ1つの実数解をもつのです。

次に，

$$f_{2k+2}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$\therefore\quad f'_{2k+2}(x)=f_{2k+1}(x)$$

で，したがって

$$f'_{2k+2}(x)=0$$

はただ1つの実数解をもちます。これを α としますと

$$f_{2k+2}(\alpha)=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{\alpha^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$=f_{2k+1}(\alpha)+\frac{\alpha^{2k+2}}{(2k+2)!}>0$$

です。つまり $f_{2k+2}(x)$ の極小値 (かつ最小値) が正となりますから，$f_{2k+2}(x)=0$ は実数解をもたないことがわかります。

練習 5. a_0，a_1，a_2，……，a_n がすべて正の実数であるとき，方程式

$$a_0x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots\cdots-a_n=0$$

の正の解の個数を求めよ。　(東北大)

(解) $\dfrac{1}{x}=X$ とおいて変形すると

$$f(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots-a_0=0$$

となるから，この方程式の正の実数解の個数を調べればよい。

ところが $X>0$ に対して

$$f'(X)=na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+a_1>0$$

ゆえに，$f(X)$ は $X>0$ に対して，単調増加で，しかも $f(0)=-a_0<0$ であるから，$f(X)$ のグラフは $X>0$ の部分で X 軸とただ1点で交わる。

ゆえに，正の実数解はただ1個である。

(答) 1個

(注) $\dfrac{1}{x}=X$ とおくところは抵抗を感じるかもしれませんね。こんな問題が簡単にできないからといって嘆くことはありません。しかし，こうおくことによって，－(マイナス) が定数項にしかつかない，というところが上の解の目のつけどころなんです。

近似解を求めるニュートンの方法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈近似解を求める方法は電子計算機を使うことによって著しくラクになりました。そして，単純な方法が脚光を浴びる。

◆ 方程式の解の近似値を求める方法はいろいろありますが，ここではニュートンの方法をとりあげてみましょう。

6/5

練習1. $x^2+2x-3=k$ は k が 0 と異なり，0 に近い数のとき，1 に近い解をもつ。これを k の 1 次式として表せ。

ヒント　k が 0 でなく，0 に近い，ということは，k^2 や k^3 の **高次の項が k に比べて無視できるほど小さい** という意味です。

さて，1 つの方法は

$$x=1+ak$$

とおいて代入してみますと

$$(1+ak)^2+2(1+ak)-3=k$$

$$(4a-1)k+a^2k^2=0$$

k^2 は k に対して無視してよいから

$$(4a-1)k=0$$

$k\fallingdotseq 0$ なんですから

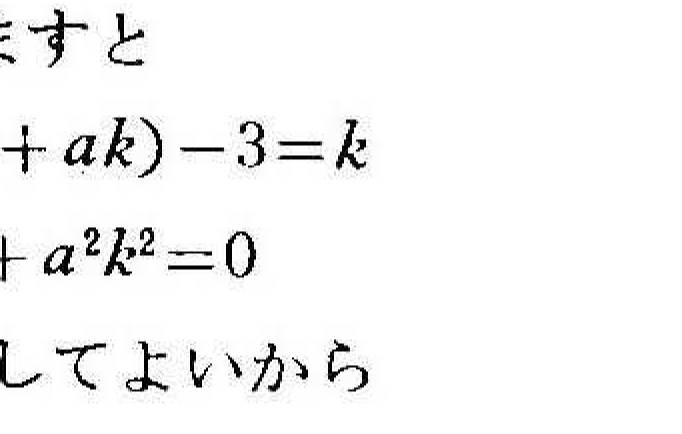
$$4a-1=0 \qquad \therefore\quad a=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad x=1+\frac{1}{4}k \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

