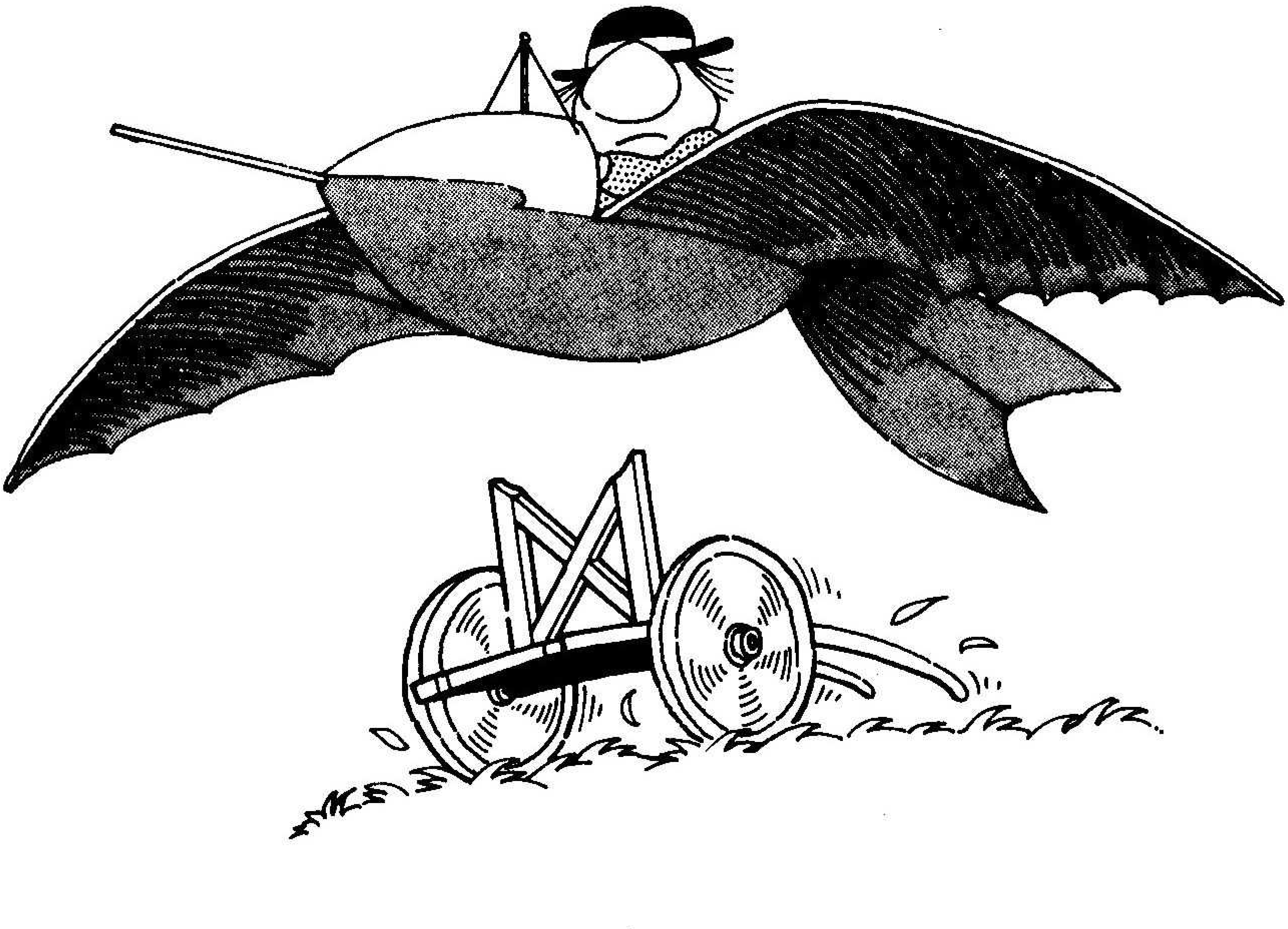
第3章

数　　列



◑数列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数列，ベクトル列，関数列といっても本質的には同じことだ。まず，何はともあれ，数列をマスターしよう。

◆ ある規則にしたがって数を並べたとき，それを数列といいます。例えば，

1，2，3，4，……

1，0，1，0，……

1，2，4，8，……

などは，その規則が見やすい。だから第5項は何か，といわれれば，すぐ答えられるでしょう。すなわち，上から順に

5，1，16

です。

(注) しかし，よく考えてみると，このことは変です。第n項が

$$a_n=n$$

$$a_n=\frac{1}{6}(n^3-6n^2+17n-6)$$

のいずれでも，最初の3項は

1，2，3

となるのですから，これから第4項を求めることは不可能です。しかし，数列の問題としては，与えられたものできまるもっとも簡単なものという《暗黙の》約束からできているわけです。

*　*　*

◆ さて，数列の問題は大きく分けて次のようになります。

1. 等差数列
2. 等比数列
3. 調和数列
4. 分数数列
5. 循環級数
6. いろいろな数列

第6のいろいろな数列というのは，特殊な形のもの。例えば

5，55，555，……

といったものが入ります。

次には，まったく別系統の漸化式で与えられた数列があります。

これは大きく分けて3つになります。

1. 二重数列
2. a_nとa_{n-1}の漸化式の与えられたもの
3. a_nとa_{n-1}とa_{n-2}の漸化式の与えられたもの，

です。そして，これらは，それぞれ細分されますが，それぞれの項を参照してください。

*　*　*

◆ 一見して数列の問題にみえなくても，本質的には数列になる，というのも多いのです。その例をいくつか当たっておきましょう。

■**練習1.** 2次方程式$x^2+x+2=0$の2つの解をα，βとし，$\alpha^n+\beta^n=S_n$とするとき，S_1，S_2，S_3，S_4を求めよ。

(ヒント) 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$$

$$\therefore\ S_1=-1 \qquad \cdots\cdots①$$

次に，αは解であるから

$$\alpha^2+\alpha+2=0$$

$$\therefore\ \alpha^{n+2}+\alpha^{n+1}+2\alpha^n=0 \qquad \cdots\cdots②$$

同様にして

$$\beta^{n+2}+\beta^{n+1}+2\beta^n=0 \qquad \cdots\cdots③$$

①＋②より

$$S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n=0$$

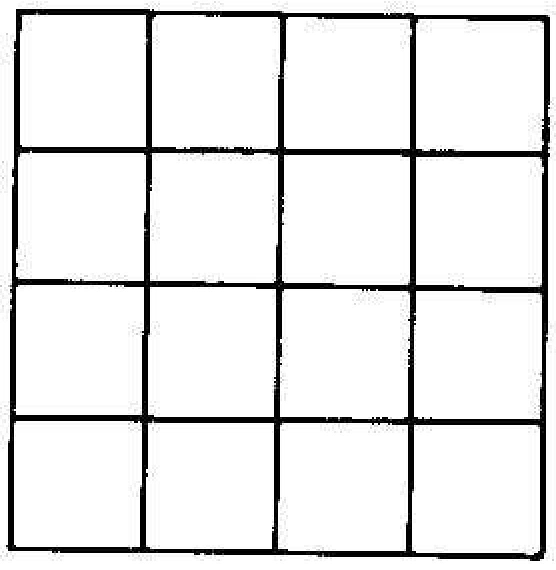
$$\therefore\ S_{n+2}=-S_{n+1}-2S_n \quad (n\geqq 0)$$

ところが$S_0=\alpha^0+\beta^0=2$，$S_1=-1$であるからS_2が求まり，したがってS_3が求まり，……ということになりましょう。

(答) $S_1=-1$，$S_2=-3$，$S_3=5$，$S_4=1$

7/9

■練習 2. 右の図の中にある正方形の数を求めよ。



(ヒント) もっとも小さい正方形は 4^2 個，次のは 3^2 個，次のは 2^2 個，もっとも大きいのは 1^2 個，合計すると

$$1^2+2^2+3^2+4^2=30$$

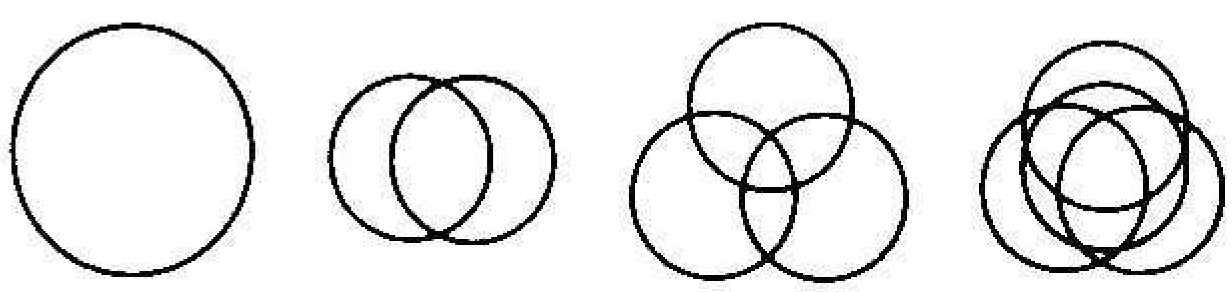
ということがわかります。

これだけで，数列というのはいささか大ゲサですが，分割する数が増えると，もはや，立派な数列の問題となります。

■練習 3. 平面上にあって，いずれの 2 つも 2 点で交わり，いずれの 3 つも同一点を通らない n 個の円がある。この平面はいくつの部分に分けられるか。

(ヒント) たいていの人は見た瞬間に もう ダ メ だ，という気がします。しかし， $n=1$, 2, 3, …… とやってみたらどうです。

$n=1$　　$n=2$　　$n=3$　　$n=4$



2　　4　　8　　14

その結果は上のように

2, 4, 8, 14, ……

の第 n 項を求めたらよさそうだ。もちろん，これでは厳密な解ではありません。しかし，こうして，この数列の構成がわかってしまえば，証明もめんどうではありません。

(解) 円が 1 個のときは 2 つの部分に分かれる。次に，円が 2 個のときは，第 2 の円が第 1 の円と 2 点で交わり，1 つの交点から出発し，次の交点に到達するとき 1 個，次に，もとの点に到達したとき 1 個，合計 2 個増えるから全部で 2+2 に分割される。

さらに，第 3 の円を追加すると，2 つの円と 4 点で交わり，4 個増え て 2+2+4 になる。以下同様にして，n 個の円があれば

$$\begin{aligned}&2+2+4+6+8+\cdots\cdots(n\text{項})\\&=2+(2+4+6+8+\cdots\cdots(n-1)\text{項})\\&=2+\frac{n-1}{2}\{2\cdot2+(n-2)\cdot2\}\\&=2+(n-1)\cdot n=n^2-n+2\end{aligned}$$

の部分に分割される。

$\boxed{\text{答}}$ n^2-n+2

*　　*　　*

◆ 数列というコトバが表面に出なくても数列を使う問題は数多くあります。例えば，こんなのもあります。

■練習 4. $A=1+\underbrace{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2}}}}}}_{20\text{個}}$

を計算せよ。

(ヒント) $a_n=1+\underbrace{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2}}}}}}_{n\text{個}}$

とおきますと

$$a_n-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2}}}}}=\frac{1}{2+(a_{n-1}-1)}$$

$$=\frac{1}{a_{n-1}+1}\qquad\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}\quad\left(a_1=\frac{3}{2}\right)$$

これなら扱い方はきまってい ます（☞ p. 154)。すなわち，平衡値を求めると $\pm\sqrt{2}$ ですから，まず，両辺から $\sqrt{2}$ を引いて変形しますと

$$a_n-\sqrt{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{a_{n-1}+1}(a_{n-1}-\sqrt{2})$$

次に，……，かくして a_n が出たら，n に 20を入れればよいハズ。

$\boxed{\text{答}}$ $\dfrac{(1+\sqrt{2})^{21}+(1-\sqrt{2})^{21}}{(1+\sqrt{2})^{21}-(1-\sqrt{2})^{21}}\cdot\sqrt{2}$

○等差数列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等差数列は算術数列ともいわれてきた。記号ではA.P.；A.S.；A.R. などが使われた。最近，A.R. を使う人はないが，……

◆ 具体例でいきましょう。

4　11　18　25　……

は，4に7を加えて11，それに7を加えて18，それに7を加えて25，……となっていますね。このように，

ある数に，定数を次々に加えて作った数列を等差数列といい，最初の数を初項，加えてゆく数を公差という

のです。では，具体的な問題を：——

7/10

■練習 1. 等差数列 $\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，……
の初項，公差を求めよ。

ヒント　初項はいうまでもなく $\sqrt{2}$ です。わずか2つしかわかっていないが，等差数列ときまっているのですから，公差は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{1-2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

です。

7/9

■練習 2. 5 $\boxed{}$ $\boxed{}$ 10 …… が等差数列をなすという。$\boxed{}$に適当な数を入れよ。

ヒント　公差を d としますと

$$5,\ 5+d,\ 5+2d,\ 5+3d,\ \cdots\cdots$$

となるハズ。してみると

$$5+3d=10$$

$$\therefore\quad d=\frac{5}{3}$$

ゆえに，$\boxed{}$の中は

$$5+\frac{5}{3}=\boxed{\frac{20}{3}}\ \text{と}\ \frac{20}{3}+\frac{5}{3}=\boxed{\frac{25}{3}}$$

です。

＊　＊　＊

◆ ところで，等差数列で大切なことは4つあります。

第1は，

初項を a，公差を d とすると，第 n 項 a_n は

$$a_n=a+(n-1)d$$

であることです。

第2は，

第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

です。さらに

第 n 項を l と書くと，その和 S_n は

$$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$$

とも書けます。ときにはスゴク便利です。というのも公差 d が入っていないから。

第3は，

3つの数 a，b，c が等差数列をなすための条件は

$$2b=a+c$$

です。

第4は，3つの数が等差数列をなすときの表し方です。それは

$$a\quad a+d\quad a+2d$$

とおくのもマチガイではありませんが，

$$a-d\quad a\quad a+d$$

と対称性を残しておくのです。4つでも同じです。公差を $2d$ として

$$a-3d\quad a-d\quad a+d\quad a+3d$$

とおけます。それぞれについては各項を参照してもらうとして，ここでは，第4のものを重点にしてやっておきましょう。

7/9

■練習 3. 直角三角形の3辺が等差数列をなすという。どのような三角形か。

ヒント　3辺を

$$a-d,\ a,\ a+d\quad (d>0)$$

としますと，もちろん最大辺が斜辺なのでしょう。だから，ピタゴラスの定理によって

$$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$$

$$\therefore\quad 4ad=a^2$$

$$\therefore\quad a=4d$$

したがって，3辺の比が

$$5:4:3$$

の三角形であることがわかります。

7/9

■練習 4. 等差数列をなす3数があって，その和は27，積は693である。この3数を求めよ。（日本大）

ヒント　3数を $a-d,\ a,\ a+d\ (d\geqq 0)$ とおきますと

$$(a-d)+a+(a+d)=27 \quad \cdots\cdots①$$

$$(a-d)a(a+d)=693 \quad \cdots\cdots②$$

①より

$$a=9$$

これを②に代入して

$$9(81-d^2)=693$$

$$\therefore\quad d^2=4 \qquad \therefore\quad d=2$$

よって，求める3数は 7，9，11 であることがわかります。

注　このような問題でみんながよく疑問に思うのは，答として，7，9，11 のほかに 11，9，7 を書く必要がないか，ということです。これは問題からははっきりしませんが，3数を求めよ，というときには 7，9，11 の1組書けばいいでしょう。しかし，この等差数列を求めよ，というのであれば 7，9，11；11，9，7 の2組を書くべきでしょう。

*　*　*

◆　第 n 項を表す公式を使う練習をやってみませんか。

7/11

■練習 5. 等差数列で第5項が -7 で，第10項までの和が -85 であるとき，公差および初項を求めよ。

ヒント　初項を a，公差を d としますと，第5項が -7 であるということから，

$$a+(5-1)d=-7$$

つまり

$$a+4d=-7 \quad \cdots\cdots①$$

また，第10項までの和が -85 であるということから，

$$\frac{10}{2}\{2a+(10-1)d\}=-85$$

つまり

$$2a+9d=-17 \quad \cdots\cdots②$$

となります。そこで①，②を連立させて解けばいいでしょう。さて，その結果は

$$a=5,\ d=-3 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 6. 初項から第 n 項までの和が n の2次式 an^2+bn（a, b は定数，$a\neq 0$）に等しい数列は等差数列であることを示せ。（九州産業大）

ヒント　次のようにやる人があります。いや，あります，なんてものじゃない。やる人が多すぎるのです。さあ，そのまちがいわかりますか。

$$S_n=an^2+bn$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=\{an^2+bn\}-\{a(n-1)^2+b(n-1)\}\\ &=an^2+bn-an^2+2an-a-bn+b\\ &=2an+(-a+b)\\ &=(a+b)+(n-1)(2a)\end{aligned}$$

ゆえに，この数列は初項 $a+b$，公差 $2a$ の等差数列をなす。

わからなかったら，次の問題をやってみませんか。

■練習 7. 初項から第 n 項までの和が $n^2+n+100$ である数列 $\{a_n\}$ の $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

注　a_1 がジャマ（？）で，等差数列になれないところに注意してください。$a_1=102$ なのに，a_2 は 4，a_3 は 6 といったぐあい。

① 等差数列の第n項

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等差数列の第n項を表す公式はオボエテいなければなりません。それにもまして，活用できなければなりません。

◆ 等差数列の重要事項：——

初項a，公差dの等差数列の第n項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

で与えられます。ここでは，この公式を使う問題についてやってみましょう。

では，まず練習1. から：——

練習1. 数列 5　12　19　26 …… の第30項を求めよ。

(解) 初項5，公差7の等差数列であるから第30項は

$$5+(30-1)\cdot 7=5+203=208 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

練習2. 第p項がq，第q項がpの等差数列の初項と公差を求めよ。($p \neq q$)

(解) 初項をa，公差をdとすると

$$a+(p-1)d=q \quad \cdots\cdots ①$$

$$a+(q-1)d=p \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より

$$(p-q)d=q-p$$

$$\therefore \quad d=-1$$

$$\therefore \quad a=p+q-1$$

答　初項 $p+q-1$，公差 -1

＊　＊　＊

◆ 3つの数 a，x，b がこの順序で等差数列をなすとき，xをa，b の **等差中項** といいます。3つに限らず，一般に

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ b$$

がこの順序に等差数列をなすとき，x_1，x_2，……，x_n を a，b の等差中項といいます。

では，次の練習をやってみませんか。

練習3. 4と10の間に3個の等差中項を入れよ。

(ヒント) 4，x_1，x_2，x_3，10 が等差数列をなすようにx_1，x_2，x_3を求めよ，というのです。

このとき，この数列の公差をdとすると，10は第5項ですから

$$10=4+(5-1)d \qquad \therefore \quad d=\frac{3}{2}$$

したがって，次のようになりましょう。

$$x_1=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$$

$$x_2=\frac{11}{2}+\frac{3}{2}=7$$

$$x_3=7+\frac{3}{2}=\frac{17}{2}$$

答　$\dfrac{11}{2}$，7，$\dfrac{17}{2}$

練習4. 5と10の間にn個の等差中項を入れて，$(n+2)$ 個の総和が30になるようにしたとき，公差dを求めよ。

(ヒント) 等差数列の和の公式が2つありましたね。1つは

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

で，もう1つは

$$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$$

です。この場合は $a=5$，$l=10$，$S_n=30$ で nの代わりに $n+2$ を代入して

$$30=\frac{n+2}{2}(5+10)$$

$$\therefore \quad n+2=4 \qquad \therefore \quad n=2$$

そこで初項が5，第4項が10であることから

$$5+(4-1)\cdot d=10$$

$$\therefore \quad d=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみましょう。

練習 5. 2つの等差数列

$\{a_n\}: 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \cdots\cdots$

$\{b_n\}: 7,\ 16,\ 25,\ 34,\ \cdots\cdots$

の共通な項はどんな数列をなすか。

ヒント　$\{a_n\}$ の第m項は

$$4+(m-1)\cdot 5=5m-1$$

$\{b_n\}$ の第n項は

$$7+(n-1)\cdot 9=9n-2$$

ですから，これが等しいとしますと

$$5m-1=9n-2$$

$$\therefore\quad 5m-9n=-1 \qquad \cdots\cdots①$$

そこで，この **不定方程式の自然数解** を求めればいいでしょう。（☞「数Ⅰ」(p.160) を参照してください）

さて，①より

$$m=\frac{9n-1}{5}=\frac{10n-(n+1)}{5}=2n-\frac{n+1}{5}$$

ですから，kを整数として

$$\frac{n+1}{5}=k \qquad \therefore\quad n=5k-1$$

$$\therefore\quad m=2(5k-1)-k=9k-2$$

$n>0,\ m>0$ より　$k\geqq 1$

つまり $\{a_n\}$ の第7項と $\{b_n\}$ の第4項が一致しますし，同じく，第16項と第9項が一致するといったぐあい。そして，それは

$$5(9k-2)-1=45k-11 \quad (k\geqq 1)$$

でもあるし，

$$9(5k-1)-2=45k-11 \quad (k\geqq 1)$$

でもあるわけです。そして，これは

$$45k-11=34+(k-1)\cdot 45$$

と書けますから，初項34，公差45の等差数列をなすことがわかります。

結局，この問題はかなりめんどうになりましたが，しょせん，それは数Ⅰの部分がめんどうなのであって，等差数列ではありませんよ。それを，数列はイヤだ，などと，うそぶいている人のいかに多きことか!!

練習 6. 2つの等差数列

$\{a_n\}: 5,\ 12,\ 19,\ 26,\ \cdots\cdots$

$\{b_n\}: 1000,\ 985,\ 970,\ 955,\ \cdots\cdots$

の共通項はいくつあるか。

解　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の第m項と第n項が等しいとすると

$$5+(m-1)\cdot 7=1000+(n-1)(-15)$$

$$\therefore\quad 7m+15n=1017$$

$$\therefore\quad m=\frac{-15n+1017}{7}$$

$$=\frac{(-14n+1015)-(n-2)}{7}$$

$$=-2n+145-\frac{n-2}{7}$$

ゆえに $\dfrac{n-2}{7}=k$（kは整数）とおくことができ，したがって

$$n=7k+2 \quad (>0)$$

$$\therefore\quad m=-15k+141 \quad (>0)$$

$$\therefore\quad 0\leqq k\leqq 9$$

ゆえに，求める個数は10個である。

答　10個

注　この10個は $k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 9$ に対応して $n=2,\ 9,\ 16,\ \cdots\cdots,\ 65$ で，したがって，

985，880，……，

となります。

*　*　*

◆ 等差数列の第n項の公式は単純ですからめんどうなものはあまりありませんが，和と組み合わされると，意地のわるいものがいろいろと作られることになります。それは，等差数列の和の項を参照してください（☞ p.86）。ここでは，1つだけあげておきます。

練習 7. 初項10，公差 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等差数列の和 S_n を最大にするnを求めよ。

答　15

◑等差数列の和の公式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等差数列の和の公式は使い方をあやまるとめんどうになるもの。よく考えて使うことが肝心。くれぐれもバカにすることなかれ。

◆ 等差数列の和の公式は2つあります。そして，この2つを使い分けることができるようになれば，よくわかったといってよいのです。ところで，

初項を a，公差を d，項数を n とすると，その和 S_n は

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

です。もう1つ，

初項を a，末項を l，項数を n とすると

$$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$$

と書けます。**末項**（まっこう）というのは最後の項のこと。つまり，第 n 項です。

*　*　*

練習 1. 初項が4，公差3の等差数列の初項から10項までの和を求めよ。

解　求める和を S とすると

$$S=\frac{10}{2}\{2\cdot4+(10-1)\cdot3\}=175 \quad \cdots\cdots 答$$

練習 2. 初項50，末項 -20，和540の等差数列の公差と項の数を求めよ。

解　項の数を n，公差を d とすると

$$-20=50+(n-1)d \quad \cdots\cdots ①$$

$$540=\frac{n}{2}\{50+(-20)\} \quad \cdots\cdots ②$$

②より

$$n=36$$

これを①に代入して d を求めれば

$$d=-2$$

答　公差 -2，項の数 36

練習 3. 1から100までの整数で7で割りきれるものの和を求めよ。

ヒント　7で割りきれる，というから，7の倍数です。小さいほうから書いてみますと，

$$7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \cdots\cdots,\ 98$$

だけあります。求める和は

$$S=7(1+2+3+\cdots\cdots+14)$$
$$=7\cdot\frac{14}{2}(1+14)$$
$$=735 \quad \cdots\cdots 答$$

*　*　*

練習 4. 初項40，公差 $-\frac{1}{3}$ の等差数列の第何項までの和が最大となるか。

ヒント　これは和の問題とはいいながら，第 n 項までの和を求めて，これを最大にしようと思ってはいけません，できないわけじゃないがムダです。

公差が負ですから，だんだん小さくなっていきますが，正である間は，それを加えることによって大きくなります。和が減少しはじめるのは，負の項を加えたときからです。ところで，第 n 項を a_n とし，

$$a_n=a+(n-1)d$$
$$=40+(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\leqq 0$$

とおくと

$$n\geqq 121$$

等号は $n=121$ のときです。

したがって，第120項までの和も第121項までの和も等しく，それが和の最大値です。

注　$a_n=0$ となることがなければ，解はただ1つになるわけですが，この場合は $a_{121}=0$ ですから $S_{120}=S_{121}$ で，これが最大値を与えるわけです。

*　*　*

◆ これで等差数列の和の公式はわかったでしょう。次には，ややめんどうな問題へ。

練習 5. 4で割れば2余り，5で割れば3余り，8で割れば6余る正の整数で，1000未満のものの総和を求めよ。（桃山学院大）

(解) $N=4x+2=5y+3=8z+6$

$$(x,\ y,\ z \text{ は整数})$$

とおくことができる。

左半分より

$$x=\frac{5y+1}{4}=y+\frac{y+1}{4}$$

であるから $\dfrac{y+1}{4}=k$（整数）とおくと

$$y=4k-1$$

$$\therefore\ N=5(4k-1)+3=20k-2$$

したがって

$$20k-2=8z+6$$

$$\therefore\ z=\frac{5k-2}{2}=2k-1+\frac{k}{2}$$

ゆえに　$k=2l$（l は整数）とおくことができ

$$z=5l-1$$

となる。

$$\therefore\ N=8(5l-1)+6=40l-2$$

よって，求める総和は

$$S=\sum_{l=1}^{25}(40l-2)$$

$$=40\cdot\frac{1}{2}\cdot25\cdot26-2\cdot25$$

$$=12950 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(注) 上の解の中心は整数方程式を解く部分ですが，これについては（☞「数Ⅰ」p.160）を参照のこと。

練習 6. 2つの等差数列の第 n 項までの和の比が n の値にかかわらず 5：4 であるとき第10項の比を求めよ。

(ヒント) 2つの数列の初項を $a,\ a'$；公差を $d,\ d'$；第 n 項までの和を $S_n,\ S_n'$ としますと

$$\frac{S_n}{S_n'}=\frac{\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}}{\dfrac{n}{2}\{2a'+(n-1)d'\}}$$

$$=\frac{2a+(n-1)d}{2a'+(n-1)d'} \qquad \cdots\cdots(*)$$

これの値が n にかかわらず $\dfrac{5}{4}$ に等しい，として扱ってもよいのですが，それよりは次のやり方のほうがラクです。

第10項を $a_{10},\ a_{10}'$ としますと

$$\frac{a_{10}}{a_{10}'}=\frac{a+9d}{a'+9a'}$$

いま，(*)において $n=19$ とおいてみますと

$$\frac{2a+18d}{2a'+18d'}=\frac{a+9d}{a'+9d'}$$

となります。してみると，第10項の比もまた 5：4 であることがわかります。一般に，$n=2m-1$ とおきますと

$$\frac{S_n}{S_n'}=\frac{a_m}{a_m'}$$

となりますので，すべての項の比が 5：4 であることがわかります。

＊　＊　＊

◆ 第2の和の公式の応用例を1つ。

練習 7. 5と20の間に n 個の等差中項を入れたら，全体の和が整数 N に等しくなった。N はどんな整数か。また n は何か。

(ヒント) n 個の等差中項を入れると，全体の和は $\dfrac{n+2}{2}(5+20)$ で，整数 N に等しいから，

$$\frac{25}{2}(n+2)=N$$

$$25(n+2)=2N \qquad \cdots\cdots(*)$$

ゆえに

$$N=\frac{25(n+2)}{2}=12n+25+\frac{n}{2}$$

であるから

$$n=2k,\ N=25k+25 \quad (k\geqq1)$$

と書けることがわかります。実は，これほどやらないでも(*)からぐ出るハズ。

ともあれ，挿入すべき等差中項の数 n は偶数個で N は50以上の25の倍数である。

この解には公差を使わない点が注目すべきところですね。

3数が等差数列をなす条件

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆3つの数が等差数列をなすということは，両端の相加平均が中央の数になるということだ。それにもかかわらず，……

◆ まず，これを：——

3つの数 a，b，c がこの順序で等差数列をなすための条件は

$$2b=a+c$$

です。証明するまでもありませんが，念のためにやっておくとしましょう。

a，b，c が等差数列をなすなら，公差を d として

$$b=a+d,\quad c=b+d=a+2d$$

$$\therefore\quad 2b=2(a+d)=a+(a+2d)=a+c$$

ナルホド，$2b=a+c$ は必要条件です。

逆に，$2b=a+c$ ならば

$$b-a=c-b$$

これを $=d$ とおくと

$$b-a=d,\quad c-b=d$$

$$\therefore\quad b=a+d,\quad c=b+d(=a+2d)$$

ゆえに，a，b，c は等差数列をなす。つまり，十分条件であることがわかりました。

*　*　*

◆ さて，次は，この条件の使い方です。

7/17

■練習 1. a，b，c も $a+b$，$b+c$，$c+a$ も等差数列をなすのはどんな場合か。

(ヒント)　a，b，c が等差数列をなすから

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots①$$

$a+b$，$b+c$，$c+a$ が等差数列をなすから

$$2(b+c)=(a+b)+(c+a)$$

$$\therefore\quad b+c=2a \qquad \cdots\cdots②$$

①より c を求め，②に代入すると

$$b+(2b-a)=2a$$

$$\therefore\quad a=b$$

$$\therefore\quad a=b=c$$

ゆえに，すべてが等しい場合です。

9/2

■練習 2. a，b，c も $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ も等差数列をなすのはどんな場合か。

(解)　a，b，c が等差数列をなすための条件は

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots①$$

であり，$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ が等差数列をなすための条件は

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \qquad \cdots\cdots②$$

である。②の分母をはらって

$$2ac=bc+ab \qquad \cdots\cdots③$$

①，③から c を消去すると

$$2a(2b-a)=b(2b-a)+ab$$

$$\therefore\quad (a-b)^2=0 \qquad \therefore\quad a=b$$

$$\therefore\quad a=b=c$$

(注)　$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ が等差数列をなすとき，a，b，c は **調和数列** をなすといいます。したがって，この問題をいいかえると，≪3数がその順序で等差数列でかつ調和数列となるのは $a=b=c$ のときである≫となります。

では，次をやってみませんか。

■練習 3. a，b，c が等差数列をなし，b，c，a が調和数列をなすのはどんな場合か。

(ヒント)　a，b，c が等差数列をなすから

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots①$$

b，c，a が調和数列をなすから $\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$，$\dfrac{1}{a}$ は等差数列をなし，したがって $\dfrac{2}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}$ が成り立つわけ。これから $a:b:c$ が $1:1:1$ あるいは $-2:1:4$ となります。

*　*　*

◆ では，次には，総合的な練習をやってみようではありませんか。

■練習 4. $\log 2$，$\log(2^x-1)$ および $\log(2^x+3)$ がこの順序で等差数列をなすとき，xの値を求めよ。 (九州歯大)

(ヒント) $\log 2$，$\log(2^x-1)$，$\log(2^x+3)$ が等差数列をなす，というのですから

$$2\log(2^x-1)=\log 2+\log(2^x+3)$$

$$\therefore\ (2^x-1)^2=2(2^x+3)$$

$2^x=u$ とおいてみますと

$$(u-1)^2=2(u+3)$$

$$\therefore\ u^2-4u-5=0$$

$$\therefore\ (u-5)(u+1)=0$$

$u>0$ ですから　$u=5$

つまり　$2^x=5$

両辺の対数をとって

$$x\log 2=\log 5 \qquad \therefore\ x=\frac{\log 5}{\log 2}$$

あるいは底を2にすると，少し格好がよくなります。つまり

$$x=\log_2 5$$ ……答

■練習 5. 三角形 ABC において，∠A，∠B，∠C が公差 θ の等差数列をなすとき，$\cos\theta$ を3辺 a，b，c で表せ。ただし，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする。

(愛知大)

(ヒント) $\angle A+\theta=\angle B$，$\angle B+\theta=\angle C$

$$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C$$
$$=(\angle B-\theta)+\angle B+(\angle B+\theta)$$
$$=3\angle B=180^\circ$$
$$\therefore\ \angle B=60^\circ$$

$$\therefore\ \angle A=60^\circ-\theta,\ \angle C=60^\circ+\theta$$

$$\therefore\ \cos\angle A=\cos(60^\circ-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \quad \cdots\cdots①$$

$$\cos\angle C=\cos(60^\circ+\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \quad \cdots\cdots②$$

①+②：　$\cos\theta=\cos\angle A+\cos\angle C$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{a(b^2+c^2-a^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

ところが

$$分子=-(a^3+c^3)+ac(a+c)+b^2(a+c)$$
$$=(a+c)\{-(a^2-ac+c^2)+ac+b^2\}$$
$$=(a+c)\{b^2-(a-c)^2\}$$
$$=-(a+b-c)(a-b-c)(a+c)$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{-(a+b-c)(a-b-c)(a+c)}{2abc}$$

……答

*　*　*

◆ このように考えてみると，3つの数が等差数列をなす問題は，いろいろ多いばかりでなく，数Iなどにも，等差数列というコトバを使わないで出題されているものが多いことに気がつくでしょう。例えば，

≪3数 a，b，c があり，a，b の相加平均は c で，b^2，c^2 の相加平均は a^2 である。$a:b:c$ を求めよ。$(abc\neq 0)$≫

といったぐあいだ。

では，もう1つやってみませんか。

■練習 6. 数列 $\{a_n\}$ において，a_0，a_n，a_{n-1} がこの順序で等差数列をなすとき，a_n を a_0，a_1 を用いて表せ。$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

(解) 題意により

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_0}{2} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$\therefore\ a_n-a_0=\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_0)$$

ゆえに $\{a_n-a_0\}$ は初項 (a_1-a_0)，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列をなす。

$$\therefore\ a_n=a_0+(a_1-a_0)\frac{1}{2^{n-1}} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

さあ，どうです。新しい目で問題を眺めてみると，等差数列に関係した問題は等式にも不等式にも，あるいは方程式にも侵入していることがわかるでしょう。

3次方程式と等差数列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆3次方程式と等差数列の組合せ，それはきわめて特殊なもののようにみえます。しかし，いい練習の場を提供してくれるのです。

◆ 3次方程式の3つの解が等差数列をなすための条件を求める問題はたくさん出題されています。ところで，まず，復習から：——

3次方程式の解と係数の関係は次のようです。

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$
の3つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

また，

3つの数が等差数列をなすときは
$a-d$, a, $a+d$ とおく

のが定石です。

*　*　*

◆ では，次の練習をやってみませんか。

練習1. 3次方程式

$$x^3-6x^2+11x+k=0$$

の3つの解が等差数列をなすように定数kの値を求めよ。

ヒント　3つの解を $a-d$, a, $a+d$ とすると解と係数の関係から

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=6 & \cdots\cdots①\\(a-d)a+a(a+d)\\\quad+(a-d)(a+d)=11 & \cdots\cdots②\\(a-d)a(a+d)=-k & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②，③よりそれぞれ

$$a=2 \qquad \cdots\cdots①'$$

$$3a^2-d^2=11 \qquad \cdots\cdots②'$$

$$a(a^2-d^2)=-k \qquad \cdots\cdots③'$$

①′，②′から

$$d^2=1 \qquad \cdots\cdots④$$

①′，④を③′に代入して

$$k=-6 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

注　$a=2$は解であることがわかっているから，これを元の方程式に代入してkをすぐ求めることもできます。

練習2. 3次方程式

$$x^3+kx^2+11x-6=0$$

の3つの解が等差数列をなすという。定数kの値を定めよ。

ヒント　3つの解を $a-d$, a, $a+d$ としますと，やや不精して

$$a=-\frac{k}{3} \qquad \cdots\cdots①$$

$$3a^2-d^2=11 \qquad \cdots\cdots②$$

$$a(a^2-d^2)=6 \qquad \cdots\cdots③$$

②，③から d^2 を消去して

$$a\{a^2-(3a^2-11)\}=6$$

$$\therefore\quad 2a^3-11a+6=0$$

$$\therefore\quad (a-2)(2a^2+4a-3)=0$$

$$\therefore\quad a=2,\ \frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$$

これと①から

$$k=-6,\ \frac{6\mp3\sqrt{10}}{2} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

注　aは解ですから，①をもとの方程式に代入しますと，

$$-\frac{k^3}{27}+\frac{k^3}{9}-\frac{11}{3}k-6=0$$

が得られます。これを解けばいいわけだが，このほうはめんどうになる。なにしろ因数定理を使って -6 に出会うまでかなりの時間を浪費してしまうからだ。

ともあれ，ダンコとしてやるファイトが大切ということだ。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

7/20

練習 3. 次の□の中に入る実数を見出しなさい。

実係数の3次方程式 $x^3+px^2+qx+8=0$ が相異なる3実根をもち，それら3根は適当に並べれば等比数列になり，また適当に並べれば等差数列になるという。いま，それら3根を x_1, x_2, x_3 と書くと，根と係数の関係から

$$-p=x_1+x_2+x_3 \quad \cdots\cdots①$$
$$q=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \quad \cdots\cdots②$$
$$-8=x_1x_2x_3 \quad \cdots\cdots③$$

を得る。3根を適当に並べかえたものを c, cr, cr^2 と表せば，上の関係式より $cr=\square$ および $q=\square p$……④ を得る。

さらに3根を適当に並べかえたものを $a-d$, a, $a+d$ と書くと①，②，④より $d^2=3a(a+\square)$ となり，これを③に代入して a を求めると，$a=\square$ または，$a=-2$ となる。このうち，$a=-2$ のときは3重根になって題意に適しない。ゆえに求める3根は□，□，□である。

(和歌山県医大)

(ヒント) 3つの解 c, cr, cr^2 について解と係数の関係を使うと

$$c+cr+cr^2=-p \quad \cdots\cdots⑤$$
$$c^2r+c^2r^2+c^2r^3=q \quad \cdots\cdots⑥$$
$$(cr)^3=-8 \quad \cdots\cdots⑦$$

⑤，⑥より

$$c(1+r+r^2)=-p \quad \cdots\cdots⑤'$$
$$c^2r(1+r+r^2)=q \quad \cdots\cdots⑥'$$

⑥′÷⑤′ より

$$cr=-\frac{q}{p}$$

また⑦より

$$cr=-2$$

となります。

こうして並べてみると，どうやら

$$cr=\boxed{-2},\quad q=\boxed{2}p$$

と書かせるつもりらしい。

次は，3つの解 $a-d$, a, $a+d$ について解と係数の関係を使うと

$$(a-d)+a+(a+d)=-p \quad \cdots\cdots⑧$$
$$(a-d)a+a(a+d)+(a-d)(a+d)=q \quad \cdots\cdots⑨$$
$$(a-d)a(a+d)=-8 \quad \cdots\cdots⑩$$

⑧より　$3a=-p$ ……⑧′

⑨より　$3a^2-d^2=q$ ……⑨′

⑩より　$a(a^2-d^2)=-8$ ……⑩′

⑧′，⑨′から

$$d^2=3a^2-q=3a^2-2p$$
$$=3a^2+6a=3a(a+2)$$

これから

$$d^2=3a(a+\boxed{2})$$

ということらしい。

$$\therefore\quad a\{a^2-3a(a+2)\}=-8$$
$$\therefore\quad (a+2)^2(a-1)=0$$
$$\therefore\quad a=\boxed{1}\ \text{または}\ a=-2$$

さらに，$a=-2$ のとき

$$p=6,\quad q=12$$

で，もとの方程式は

$$x^3+6x^2+12x+8=0$$
$$\therefore\quad (x+2)^3=0$$

ゆえに与えられた方程式は3重解 -2 をもつこととなって適さないことになります。

$a=1$ のとき

$$p=-3,\quad q=-6$$

ゆえに，与えられた方程式は

$$x^3-3x^2-6x+8=0$$
$$\therefore\quad (x-1)(x+2)(x-4)=0$$

ゆえに，3つの解は

$$\boxed{1},\ \boxed{-2},\ \boxed{4}$$

(注) 少し，これはゴタゴタした気味があるが，まあ，いいでしょう。

○図形と等差数列

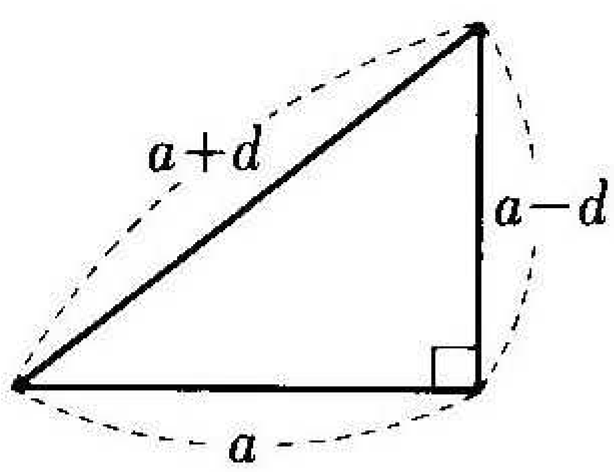
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈図形問題に対する等差数列の応用例を扱ってみませんか。等比数列に比べると少ないが，手ごたえのあるものが多いのです。

◆ 等差数列で大切なことは4つありましたね。忘れている人は，復習してから，次の練習1.をやってみること：——

練習1. 直角三角形の3辺が等差数列をなすという。どんな三角形か。（関西医大）

ヒント　3辺の長さを
$a-d,\ a,\ a+d$
$(d>0)$



としますと，$a+d$ が最大で，したがって斜辺になりますね。したがって，直角三角形であることから

$$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$$
$$\therefore\ a^2=4ad$$
$$\therefore\ a=4d$$

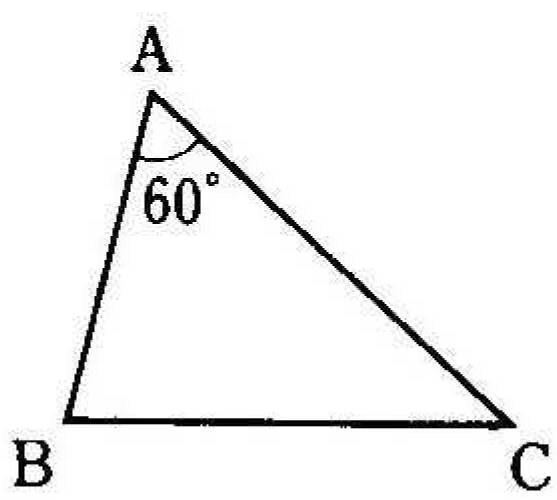
ゆえに3辺の比は

$$5d:4d:3d=5:4:3$$

答　3辺の比が $3:4:5$

注　このような三角形を，古代エジプトでは，**黄金三角形**（おうごんさんかくけい）といっておりました。だからといって，答案に黄金三角形などと書かないほうがいいでしょう。

練習2. $\triangle$ABC において，$\angle A=60^\circ$ で3辺 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ がこの順に等差数列をなすという。どんな三角形か。



ヒント　$\overline{AB}=a-d$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=a+d$ とすると，余弦定理により