いわば，上の「ヒント」は数Ⅰの解法です。こんどは基解的解法を：——

解　$y=x^2+2x-3$ と $y=k$ のグラフの交点のうち $x=1$ に近いほうを求めればいいわけです。

そこで，点 $(1,\ 0)$ における接線 l と直線 $y=k$ との交点の x 座標を近似値として採用することです。



$$y'=2x+2$$

ですから，

$$l:\quad y-0=4(x-1)$$

これと $y=k$ との交点は

$$4(x-1)=k$$

$$\therefore\quad x=1+\frac{1}{4}k$$

なるほど，上と同じ結果が得られたのです。この操作をくり返して，よい近似値を求めるのがニュートンの方法です。

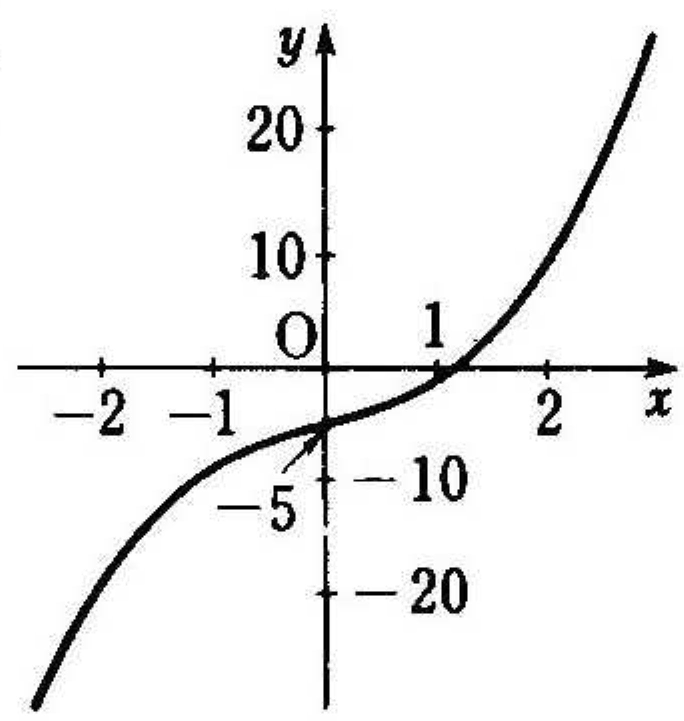
*　*　*

◆ では，いよいよ **ニュートンの方法** です。

6/5

練習2. $x^3+3x-5=0$ の実数解の近似値を求めよ。

ヒント　$f(x)=x^3+3x-5$ のグラフは下のようです。つまり，単調増加で，$x=1$ の付近で x 軸と交わるわけ。



さて，$x=1$ のとき $y=-1$；ここで，

$$f'(x)=3x^2+3$$

ゆえに，$x=1$ のときの接線の傾き $m=6$ ですから，この点における接線は

$$y+1=6(x-1)$$

つまり　$y=6x-7$

この接線と x 軸との交点は $\left(\frac{7}{6},\ 0\right)$ です。したがって，第1近似は 1.17 というわけ。

次に，$x=1.17$ のとき，$y=0.11$；この点における接線は

$$y-0.11=7.1067(x-1.17)$$

これが x 軸と交わる点は 1.154 で，これが第2近似というぐあいです。ここでやめると

しましょう。　　　　　答　1.15

＊　＊　＊

◆ これを一般的に書けば

$f(x)=0$ の1つの解の近似値を x_1 とすれば

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\ x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},\ \cdots\cdots$$

はしだいに解に近い値となる

ということになります。しかし，この式をオボエテおくほどのことはありません。

65

■練習3. $\sqrt[3]{2}$ の近似値を求めよ。

解　$\sqrt[3]{2}=x$ とおくと

$$f(x)=x^3-2=0$$

$$\therefore\quad f'(x)=3x^2$$

ゆえに x の近似値を x_1 とすれば

$$x_2=x_1-\frac{x_1{}^3-2}{3x_1{}^2}$$

より求めた x_2 は x_1 よりよい近似値である。いま $x_1=1$ として，第3近似まで求めると次の表のようになる。

x_1	1	1.3	1.26
$x_1{}^3-2$	-1	0.197	0.0004
$3x_1{}^2$	3	5.07	4.7628
$\frac{x_1{}^3-2}{3x_1{}^2}$	-0.333	0.039	0.0001
x_2	1.333	1.261	1.26

答　1.26

注　$\sqrt[3]{2}$ の正しい値は1.25992……です。

＊　＊　＊

◆ なお，ニュートンの方法と本質的に同じ方法は数Iの範囲でも行えます。

例えば，次の練習をとりあげてみましょう。

■練習4. $\sqrt{2}$ の近似値を求めよ。

ヒント　$1^2=1,\ 2^2=4$ ですから

$$1<\sqrt{2}<2$$

さらに，$1.5^2=2.25$ ですから

$$1<\sqrt{2}<1.5$$

であることがわかります。

さて

$$\sqrt{2}=1.5+h$$

とおいて，両辺を平方しますと

$$2=2.25+3h+h^2$$

ですが，h^2 の順は $3h$ に比べて小さいとみなし，すてますと

$$3h=-0.25$$

$$\therefore\quad h\fallingdotseq-0.08$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}=1.5+(-0.08)$$
$$=1.42$$