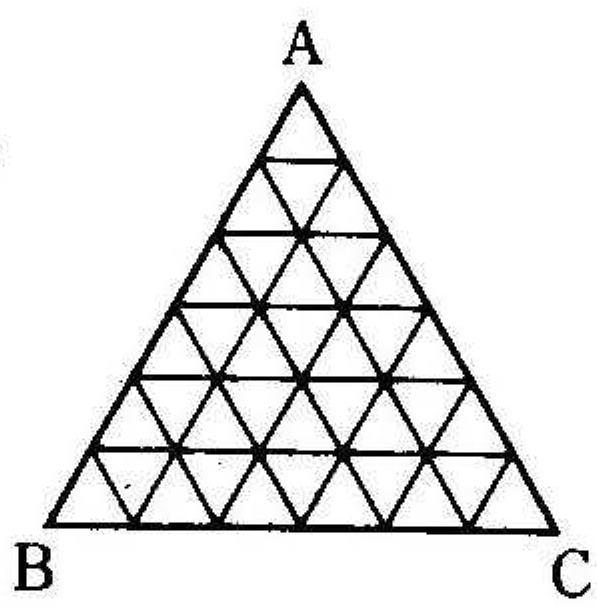
$$a^2=(a-d)^2+(a+d)^2-2(a-d)(a+d)\cos 60^\circ$$
$$\therefore\ a^2=2(a^2+d^2)-(a^2-d^2)$$
$$\therefore\ d=0$$
$$\therefore\ AB=BC=CA$$

ヤレヤレ，あることはあるが，正三角形のときに限るとは，なあ。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な練習をやってみませんか。

練習3. 右の図で三角形はいくつあるか。



ヒント　大きさによって分類して調べるのがコツ。まずもっとも小さいので正立（△）しているものは，上のほうから数えて

$$1+2+3+\cdots\cdots+6=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7=21$$

次に小さいのは

$$1+2+\cdots\cdots+5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$$

次に小さいのは

$$1+2+3+4=10$$

次は　$1+2+3=6$

次は　$1+2=3$

もっとも大きいのは　1

合計して

$$1+3+6+10+15+21=56$$

次に倒立（▽）しているものを同じように小さいほうから数えてみますと，合計して

$$15+6+1=22$$

結局　$56+22=78$　答　78

注　上のように1辺を6等分しないで n 等分するとぐっとめんどうになります。オレは，と思う

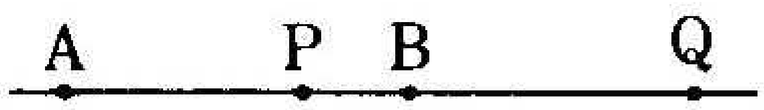
人はやってみませんか。nが偶数と奇数とで場合分けをしなければなりませんよ。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題を：——

練習 4. 線分 AB を同じ比に内分，外分する点をそれぞれ P，Q とするとき，AP，AB，AQ の逆数は等差数列をなすことを示せ。

（解） 線分 AB の長さを l とし，



座標系を適当に選んで，座標を

$$\mathrm{A}(0),\ \mathrm{B}(l)$$

とすると AB を $m:n$ に内分する点は

$$\mathrm{P}\left(\frac{ml+n\cdot 0}{m+n}\right)$$

AB を $m:n$ に外分する点は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{ml-n\cdot 0}{m-n}\right)$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AP}}=\frac{ml}{m+n},\ \overline{\mathrm{AB}}=l,\ \overline{\mathrm{AQ}}=\frac{ml}{m-n}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{l}$$

$$\frac{1}{\mathrm{AP}}+\frac{1}{\mathrm{AQ}}=\frac{m+n}{ml}+\frac{m-n}{ml}=\frac{2m}{ml}=\frac{2}{l}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\mathrm{AP}}+\frac{1}{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{\mathrm{AB}}$$

ゆえに AP，AB，AQ の逆数は等差数列をなす。　Q. E. D.

（注） つまり，AP，AB，AQ は調和数列をなすのです。このため，4点 A，P，B，Q は調和列点をなす，ということがあります。

練習 5. 三角形の3辺の長さの逆数が等差数列をなすとき，公差dのとりうる値の範囲を求めよ。ただし，最大辺を $\frac{1}{a}$ とし，$d>0$ とする。　（関西大）

（ヒント） 3辺の逆数を a，$a+d$，$a+2d$ とおくことができます。したがって3辺は

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+d},\ \frac{1}{a+2d}$$

で，これが三角形を作るための条件は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}>\frac{1}{a+2d}$$

$$\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}>\frac{1}{a}\qquad\cdots\cdots(*)$$

$$\frac{1}{a+2d}+\frac{1}{a}>\frac{1}{a+d}$$

の3つが成り立つことです。しかし，実は $\frac{1}{a}$ が最大であることがわかっているのですから真中の (*) だけで十分で，分母をはらうと

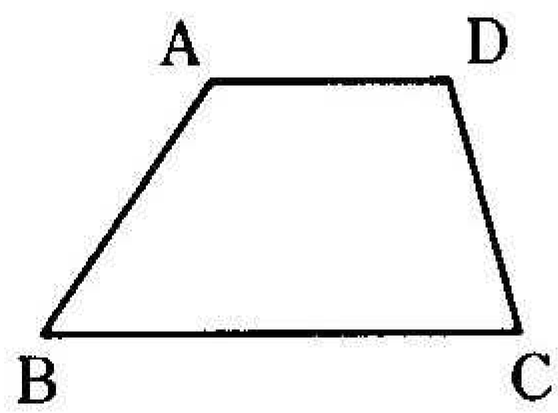
$$a^2+2ad+a^2+ad>a^2+3ad+2d^2$$

$$\therefore\quad a^2>2d^2$$

ゆえに

$$0<d<\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 6. 右の図に示す不等辺の台形で，DA，AB，BC，CD がこの順に等差数列をなすものがあるか。



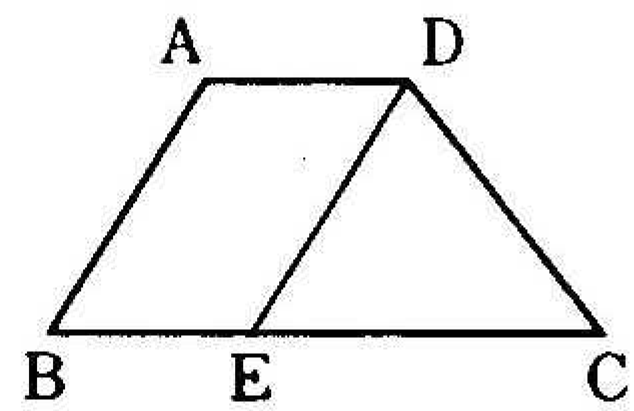
（ヒント） AD が最小と考えて一般性を失わないことは明らか。そこで，

$\mathrm{AD}=a-3\delta$

$\mathrm{AB}=a-\delta$

$\mathrm{BC}=a+\delta$

$\mathrm{CD}=a+3\delta$



とおくと $\delta>0$ であることは明らかですね。Dを通って AB に平行線を引き，BC との交点をEとしますと，△DEC において

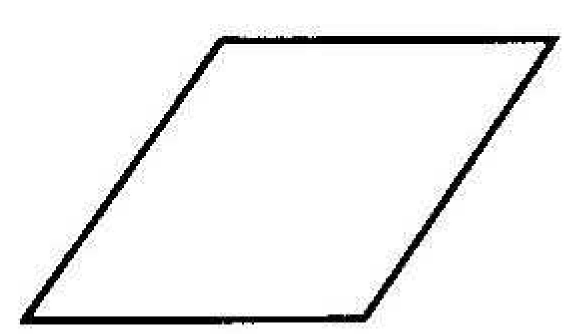
$$\mathrm{DE}=a-\delta,\ \mathrm{EC}=4\delta,\ \mathrm{CD}=a+3\delta$$

三角形である条件から

$$(a-\delta)+(4\delta)>a+3\delta$$

これは不合理である。

かくて，$\delta>0$ のものはないことがわかりましたが，特別の場合として $\delta=0$ の場合がありましょう。つまり，菱形（ひしがた）で，これは，公差0の等差数列で，しかも，四辺形が台形の一種であることは確かです。



◐調和数列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈調和数列という名称はどうでもいいが，その実態は？　よく知っていなければなりません。ところで，≪調和≫とは……

◆ **調和数列** というのは

逆数が等差数列をなす数列

をいいます。例えば，

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

の逆数は明らかに等差数列をなすのですから調和数列です。

練習 1. a，b，c が調和数列をなすための必要十分条件を求めよ。

ヒント　a，b，c が調和数列ならば $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ が等差数列をなすのです。3つの数が等差数列をなす条件（☞ p.88）から

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

つまり

$$2ac=bc+ab\quad(abc\neq0)\quad\cdots\cdots①$$

となります。

逆に，①が成り立てば，両辺を abc で割って

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

ゆえに $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ は等差数列をなす。

ゆえに a，b，c が調和数列をなすための条件は

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

である。

練習 2. 3，x，5 が調和数列をなすように x の値を定めよ。

解　与えられた条件から

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{5}$$

は等差数列をなす。

$$\therefore\quad \frac{2}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{x}=\frac{8}{15}$$

$$\therefore\quad x=\frac{15}{4}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

注　このように3つの数が調和数列をなすとき，中央の数を両端の数の **調和中項** といいます。上の例でいえば，3と5の調和中項は $\frac{15}{4}$ ということになります。もちろん，こんな呼び方は覚えなくてもいいのです。

練習 3. 1と2の調和中項を求めよ。

解　求める調和中項を x とすると

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{2}$$

は等差数列をなすから

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

注　調和中項は1つとは限りません。a_1，a_2，a_3，……，a_n が調和数列をなすとき a_2，a_3，……，a_{n-1} を調和中項といいます。そこで，次へ：──

練習 4. 1と5の間に2個の調和中項を入れよ。

ヒント　$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{5}$ が等差数列をなすように x，y を求めればいいわけ。そして，それには公差を d とすると，

$$1+3d=\frac{1}{5},\ \text{したがって，}\cdots\cdots$$

答　$\frac{15}{11}$，$\frac{15}{7}$

＊　＊　＊

◆ 次にはやや総合的な練習をしてみませんか。では，まず，これを：——

練習 5. 相異なるn個の実数 a_1, a_2, ……, a_n の逆数が等差数列をなすとき， a_1a_2, a_2a_3, ……, $a_{n-1}a_n$ の相加平均と $\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_n{}^2)$ との大小を比較せよ。

（帝京大）

解 a_1, a_2, ……, a_n の逆数が等差数列をなすから

$$a_k=\frac{1}{a+(k-1)d}$$

とおくことができる。したがって a_1a_2, a_2a_3, ……, $a_{n-1}a_n$ の相加平均をMとすると

$$M=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\cdots\cdots+\frac{1}{\{a+(n-2)d\}\{a+(n-1)d\}}\right]$$

$$=\frac{1}{d(n-1)}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{a+(n-2)d}-\frac{1}{a+(n-1)d}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d(n-1)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+(n-1)d}\right)$$

$$=\frac{1}{d(n-1)}\cdot\frac{(n-1)d}{a\{a+(n-1)d\}}$$

$$=\frac{1}{a\{a+(n-1)d\}}$$

したがって

$$\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_n{}^2)-M$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\{a+(n-1)d\}^2}\right]-\frac{1}{a\{a+(n-1)d\}}$$

$$=\frac{\{a+(n-1)d\}^2+a^2-2a\{a+(n-1)d\}}{2a^2\{a+(n-1)d\}^2}$$

$$=\frac{[\{a+(n-1)d\}-a]^2}{2a^2\{a+(n-1)d\}^2}$$

$$=\frac{\{(n-1)d\}^2}{2a^2\{a+(n-1)d\}^2}>0$$

$$(\because\ d\neq 0,\ n\geqq 2)$$

ゆえに，$\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_2{}^2)$ のほうが大きい。

答 $\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_2{}^2)$ のほうが大きい。

注 調和数列というよりも，分数数列の和といったほうがふさわしいくらい。

練習 6. 3次方程式

$$6x^3-11x^2+kx-1=0$$

の3つの解が調和数列をなすように，定数kの値を定めよ。ただし，解は有理数とする。

ヒント 3つの解を $\frac{1}{a-d}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+d}$ として解と係数の関係を使ってできないこともありませんが，計算倒れになる可能性が大きいでしょう。それよりは，与えられた3次方程式の逆数を解とする3次方程式を作ってみたらどうだろう。そのためのひとつの方法は次のようです。

$$\frac{1}{x}=y$$

とおきますと $x=\frac{1}{y}$，これをもとの方程式に代入して

$$6\left(\frac{1}{y}\right)^3-11\left(\frac{1}{y}\right)^2+k\left(\frac{1}{y}\right)-1=0$$

$$\therefore\quad y^3-ky^2+11y-6=0$$

この3つの解が等差数列をなすのですから，これを

$$a-d,\ a,\ a+d\quad (d\geqq 0)$$

とおいて，**解と係数の関係** を使いますと，

$$(a-d)+a+(a+d)=k\quad\cdots\cdots①$$

$$(a-d)a+a(a+d)+(a+d)(a-d)=11\quad\cdots\cdots②$$

$$(a-d)a(a+d)=6\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③より

$$3a=k\quad\cdots\cdots④$$

$$3a^2-d^2=11\quad\cdots\cdots⑤$$

$$a(a^2-d^2)=6\quad\cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥よりaが有理数であることから $a=2$, $d=1$ が得られ，したがって $k=6$

答 6

○ 等比数列とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆等比数列は幾何数列とも呼ばれてきました。記号では G. P. だの G.S. だの，G.R. だのが使われましたが，G.R. とはナニかな。

◆ 等比数列とは何か，などというのは愚問というものです。なぜかって!! だって，そのコトバを知っていたからこそ，このページを開いたにちがいない!!

とはいうものの，ものには順序というものがある。さて，

1 3 9 27 ……

のように，ある数に，次々に定数を掛けてゆくとき，得られる数の列を等比数列というのです。いや，もっと詳しくいうと，初項1，公比3の等比数列，というのです。(それにしても公比などというコトバのもつ古さにご注意あれ!!)

一般的に書くと，

$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3$ ……

です。だから，第 n 項を a_n とすると

初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

となります。

次は，第 n 項までの和だ。

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}\cdots\cdots①$$

とおくと，

$$rS_n=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \cdots\cdots②$$

①−②を作ると

$$(1-r)S_n=a-ar^n$$

$$\therefore\ (1-r)S_n=a(1-r^n)$$

$$\therefore\ S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(オヤ，シマッタ。$r=1$ で割りきれないな，その場合はいうまでもなし)

$r=1$ のとき，

$$S_n=na$$

ということ。つまり，次のようです。

初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項までの和 S_n は

$r=1$ のとき $S_n=na$

$r\neq1$ のとき $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

* * *

◆ 等比数列に関して大切なことはもう1つあります。それは，

3つの数 a，b，c が等比数列をなすための条件は

$$b^2=ac \quad (\neq0)$$

である，ということです。

(注) $\neq0$ という条件についてチョット注意しておくほうがよさそうだ!!

5 0 0

は初項5，公比0の等差数列だといいたくなる。

しかし，

0 0 0

の公比は何か，不定だって？ これも困るネ。だから，こんなのを除いて 公比 $\neq0$ としておくほうが合理的というものであろう。しかし，教科書によっては，その点を明確にしてあるものは少ないのです。

ともあれ，具体的な問題にいきましょう。

練習 1. 1 $\sqrt{2}$ 2 $2\sqrt{2}$ ……

の第100項を求めよ。

(ヒント) 初項1，公比 $\sqrt{2}$ の等比数列ですから，第100項は公式から

$$a_{100}=1\cdot(\sqrt{2})^{100-1}=\sqrt{2}^{99}$$

$$=(\sqrt{2})^{98}\cdot\sqrt{2}=2^{49}\sqrt{2} \cdots\cdots \text{答}$$

(注) これは，これ以上仕方があるまい。2^{49} を計算しようとしてはいけませんよ。

* * *

◆ では，やや総合的な練習をしてみましょうか。

練習 2. 初項 a，公比 r $(a>0,\ r>0)$ の等比数列の第 k 項を a_k とするとき，

$\sum_{k=1}^{n}\log a_k$ を求めよ。　(立教大)

(解)　$a_k=ar^{k-1}$

$$\therefore\quad \log a_k=\log a+(k-1)\log r$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{\log a+(k-1)\log r\}$$

$$=(\log a)n+\log r\cdot\{0+1+2+\cdots+(n-1)\}$$

$$=n\log a+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot\log r$$

$$=\frac{n}{2}\{2\log a+(n-1)\log r\}$$　…… 答

練習 3. 初項 2，項数 6，末項 486 である等比数列の和を求めよ。　(東京電機大)

(解)　第 6 項が 486 であるから，初項を a，公比を r とすると

$$ar^5=486$$

$$\therefore\quad 2r^5=486$$

$$\therefore\quad r^5=243=3^5$$

$$\therefore\quad r=3$$

ゆえに，求める和は

$$\frac{2(1-3^6)}{1-3}=3^6-1=728$$　…… 答

5/6

練習 4. 第 n 項が $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times 6$ である数列の，初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$|S_n-4|<\frac{1}{100}$ を満たす最小の整数 n を求めよ。　(東京理大)

(解)　この数列は

$$初項=6,\ 公比=-\frac{1}{2}$$

の等比数列であるから

$$S_n=\frac{6\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=4\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

となります。したがって，

$$S_n-4=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore\quad |S_n-4|=\frac{1}{2^{n-2}}<\frac{1}{100}$$

$$\therefore\quad 2^{n-2}>100$$

ところが

$$2^6=64<100$$

$$2^7=128>100$$

であるから

$$2^6<2^{n-2}$$

$$\therefore\quad n>8$$

したがって，最小の整数 n の値は

$$n=9$$　…… 答

練習 5. 等比数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$ の公比を r とする。次の 2 つの級数

$$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

$$T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$$

を a_1 と r で表し，$\frac{S}{T}$ を求めよ。ただし，$r\fallingdotseq 0,\ r\fallingdotseq 1$ とする。　(専修大)

(ヒント)　まず，題意から

$$S=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots\cdots+a_1r^{n-1}$$

$$=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

ですね。また，

$$T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1r}+\frac{1}{a_1r^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_1r^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{a_1}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r}{a_1(r-1)}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{S}{T}=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}\cdot\frac{r^n\cdot a_1(r-1)}{r(r^n-1)}$$

$$=a_1{}^2r^{n-1}$$　…… 答

(注)　この程度のものがわかれば，等比数列の大切なことはすべて，わかっているといっていい。あとは，計算力があるかないかだけが，全体の成績を左右するのです。

⑪ 等比数列の第n項

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等比数列の第n項を表す公式を知っていますね。これは漸化式で与えられた数列などにもよく出てくるもの，忘るるべからず。

◆ まず，

初項a，公比rの等比数列の第n項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

で与えられます。ここでは，この第n項を求めたり，第n項が与えられたり，といった問題を扱うことにしました。では，何はともあれ，この練習1.をやってみませんか。

8/5

練習 1. 初項2，公比4の等比数列の第n項を求めよ。

(解) 求める第n項は

$$2\cdot4^{n-1}=2\cdot(2^2)^{n-1}$$
$$=2\cdot2^{2n-2}=2^{2n-1}$$

答 2^{2n-1}

練習 2. 初項2，第10項1024であるような等比数列の公比（実数）を求めよ。

(解) 公比をrとすると

$$1024=2\cdot r^{10-1}$$
$$\therefore\quad 2^{10}=2\cdot r^9$$
$$\therefore\quad r^9=2^9$$
$$\therefore\quad r=2 \quad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 3. 数列　3, 6, ……, 1500, ……は等比数列となることがあるか。（金沢大）

(解) 等比数列をなすとすれば，公比は2（=6/3）であるから，1500がその第n項とすると

$$3\times2^{n-1}=1500$$
$$\therefore\quad 2^{n-1}=500=2^2\cdot5^3$$

であるから，これを満足するnの自然数値は存在しない。ゆえに，これが等比数列をなすことはない。

(注) $2^{n-1}=2^2\cdot5^3$ を満足する自然数値nがないわけはおわかりですか？ 右辺は5^3で割りきれるのに，左辺は割りきれない。だから等しいnが存在するハズがない，のですよ。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

6/9

練習 4. 初項1，公比x $(x>0)$ の等比数列がある。この数列のはじめのp項の平均をM_p，また，はじめのq項の平均をM_qとするとき，M_pとM_qの大小を比べよ。ただし，$p<q$とする。（三重大）

(ヒント) もちろん

$$M_p=\frac{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{p-1}}{p}$$
$$M_q=\frac{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{q-1}}{q}$$

の大小を調べればいいハズ。ここで，2つの考え方がありましょう。1つは，等比数列の和の公式を使うもの，1つは使わないでやるもの。ここでは，和の公式を使わないでやってみましょう。

$x>1$ のとき

$$1<x<x^2<\cdots\cdots<x^{p-1}<\cdots\cdots<x^{q-1}$$

ですから

$$pM_p=1+x+\cdots\cdots+x^{p-1}<px^{p-1}$$
$$\therefore\quad M_p<x^{p-1}$$
$$qM_q=1+x+\cdots+x^{p-1}+x^p+\cdots+x^{q-1}$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})+(x^p+\cdots+x^{q-1})$$
$$>pM_p+(q-p)x^p$$
$$>pM_p+(q-p)M_p=qM_p$$
$$\therefore\quad M_q>M_p$$

$0<x<1$ のときは，まったく同様にして

$$M_q<M_p$$

となりますし，$x=1$ のときはいうまでもなく $M_p=M_q$ です。

$$\text{答}\quad\begin{cases} x>1 \text{ のとき} & M_p<M_q \\ x=1 \text{ のとき} & M_p=M_q \\ 0<x<1 \text{ のとき} & M_p>M_q \end{cases}$$