となります。

さらに

$$\sqrt{2}=1.42+h$$

とおいて両辺を平方して

$$2=2.0164+2.84h+h^2$$

h^2 を省略して

$$h=\frac{-0.0164}{2.84}\fallingdotseq-0.0058$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}=1.4142$$

よく知っているように，これで正確な値になりました。

上と同じ問題をニュートンの方法でもういちどやって比べてみると，その意味がよくわかるでしょう。

＊　＊　＊

◆ このニュートンの方法にせよ，上の数I的やり方にせよ，誤差がわからないのがザンネンです。それは微積分でやるハズです。また，ニュートンの方法を使う際に第1近似値をどのようにきめるか，ということも大切です。そのとり方でぐっと手数を省くこともできるからです。多くの場合，グラフの概形をかいて求めるのがよい。また，グラフも，もとの方程式をいろいろ変形してかくほうがうまくゆくものです。

＊　＊　＊

絶対不等式と微分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数Ⅰでは絶対不等式はきわめて難しい。しかし，基解では，最小問題の中に解消されてしまうのです。ご安心あれ。

◆ $a,\ b,\ c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

の成り立つことは数Ⅰでやったハズ。このように，$a,\ b,\ c$ が（正の）どんな値をとろうとも成り立つ不等式を **絶対不等式** といいます。

$$x^2+xy+y^2 \geqq 0$$

は $x,\ y$ が（実数の）どんな値をとろうとも成り立つ。やはり，絶対不等式です。

ところで，数Ⅰでは，これがスゴクめんどうな分野でしたが，基解では，要するに最小値を求める問題にすぎません。

では，さっそく，次をやってみませんか。

6/10

■練習 1. $a,\ b>0$ のとき

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}$$

を証明せよ。

(ヒント) 根号がジャマ。そこで

$$\sqrt[3]{a}=x,\quad \sqrt[3]{b}=y$$

とおきますと，

$$a=x^3,\quad b=y^3$$

ゆえに，与式は

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \geqq \frac{x+y}{2} \qquad (x>0,\quad y>0)$$

となります。両辺を3乗して

$$\frac{x^3+y^3}{2} \geqq \frac{(x+y)^3}{8}$$

したがって，y を定数とみなして

$$f(x)=\frac{x^3+y^3}{2}-\frac{(x+y)^3}{8}>0 \quad (x,\ y>0)$$

を証明すればいいでしょう。

さて，y を定数とみなしたのですから

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{8}(x+y)^2$$
$$=\frac{3}{8}\{(2x)^2-(x+y)^2\}$$
$$=\frac{3}{8}(3x+y)(x-y)$$

ゆえに $\begin{cases} x>y \text{ のとき} & f'(x)>0 \\ x=y \text{ のとき} & f'(x)=0 \\ x<y \text{ のとき} & f'(x)<0 \end{cases}$

したがって $x=y$ で最小値をとり，最小値は0である。　Q. E. D.

■練習 2. $a,\ b,\ c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

を証明せよ。

(ヒント) $\sqrt[3]{a}=A,\quad \sqrt[3]{b}=B,\quad \sqrt[3]{c}=x$

とおきますと，

$$\frac{A^3+B^3+x^3}{3} \geqq ABx$$

したがって，$x,\ A,\ B>0$ のとき

$$f(x)=x^3-3ABx+A^3+B^3 \geqq 0$$

を証明すればよいでしょう。

$$f'(x)=3x^2-3AB$$
$$=3(x+\sqrt{AB})(x-\sqrt{AB})$$

$x,\ A,\ B>0$ ですから $x+\sqrt{AB}>0$ です。したがって $x=\sqrt{AB}$ で $f(x)$ は極小値（かつ最小値）をとり，その値は

$$f(\sqrt{AB})$$
$$=AB\sqrt{AB}-3AB\sqrt{AB}+A^3+B^3$$
$$=(A\sqrt{A})^2-2AB\sqrt{AB}+(B\sqrt{B})^2$$
$$=(A\sqrt{A}-B\sqrt{B})^2 \geqq 0$$

よって証明された。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

■練習 3. $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3},\ \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$
$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9$$

の大小を比較せよ。　（京都工繊大）

（解）$f(x)=\dfrac{1}{3}(x^3+a^3+b^3)-\left(\dfrac{x+a+b}{3}\right)^3$

とおくと

$$f'(x)=x^2-3\left(\frac{x+a+b}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left(x+\frac{x+a+b}{3}\right)\left(x-\frac{x+a+b}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(x+\frac{x+a+b}{3}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

したがって $x>0$，$a>0$，$b>0$ のとき

$f(x)$ は $x=\dfrac{a+b}{2}$ で最小値をとり，それは

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(a-b)^2(a+b)\geqq 0$$

である。

ゆえに $f(x)\geqq 0$，$x=c$ とおいて

$$\therefore\quad \frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\geqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

ここで，a，b，c の代わりにそれぞれ $\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{b}$，$\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^3$$

を得る。ゆえに

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$
$$\geqq\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9$$

等号が成り立つのは $a=b=c$ のとき。

■練習 4. 曲線 $y=x^5$ の上の2点 $(a,\ a^5)$，$(b,\ b^5)$ におけるこの曲線の接線と直線 $x=\dfrac{a+b}{2}$ との交点の y 座標をそれぞれ Y_a，Y_b とする。$a<b$ のとき $Y_a>Y_b$ であることを証明せよ。　（新潟大）

（解）曲線 $y=x^5$ の上の点 $(a,\ a^5)$ におけるこの曲線の接線の方程式は，$y'=5x^4$ より

$$y=a^5+5a^4(x-a)$$

で与えられる。

$$\therefore\quad Y_a=a^5+5a^4\left(\frac{a+b}{2}-a\right)$$
$$=a^5+\frac{5a^4(b-a)}{2}$$

同様にして

$$Y_b=b^5+5b^4\left(\frac{a+b}{2}-b\right)$$
$$=b^5-\frac{5b^4(b-a)}{2}$$

$$\therefore\quad Y_a-Y_b$$
$$=(a^5-b^5)+\frac{5(b-a)}{2}(a^4+b^4)$$
$$=\frac{b-a}{2}\{5(a^4+b^4)-2(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\}$$
$$=\frac{b-a}{2}\{3(a^4+b^4)-2a^2b^2-2(a^3b+ab^3)\}$$
$$=\frac{b-a}{2}\{(a^4-2a^2b^2+b^4)+2(a^4-a^3b-ab^3+b^4)\}$$
$$=\frac{b-a}{2}\{(a^2-b^2)^2+2(b^3-a^3)(b-a)\}$$

ところが，…………

ゆえに

$$Y_a-Y_b>0\qquad\therefore\quad Y_a>Y_b$$

Q. E. D.

（注）どうも，これでは基解というよりも，あまりに数 I 的なにおいがする，というもの。ついでに，もう1つ，やってみませんか。

■練習 5. $g(x)=2x^{n+1}-(n+1)x^2+n-1$

$x>0$ のとき，$g(x)\geqq 0$ を証明せよ。

（ヒント）$g'(x)=2(n+1)x(x^{n-1}-1)$

ですから，$g(x)$ は $x=1$ で極小かつ最小になるでしょう。

ところが

$$g(1)=2-(n+1)+n-1=0$$

ゆえに…………

◑整除問題と微分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆整除問題の中には微分法を使うとスゴク簡単にできるものもありますし，微分法を使うより仕方がないものもあります。

◆ 整式の整除問題に微分法は有用です。ここでは，そのいくつかを学ぶことにしましょう。その前に，因数定理の復習からはじめましょう。

整式 $f(x)$ が $x-\alpha$ で割りきれるための条件は $f(\alpha)=0$ である。

さて，その証明は：——

$f(x)$ を $(x-\alpha)$ で割った商を $Q(x)$，余りをRとすると

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

これは恒等式ですから $x=\alpha$ を代入しても成り立つハズ!!

$$\therefore\quad f(\alpha)=0\cdot Q(\alpha)+R$$

$$\therefore\quad R=f(\alpha)$$

割りきれるための必要十分条件は余りが0であること，したがって $f(\alpha)=0$ です。

そこで，次の練習1. にいきましょう。

617

練習1. 整式 $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割って得る余りを求めよ。 (東京工大)