（注） これはいやな問題ですね。しかし，等比数列がめんどうなのではなく，大小の比較がイヤなだけ。これを混同してはいけません。

8/9

練習 5. 等比数列あり，初項 6，第 n 項が 768，第 $(2n-4)$ 項が12288であるという。この数列の公比 r と n を求めよ。（関西大）

（解） 題意より

$$6r^{n-1}=768 \quad\cdots\cdots①$$

$$6r^{2n-5}=12288 \quad\cdots\cdots②$$

①より

$$r^{n-1}=128 \quad\cdots\cdots③$$

②より

$$r^{2n-5}=2048 \quad\cdots\cdots④$$

③^2÷④を作ると

$$r^3=8=2^3$$

$$\therefore\quad r=2$$

これを③に代入して

$$2^{n-1}=128=2^7$$

$$\therefore\quad n-1=7$$

$$\therefore\quad n=8$$

答 $r=2,\ n=8$

（注） $r^3=8$ より $r=2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$（$\omega$は 1 の虚数立方根）となりますが，この種の問題はすべて実数として扱ってよいでしょう。なお③，④を解くのに **対数を使うと便利** です。すなわち，

$$(n-1)\log r=\log 128=7\log 2$$

$$(2n-5)\log r=\log 2048=11\log 2$$

辺々割ると

$$\frac{n-1}{2n-5}=\frac{7}{11} \qquad \therefore\quad n=8$$

$$\therefore\quad \log r=\log 2 \qquad \therefore\quad r=2$$

*　*　*

◆ 次には，等比数列の第 n 項と和などの関係してくる問題を 1 つやってみることにしましょう。

練習 6. 等比数列がある。第 p 項から第 q 項までの和が $1<p<q$ を満足するすべての $p,\ q$ に対して，つねに第 $(p-1)$ 項と第 q 項の差に等しいという。この等比数列の公比を求めよ。

（ヒント） 等比数列の初項を a，公比を r とします。$r=1$ は適さないこと明らか（なぜかわかる？）です。

そこで，この数列の第 p 項から第 q 項までの和は

$$ar^{p-1}+ar^{p}+\cdots\cdots+ar^{q-1}$$

$$=\frac{ar^{p-1}(1-r^{q-p+1})}{1-r}$$

となります。

そして，第 $(p-1)$ 項と第 q 項との差は

$$ar^{p-2}-ar^{q-1}=ar^{p-2}(1-r^{q-p+1}) \quad (*)$$

または

$$ar^{q-1}-ar^{p-2}=-ar^{p-2}(1-r^{q-p+1}) \quad (**)$$

で与えられます。そこで，

(*)のとき

$$\frac{ar^{p-1}(1-r^{q-p+1})}{1-r}=ar^{p-2}(1-r^{q-p+1})$$

のとき $1<p<q$ より　$q-p+1\neq 0$

$$\therefore\quad 1-r^{q-p+1}\neq 0$$

$$\therefore\quad \frac{r}{1-r}=1 \qquad \therefore\quad r=\frac{1}{2}$$

(**)のとき

$$\frac{ar^{p-1}(1-r^{q-p+1})}{1-r}=-ar^{p-2}(1-r^{q-p+1})$$

$$\therefore\quad \frac{r}{1-r}=-1$$

となって適さないことがわかります。

かくして，……

答 $r=\dfrac{1}{2}$

*　*　*

◆ ヤレヤレ，この最後も問題は意外と手数がかかった。しかし，これとても等比数列がめんどうなわけではなかったのです。基解の中の数Ⅰの内容がめんどうなだけです。

◎等比数列の和の公式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等比数列の和の公式をマチガッテ使う人がスゴク多い。ご注意ありたし。n乗のところで失敗するのです。

◆ 初項a，公比rの等比数列の第n項までの和を S_n としますと

$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ のとき　$S_n=na$

で与えられます。

（注）こんなわかりきった公式が，と思うかもしれませんが，実際にはマチガイがひどく多いのです。例えば，$x\neq1$ のとき

$$x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{50}$$

の和を求めよ，とあったらどうなります。

$a=x^2$，$r=x$，$n=49$ ですから

$$S=\frac{x^2(1-x^{49})}{1-x}$$

です。ところが，x^{49} のところを x^{48} にしたり x^{50} にしたり，といったぐあい。ここには項数のnがくるのですからくれぐれもご用心ありたし。

*　*　*

◆ では，具体的な練習にいきましょう。

■**練習 1.** 等比数列　1，$\sqrt{2}$，2，……の第10項までの和を求めよ。

（ヒント）$a=1$，$r=\sqrt{2}$，$n=10$ ですから，求める和Sは

$$S=\frac{1(1-\sqrt{2}^{10})}{1-\sqrt{2}}=\frac{2^5-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{31}{\sqrt{2}-1}=\frac{31(\sqrt{2}+1)}{2-1}$$

$$=31(\sqrt{2}+1)$$ ……（答）

■**練習 2.** 等比数列 a，ar，ar^2，…，ar^{n-1}，……の初めのn項の和をS，積をP，逆数の和をTとすると

$$P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$$

であることを示せ。ただし，$r\neq1$ である。

（解）$r\neq1$ であるから

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$P=(a)(ar)(ar^2)\cdots\cdots(ar^{n-1})$$

$$=a^nr^{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}=a^nr^{\frac{1}{2}(n-1)n}$$

$$T=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{ar^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^n}{1-\dfrac{1}{r}}=\frac{1-r^n}{ar^{n-1}(1-r)}$$

$$\therefore\ \left(\frac{S}{T}\right)^n=\left\{\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdot\frac{ar^{n-1}(1-r)}{1-r^n}\right\}^n$$

$$=(a^2r^{n-1})^n=a^{2n}r^{(n-1)n}$$

$$=P^2$$

Q. E. D.

（注）$r=1$ のときには

$$S=na,\ P=a^n,\ T=\frac{n}{a}$$

となり，やはり成り立つのです。だから，$r\neq1$ という条件は不要なのです。

■**練習 3.**　等比数列の和

$$A_n=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{2n-1}+2^{2n}$$

$$B_n=1-2+2^2-\cdots\cdots-2^{2n-1}+2^{2n}$$

について A_n と $B_n{}^2$ の大小を調べよ。

（ヒント）$n=1$ としてみると

$$A_1=1+2+2^2=7$$

$$B_1=1-2+2^2=3$$

$$\therefore\ A_1<B_1{}^2$$

$n=2$ としてみると

$$A_2=1+2+2^2+2^3+2^4=31$$

$$B_2=1-2+2^2-2^3+2^4=11$$

$$\therefore\ A_2<B_2{}^2$$

どうやら $A_n<B_n{}^2$ となりそうな気配がしますね。A_n，B_n を求めてみましょうか。

$$A_n=\frac{1(1-2^{2n+1})}{1-2}=2^{2n+1}-1$$

$$B_n=\frac{1(1-(-2)^{2n+1})}{1+2}=\frac{1}{3}(2^{2n+1}+1)$$

$$B_n^2-A_n=\frac{1}{9}(2^{2n+1}+1)^2-(2^{2n+1}-1)$$

(オヤ，困ッタナ，コレガ正ニナルダロウカ。待テヨ，2^{2n+1} ヲ a トオイテミヨウカ)

$2^{2n+1}=a$ とおくと

$$\begin{aligned}B_n^2-A_n&=\frac{1}{9}(a+1)^2-(a-1)\\&=\frac{1}{9}(a^2-7a+10)\\&=\frac{1}{9}(a-2)(a-5)\\&=\frac{1}{9}(2^{2n+1}-2)(2^{2n+1}-5)\end{aligned}$$

ところが 2^{2n+1} は少なくとも 8 以上なのですから，やはり予定通りだったのだ。

* * *

◆ 等比数列に関係したいわゆる応用問題は多いのです。いわゆる複利計算はその代表的なもの。それについては（☞ p.110）を参照してください。ここでは，それ以外から応用例をひろってみましょう。

■練習 4. ねずみは毎月 1 匹あたり新たに 2 匹ずつの割合で増え，ねこ 1 匹は 1 日につきねずみを 7 匹ずつ殺すものとする。月の初めに48匹いたねずみの繁殖を防ぐため，毎月同数のねこを月末に 1 日だけはなつ。月末にはなつねこは少なくとも何匹必要か。そのとき何か月目の終わりにねずみはいなくなるか。

ヒント 必要なねこの数を x 匹としますと，1 か月後のねずみの数は

$$48\times(2+1)-7x=48\cdot3-7x$$

でしょう。2 か月後には

$$(48\cdot3-7x)\cdot3-7x=48\cdot3^2-7x(1+3)$$

でしょう。同じく 3 か月後には

$$\begin{aligned}&\{48\cdot3^2-7x(1+3)\}\cdot3-7x\\&=48\cdot3^3-7x(1+3+3^2)\end{aligned}$$

このようにして，n か月後には

$$48\cdot3^n-7x(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})$$

となります。これを計算してみますと

$$48\cdot3^n-\frac{7}{2}(3^n-1)x$$

となりますから，繁殖を防ぐためには

$$48\cdot3^n-\frac{7}{2}(3^n-1)x \leqq 48\cdot3^{n-1}-\frac{7}{2}(3^{n-1}-1)x$$

$$\therefore\quad 48\cdot(3^n-3^{n-1})\leqq\frac{7}{2}(3^n-3^{n-1})x$$

$$\therefore\quad x\geqq\frac{96}{7}=13\cdot7\cdots\cdots$$

ゆえに少なくとも14匹必要なことがわかります。そして，$x=14$ のとき

$$48\cdot3^n-\frac{7}{2}(3^n-1)\cdot14\leqq0$$

とおきますと，

$$3^n\geqq49\qquad\therefore\quad n\geqq4$$

となりますから，4 か月後にねずみはいなくなるハズ。

答 14匹，4 か月目の終わり

■練習 5. 数列　1　1　2　2　3　3 ……

の第 n 項を 1 つの式で表せ。

ヒント 階差数列を作ってみましょうか。

a_n:	1	1	2	2	3	3	4	4	……
b_n:		0	1	0	1	0	1	0	……
			1	−1	1	−1	1	−1	……

なるほど，これならできるハズ。第 2 階差数列は初項 1，公比 −1 の等比数列ですから

$$\begin{aligned}b_n&=0+\{1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots\\&\qquad\cdots+(-1)^{n-2}\}\\&=0+\frac{1\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\{1-(-1)^{n-1}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\{1-(-1)^{k-1}\}\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{1}{2}\left[n+\frac{1}{2}\{(-1)^{n-1}+1\}\right]\cdots\text{答}\end{aligned}$$

階差数列については（☞ p.128）を参照してください。

◎ 3数が等比数列をなす条件

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆$b^2=ac$ の両辺の対数をとれば，なんと，驚くではないか，$2\log b=\log a+\log c$，これでは等差数列だ。でも，……

◆ まず，これを：──

3つの数 a, b, c がこの順序で等比数列をなすための条件は

$$b^2=ac\quad(\neq 0)$$

が成り立つことです。

まず，その証明から：──

a, b, c が等比数列をなすなら，$\dfrac{b}{a}$ も $\dfrac{c}{b}$ も公比に等しいハズ。

$$\therefore\quad \frac{b}{a}=\frac{c}{b}\qquad \therefore\quad b^2=ac\ (\neq 0)$$

です。逆に，

$$b^2=ac\quad(\neq 0)$$

ならば，両辺を ab で割って

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=r$$

とおくと，

$$b=ar,\ \ c=br$$

ナルホド，公比 r の等比数列です。

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ そこで，次にはこの条件を使う問題をやってみましょう。

■練習 1. a, b, c が等比数列をなし，かつ b, c, a が等比数列をなすことがあるか。ただし，a, b, c は複素数である。

ヒント　a, b, c が等比数列をなす，というのは，もちろん，この順序で，という意味ですよ。さて，与えられた条件から

$$b^2=ac,\ \ c^2=ba$$

ゆえに第1式から

$$c=\frac{b^2}{a}$$

これを第2式に代入して

$$\frac{b^4}{a^2}=ba\qquad\therefore\quad b^4=ba^3$$

$$\therefore\quad a^3=b^3$$

$\therefore\quad a=b$ あるいは $a=b\omega$ あるいは $a=b\omega^2$

ここに **ω は1の虚数立方根** です。（ω のことを忘れていたらこの機会に復習しておいてくださいよ（☞「数Ⅰ」p.122））。

$a=b$ のとき　$c=\dfrac{b^2}{b}=b$

$a=b\omega$ のとき　$c=\dfrac{b^2}{b\omega}=\dfrac{b}{\omega}=b\omega^2$

$a=b\omega^2$ のとき　$c=\dfrac{b^2}{b\omega^2}=\dfrac{b}{\omega^2}=b\omega$

ゆえに $a:b:c$ が

$1:1:1$ あるいは $\omega:1:\omega^2$

あるいは $\omega^2:1:\omega$

のときであることがわかります。

（注）　$\omega:1:\omega^2=\omega^3:\omega^2:\omega^4$

$=1:\omega^2:\omega$

とも書けるし，$\omega^2:1:\omega$ も

$\omega^2:1:\omega=1:\omega:\omega^2$

とも書ける。このほうが格好がいいのだが。

■練習 2. a, b, c が等比数列をなし，$a+b$, $b+c$, $c+a$ が等比数列をなすことがあるか。ただし，a, b, c は0でない実数である。

ヒント　与えられた条件から

$$b^2=ac\quad(\neq 0)\qquad\cdots\cdots①$$

$$(b+c)^2=(a+b)(c+a)\quad(\neq 0)\cdots\cdots②$$

が成り立つことが条件ですね。

①，②より a を消去すると

$$(b+c)^2=\left(\frac{b^2}{c}+b\right)\left(c+\frac{b^2}{c}\right)$$

これを変形すると

$$(b+c)(b-c)(b^2+bc+c^2)=0$$
$$\therefore\quad b=c$$
これと①とから
$$a=b=c$$
つまり全部等しいときである!!

*　　*　　*

◆ 3つの数が等比数列をなす条件と，等差数列をなす条件のからみあった問題も多いのです。では，2, 3 やってみませんか。

練習 3. 3つの数 a, b, c がこの順序で等差数列でもあり，等比数列でもあるのはどんな場合か。

ヒント　a, b, c が等差数列をなすから
$$b=\frac{a+c}{2} \qquad \cdots\cdots①$$
a, b, c が等比数列をなすから
$$b^2=ac \quad (\neq 0) \qquad \cdots\cdots②$$
①より $c=2b-a$, これを②に代入して
$$b^2=a(2b-a)$$
$$\therefore\quad a^2-2ab+b^2=0$$
$$\therefore\quad (a-b)^2=0$$
$$\therefore\quad a=b \qquad \cdots\cdots③$$
③と①から　　$b=c$
$$\therefore\quad a=b=c \quad (\neq 0)$$
答　$a=b=c$ $(\neq 0)$

練習 4. 3つの数 a, b, c が等差数列をなし，3つの数 b, c, a が等比数列をなすとき，$a:b:c$ を求めよ。

ヒント　「この順序で」と書いてなくても，当然そう思うべきです。

解　a, b, c が等差数列をなすから
$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots①$$
b, c, a が等比数列をなすから
$$c^2=ab \qquad \cdots\cdots②$$
①, ②から a を消去すると
$$c^2=(2b-c)b$$
$$\therefore\quad c^2+bc-2b^2=0$$
$$\therefore\quad (c+2b)(c-b)=0$$
$\therefore\quad c=-2b$　あるいは　$c=b$

(i)　$c=-2b$ のとき　$a=2b-c=4b$
$$\therefore\quad a:b:c=4b:b:-2b=4:1:-2$$
(ii)　$c=b$ のとき　$a=2b-c=b$
$$\therefore\quad a:b:c=b:b:b=1:1:1$$
答　$4:1:-2$, $1:1:1$

注　≪3次方程式
$$x^3-3x^2+ax+b=0$$
の3つの解がある順序に並べると等差数列をなし，ある順序に並べると等比数列をなすとき a, b の値を求めよ≫

といった問題は，上のやり方からすぐわかります。3つの解を α, β, γ $(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ とすると，等差数列をなすのは $2\beta=\alpha+\gamma$ の場合に限られるし，等比数列をなすのは，中央に β がくるか，α（あるいは γ）がくるか，というだけのことですから2つしかなくて，結局3つの解は k, k, k か $4k$, k, $-2k$ になります。

k, k, k のときは　$3k=3$　$\therefore\quad k=1$
$$\therefore\quad a=3,\ b=-1$$
$4k$, k, $-2k$ のときは　$3k=3$　$\therefore\quad k=1$
$$\therefore\quad a=-6,\ b=8$$
といったぐあい。(☞ p.104)

*　　*　　*

◆ 等比数列というコトバは使わないでも，本質的に等比数列の問題は多いのです。

例えば，

≪関数 $\left\{f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right\}^2=f(x)f(y)$ で $f(x)>0$ のとき，連続関数 $f(x)$ を求めよ≫

というのであれば
$$2\log f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\log f(x)+\log f(y)$$
$\log f(x)=F(x)$ とおくと
$$2F\left(\frac{x+y}{2}\right)=F(x)+F(y)$$
$$F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$$
となって等差数列と関係がついてくる，といったぐあいです。

3次方程式と等比数列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等比数列のほうが一般に等差数列よりラクなんです。ところが，たいていの人は，等比数列のほうが難しいと思いこんでいる。

◆　3次方程式の3つの解が等比数列をなすための条件を求める問題は多い。というのも，解と係数の関係や等比数列をなす条件を扱うのに手頃だからでしょう。

さて，3次方程式

$$\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d=0}$$

の3つの解を α，β，γ とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}}$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

なる関係があります。また，

3つの数 a，b，c ($\neq 0$) がこの順序で等比数列をなすための必要かつ十分な条件は

$$\boldsymbol{b^2=ac}$$

です。では，次の問題をやってみませんか。

■練習1. 3次方程式 $x^3-3x^2-6x+k=0$ の3つの解が等比数列をなすという。定数 k の値を定めよ。　（横浜国大）

ヒント　3つの解を a，ar，ar^2 としますと，解と係数の関係から

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=3 \\ a^2r+a^2r^2+a^2r^3=-6 \\ a^3r^3=-k \end{cases}$$

が成り立つ。すなわち，

$$a(1+r+r^2)=3 \qquad \cdots\cdots①$$

$$a^2r(1+r+r^2)=-6 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(ar)^3=-k \qquad \cdots\cdots③$$

②÷① より　$ar=-2$

これを③に代入して

$$k=8 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

注　$ar=-2$ が出たら，-2 は解であることよりもとの方程式に代入しても $k=8$ が出ます。

■練習2. 3次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の3つの解が等比数列をなすとき，a，b，c，d の間にどんな関係があるか。　（京大）

ヒント　どんな関係があるか，という表現はアイマイですが，ふつう「条件を求めよ」とあったら逆証明もする。しかし，「どんな関係があるか」というときは逆は要らない，と考えていいでしょう。

さて，3つの解を α，$\alpha\gamma$，$\alpha\gamma^2$ としますと，解と係数の関係から

$$\alpha+\alpha\gamma+\alpha\gamma^2=-\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\alpha^2\gamma+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^3=\frac{c}{a} \qquad \cdots\cdots②$$

$$\alpha^3\gamma^3=-\frac{d}{a} \qquad \cdots\cdots③$$

なる関係があります。

①，②，③より

$$\alpha(1+\gamma+\gamma^2)=-\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots①'$$

$$\alpha^2\gamma(1+\gamma+\gamma^2)=\frac{c}{a} \qquad \cdots\cdots②'$$

$$(\alpha\gamma)^3=-\frac{d}{a} \qquad \cdots\cdots③'$$

②′÷①′ より

$$\alpha\gamma=-\frac{c}{b} \qquad \cdots\cdots④$$

④を③′に代入して

$$\left(-\frac{c}{b}\right)^3=-\frac{d}{a}$$

$$\therefore\ ac^3=b^3d$$

これが求める答です。

＊　＊　＊

◆ 練習2. では a, b, c, d の間にどんな関係があるか，というのです。このようなときには一般に逆証明は要求されていないと考えていいでしょう。しかし，「……ための，条件を求めよ」とあれば，逆証明をしなければなりません。さて，そのときはどうするか？

練習 3. 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解が等比数列をなすための必要十分条件を求めよ。ただし，$c \fallingdotseq 0$.

ヒント　3つの解を α, β, γ とすると，この3数が等比数列をなすならば

$\alpha^2=\beta\gamma$ あるいは $\beta^2=\gamma\alpha$ あるいは $\gamma^2=\alpha\beta$

$$\therefore\quad (\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\gamma\alpha)(\gamma^2-\alpha\beta)=0\cdots①$$

$$\therefore\quad \alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3 \quad\cdots\cdots(*)$$

ところが

$$\alpha\beta\gamma=-c \quad\cdots\cdots(**)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\\ &=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma\\ &=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2\\ &\quad-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma\\ &=(-a)\{(-a)^2-3b\}+3(-c)\\ &=-a^3+3ab-3c \quad\cdots\cdots(***)\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}&\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3\\ &=\{(\alpha\beta)^3+(\beta\gamma)^3+(\gamma\alpha)^3\\ &\quad-3(\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)\}+3(\alpha\beta\gamma)^2\\ &=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\\ &\quad-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\}+3(\alpha\beta\gamma)^2\\ &=b\{b^2-3(-c)(-a)\}+3(-c)^2\\ &=b^3-3abc+3c^2 \quad\cdots\cdots(****)\end{aligned}$$

ですから，これらを $(*)$ に代入して

$$(-c)(-a^3+3ab-3c)=b^3-3abc+3c^2$$

$$\therefore\quad ca^3=b^3 \quad\cdots\cdots②$$

が得られます。つまりこれが必要条件です。

これを練習2. と比べるといかにもゴタゴタしていてまずい。

しかし，逆に②が成り立つとして，3つの解が等比数列をなすことを証明しようとすると，これはしごく便利です。なぜなら，

②が成り立つとすると，これを変形して

$$(-c)(-a^3+3ab-3c)=b^3-3abc+3c^2$$

が成り立つ。ここで解と係数の関係から得られる $(**)$, $(***)$, $(****)$ を代入すると $(*)$ が得られ，さらに，これを変形すると①になる。そこで，

$\alpha^2=\beta\gamma$ あるいは $\beta^2=\gamma\alpha$ あるいは $\gamma^2=\alpha\beta$

ということになって逆証明が完結するわけです。答案は次のように書けばよいでしょう。

解　3つの解を α, β, γ とすると，$c \fallingdotseq 0$ によりすべて0ではない。ゆえに，3つの解が等比数列をなす必要条件は

$$(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\gamma\alpha)(\gamma^2-\alpha\beta)=0$$

である。これを同値変形して

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3$$

が得られる。

しかるに，解と係数の関係から

$$\alpha\beta\gamma=-c$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-a^3+3ab-3c$$

$$\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3=b^3-3abc+3c^2$$

であるから，上式を同値変形して

$$(-c)(-a^3+3ab-3c)=b^3-3abc+3c^2$$

すなわち

$$ca^3=b^3$$

が得られる。

ゆえに，必要十分条件は

$$ca^3=b^3$$

である。

答　$ca^3=b^3$

注　一般に逆証明の要るときはこのようにやるのがいいのです。例えば，

≪$ax^2+bx+c=0$ の2つの解の差が1であるための必要十分条件を求めよ≫

とあったら2つの解を α, $\alpha+1$ としないで α, β とし，$(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta+1)=0$ とおくのです。

図形と等比数列

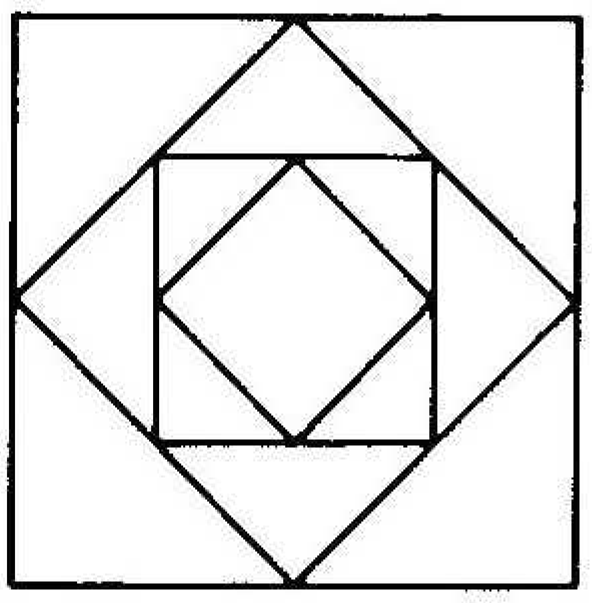
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆図形への数列の応用の大部分はふしぎと等比数列なんです，……。待てよ，ふしぎなのか，当然なのか，これが問題だ!!

◆ さっそくながら，具体的な問題にとりかかるとしませんか。まず，これです。

8/18

■練習 1. 正方形の各辺の中点を結んで正方形を作る，この操作を $(n-1)$ 回施して得られる n 個の正方形の面積の和は，はじめの正方形の面積の何倍になるか。



ヒント　もとの面積を S とすると，次々の正方形の面積の和は

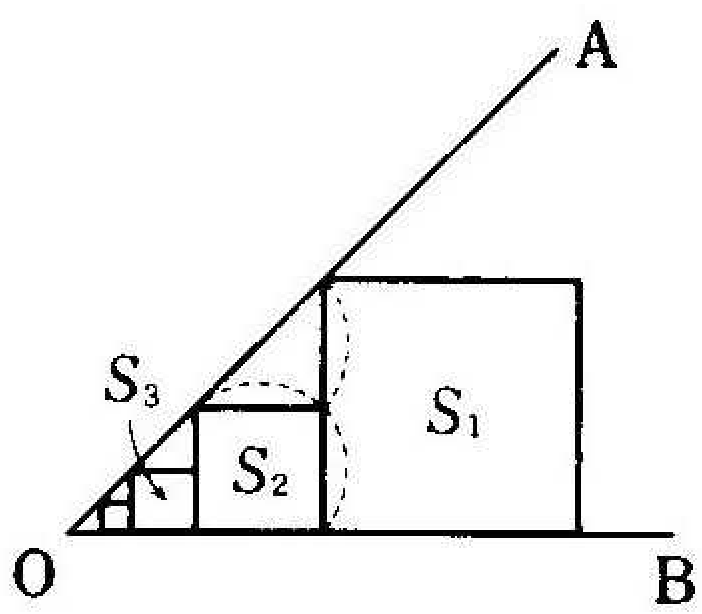
$$S+\left(\frac{1}{2}\right)S+\left(\frac{1}{2}\right)^2S+\cdots\cdots \quad (n\text{ 個})$$

$$=\frac{S\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2S\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

ゆえに求める答は $2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 倍です。

■練習 2. $\angle AOB=45°$ とし，右の図のように正方形 S_1, S_2, S_3, …… を作るとき，n 個の面積の和を求めよ。



ヒント　$S_2=\frac{1}{4}S_1$, $S_3=\frac{1}{4}S_2$, ……

ですから公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列をなすでしょう。

$$\therefore\quad S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$$

$$=S_1\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=S_1\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}S_1$$

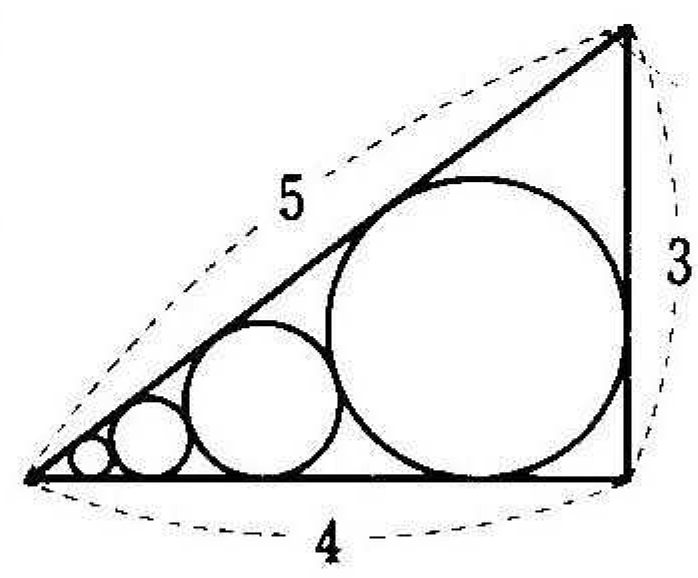
答　$\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}S_1$

＊　＊　＊

◆ 次にはややめんどうなものを練習してみましょう。めんどうとはいっても，等比数列なんですから，要するに等比数列であることを示すところにあるだけです。では：——

4/16

■練習 3. 3辺の長さが3，4，5である直角三角形に右の図に示すように円を次々に入れるとき，第 n 番目の円の半径を求めよ。



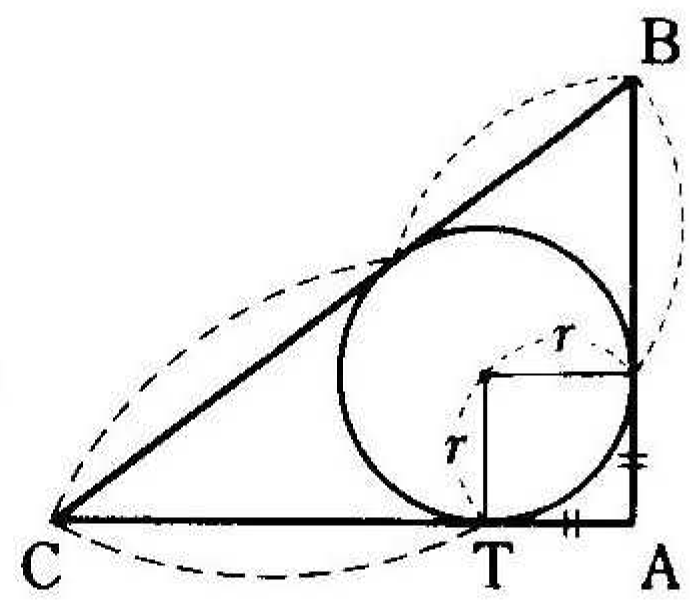
ヒント　まず，内接円の半径を求めましょう。ふつうは面積を使うのですが，この場合は直角三角形なのでもっとカンタンに求めることができます。

右の図で，

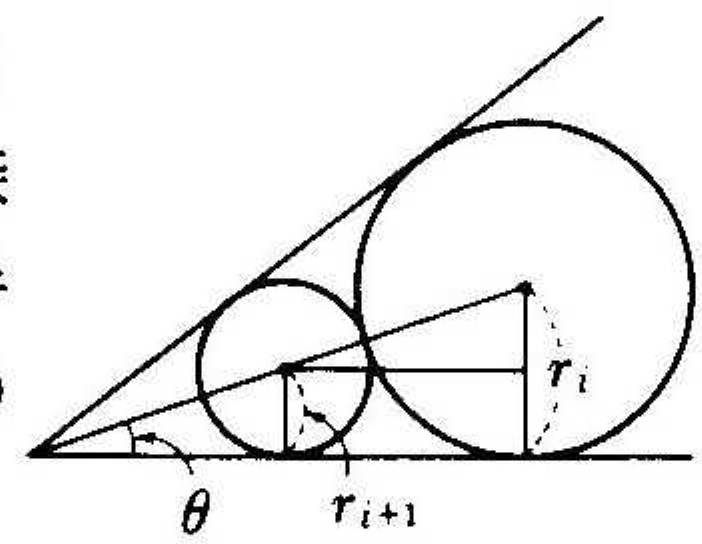
$r=AT$

$=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$

$=\frac{1}{2}(3+4-5)=1$



次に，右下の図のように，2つの円が内接しているとき，その半径を r_i, r_{i+1} $(r_{i+1}<r_i)$ としますと



$$r_i-r_{i+1}=(r_i+r_{i+1})\sin\theta$$

$$\therefore \quad r_{i+1}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_i$$

ところが　$\cos 2\theta=\cos\angle\mathrm{BCA}=\frac{4}{5}$　で，

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}$$

$$\therefore \quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \quad r_{i+1}=\frac{(\sqrt{10}-1)^2}{9}r_i$$

ゆえに $\{r_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{(\sqrt{10}-1)^2}{9}$ の等比数列であるから

$$r_n=1\cdot\left\{\frac{(\sqrt{10}-1)^2}{9}\right\}^{n-1}=\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{2(n-1)}$$

である。

答　$\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{2(n-1)}$

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみましょう。

練習 4. 放物線 $y=8^nx^2-2^n(2^n+1)x+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が x 軸から切りとる線分の長さを l_n とするとき，$\sum_{n=1}^{n}l_n$ を求めよ。　（中央大）

ヒント　$8^nx^2-2^n(2^n+1)x+1=0$

とおいて，書きなおしてみると

$$2^{3n}x^2-(2^{2n}+2^n)x+1=0$$

$$\therefore \quad (2^nx-1)(2^{2n}x-1)=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\therefore \quad l_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{n}l_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2^{2n}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{2^2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3\cdot 4^n} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 5. 放物線 $y=x^2$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{A}_1(a,\ b)$ $(a>0)$ における接線と x 軸との交点を P_1 とし，P_1 を通って x 軸に垂直な直線と C との交点を A_2，点 A_2 における C の接線と x 軸との交点を P_2 とする。以下同様にして，C 上に点 A_1，A_2，$\cdots\cdots$，A_n，$\cdots\cdots$，x 軸上に点 P_1，P_2，$\cdots\cdots$，P_n，$\cdots\cdots$ を作る。

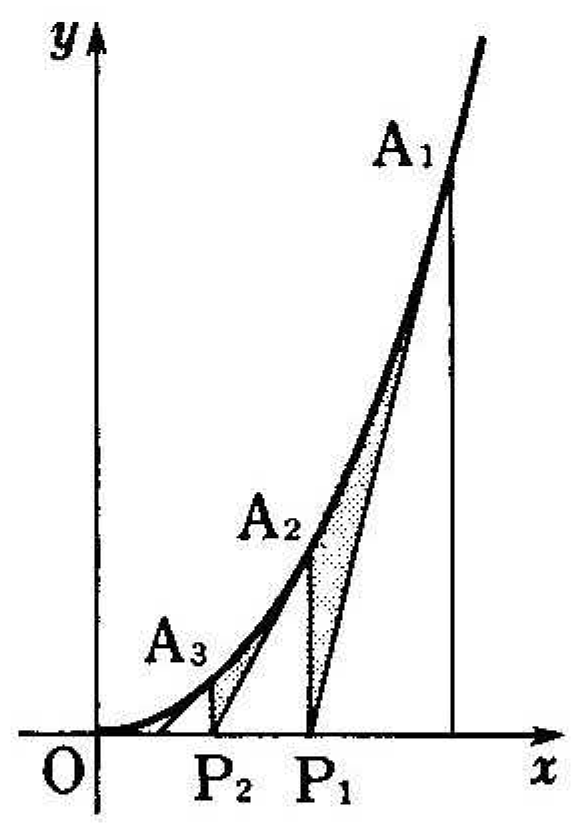
(1) 点 P_1，P_2，$\cdots\cdots$，P_n の x 座標を，それぞれ x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_n，$\cdots\cdots$ とすると，$\{x_n\}$ はどんな数列になるか。

(2) 図形 $\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2\mathrm{A}_3$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$，$\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の面積を，それぞれ S_1，S_2，$\cdots\cdots$，S_n とするとき，S_n を求めよ。　（広島大）

ヒント　(1)　$y=x^2$ 上の点 $(x_{n-1},\ x_{n-1}{}^2)$ における接線 $\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n$ の方程式は

$$y-x_{n-1}{}^2=2x_{n-1}(x-x_{n-1})$$

すなわち



$$y=2x_{n-1}x-x_{n-1}{}^2$$

です。点 P_n の x 座標を求めるために $y=0$ とおきますと

$$x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$$

ゆえに，数列 $\{x_n\}$ は初項 $\frac{a}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列をなすことがわかります。

(2) 次に，

$$S_n=\int_{x_n}^{x_{n-1}}x^2dx-\frac{1}{2}\cdot x_{n-1}{}^2\cdot(x_{n-1}-x_n)$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_n}^{x_{n-1}}-\frac{1}{2}x_{n-1}{}^2(x_{n-1}-x_n)$$

$$=\frac{1}{3}(x_{n-1}{}^3-x_n{}^3)-\frac{1}{2}x_{n-1}{}^2(x_{n-1}-x_n)$$

だから，(1)で得られた $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$ を使って

$$S_n=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{2^{3n}} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

○元利合計の計算法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈元利合計の計算など，ことさらにもち出すのはおかしい，という人もありましょう。だからこそもち出すのです。

◆　毎年定額貯金をしたらn年後に元利合計何ほどになるか，とか，ある金額を借りて，毎年定額ずつ返還したら，何年かかるか，とかいった問題は，一般的にいって好かれない。そのために，いざとなると思わぬミスが起こる。数列の応用問題の典型的なものとして，やはり，やっておくべきでしょう。では，イヤガラズに次をやってみませんか。

*　*　*

練習1. 毎年のはじめにA円ずつ貯金すれば第n年の終わりに元利合計はいくらになるか。ただし，年利x%とする。

ヒント　第1年に貯金したA円は1年後には元利合計$A(1+x)$となり，2年後には$A(1+x)^2$，3年後には$A(1+x)^3$，といったぐあい，n年後には$A(1+x)^n$になります。

第2年に貯金したA円は同じようにして(はじめからみて)n年後には$A(1+x)^{n-1}$になっているハズ。

そして，第n年のはじめに貯金した分はその終わりには$A(1+x)$になっています。

結局，求めるものは

$$\begin{aligned}&A(1+x)^n+A(1+x)^{n-1}+\cdots\cdots+A(1+x)\\&=A(1+x)\{1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots\cdots\\&\qquad+(1+x)^{n-1}\}\\&=A(1+x)\cdot\frac{1\{1-(1+x)^n\}}{1-(1+x)}\\&=A(1+x)\cdot\frac{(1+x)^n-1}{x}\text{(円)}\end{aligned}$$
……答

注　答を上のままでやめるか，$\dfrac{A\{(1+x)^{n+1}-(1+x)\}}{x}$でやめるかで悩む人が多い，ムダなことと知るべし。

練習2. ある年の初めに50万円を借りて，その年からはじめて，毎年末に等額の金を支払って，10回で返済してしまうとすれば，毎年何ほどの金を支払えばよいか。年6分，1年ごとの複利として計算せよ。ただし，元金1，年利率6分に対する複利表によれば，9年後には1.689，10年後には1.791，11年後には1.898になる。

(大阪府大)

ヒント　返済金をa円とすると：——

第1年の終わりには$50(1+0.06)-a=50\times1.06-a$で，これが第2年の初めの借金であるから，第2年の終わりには

$$\begin{aligned}&(50\times1.06-a)\times1.06-a\\&=50\times1.06^2-a\times1.06-a\end{aligned}$$

第3年の終わりには

$$50\times1.06^3-a\times1.06^2-a\times1.06-a$$

となりましょう。このようにして，第10年の終わりには

$$50\times1.06^{10}-a\times1.06^9-a\times1.06^8-\cdots\cdots-a$$

で，これが0になればよいのですから

$$\begin{aligned}&a(1+1.06+1.06^2+\cdots\cdots+1.06^9)\\&=50\times1.06^{10}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a\times\frac{1(1-1.06^{10})}{1-1.06}=50\times1.06^{10}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a&=\frac{50\times1.06^{10}\times0.06}{1.06^{10}-1}\\&=\frac{50\times1.791\times0.06}{0.791}\\&\fallingdotseq6.8\text{(万円)}\end{aligned}$$
……答

注　もう少しうまく考えることもできます。毎年度末に支払う一定額を積み立てた元利合計と借入金の元利合計とが等しくなる，とみるのです。しかし，上の考え方のほうが自然でしょう。

＊　＊　＊

◆ 元利合計の問題は何も金額に限らない。次のも同種のものです。

練習 3. ある薬品を毎年きまった日に一定量ずつ散布していた。この薬品は少しずつ分解されるが1年後90%が土中に残留することがわかったので，4回散布した後使用を中止した。最後に散布した日から数えて n 年後に初めて土中に残留している薬品の量が，2回目に散布する直前に残留していた量よりも少なくなったという。整数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}3.439=0.5364$ として計算せよ。　　（横浜市大）

(ヒント) 散布される一定量を1としてもかまわないでしょう。

第1年に散布した薬品は1年後には0.9になり，2年後には0.9^2，最後に散布した日から数えて n 年後には 0.9^{n+3} だけ残留しているハズ。してみると，n 年後の残留量は

$$0.9^{n+3}+0.9^{n+2}+0.9^{n+1}+0.9^n$$

です。

ところで，第2回目に散布する直前に残留していた量は0.9ですから

$$0.9^{n+3}+0.9^{n+2}+0.9^{n+1}+0.9^n<0.9$$

これを満足する n を求めればいいわけです。

ところで左辺を変形しますと

$$0.9^n(0.9^3+0.9^2+0.9+1)<0.9$$

$$3.439\times0.9^{n-1}<1$$

$$\therefore\quad \log3.439+(n-1)\log0.9<0$$

$$\therefore\quad 0.5364+(n-1)\{2\times0.4771-1\}<0$$

$$\therefore\quad n>1+\frac{0.5364}{0.0458}=12.7\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad n\geqq13$$

答　$n=13$

では，次はどうですか。

練習 4. 1個の細菌が1時間ごとに2個に分裂して増殖するならば，100時間後の細菌数は10時間後の細菌数の何倍か。この細菌1個が1時間に生産する毒素量を a とすれば，100時間後の毒素の総量はいくらか　　（静岡薬大）

(解) はじめ1個あった細菌が1時間後に2^1，2時間後に2^2，3時間後に2^3，……，一般に n 時間後に 2^n に増殖するから，100時間後の数は10時間後の数の

$$\frac{2^{100}}{2^{10}}=2^{90}(倍)$$

である。

次に最初の1時間で生産される毒素の量は $a\times1$，次の1時間に生産される毒素の量は $a\times2^1$，次の1時間に生産される量は $a\times2^2$，……，最後の1時間に生産される量は $a\times2^{99}$ であるから，合計すると

$$a(1+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{99})$$

$$=a\times\frac{1(1-2^{100})}{1-2}=(2^{100}-1)a$$

である。

答　2^{90}，$(2^{100}-1)a$

(注) これは，いうなれば，利息だけの合計のようなものです。もう1つ：——

練習 5. ある年のはじめに20万円を年利率1割で借り，これをその年末からはじめて毎年末に等額を支払い，10回で返却することにした。毎年末に支払う金額はいくらか。　　（和歌山大）

(解) 毎年末に支払う金額を a 円とすれば

$$a+a\times1.1+\cdots\cdots+a\times1.1^9=20\times1.1^{10}$$

$$\therefore\quad \frac{1.1^{10}-1}{1.1-1}\cdot a=20\times1.1^{10}$$

$$\therefore\quad a=\frac{2\times1.1^{10}}{1.1^{10}-1}$$

ところが，

$$1.1^{10}=(1.1^2)^5=1.21^5=(1.21^2)^2\times1.21$$

$$=1.4641^2\times1.21$$

$$=2.1435\cdots\cdots\times1.21=2.593\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a=\frac{5.186\cdots\cdots}{1.593\cdots\cdots}\fallingdotseq3.26(万円)\quad\cdots 答$$

◎複利計算の方法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等比数列のもっとも世俗的応用，それはまさに複利計算であった。身近に，いかにそれが氾濫していることよ。

◆ 複利計算は等比数列の応用ですが，ふしぎとイヤガラレル！　ここでは，そのいくつかをやって，複利計算アレルギーを追放しよう，というわけ。さっそく具体的な問題からやってみましょう。

第1は積立貯金です：——

■練習1. ある年のはじめに A 円を預金すると，その年末には元利合計いくらか。ただし，預金の利率を年4分とする。

（ヒント）　1年間でつく利息は

$$A\times 0.04$$

ですから，元利合計は

$$A+A\times 0.04=(1+0.04)A$$
$$=1.04A(\text{円})$$

答　$1.04A$円

■練習2. ある年のはじめに A円を預金すると，第 n 年末には元利合計いくらになるか。ただし，利率は年3分とする。

（ヒント）　第1年目の終わり：$1.03A$円

第2年目の終わり：$1.03(1.03A)$
$=1.03^2A$円

第3年目の終わり：$1.03(1.03^2A)$
$=1.03^3A$円

以下同様にして，第 n 年目の終わりには

$$1.03^nA\text{円}$$

になっているハズ。　　答　1.03^nA円

■練習3. 毎年のはじめに1万円ずつ銀行に預金するものとする。預金の利率は年4分とすると，10年後の年末には元利合計はいくらになるか。ただし，$1.04^{10}=1.4802$ とする。