(ヒント) $f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+(Ax+B)$ ……①

とおけますね。これは恒等式ですから

$$f(\alpha)=A\alpha+B \quad\cdots\cdots②$$

①の両辺をxで微分しますと

$$f'(x)$$
$$=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+A$$

これも恒等式ですから $x=\alpha$ とおいて

$$f'(\alpha)=A \quad\cdots\cdots③$$

②，③より

$$A=f'(\alpha),\ B=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$$

ゆえに求める余りは

$$f'(\alpha)x+(f(\alpha)-\alpha f'(\alpha))$$

(注) このことから整式 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割りきれるための条件が求められます。それは

$$f'(\alpha)=0 \text{ かつ } f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(\alpha)=f'(\alpha)=0}$$

1

練習2. $x^{10}+5x^5+10$ を $(x-1)^2$ で割って得る余りを求めよ。

(ヒント) 商を $Q(x)$，余りを $Ax+B$ とすると

$$x^{10}+5x^5+10=(x-1)^2Q(x)+(Ax+B) \quad\cdots\cdots①$$

$x=1$ とおくと

$$16=A+B \quad\cdots\cdots②$$

①の両辺をxで微分すると

$$10x^9+25x^4$$
$$=(x-1)^2Q'(x)+2(x-1)Q(x)+A$$

ここで $x=1$ とおくと

$$35=A\quad\therefore\quad B=16-35=-19$$

ゆえに，求める余りは $35x-19$ である。

練習3. $x^{10}+ax^5+b$ が $(x-1)^2$ で割りきれるように定数 a，b の値を定めよ。

(解) $x^{10}+ax^5+b$ を $(x-1)^2$ で割って得る商を $Q(x)$ とすると

$$x^{10}+ax^5+b=(x-1)^2Q(x) \quad\cdots\cdots①$$

これは恒等式であるから $x=1$ とおいて

$$1+a+b=0 \quad\cdots\cdots②$$

①の両辺をxで微分すると

$$10x^9+5ax^4$$
$$=(x-1)^2Q'(x)+2(x-1)Q(x)$$

$x=1$ とおくと

$$10+5a=0 \quad\cdots\cdots③$$

②，③より

$$a=-2,\ b=1 \quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

* * *

◆ では，やや総合的なものを：——

練習 4. $P(x)$ を 3 次式とするとき

$$P(\alpha)=0,\ P'(\alpha)=0$$

ならば，α は 3 次方程式 $P(x)=0$ の重根であることを証明せよ。（福岡大）

（解） $P(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割って得る商を $Q(x)$，余りを $Ax+B$ とすると

$$P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+Ax+B$$

$$\therefore\ P(\alpha)=A\alpha+B$$

次に，

$$P'(x)$$
$$=(x-\alpha)^2Q'(x)+2(x-\alpha)Q(x)+A$$
$$\therefore\ P'(\alpha)=A$$

ところが $P(\alpha)=0,\ P'(\alpha)=0$ であるから

$$A\alpha+B=0 \text{ かつ } A=0$$
$$\therefore\ A=B=0$$
$$\therefore\ P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

ゆえに $P(x)=0$ は α を重複解としてもつ。

6/7

練習 5. $f(x)$ は x の 4 次の整式である。$f(x)+1$ は $(x-1)^2$ で割りきれ，$f(x)-1$ は $(x+1)^2$ で割りきれ，また $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{53}{120}$ であるとき $f(x)$ を求めよ。

（福島大）

（解） $f(x)+1=(x-1)^2Q(x)$ （$Q(x)$は整式）とおく。両辺を $f(x)$ で微分して

$$f'(x)=(x-1)^2Q'(x)+2(x-1)Q(x)$$

ゆえに $f'(x)$ は $(x-1)$ で割りきれる。

同様にして，$f'(x)$ は $(x+1)$ で割りきれる。したがって

$$f'(x)=(x-1)(x+1)(ax+b)$$

とおくことができる。

$$\therefore\ f'(x)=ax^3+bx^2-ax-b$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2-bx+c$$

$$\therefore\ f(1)+1=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}-\frac{a}{2}-b+c+1=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$f(-1)-1=\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{a}{2}+b+c-1=0 \quad \cdots\cdots②$$

また，$\int_0^1 f(x)dx$

$$=\left[\frac{a}{20}x^5+\frac{b}{12}x^4-\frac{a}{6}x^3-\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{20}+\frac{b}{12}-\frac{a}{6}-\frac{b}{2}+c=\frac{53}{120} \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③より

$$a=8,\ b=\frac{3}{2},\ c=2$$

$$\therefore\ f(x)=2x^4+\frac{1}{2}x^3-4x^2-\frac{3}{2}x+2$$

……答

これはかなり手ごたえがあったでしょう。いや，そんなことはない，という人は，次もやってみませんか。

6/7

練習 6. $f(x)$ は x についての 5 次の多項式で，$(x-1)^3$ で割ると 3 余り，$(x+1)^3$ で割ると -1 余るという。多項式 $f(x)$ を求めよ。（千葉大）

（解） $f(x)$ は $(x-1)^3$ で割ると 3 余るから

$$f(x)=(x-1)^3Q(x)+3$$

$$\therefore\ f'(x)=(x-1)^3Q'(x)+3(x-1)^2Q(x)$$

ゆえに $f'(x)$ は $(x-1)^2$ で割りきれる。同様にして，$f'(x)$ は $(x+1)^2$ で割りきれる。しかも $f'(x)$ は x の 4 次式であるから

$$f'(x)=A(x-1)^2(x+1)^2$$

とおくことができる。ここに，A は定数である。

$$\therefore\ f'(x)=A(x^4-2x^2+1)$$

$$\therefore\ f(x)=A\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)+B$$

しかるに，題意より

$$f(1)=3,\ f(-1)=-1$$

$$\therefore\ A=\frac{15}{4},\ B=1$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{4}(3x^5-10x^3+15x+4)$$

……答

① 速度・加速度と微分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆ニュートンが微分学をつくったのは，速度を数学的に表現するためだった，という。果たしてそうであれば，数学のほうだって ….

◆ 1直線上を動く点の座標 x が時間 t の関数で与えられているとき，速度 v および加速度 α は次のように表されます。すなわち，

$$\textbf{速度}: v=\frac{dx}{dt},\quad \textbf{加速度}: \alpha=\frac{dv}{dt}$$

そして，$v>0$ ならば，x の正の方向に向かって動いていることを示し，$v<0$ ならば x の負の方向に向かって動いていることを示しています。

では，次の練習をやってみませんか。

6/1 **練習 1.** x 軸上を動く点Pの座標が

$$x=t^3-3t^2$$

で与えられている。$t=1,\ 2,\ 3$ における速度および加速度を求めよ。

(解) $x=t^3-3t^2$ であるから速度 v，加速度 α は $v=3t^2-6t$，$\alpha=6t-6$ で与えられる。

ゆえに，$t=1,\ 2,\ 3$ においてはそれぞれ

$$v_1=-3,\quad v_2=0,\quad v_3=9$$

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=6,\quad \alpha_3=12$$

である。

(注) ‘速度’ は $-3,\ 0,\ 9$ ですが，‘速さ’ は速度ベクトルの大きさですから，それぞれ 3, 0, 9 となります。単位は与えられていないのでわかりませんが，もし，長さが cm，時間が秒 (s) なら cm/s となるわけです。

6/11 **練習 2.** x 軸上を運動する点Pの座標 x が

$$x=at^2+bt+c \quad (t：時間)$$

で与えられるとき，加速度は一定であることを示せ。

(ヒント) $x=at^2+bt+c$ であるから，速度 v および加速度 α は

$$v=\frac{dx}{dt}=2at+b$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=2a \quad (一定)$$

で与えられる。よって，証明された。

* * *

◆ 平面上の運動は動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $x,\ y$ が時間 t の関数として与えられ，その速度成分 $v_x,\ v_y$；加速度成分 $\alpha_x,\ \alpha_y$ は