（群馬大）

（ヒント）　第1年のはじめに預金した分については，10年後には

$$10000\times 1.04^{10}\text{円}$$

となっています。

第2年目のはじめに預金した分については
$$10000\times 1.04^9\text{円}$$
第3年目のはじめに預金した分については
$$10000\times 1.04^8\text{円}$$
…………

第10年目のはじめに預金した分については
$$10000\times 1.04\text{円}$$
ですから，これを全部加えれば求めるものが得られるハズ。それは

$$10000\times(1.04+1.04^2+\cdots\cdots+1.04^{10})$$
$$=10000\times\frac{1.04(1-1.04^{10})}{1-1.04}$$
$$=\frac{10400}{0.04}(1.04^{10}-1)$$

ところが $1.04^{10}=1.4802$ だというのですから

$$=\frac{10400\times 0.4802}{0.04}=124852(\text{円})$$

答　124852円

（注）　これで，第1のタイプは終わりです。このように，ひとつひとつ分離してていねいに計算するのがコツです。

*　*　*

◆ 第2は年賦償還（ねんぷしょうかん）です。では，さっそくながらこれです。

■練習4. ある年の初めに A円を借り，その年の年末に a 円（$a<A$）支払うと，第2年初めにはいくら残っているか。年利率6分とする。

（ヒント）　年初に借りた A円は年末には

$$1.06A\text{円}$$

になっていて，これから a 円支払うのですから，第2年のはじめには

$$(1.06A-a)\text{円} \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

となっているハズ。

■練習 5. ある年の初めに50万円を借りて，その年からはじめて毎年末に等額の金を支払って10回で返済してしまうとすれば，毎年何ほどの金を支払えばよいか。年6分，1年ごとの複利として計算せよ。ただし，元金1，年利率6分に対する複利表によれば，9年後には1.689，10年後には1.791，11年後には1.898になる。　（大阪府大）

ヒント　返済金を a 円としましょう。

第1年のはじめ50万円借りたのですから，その年の終わりには，

$$(50\times 1.06-a)$$

万円になるハズ。そして，これが第2年のはじめの借高ですから，第2年の終わりには

$$(50\times 1.06-a)\times 1.06-a$$
$$=50\times 1.06^2-(1.06+1)a$$

万円になっています。

まったく同様にして，第3年の終わりには

$$\{50\times 1.06^2-(1.06+1)a\}\times 1.06-a$$
$$=50\times 1.06^3-(1.06^2+1.06+1)a$$

万円となっているわけ。

そして第10年の終わりには

$$50\times 1.06^{10}-(1.06^9+1.06^8+\cdots\cdots+1)a$$
$$=50\times 1.06^{10}-\frac{a(1.06^{10}-1)}{0.06}$$

これが0になればよいのです。ゆえに

$$a=\frac{50\times 1.06^{10}\times 0.06}{1.06^{10}-1}=\frac{50\times 1.791\times 0.06}{0.791}$$

$$\fallingdotseq 6.8(\text{万円}) \qquad \boxed{\text{答}}\ 6.8\text{万円}$$

注　もう少し，手際よく計算できるのですが，上のように，ひとつずつ計算してゆくのが無難。

＊　＊　＊

◆ ではもう少し一般的に上の問題を扱ってみませんか。

■練習 6. 家を建てるために今年度の初めに A 万円借りた。今年度末から始めて，毎年末に一定額ずつを支払い，10回支払って全部を返済したい。毎回いくらずつ支払えばよいか。ただし，年利率 i，1年ごとの複利とする。

ヒント　毎回の返済金を x 万円としますと左でやったのとまったくおなじ考えで

$$x+x(1+i)+x(1+i)^2+\cdots+x(1+i)^9$$
$$=A(1+i)^{10}$$

となります。これから x を求めると

$$x=\frac{Ai(1+i)^{10}}{(1+i)^{10}-1} \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}$$

■練習 7. m 年間毎年のはじめに一定金額を銀行に預金し，第 $(m+1)$ 年目から毎年のはじめに a 円ずつ引き出し，n 回でちょうど預金全部を引き出し終わるようにするには，毎年の積立金をいくらにすればよいか。ただし，年利率 r，1年ごとの複利で計算するものとする。　（埼玉大）

ヒント　積立金を x 円としますと，引き出し始めるまでの積立金総額は次のようです。

$$x(1+r)^m+x(1+r)^{m-1}+\cdots\cdots+x(1+r)$$
$$=\frac{x}{r}(1+r)\{(1+r)^m-1\}(\text{円}) \qquad \cdots\cdots(*)$$

次に引き出すほうを考えてみましょう。

引き出しはじめは第 $(m+1)$ 年で，このとき，(*) だけの金額があるわけですから，これを A としますと，

第 $(m+1)$ 年のはじめ　$A-a$

第 $(m+2)$ 年のはじめ　$(A-a)(1+r)-a$

第 $(m+3)$ 年のはじめ

$$A(1+r)^2-a(1+r)^2-a(1+r)-a$$

…………

第 $(m+n)$ 年のはじめ

$$A(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-1}-\cdots\cdots-a=0$$

したがって，…………

$$\boxed{\text{答}}\quad x=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)^n\{(1+r)^m-1\}}$$

○等差数列と等比数列の混ざったもの

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等差列列といい，等比数数といい，べつにめんどうはないのだが，混ざると，急に高等にみえてくるのはふしぎだなあ。

◆　等差数列と等比数列の入り混ざった問題は割合多いもの。そして，これらは格好の演習問題ともなりますから，よくやっておくことが望ましい。では，練習1. をやってみませんか。

練習 1. a，b，c がこの順に等差数列でもあり，等比数列でもあることがあるか。

（お茶の水女大）

ヒント　a，b，c が等差数列をなすための条件は

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots①$$

で，a，b，c が等比数列をなすための条件は

$$b^2=ac \ (\neq 0) \qquad \cdots\cdots②$$

です。このように1次式と2次式があるときには，**1次式から1つの文字を求めて**2次式**に代入する**のがコツです。では，やってみましょう。

$c=2b-a$ を②に代入して

$$b^2=a(2b-a)$$

$$\therefore\ a^2-2ab+b^2=0$$

$$\therefore\ (a-b)^2=0 \qquad \therefore\ a=b$$

$$\therefore\ a=b=c\ (\neq 0)$$

つまり，すべてが等しいときであることがわかります。

練習 2. a，b，c が等差数列で，b，a，c が等比数列のとき a，b，c を求めよ。

ヒント　≪この順序で≫と断わってなくてもそう考えるのが数学的常識というもの。

さて，a，b，c が等差数列をなすための条件は

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots①$$

b，a，c が等比数列をなすための条件は

$$a^2=bc \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より c を消去して

$$a^2=b(2b-a)$$

$$\therefore\ a^2+ab-2b^2=0$$

$$\therefore\ (a+2b)(a-b)=0$$

$\therefore\ a=-2b$ あるいは　$a=b$

そして，それぞれ

$c=4b$ あるいは　$c=b$

ゆえに

$$a:b:c=-2:1:4$$

あるいは

$$a:b:c=1:1:1$$

答　a，b，c の比が $-2:1:4$，$1:1:1$

練習 3. 3次方程式

$$x^3-6x^2+ax+b=0$$

の3つの実数解はある順序に並べると等差数列をなし，ある順序に並べると等比数列をなすという。a，b を求めよ。

ヒント　3つの解 α，β，γ について $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ としても一般性を失わない。（このコトバは便利だが，ちょっと古めかしいね）

さて，3つの解が等差数列をなすというのは真中に α がくるか β がくるか2つだけ考えればいい（なぜなら両端の和が真中の2倍なのだから）のです。

そこで $2\beta=\alpha+\gamma$ と $2\alpha=\beta+\gamma$ に分けます。同じく等比数列の条件も

$$\beta^2=\alpha\gamma \quad と \quad \alpha^2=\beta\gamma$$

に分けられます。結局4つの組合せができますが，整理すると

$$1:1:1 \quad と \quad -2:1:4$$

の2つだけです。だから，……

答　$a=12,\ b=-8,\ a=-24,\ b=64$

(注)　与えられた3次方程式の解が等差数列や等比数列をなす条件をべつべつに求めてから連立してもいいのです（☞ p.90）。都立大や中央大などに出題されていますが，かなりの難問です。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題にいきましょう。

練習 4. 初項が a，公差が $-\frac{1}{a}$ である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，次の問に答えよ。ただし，a は正の数とする。

(1)　S_2，S_3，S_5 を求めよ。

(2)　S_2，S_3，S_5 がこの順に等比数列をなすならば，a はどのような数か。

（福岡工大）

(解)　(1)

$$S_2=\frac{2}{2}\left\{2a+(2-1)\left(-\frac{1}{a}\right)\right\}=2a-\frac{1}{a}$$

$$S_3=\frac{3}{2}\left\{2a+(3-1)\left(-\frac{1}{a}\right)\right\}=3a-\frac{3}{a}$$

$$S_5=\frac{5}{2}\left\{2a+(5-1)\left(-\frac{1}{a}\right)\right\}=5a-\frac{10}{a}$$

(2)　S_2，S_3，S_4 が等比数列をなすから

$$S_3{}^2=S_2S_5$$

$$\therefore\ \left(3a-\frac{3}{a}\right)^2=\left(2a-\frac{1}{a}\right)\left(5a-\frac{10}{a}\right)$$

$$\therefore\ a^2-7+\frac{1}{a^2}=0$$

$$\therefore\ a^4-7a^2+1=0$$

$$\therefore\ a^2=\frac{7\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{14\pm2\sqrt{45}}{4}$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{14\pm2\sqrt{45}}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

（$\because\ a>0$）

練習 5. 1，a，b が，この順に等差数列をなし，1，b，$12a+1$ がこの順に等比数列をなすという。a，b の実数値を定めよ。

(ヒント)　1，a，b が等差数列をなすというのですから

$$2a=1+b \qquad \cdots\cdots①$$

また，1，b，$12a+1$ が等比数列をなすというのですから

$$b^2=1(12a+1) \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より a を消去して

$$b^2=6(1+b)+1$$

$$\therefore\ b^2-6b-7=0$$

$$\therefore\ (b-7)(b+1)=0$$

したがって

$b=7$　かつ　$a=4$

$b=-1$　かつ　$a=0$

答　$a=4,\ b=7\ ;\ a=0,\ b=-1$

(注)　これらは要するに等差数列や等比数列の混合問題といっても，本質的には連立方程式の解法といったことなのです。数列だからといって敬遠してはいけません。

では，もう1つ。

練習 6. 2つの正の数 a，b の間に2個の等差中項 p，q および2個の等比中項 u，v を挿入するとき $p+q$ と $u+v$ の大小はどうか。

(ヒント)　公差を d とすると

$$b=a+3d \qquad \therefore\ d=\frac{b-a}{3}$$

$$\therefore\ p=\frac{2a+b}{3},\ q=\frac{a+2b}{3}$$

次に，公比を r とすると

$$b=ar^3 \qquad \therefore\ r=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$\therefore\ u=\sqrt[3]{a^2b},\ v=\sqrt[3]{ab^2}$$

$$\therefore\ (p+q)-(u+v)$$

$$=(a+b)-(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2})$$

$$=\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})-\sqrt[3]{b^2}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$$

$$=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})$$

$$=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\geqq0$$

等号の成り立つのは $a=b$ のときですね。その他は $p+q$ のほうが大きいのです。

答　$p+q\geqq u+v$

（等号は $a=b$ のとき）

① $\sum$記号の使い方

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◈Σはギリシア文字シグマの大文字。Sに当たる。つまり Sum である。同じようなわけで積には Π（パイの大文字）を使うのです。

◆ 数列の和を表す記号Σ（シグマ）の意味と使い方をものにするのが目的です。

11/12

■練習 1. $\sum_{k=2}^{5}k^2$ を Σ 記号を使わないで表せ。

ヒント　k に 2 から 5 までの整数を代入したものを加えろ，ということなのですから

$$2^2+3^2+4^2+5^2$$

です。

注　逆に $2^2+3^2+4^2+5^2$ を Σ 記号を使って表せ，というのでは，いろいろな表し方があります。上の表し方のほかにも，例えば

$$\sum_{k=1}^{4}(k+1)^2 \quad や \quad \sum_{k=3}^{6}(k-1)^2$$

などです。

11/12

■練習 2. $1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$ をΣ記号を使って表せ。

ヒント　第 n 項が n^3 ですから

$$\sum n^3$$

と書いて，次に $n=1$ を代入すると初項を表すのですから

$$\sum_{n=1} n^3$$

と書き，ついで $n=n$ を代入すると第 n 項になるのですから，上に n を書いて

$$\sum_{n=1}^{n} n^3$$

とすればよいのです。ふつうは混乱をさける意味で

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

と，わざわざ k になおしますが，本質的なことではありません。もう 1 つ：——

11/12

■練習 3. $1\cdot1+3\cdot5+5\cdot9+7\cdot13+\cdots\cdots$ の第 n 項までの和をΣ記号を使って表せ。

解　　$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots$

は初項 1，公差 2 の等差数列であるから，第 k 項は

$$1+(k-1)\cdot2=2k-1$$

で表せる。また，

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots\cdots$$

は初項 1，公差 4 の等差数列であるから，第 k 項は

$$1+(k-1)\cdot4=4k-3$$

で表せる。ゆえに，求める式は

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(4k-3)$$

である。

*　*　*

◆ Σ記号は，次のような性質があります。

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+g(k)\}=\sum_{k=1}^{n}f(k)+\sum_{k=1}^{n}g(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n}af(k)=a\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

そこで，数列の和を求めるのに役立つのです。例えば

11/12

■練習 4. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)$ の和を求めよ。

ヒント　まずΣ記号で表します。次に分割し，そのおのおのに公式を適用して和を求め，さらにそれをまとめる，というわけ。

$$与式=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

ところが，公式によると，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$\therefore$　与式$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 5. 次の数列の初めのn項の和を求めよ。

$1\cdot3\cdot5+2\cdot5\cdot9+3\cdot7\cdot13+4\cdot9\cdot17+\cdots\cdots$

（日本大）

（解）求める和をSとすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(2k+1)(4k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(8k^3+6k^2+k)$$

$$=8\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$+6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(4n^2+8n+3) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 次のようなのはふしぎとできない人が多いものです。

■練習 6. $n\cdot1+(n-1)\cdot2+(n-2)\cdot3+\cdots\cdots+1\cdot n$ の和を求めよ。　（京都薬大）

（ヒント）これができないのはnに幻惑されるからなんです。

第k番目は$(n-k+1)k$で与えられる

ことに気がつけばなんでもないハズ。

与式$=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$

$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 続いて，これはまた，イヤな問題です。ムリにやることもないが，ファイトのある人はやってみるとよい。

■練習 7. nは奇数で，$n\geqq3$ とし

$$a_k=(-1)^k\cos\frac{k}{n}\pi \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$S_r=\sum_{i=1}^{n}a_{i+r} \ (r=-1,\ 0,\ 1)$$

とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) $S_{-1}+S_1=-2S_0\cos\frac{\pi}{n}$ であることを示せ。

(2) $a_{k+n}=a_k$ であることを示せ。

(3) S_0 の値を求めよ。　（鹿児島大）

（ヒント）(1) 次のように

$$S_{-1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}=a_0+a_1+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}=a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n+1}$$

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

と具体的に書いて考えてみるのがコツ。解答は$\sum$のままでよいが，……。さて，

$S_{-1}+S_1$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}+a_{i+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{(-1)^{i-1}\cos\frac{i-1}{n}\pi+(-1)^{i+1}\cos\frac{i+1}{n}\pi\right\}$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left\{\cos\frac{i-1}{n}\pi+\cos\frac{i+1}{n}\pi\right\}$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot2\cos\frac{i}{n}\pi\cos\frac{\pi}{n}$$

$$=-2\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cos\frac{i}{n}\pi\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

$$=-2S_0\cos\frac{\pi}{n}$$

(2)　$a_{k+n}=(-1)^{k+n}\cos\frac{k+n}{n}\pi$

$$=(-1)^k(-1)^n\cos\left(\frac{k}{n}\pi+\pi\right)$$

nは奇数ですから

$$=(-1)^k\cos\frac{k}{n}\pi=a_k$$

(3)の答は0となります。

① 公式$\sum_{k=1}^{n}k^2$の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆$\sum k^2$ の公式はもちろんオボエルこと。さらに使い方をマスターすること。ところで，いろいろと応用は広いのですよ。

◆ まず，2乗の和の公式：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

の証明からはじめるのが順序というものでしょう。恒等式

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

で，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入しますと

$$\begin{aligned}
2^3-1^3&=3\cdot1^2+3\cdot1+1\\
3^3-2^3&=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\
4^3-3^3&=3\cdot3^2+3\cdot3+1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n^3-(n-1)^3&=3(n-1)^2+3(n-1)+1\\
(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1
\end{aligned}$$

これを辺々相加えると，求める和を S_n として

$$(n+1)^3-1^3=3S_n+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad 3S_n&=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n\\
&=(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)\\
&=(n+1)\left\{(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right\}\\
&=(n+1)\left(n^2+\frac{1}{2}n\right)\\
&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

さて，これで公式の証明はすんだ。次は公式の使い方です。

＊　＊　＊

◆ さあ，次の練習1.をやってみませんか。

練習1. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)$
の和を求めよ。

(ヒント) 第n項は $n(n+1)$ ですから，求める和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

ここまでくれば，あとは公式まかせ!!

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}\\
&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$
……答

練習2. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots\cdots$
の第n項までの和を求めよ。

(解) 求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\\
&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\\
&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\
&=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&\quad-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\
&=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}\\
&=\frac{1}{3}n(4n^2-1)\\
&=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)
\end{aligned}$$
……答

練習3. $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots$
の第n項までの和を求めよ。

(ヒント) 第n項は

$$n\cdot(2n-1)=2n^2-n$$

であることに気がつけば，あとは問題なし。

$$S_n=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$ ……答

＊　＊　＊

◆ さて，次には，やや総合的な練習を。

■練習 4. 右のように自然数を並べ，上から i 番目の行，左から j 番目の列の交差点にある数を a_{ij} で表す。n を自然数として $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を n の式で表せ。　（弘前大）

1	2	6	7	15	16		
3	5	8	14	17			
4	9	13	18				
10	12	19					
11	20						
21							

（解） 群数列

1|2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9, 10|……

を作ると，a_{ii} は第 $(2i-1)$ 群の第 i 番目であるから，はじめから数えて

$$1+2+\cdots\cdots+(2i-2)+i$$

$$=\frac{1}{2}(2i-2)(2i-1)+i$$

$$=2i^2-2i+1$$

番目である。

$$\therefore\quad a_{ii}=2i^2-2i+1$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(2i^2-2i+1)$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$ ……答

■練習 5. 整数 $n\geqq 3$ に対し

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+n)$$
$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$

とおくとき，a_2 を求めよ。　（富山大）

（解） a_2 は 1, 2, 3, ……, n における異なる 2 数の積の和になるから

$$(1+2+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+2a_2$$

$$\therefore\quad 2a_2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n+2)(n-1)$$

$$\therefore\quad a_2=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$$ ……答

＊　＊　＊

◆ こんな応用もあります。

■練習 6. n を自然数とするとき，

$$n(n+1)(2n+1)$$

は 6 で割りきれることを示せ。

（解） 公式により

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が成り立つ。左辺は整数であるから，右辺も整数で，したがって，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 で割りきれる。

Q. E. D.

（注） いわゆる整除問題で，剰余類を使ってもできますし，数学的帰納法を使ってもできますが，上のような解も，ちょっとおもしろいでしょう。

次に，もう 1 つやってみませんか。

■練習 7. n が整数のとき，

$$2n^4+5n^3+4n^2+n+6$$

は 6 で割りきれることを証明せよ。

（解）

$$2n^4+5n^3+4n^2+n+6$$
$$=(2n^3+3n^2+n)(n+1)+6$$
$$=n(n+1)(2n+1)\cdot(n+1)+6$$

ところが $n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であるから，$2n^4+5n^3+4n^2+n+6$ は 6 で割りきれる。

（注） $(n-1)n(n+1)$ も 6 の倍数ですから

$$与式=(n-1)n(n+1)\cdot(2n+5)+6(n^2+n+1)$$

と変形してもよいのですが，ここでは，

$$n(n+1)(2n+1)$$

で割ってみたのです。もちろん

$$n(n+1)(n+2)$$

を使ってもよいわけです。

◑公式 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆$\sum k^3$ の公式は $\sum k$ の２乗に等しいからオボエヤスイ。$\sum k^2$ に比べるとマチガイも少ないものなのです。

◆　３乗の和の公式：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

はオボエテおく必要がありますね。で，その証明は，といえば，次のようです。

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

この恒等式において $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して辺々加えます。

$$\begin{aligned}
2^4-1^4&=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1\\
3^4-2^4&=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1\\
4^4-3^4&=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+)\ (n+1)^4-n^4&=4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1\\
\hline
(n+1)^4-1^4&=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n
\end{aligned}$$

ところが

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ですから，求める和 S_n は

$$\begin{aligned}
4S_n&=-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&\quad-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n+(n+1)^4-1\\
&=-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)\\
&\quad+(n+1)^4-(n+1)\\
&=(n+1)\{-n(2n+1)-2n\\
&\quad+(n^3+3n^2+3n+1)-1\}\\
&=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

＊　＊　＊

◆　そこで，次は，この公式を使う問題です。まず，次の練習をやってみませんか。

練習 1. $1^2\cdot2+2^2\cdot3+\cdots\cdots+n^2(n+1)$ の和を求めよ。

（解）　求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)\\
&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}\\
&=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)
\end{aligned}$$

（ウッカリ，ココデヤメテハイケマセンヨ!!）

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)\quad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$ の和を求めよ。

（解）　求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)\\
&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&\quad+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\quad\cdots\cdots\text{答}
\end{aligned}$$

（注）　実はこの問題は，むしろ次のようにやるほうが簡単なのです。

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2)(n+3)\\
&\qquad-(n-1)n(n+1)(n+2)\\
&=n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}\\
&=4n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

ですから

$$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}\{n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$-(n-1)n(n+1)(n+2)\}$$

この両辺に $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ を入れて加えると次の結果が得られるのです。

$$\sum_{n=1}^{n}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

＊　＊　＊

◆ では，次にはやや総合的な練習を：——

練習 3. 次の数列の第 n 項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+n^3$$

ヒント　$a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4\cdots\cdots$

$$1^3\quad 2^3\quad 3^3\cdots\cdots$$

というわけですから，階差数列の扱い方から

$$a_n=a_1+\{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+(n-1)^3\}$$
$$=1+\frac{1}{4}(n-1)^2n^2$$
$$=\frac{1}{4}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+1 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 4. 次の数列の和を求めよ。

$$1\cdot n^2+2\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-2)^2+\cdots\cdots+n\cdot 1^2$$

解　与式 $=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$-2(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$+(n+1)^2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2) \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 5. 整数 $n\geqq 3$ に対し

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+n)$$
$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$

とおくとき，a_3 を求めよ。　（富山大）

ヒント　a_3 は $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ における異なる3数の積の和に等しいことはすぐわかりますが，さて，その計算はどうするか，これが問題です。1つの方法は和の3乗の公式を使うものです。つまり，

$$(a_1+a_2)^3=(a_1{}^3+a_2{}^3)+3(a_1a_2{}^2+a_2a_1{}^2)$$
$$(a_1+a_2+a_3)^3=(a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3)$$
$$+3(a_1{}^2a_2+a_1{}^2a_3+a_2{}^2a_1+a_2{}^2a_3$$
$$+a_3{}^2a_1+a_3{}^2a_2)+6a_1a_2a_3$$

といったぐあい。この場合であれば，

$$(1+2+\cdots\cdots+n)^3$$
$$=(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)$$
$$+3\{1^2\cdot2+1^2\cdot3\cdots\cdots+n^2(n-1)\}$$
$$+6a_2 \quad\cdots\cdots①$$

なる関係があります。そして，

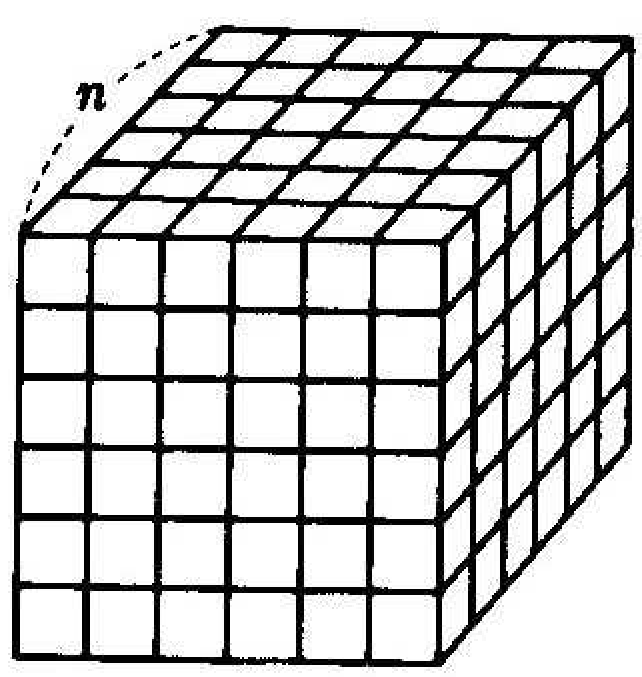
$$1^2\cdot2+2^2\cdot3+\cdots\cdots+n^2(n-1)$$
$$=(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)(1+2+\cdots\cdots+n)$$
$$-(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n+1-3)$$
$$=\frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n-1) \quad\cdots\cdots②$$

①，②より

$$6a_2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^3-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$-3\cdot\frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n-1)$$
$$=\frac{1}{8}n^2(n+1)^2(n-2)(n-1)$$
$$\therefore\quad a_2=\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$$

しかし，これはイヤな計算でしたね。

練習 6. 右のように立方体を，縦，横，奥行とも n 等分するときできる立方体の個数をすべて求めよ。



ヒント　大きさ別に分けて数えるのがコツ。

$$n^3+(n-1)^3+\cdots\cdots+1^3$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

○分数数列の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆分数数列はいわゆる盲点なんだなあ。みんなわかっているつもりでいる。しかし，案外そうじゃないのですよ。

◆ 分数数列といえば，ほとんど次のような形のものなんです。ともかく，やってみましょう。

■練習1. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

の和を求めよ。

(ヒント) この種のものは考える余地はありませんよ。各項を2つに分けるのです。では，どのように分けるか？

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

です。だから，

$$与式=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} \quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習2. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

の和を求めよ。

(解) $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\therefore\ 与式=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} \quad\cdots\cdots\text{答}$$

(注) このように，分母の最後の1つをとりさったものから最初の1つをとりさったものを引いたものを作ってみるのがコツ!!

では，次をやってみませんか。

■練習3. $\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{1}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$

の和を求めよ。

(解) 与式

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k+2)(2k+4)(2k+6)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2k(2k+2)(2k+4)}-\frac{1}{(2k+2)(2k+4)(2k+6)}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2\cdot4\cdot6}-\frac{1}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{8\cdot6}-\frac{1}{8(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{48}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{n^3+6n^2+11n}{288(n+1)(n+2)(n+3)} \quad\cdots\cdots\text{答}$$

* * *

◆ こんなイジノワルイ問題もありますよ。

■練習4. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

の和を求めよ。

(ヒント) このようなときには，せっかく2つの分数に分けても，隣りと消えないからめんどうです。このようなときには，**タテに書いてみる** といいのです。つまり，次のように，です。

$$
\text{与式}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)
+\cdots\cdots\cdots\cdots
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)
$$

$$
=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)
$$

$$
=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right\}
$$

$$
=\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)} \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}
$$

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

■練習 5. $a_k=1+2+3+\cdots\cdots+k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき

$$
S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}
$$

を簡単にせよ。　　　　　　　　（東北学院大）

ヒント　$a_k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$

$$
\therefore\quad S_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)
$$

$$
=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1} \qquad \cdots\cdots \boxed{\text{答}}
$$

■練習 6. 数列 $\dfrac{7}{3},\ 1,\ \dfrac{11}{27},\ \dfrac{13}{81},\ \cdots\cdots$ の一般項を書け。また初項から第 n 項までの和を求めよ。　　　　　　　　（成蹊大）

ヒント　第2項の1はおそらく $\dfrac{9}{9}$ なのであろう。そうすると，分子は

$$
7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots
$$

ですから初項7，公差2の等差数列らしい。してみると，第 n 項の分子は

$$
7+(n-1)\cdot 2=2n+5
$$

にちがいない。分母はもちろん 3^n，かくて

$$
a_n=\frac{2n+5}{3^n}
$$

となります。してみると，この数列は循環級数を作るわけだ（☞ p. 126）。

$$
S_n=\frac{7}{3}+\frac{9}{3^2}+\frac{11}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n+5}{3^n}
$$

$$
-)\ \frac{1}{3}S_n=\qquad\frac{7}{3^2}+\frac{9}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n+3}{3^n}+\frac{2n+5}{3^{n+1}}
$$

$$
\frac{2}{3}S_n=\frac{7}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n+5}{3^{n+1}}
$$

$$
=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^n}+\left(\frac{5}{3}-\frac{2n+5}{3^{n+1}}\right)
$$

$$
\therefore\quad S_n=1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2\cdot 3^n}
$$

$$
=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=4-\frac{n+4}{3^n}
$$

$\boxed{\text{答}}$　$\dfrac{2n+5}{3^n},\ 4-\dfrac{n+4}{3^n}$

■練習 7.

$$
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6}+\cdots\cdots(\text{第}\,n\,\text{項})
$$

の和を求めよ。

ヒント　これはできない人が多いハズ。

分母・分子にぬけている $(k+2)$ を掛けてみるのです。すなわち

$$
\text{与式}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}
$$

$$
=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}
$$

$$
=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+3)-1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}
$$

$$
=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}
$$

ここまでくれば，もうできるハズ。このぐらいの計算でまごついてはいけません。最後までやってくださいよ。

同じ数字からなる数列

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◈同じ数字だけからできている数列が何か役に立つとは思わないが，数学の中にはそんなものがやはりあるんだな。

◆ ここで扱うのは，数列が同じ数からなっている場合です。こういっただけではピンとこないかもしれませんね。具体的な例をあげてみましょう。

■練習 1. $1+11+111+1111+\cdots\cdots$ の第 n 項までの和を求めよ。

(ヒント) このように同じ数字からできているときには **全部を 9 で表す** のがコツ。

つまり

$$与式=\frac{1}{9}(9+99+999+\cdots\cdots+第\,n\,項)$$

$$=\frac{1}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\cdots+(10^n-1)\}$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{81}\{10^{n+1}-(9n+10)\}\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

■練習 2. $5+5.5+5.55+\cdots\cdots$ の第 n 項までの和を求めよ。

(ヒント)

$$与式=\frac{5}{9}(9+9.9+9.99+\cdots\cdots+第\,n\,項)$$

$$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(10-0.1)+(10-0.01)+\cdots\cdots+第\,n\,項\}$$

$$=\frac{5}{9}\{10n-(1+0.1+0.01+\cdots\cdots+第\,n\,項)\}$$

$$=\frac{5}{9}\left\{10n-\frac{1(1-0.1^n)}{1-0.1}\right\}$$

$$=\frac{5}{9}\left\{10n-\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{81}\left(90n+\frac{1}{10^{n-1}}-10\right)\quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

もう1つやってみようじゃないか。

■練習 3. 級数 $0.7+0.077+0.00777+\cdots\cdots$ の第 n 項までの和を求めよ。（名古屋市大）

(解) $0.7+0.077+0.00777+\cdots\cdots$

において

$$0.7=7(10^{-1})$$

$$0.077=7(10^{-2}+10^{-3})$$

$$0.00777=7(10^{-3}+10^{-4}+10^{-5})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般に第 k 項は

$$0.\underbrace{0\cdots\cdots0}_{(k-1)個}\underbrace{77\cdots\cdots7}_{k個}$$

$$=7(10^{-k}+10^{-(k+1)}+\cdots\cdots+10^{-(2k-1)})$$

$$=7\cdot10^{-k}\cdot\frac{1-10^{-k}}{1-10^{-1}}$$

$$=\frac{7}{9}(10^{-(k-1)}-10^{-(2k-1)})$$

$$\therefore\quad 与式=\frac{7}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}(10^{-(k-1)}-10^{-(2k-1)}\right)$$

$$=\frac{700}{891}-\frac{70}{81}\cdot10^{-n}+\frac{70}{891}\cdot10^{-2n}$$

$$\cdots\cdots\boxed{答}$$

*　　*　　*

◆ 次にはややめんどうなものをやってみませんか。

■練習 4. $1+11x+111x^2+\cdots\cdots$ の第 n 項までの和を求めよ。$\left(x\neq1,\ \frac{1}{10}\right)$

(ヒント)

$$S=1+11x+111x^2+\cdots\cdots+\underbrace{111\cdots\cdots1}_{n個}x^{n-1}$$

$$xS=\qquad 1x+\ 11x^2+\cdots\cdots+\underbrace{11\cdots\cdots1}_{(n-1)個}x^{n-1}+\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n個}x^n$$

辺々相減ずると

$$(1-x)S=1+10x+100x^2+\cdots\cdots+\text{第}\,n\,\text{項}-\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n\text{個}}x^n$$

$$=\frac{1(1-10^nx^n)}{1-10x}-\frac{1}{9}(10^n-1)x^n$$

$$\therefore\quad S=\frac{1-10^nx^n}{(1-x)(1-10x)}+\frac{1-10^n}{9(1-x)}x^n$$

…… 答

(注) ここでやめるか，さらに通分するかは，趣味の問題にすぎませんが，通分してみると次のようになります。

$$S=\frac{9-(10^{n+1}-1)x^n+10(10^n-1)x^{n+1}}{9(1-x)(1-10x)}$$

練習 5. $A_1=1$，$A_2=11$，$A_3=111$，……；$B_1=4$，$B_2=44$，$B_3=444$，…… のとき，$A_{2n}+B_n+1$ はある整数の平方であることを示せ。 （慶大）

(ヒント) $A_n=\underbrace{111\cdots\cdots1}_{n\text{個}}=\dfrac{1}{9}(\underbrace{99\cdots\cdots9}_{n\text{個}})$

$$=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

$$B_n=4A_n=\frac{4}{9}(10^n-1)$$

$$\therefore\quad A_{2n}+B_n+1$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-1)+\frac{4}{9}(10^n-1)+1$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}+4\times10^n+4)$$

$$=\frac{1}{9}(10^n+2)^2=\left\{\frac{1}{3}(10^n+2)\right\}^2$$

あとは $\dfrac{1}{3}(10^n+2)$ が整数であることを示せば証明完了です。さて，それは，いろいろなやり方があるでしょう。例えば

$$(10^n+2)=(9+1)^n+2=(\,9\,\text{の倍数})+1+2$$

$$=(\,9\,\text{の倍数})+3=(\,3\,\text{の倍数})$$

これで証明終わり。

実は $A_{2n}+B_n+1$ が整数であることがわかっているのですから，何か有理数の平方であることがわかれば，もちろん，整数の2乗なんです。

* * *

◆ では，やや変わった形のものについてやってみましょう。とはいっても，本質的に変わっている点はありませんが。

練習 6. a は10進法で $2n+2$ けたの整数であって，最上位から n 個の1が並び，その次から $(n+1)$ 個2が並び，末位は5である。a は完全平方数であることを示せ。

（名大）

(ヒント) ともあれ，具体的にやってみませんか。

$n=1$ のときには a は4けたの数で，1が1個。次に，2個の2が並び，最後が5，つまり $1225=35^2$ というわけ。

$n=2$ のときには同じようにして，$112225=335^2$ となる。

$n=3$ のときには $11122225=3335^2$

こうしてみると，どうやらできそうだ!!

(解) $a=\underbrace{111\cdots\cdots1}_{n\text{個}}\underbrace{222\cdots\cdots25}_{(n+1)\text{個}}$

$$=(10^{2n+1}+10^{2n}+10^{2n-1}+\cdots\cdots+10^{n+2})$$

$$+2(10^{n+1}+10^n+\cdots\cdots+10)+5$$

$$=10^{n+2}\times\frac{10^n-1}{10-1}+20\times\frac{10^{n+1}-1}{10-1}+5$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}-10^{n+2}+20\times10^{n+1}-20+45)$$

$$=\frac{1}{9}((10^{n+1})^2+10\cdot10^{n+1}+25)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{n+1}+5)^2=\left(\frac{10^{n+1}+5}{3}\right)^2$$

a は整数であるから，有理数の平方であればその有理数は整数でなければならない。

よって証明された。

(注) なお $\sqrt{a}=\dfrac{10^{n+1}+5}{3}$

$$=\frac{1}{3}(\underbrace{1000\cdots\cdots0}_{n\text{個}}5)$$

$$=\underbrace{3333\cdots\cdots3}_{n-1\text{個}}5$$

となることもわかります。

これらはすべて同じ数からなるわけではありませんが，いわば同類ということは申せましょう。

①群数列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数列を扱うときに，グループに分けて考えてうまくいくことが多いもの。つまり，第何グループの第何番目，というわけだ。

◆ さっそく，具体的な問題にいくとしましょう。では，これをやってみませんか。

11/21

練習 1. 数列 $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, ……はある一定の規則にしたがって作られている。この数列の，第11項から第15項までを書け。　（山形大）

（解）　$\frac{5}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{5}$

11/22

練習 2. 1　2　2　3　3　3　……の第100番目は何か。　（成蹊大）

（ヒント）　これをみると，1が1個，2が2個，3が3個，……ということらしい。そこで次のようにグループ別にします。

1|2 2|3 3 3|4 4 4 4|……

そうすると，第100番目のものが，第何グループに属するかわかればいいでしょう。

さて，第nグループまでには

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

個あります。これが100になるのは？

$$\frac{1}{2}n(n+1)=100$$

$$\therefore\quad n^2+n-200=0$$

$$\therefore\quad n=\frac{-1+\sqrt{1^2+800}}{2}\quad（－は捨てる）$$

$$=\frac{-1+28.3}{2}=13.6\cdots\cdots$$

ここで，nは自然数だから解なし，などといってはいけません。第100番目は第13.62項つまり，第14項のまんなかを越えた部分らしい。してみると，14にきまっている。

（注）　数学のスキな人は上のようにやるのをイヤガル，nが13.6……というのにひっかかるのです。でも，キミ，例えば仕事をするのに人数を計算したら5.3人になった。だからマチガイだといいますか。

でも，ヤハリ気になる人がいる。そのときは，不等式でやればいい。つまり：――

$$1+2+\cdots\cdots+n\leqq 100$$

$$\therefore\quad n^2+n-200\leqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{-1-\sqrt{801}}{2}\leqq n\leqq\frac{-1+\sqrt{801}}{2}$$

これを満たす最大の整数nは

$$n=13$$

そして

$$1+2+\cdots\cdots+13=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$$

ゆえに，第100項は第14グループの第9番目（100－91）であることがわかったのです。

11/28

練習 3. 次のような群に分けられている数列の第n群の初項を求めよ。

1|3, 5|7, 9, 11|13, 15, 17, 19|……

（ヒント）　第1群1個，第2群2個，第3群3個，……ですから，第$(n-1)$群までには

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n\ （個）$$

あるわけです。したがって，第n群の初項は最初から数えて

$$\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\}+1$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

番目です。ところで，これは初項1，公差2の等差数列ですから，求めるものは

$$1+\left\{\frac{1}{2}(n^2-n+2)-1\right\}\times 2$$

$$=n^2-n+1$$

です。　**答**　n^2-n+1

＊　＊　＊

◆ 次には，ややめんどうなものをやってみませんか。考え方はまったく同じです。

練習 4. 次のような群に分けられている数列の第 n 群の総和を求めよ。

$1|2,\ 4|8,\ 16,\ 32|64,\ \cdots\cdots$

（鹿児島大）

（解）第 $(n-1)$ 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

ゆえに，第 n 群の初項は，第 1 群の初項から $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$ 番目の項で，したがって，第 n 群の初項は

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

である。ゆえに第 n 群は，初項 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，公比 2，項数 n の等比数列であるから，その和は

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}(2^n-1)}{2-1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}(2^n-1)\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

である。

練習 5. 次のような群に分けられている数列の第 n 群の初項を求めよ。

$1|3,\ 5|8,\ 11,\ 14|18,\ 22,\ 26,\ 30|35,\ 40,\ \cdots$

（神戸商科大）

（ヒント）第 n 群の初項は，はじめから数えて

$$\{1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-1)\}+1$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)n+1\ (番目)$$

です。ところで，この数列の階差数列をとってみると，次のようになります。（階差数列については（☞ p.128））

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}1&&3&&5&&8&&11&&14&&18&&22\\&2&&2&&3&&3&&3&&4&&4&\\&&0&&1&&0&&0&&1&&0&&\end{array}$$

ヤレヤレ，コレデハ困ッテシマウ。コレハヒドイ問題ラシイゾ!!

ここで，方針を変えて，各群の初項だけ並べてみようか。そして，階差をとってみよう。

$a_n:1\quad 3\quad 8\quad 18\quad 35$

$b_n:\quad 2\quad 5\quad 10\quad 17$

$c_n:\quad\quad 3\quad 5\quad 7$

これでどうやら見当がついた。

$$\begin{aligned}b_n&=2+(3+5+7+\cdots\cdots(n-1)項)\\&=2+\frac{n-1}{2}\{2\cdot3+(n-2)\cdot2\}\\&=n^2+1\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)\\&=1+\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)+(n-1)\\&=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+7)\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}\end{aligned}$$

練習 6. 右の表は自然数をある一定の規則にしたがって右方および下方に限りなく配列したものの一部である。配列の規則を読みとって，上から m 番目の行と左から n 番目の列との交わりにある数を m，n で表せ。

1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	
1	3	5	7	9	
1	4	7	10	13	
1	5	9	13	17	

（茨城大）

（ヒント）べつにめんどうはないでしょう。

第 3 行は

$$\begin{array}{ccccccccc}1&&3&&5&&7&&9\\&2&&2&&2&&2&\end{array}$$

第 4 行は

$$\begin{array}{ccccccccc}1&&4&&7&&10&&13\\&3&&3&&3&&3&\end{array}$$

というぐあいですから，第 m 行は

$1\quad m\quad 2m-1\quad 3m-2\cdots\cdots$

つまり初項 1，公差 $(m-1)$ の等差数列の第 n 項を求めればよいでしょう。だから，

$$1+(n-1)(m-1)=mn-m-n+2$$

となります。

$\boxed{答}\quad mn-m-n+2$

循環級数とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆循環級数というコトバを聞いたことありや，問題はコトバにあるのではありません。この種のものは大切であることをお忘れなく。

◆ **循環級数**（じゅんかんきゅうすう）を循環小数と混同してはいけません。循環級数というのは

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots\cdots+n^2x^{n-1}$$

のように，一般項が n の多項式と x のベキ乗の積になっているものです。これは等比数列の和を求めるときのようにすればよいのです。いや，等比数列の和すら循環級数の特別の場合なのです。

では，ひとつやってみませんか。

練習 1. $1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}$ の和を求めよ。$(x\fallingdotseq 1)$ （慶大）

（ヒント） $S=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}$

とおくと

$$xS=\quad 1\cdot x+2x^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

辺々相減ずれば

$$(1-x)S=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$
$$=\frac{1(1-x^n)}{1-x}-nx^n$$
$$\therefore\quad S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

このままでもいいのですが，ふつうは次のように通分したものを答としています。

$$S=\frac{(1-x^n)-nx^n(1-x)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

どちらがいいかは趣味の問題というべきでしょう。

練習 2. $1+7x+13x^2+\cdots+(6n-5)x^{n-1}$ の和を求めよ。$(x\fallingdotseq 1)$

（解） 与えられた数列の和を S とおくと

$$\begin{array}{rl} S= & 1+7x+13x^2+\cdots\cdots+(6n-5)x^{n-1} \\ -)\ xS= & \quad 1\cdot x+\ 7x^2+\cdots\cdots+(6n-11)x^{n-1}+(6n-5)x^n \\ \hline (1-x)S= & 1+6x+\ 6x^2+\cdots\cdots+\ 6x^{n-1}-(6n-5)x^n \end{array}$$
$$=6(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-\{(6n-5)x^n+5\}$$
$$=6\cdot\frac{1-x^n}{1-x}-\{(6n-5)x^n+5\}$$
$$\therefore\quad S=\frac{6(1-x^n)}{(1-x)^2}-\frac{(6n-5)x^n+5}{1-x}$$
$$=\frac{(6n-5)x^{n+1}-(6n+1)x^n+5x+1}{(1-x)^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ もう一段めんどうなものをやってみませんか。同じことを二度やるだけなんです。

練習 3. $S=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$ の和を求めよ。ただし，$x\fallingdotseq 1$.