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt}$$

$$\alpha_x=\frac{dv_x}{dt},\quad \alpha_y=\frac{dv_y}{dt}$$

で与えられます。

6/1 **練習 3.** 平面上を運動する点Pの座標が

$$x=t^2+t,\quad y=t^2-t \quad (t\ は時間)$$

で与えられているとき，次の問に答えよ。

(1) 点Pの軌道の方程式を求めよ。

(2) 軌道の概形をかけ。$(t\geqq 0)$

(3) $t=1,\ 2$ における速度を求めよ。

(4) $t=1,\ 2$ における加速度を求めよ。

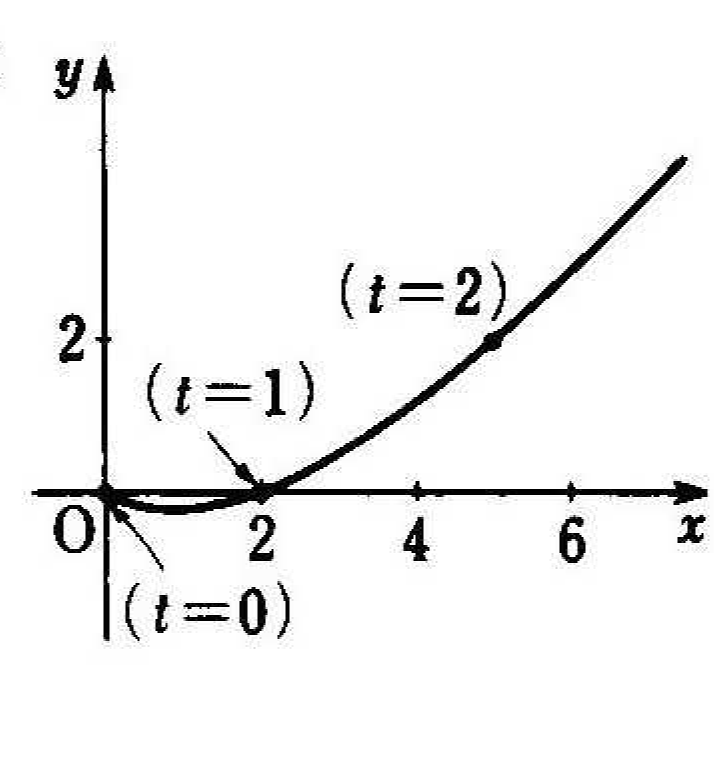
(ヒント) (1) $x=t^2+t,\quad y=t^2-t$

$$\therefore\quad t^2=\frac{x+y}{2},\quad t=\frac{x-y}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{x+y}{2}=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad x^2-2xy+y^2-2x-2y=0 \quad \cdots\cdots①$$

(2) 軌道の概形をかくには①のグラフを直接かくよりも，t にいろいろ値を入れて，P の位置を求め，これをなめらかに結ぶほうが簡単で，右の図のようになります。



(3)

$$v_x=\frac{dx}{dt}=2t+1$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=2t-1$$

ですから，速度ベクトルは

$t=1$ においては　(3, 1)

$t=2$ においては　(5, 3)

で与えられます。

(4)　$\alpha_x=2$, $\alpha_y=2$ ですから，$t=1$, 2 において加速度ベクトルは共に (2, 2) です。つまり，これは **等加速度運動** なのです。

*　*　*

◆ では，次に総合的な問題をやってみませんか。

5/1

練習 4. 2つの動点 P, Q が直線 $y=x+1$ 上の定点Aおよび直線 l 上の定点Bをそれぞれ同時に出発し，これらの直線上を動く。t 秒後の P, Q の x 座標はそれぞれ $x=t(t-3)^2$, $x=\frac{5}{4}t(t-3)$ である。

(1)　点Pは t_1 秒後に向きを変えて進み，t_2 秒後には再び向きを逆に変えて進む。t_1, t_2 における P の位置 M, N を求めよ。

(2)　t_2 秒後の P, Q の位置は原点Oに関して対称な位置にあり，Pが再び点Mを通るとき OP⊥OQ である。直線 l の方程式を求めよ。　(高知大)

ヒント　(1)　点Pは直線 $y=x+1$ の上を動くのですが，t_1 秒後と，t_2 秒後に向きを変える，というのですね。このことは x 成分だけで考えても同じことになるハズ。

そこで，$x=t(t-3)^2$ を t で微分して運動の x 成分を求めてみますと，次の通り。

$$\frac{dx}{dt}=1\cdot(t-3)^2+t\cdot 2(t-3)$$
$$=3(t-1)(t-3)$$

この符号の変わる点が t_1, t_2 なのですから，$t_1=1$, $t_2=3$ とわかります。してみると，

$$M=(4,\ 5),\ N=(0,\ 1)$$

(2)　点Pが再び点Mを通るときを求めるために

$$t(t-3)^2=4$$

とおいて

$$t^3-6t^2+9t-4=0$$
$$\therefore\ (t-1)^2(t-4)=0$$

これから $t=4$ で点PがMにあることがわかります。

さて，3秒後Pは (0, 1) にあるのですからQはOについて対称な点 (0, −1) にあるでしょう。また，$t=4$ のとき，点Qの x 座標は $\frac{5}{4}\cdot 4\cdot(4-3)=5$ で，その y 座標を a としますと，OP⊥OQ から

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(4,\ 5)\cdot(5,\ a)=20+5a=0$$
$$\therefore\ a=-4$$

こうして，点Qは2点 (0, −1), (5, −4) を通ることがわかります。したがって l の方程式は

$$y-(-1)=\frac{-4-(-1)}{5-0}(x-0)$$
$$\therefore\ y+1=-\frac{3}{5}x$$

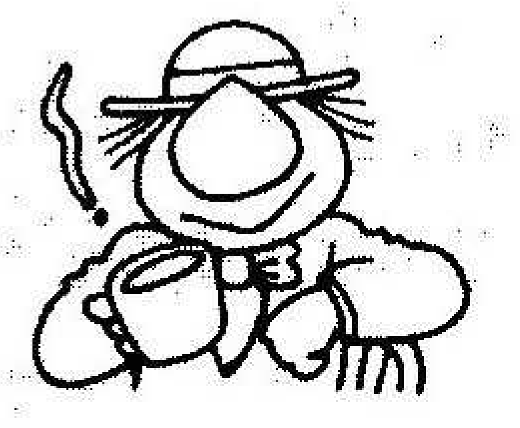
つまり $y=-\frac{3}{5}x-1$ であることがわかります。

*　*　*

◆ 容器に水を入れるとき，水面の上昇する速度を求めよ，といった問題もよく出題されますが，これはむしろ積分して容積を求める点が主眼点になります。また，運動する点の道のりを求める問題も多く，これもやはり積分の問題になります。

また，数学の問題では物理とちがって，速度という言葉を乱用する傾向があります。時間的に変化するものをすべて速度という傾向があります。……の体積の増大する速度を求めよ，といったぐあい。速度と速さという言葉を物理におけるようにはっきり分けていないことも多く，注意が肝心です。

なお，加速度という言葉は，物理学のほうでも，加速度ベクトルにも使うし，加速度ベクトルの大きさを表すのにも使っていますよ。



最大・最小と相加・相乗平均と蛇足

◆相加・相乗平均はいうまでもなく数Ⅰの範囲です。しかし，それが，微分法の領域で大活躍できるというおはなし。

◆ 微分法ができる前に，相加・相乗平均の関係は，最大・最小を求めるのにスゴク有用でした。ここでは，その例をみるとしましょう。いうまでもなくその関係というのは

$a,\ b,\ c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

で，等号が成り立つのは $a=b=c$ のときなのです。さて：——

練習 1. $0<x<1$ のとき

$$x^2(1-x)$$

の最大値を求めよ。

ヒント 微分法であれば：——

$$f(x)=x^2(1-x)=x^2-x^3$$

$$\therefore\quad f'(x)=2x-3x^2=-x(3x-2)$$

増減表をつくると

x		0		$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘

ゆえに $0<x<1$ の範囲では $x=\dfrac{2}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{27}$ をとることがわかります。

さて，相加・相乗平均の場合なら $\dfrac{x}{2}$ と $\dfrac{x}{2}$ と $1-x$ の相加・相乗平均を考えて

$$\frac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+(1-x)}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}(1-x)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{x^2}{4}(1-x)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{27} \geqq \frac{1}{4}x^2(1-x)$$

$$\therefore\quad x^2(1-x) \leqq \frac{4}{27}$$

等号が成り立つのは

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=1-x$$

したがって $x=\dfrac{2}{3}$ のときです。

練習 2. $x>0$ のとき

$$x^2+\frac{1}{x}$$

の最小値を求めよ。

ヒント これはもはや基礎解析の範囲ではありません。とはいえ，定義にしたがって $\dfrac{1}{x}$ を微分することはできますから，もちろんできないハズはありませんが……。

ところで，相加・相乗平均の関係を使うと次のようです。

$$\frac{x^2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}}{3} \geqq \sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{1}{x} \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

等号の成り立つのは

$$x^2=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x}\quad \text{のときです。}$$

したがって $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ をとるのです。

* * *

◆ このように，相加・相乗平均の関係はギリシア時代から≪原則≫としてみとめられていたのです。それにしても，その≪原則≫とは，そもそもなんであろうか？！