（ヒント） $S=1^2+2^2x+3^2x^2\cdots\cdots+n^2x^{n-1}$

$$xS=\quad 1^2x+2^2x^2+\cdots\cdots$$
$$+(n-1)^2x^{n-1}+n^2x^n$$

辺々相減じて

$$(1-x)S=1+3x+5x^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n$$

そこで改めて

$$S_n'=1+3x+5x^2+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}$$

とおくと

$$xS_n'=1\cdot x+3x^2+\cdots\cdots+(2n-3)x^{n-1}$$
$$+(2n-1)x^n$$

辺々相減じて

$$(1-x)S_n'=1+2x+2x^2+\cdots\cdots+2x^{n-1}$$
$$-(2n-1)x^n$$
$$=\frac{2(1-x^n)}{1-x}-\{(2n-1)x^n+1\}$$
$$\therefore\quad S_n'=\frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2}-\frac{(2n-1)x^n+1}{1-x}$$
$$\therefore\quad S_n=\frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3}-\frac{(2n-1)x^n+1}{(1-x)^2}-\frac{n^2x^n}{1-x}$$

* * *

◆ 次には総合的なものをやってみませんか。計算はウッカリするとまちがいやすいので，慎重にやってくださいよ。

練習 4. サイコロを振って1の目が出ると続いて振ることができる。そして，1の目が出るごとに a 円を受け取ることにする。この人の期待値を求めよ。ただし，100回までしか振ることができないものとする。

(解) 1の目が出る確率を $p\left(=\dfrac{1}{6}\right)$とすると1の目が出ない確率は $(1-p)\left(=\dfrac{5}{6}\right)$ であるから，

a 円受け取る確率 $p(1-p)$
$2a$ 円受け取る確率 $p^2(1-p)$
$3a$ 円受け取る確率 $p^3(1-p)$
…………
$99a$ 円受け取る確率 $p^{99}(1-p)$
$100a$ 円受け取る確率 p^{100}

である。ゆえに，求める期待値は

$$\{ap(1-p)+2ap^2(1-p)+3ap^3(1-p)+\cdots\cdots+99ap^{99}(1-p)\}+100ap^{100}$$
$$=ap(1-p)(1+2p+3p^2+\cdots\cdots+99p^{98})+100ap^{100}$$
$$=ap(1-p)\cdot\frac{1-100p^{99}+99p^{100}}{(1-p)^2}+100ap^{100}$$
$$=\frac{ap}{1-p}(1-p^{100})$$
$$=\frac{a}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{100}\right\} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(注) $p=\dfrac{1}{6}$，$1-p=\dfrac{5}{6}$ としてやったため，計算が著しくラクになっていることに注意。

練習 5. 初項 a，公差 d，項数が n の等差数列と，初項1，公比 x，項数が n の等比数列がある。この2つの数列の対応する項を掛け合わせてできる数列の和を求めよ。ただし，$x \neq 1$ とする。 （鳥取大）

(解) 与えられた数列の第 n 項を a_n とすると，題意から

$$a_n=\{a+(n-1)d\}x^{n-1}$$

である。いま，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと

$$S_n=a+(a+d)x+(a+2d)x^2+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}x^{n-1}$$

であるから，S_n-xS_n を作ると

$$(1-x)S_n=a+d(x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-\{a+(n-1)d\}x^n$$

$x \neq 1$ であるから

$$S_n=\frac{1}{1-x}\left[a+\frac{dx(1-x^{n-1})}{1-x}-\{a+(n-1)d\}x^n\right]$$
$$=\frac{a-(a-d+nd)x^n}{1-x}+\frac{dx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ では，最後にもう1つ，がんばってみませんか。

練習 6. $\dfrac{5}{16}-\sum_{n=1}^{30}\dfrac{n}{5^n}$ の表す数は，小数以下第何位に，はじめて0でない数字が表れるか。ただし，$\log 2=0.3010$ とする。 （横浜市大）

(ヒント) $S=\sum_{n=1}^{30}\dfrac{n}{5^n}$ は循環級数ですから，すぐ求められます。つまり $S-\dfrac{1}{5}S$ を計算して，途中の計算は省略しますが，

$$S=\frac{5}{16}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{5^{27}}$$
$$\therefore \quad \frac{5}{16}-\sum_{n=1}^{30}\frac{n}{5^n}=\frac{1}{2^4\cdot 5^{27}}=\frac{2^{23}}{10^{27}}$$

となります。

そこで両辺の対数をとって

$$\log\left(\frac{5}{16}-\sum_{n=1}^{30}\frac{n}{5^n}\right)=23\log 2-27$$
$$=0.3010\times 23-27=-20.0770$$
$$=\overline{21}.9230$$

ゆえに小数第21位に0でない数字が表れる。

答 第21位

① 階差数列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆階差数列をもとにして第 n 項を求め，公式をはじめて作ったのはニュートンであった。彗星の観測のためだったそうな。

◆ 数列を扱うときの有力な道具のひとつに**階差数列**（かいさすうれつ）があります。ここでは階差数列とは何か，ということと，その使い方をやることにしましょう。では，とりあえず次をやりませんか。

■練習 1. 次の数列において，□の中に数を入れよ。

2　6　12　20　□　□

ヒント 次のように，相続く 2 つの差をとってみましょう。

a_n : 2　6　12　20　□　□

b_n : 　4　6　8　(10)　(12)

もとの数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を**第1階差数列**といいます。そして，それは 4，6，8 と続いているから，その次は10，次は12にちがいない。してみると□の中は

$$20+10=30,\quad 30+12=42$$

であろう。

注 実は b_n において 4，6，8 だから次は 10，12となるという保証はないのです。しかし，簡単に求められるという≪約束≫があるわけで，それから10，12と続くといえるわけなのです。

■練習 2. 次の数列の第 n 項を求めよ。

3　8　15　24　35 ……

ヒント 与えられた数列の階差数列をとってみますと

3　8　15　24　35 ……

5　7　9　11 ……

初項5，公差2の等差数列をなしています。それを初項3に $(n-1)$ 個加えてやると求める第 n 項であるハズ。そこで次のようになります。

求める第 n 項を a_n とすると

$$a_n=3+(5+7+9+\cdots\cdots)\qquad (n-1\text{個})$$

これは≪偶然にも≫

$$a_n=3+5+7+\cdots\cdots\qquad (n\text{個})$$
$$=\frac{n}{2}\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}$$
$$=n(n+2)$$

答　$n(n+2)$

■練習 3. 次の数列の第 n 項を求めよ。

2　5　10　17　26 ……

解 階差数列は初項3，公差2の等差数列であるから，求める第 n 項は

$$2+\sum_{k=1}^{n-1}\{3+(k-1)\cdot2\}$$
$$=2+\frac{n-1}{2}\{2\cdot3+(n-2)\cdot2\}$$
$$=n^2+1$$

答　n^2+1

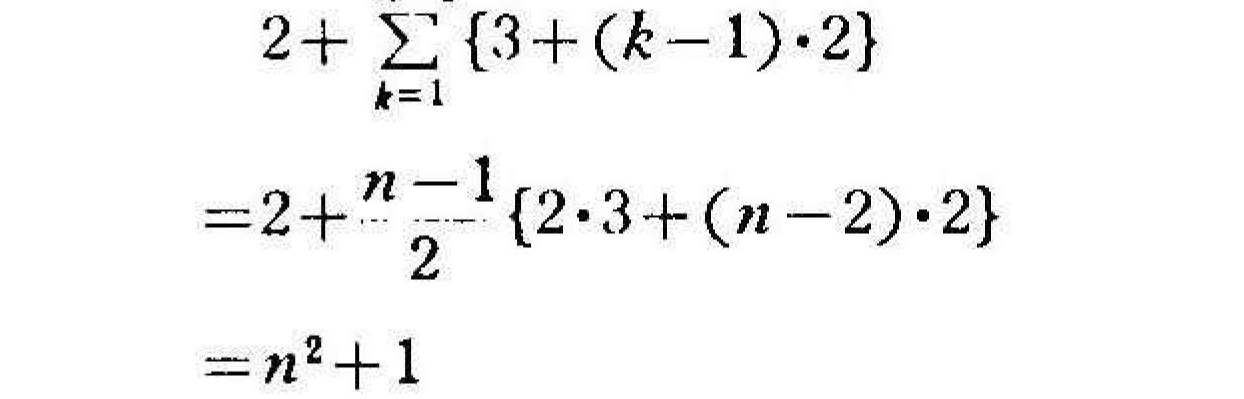
*　*　*

◆ 階差数列はいろいろと役に立ちます。例えば，これです。

■練習 4. いずれの 2 つとも平行でなく，いずれの 3 つも同一点を通らない n 個の直線は平面をいくつの部分に分けるか。

ヒント まず結果がわかると便利だろう。

$n=1$　　$n=2$　　$n=3$



と実際にやってみると

2　4　7　11 ……

2　3　4

となりますから，n 本あるときには

$$2+(2+3+4+\cdots\cdots) \quad (n-1\text{個})$$
$$=2+\frac{n-1}{2}\{2\cdot2+(n-2)\cdot1\}$$
$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

らしいとわかる。結果がわかってしまえば，例えば数学的帰納法を使って証明することができるわけです。

練習 5. 自然数を右のように配列するとき，いちばん上の行の左から n 番目にある数を求めよ。

1	3	6	10
2	5	9	
4	8		
7	12		
11			

ヒント　いろいろな考えがあるでしょう。しかし，もっとも，ソボクなやり方は，この数を並べてみる，そして階差数列を作ってみますと，次のようです。

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \cdots\cdots$$
$$2 \quad 3 \quad 4$$

さては，

$$1+(2+3+4+\cdots\cdots) \quad (n-1\text{個})$$
$$=1+2+3+\cdots\cdots \quad (n\text{個})$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

なのでしょう。しかし，これでは，解として不十分です。しかし，数列の構成と結果がわかってしまったのですから，あとは，答案の書き方しだいということになります。

*　*　*

◆ では，次には，もう少しめんどうなものをやってみませんか。

練習 6.　3, 5, 3, 5, 3, 5 ……の第 n 項を求めよ。

ヒント　第 n 項を a_n とすると

$$a_n=\begin{cases} n\text{が奇数のとき } 3 \\ n\text{が偶数のとき } 5 \end{cases}$$

などというのは，マチガイではありませんが出題者の趣旨を正しくとらえていません。もちろん，第 n 項をひとつの式で表せ，という気持でしょう。では，どうするか。

階差数列をとってみますと

$$3 \quad 5 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 5$$
$$2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2$$

この階差数列は，初項 2，公比 -1 の等比数列ですね。さあ，もうわかったぞ。

第 n 項を a_n とすると

$$a_n=3+\{2+(-2)+2+(-2)+\cdots\cdots+\text{第}(n-1)\text{項}\}$$
$$=3+\frac{2\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}$$
$$=3+\{1-(-1)^{n-1}\}$$
$$=4+(-1)^n$$

答　$4+(-1)^n$

練習 7. 数列 2, 8, 20, 38, 62, 92, ……の第 n 項および初項から第 n 項までの和を求めよ。　（宮城教育大）

解　階差数列をとると

$$2 \quad 8 \quad 20 \quad 38 \quad 62 \quad 92$$
$$6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30$$

となり，第1階差数列は初項 6，公差 6 の等差数列である。ゆえに，求める第 n 項 a_n は

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}\{6+(k-1)\cdot6\}$$
$$=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=3n^2-3n+2$$

次に，第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+2)$$
$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$
$$=n(n^2+1)$$

答　$3n^2-3n+2$，$n(n^2+1)$

*　*　*

◆ 階差数列についてはさらにいろいろな発展や応用がありますが，ここでは深入りしないことにしましょう。

○生物への応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈物理学への応用には気を使うが，生物なんか，吾不関としている人が多い。しかし，割合と多いのですよ。

◆ このセクションでは，生物への数列の応用を拾ってやっておこう，というのです。それが何の意味があるかって！

まず，やってみるさ。

12/12

練習1. 1個の細菌が1時間ごとに2個に分裂して増殖するならば，100時間後の細菌数は10時間後の細菌数の□倍になる。この細菌1個が1時間に生産する毒素量を a とすれば，100時間後の毒素の総量は□となる。

（静岡薬大）

解　　$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \cdots\cdots$

と増殖するから10時間後には 2^{10}，100時間後には 2^{100} になる。したがって，

$$2^{100} \div 2^{10} = 2^{90}$$

倍になる。

生産する毒素は

$$0 \quad a \quad 2a \quad 2^2a \quad \cdots\cdots$$

であるから，100時間後の毒素は

$$a + 2a + 2^2a + \cdots\cdots + 2^{99}a$$

$$= \frac{a(1-2^{100})}{1-2} = (2^{100}-1)a$$

である。

答　2^{90}，$(2^{100}-1)a$

練習2. ある魚類の年間規定漁獲総トン数は前年度の規定総漁獲総トン数の k 倍と一定量 m トンとの和であると定められており，今年度の規定漁獲総トン数は a トンである。

(1)　n 年後の規定漁獲総トン数を求めよ。

(2)　$a=10$万トン，$k=0.96$，$m=2$万のとき，20年後の規定漁獲総トン数は何万トンか。ただし，$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$4.385 = 10^{0.6420}$ とする。

（大阪府大）

ヒント　(1)　1年後の規定漁獲高は

$$ka + m \text{（万トン）}$$

2年後の規定漁獲高は

$$k(ka+m)+m$$

$$= k^2a + (k+1)m \text{（万トン）}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

n 年後の規定漁獲高は

$$k^na + (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots\cdots + k + 1)m \text{（万トン）}$$

であると推定され **数学的帰納法** によって証明することができます。そして，上式は，

$k \neq 1$ のとき　$k^na + \left(\dfrac{1-k^n}{1-k}\right)m$（万トン）

$k = 1$ のとき　$a + mn$（万トン）

と変形できます。

(2)　次に，$a=10$，$k=0.96$，$m=2$ ですから，求める値は

$$(0.96)^{20} \times 10 + \left(\frac{1-0.96^{20}}{1-0.96}\right) \times 2 \text{（万トン）}$$

ところが，$x = 0.96^{20}$ とおきますと

$$\log x = 20 \log 0.96 = 20 \log \frac{2^5 \times 3}{10^2}$$

$$= 20(-2 + 5 \times 0.3010 + 0.4771)$$

$$= -0.358 = \bar{1}.642$$

$$\therefore \quad x = 0.4385$$

ゆえに，求める値は

$$0.4385 \times 10 + \frac{0.5615}{0.04} \times 2 = 32.46$$

答
(1)　$k \neq 1 : k^na + \left(\dfrac{1-k^n}{1-k}\right)m$（万トン）
　　$k = 1 : a + mn$（万トン）
(2)　約32.5万トン

＊　＊　＊

◆ 次は遺伝の問題です。

12/20

練習 3. ある植物は，花の色について，AA, Aa, aa という型のどれかをもっており，各型の花の色は，それぞれ，赤，赤，白である。そして，AAやaaの型の個体からは，それぞれ，それと同じ型の子だけが4個生じ，Aa型の個体からはAA型，aa型が1個ずつと，Aa型が2個生ずるという。Aa型の個体を1代目として出発すると，n代目には白い花の子孫が何個生ずるか。

ヒント　n代目の子孫のうち，aa型のものがx_n個，Aa型のものがy_n個としますと，

$$\begin{cases} x_{n+1}=4x_n+y_n \\ y_{n+1}=2y_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1=0 \\ y_1=1 \end{pmatrix}$$

なる関係があります。

そこで，この二重数列の第n項x_n，y_nを求めればいいでしょう。

行列を使うなら

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

を使えばいいが，行列を使うほどのこともありますまい。第2の漸化式から

$$y_n=2^{n-1}y_1=2^{n-1}$$

これで，y_nができました。

次に，

$$y_n=x_{n+1}-4x_n,\quad y_{n+1}=x_{n+2}-4x_{n+1}$$

を第2式に代入して（☞ p.168）

$$x_{n+2}-4x_{n+1}=2(x_{n+1}-4x_n)$$

$$\therefore\quad x_{n+2}-6x_{n+1}+8x_n=0$$

$x_n=u^n$ とおくと（☞ p.162）

$$u^{n+2}-6u^{n+1}+8u^n=0$$

$$\therefore\quad u^2-6u+8=0$$

$$\therefore\quad (u-2)(u-4)=0$$

$$\therefore\quad u=2,\ 4$$

ゆえに A, B を定数として

$$x_n=A\cdot 2^n+B\cdot 4^n$$

とおけます。ここで，

$$x_1=0,\quad x_2=4x_1+y_1=4\cdot 0+1=1$$

とから A, B を求めると

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\quad x_n=-\frac{1}{4}\cdot 2^n+\frac{1}{8}\cdot 4^n$$

$$=2^{2n-3}-2^{n-2}$$

答　$2^{2n-3}-2^{n-2}$

注　このような生物の遺伝の問題には数学はひとつの分科をなすほど，よく使われています。

では，もう1つやってみませんか。

12/20

練習 4. 細胞の集まりがある。1時間ごとに2個が死亡し，残りがそれぞれ2個に分裂する。最初に細胞が7個あったとして，n時間後の個数をa_nとする。

(1) a_n と a_{n+1} の関係を求めよ。

(2) a_n を求めよ。

(3) 細胞の個数が1000個を越えるのは何時間後か。　（津田塾大）

ヒント　(1)　n時間後にa_n個あって，1時間後には2個が死亡して，残りが2個に分裂するのですから

$$a_{n+1}=2(a_n-2) \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

なる関係が成り立つことがわかります。

(2)　$$a_{n+1}=2a_n-4$$

平衡値（☞ p.144）は4ですから

$$a_{n+1}-4=2(a_n-4)$$

つまり，数列 a_n-4 は公比2の等比数列をなすのですから

$$a_n-4=(a_0-4)\cdot 2^n$$

ところが　$a_0=7$

$$\therefore\quad a_n=3\cdot 2^n+4 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

(3) 最後に，

$$3\cdot 2^n+4>1000$$

$$\therefore\quad 2^n>332$$

ところが

$$2^8=256<332$$

$$2^9=512>332$$

ゆえにnの最小値は9ということになります。

答　9時間後

○ 数学的帰納法とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈数学的帰納法は帰納法ではありませんよ。この意味わかりますか。白馬非馬論とはちがうんですよ。

◆ 数学的帰納法はふしぎとみんなにキラワレル。というのも，何か，あとあじが悪いことにあるのでしょう。

実は，数学的帰納法とは何か，ということは数学者の中にも意見があって，ある人は公理だといい，ある人は定理だといい，ある人は（整数の）定義にほかならぬ，といったぐあいです。だから，ここでは，めんどうなことに立ち入らないで形式的にこうやるのだ，と，納得するのがいい。そして，そのためには，**納得するまでいくつもやる** のがいい!!

＊　＊　＊

◆ では，具体的なものからやりましょう。

■練習 1.　$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$　……①

12/21

を数学的帰納法によって証明せよ。

（解）　この命題を（A）とする。

1°　$n=1$ のとき，①の

$$\text{左辺}=1,\ \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+1)=1$$

ゆえに確かに命題（A）は成り立つ。

2°　次に，$n=k$ のとき，命題（A）が成り立つとすると

$$1+2+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

が成り立つ。両辺に $(k+1)$ を加えると

$$1+2+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$\text{上式の右辺}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

$$\therefore\quad 1+2+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

これは，$n=k$ のとき（A）が成り立つなら $n=k+1$ のときにも成り立つことを示している。

3°　1°により $n=1$ のとき成り立ち，したがって 2° により $n=2$ のとき成り立つ。$n=2$ のとき成り立つなら 2° により $n=3$ のとき成り立つ。このようにして，n のすべての自然数値に対して成り立つ。

よって，命題（A）は成り立つ。

（注）　こんなにくどくかくことはありませんが，詳しく書けばこんなぐあいです。

では，もう1つ：——

12/21

■練習 2.　$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

を証明せよ。

（解）　1°　$n=1$ のとき

$$\text{左辺}=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2},\ \text{右辺}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ゆえに $n=1$ のとき，与えられた命題は成立する。

2°　$n=k$ のとき成り立つとすると

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

両辺に $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を加えると，右辺は

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

ゆえに，$n=k$ のとき成り立つなら $n=k+1$ のときにも成り立つ。

1°，2° により，n のすべての自然数値に対して成り立つことが証明された。

* * *

◆ 次に数学的帰納法を不等式の場合に使ってみましょう。

■練習 3. $x>0$ のとき $(1+x)^n \geqq 1+nx$ であることを示せ。ただし，n は自然数。

(ヒント) $n=1$ のときには確かに成り立ちます。いいですか。**$5 \geqq 5$ は正しい。** $4 \geqq 3$ だって正しいのです。もちろん

$$(1+x)^1 \geqq 1+1 \cdot x$$

は正しいのです。

次に $n=k$ のとき成り立つとしますと

$$(1+x)^k \geqq 1+kx$$

両辺に $1+x(>0)$ を掛けてみると

$$(1+x)^{k+1} \geqq (1+kx)(1+x)$$

で，この右辺は

$$1+x+kx+kx^2=1+(k+1)x+kx^2 \geqq 1+(k+1)x$$

$$\therefore \quad (1+x)^k \geqq 1+(k+1)x$$

すなわち，$n=k$ のとき成り立つとすると $n=k+1$ のときにも成り立つことがわかりました。

よって，したがって，……

(注) これを証明するだけなら二項定理を使ったほうがラクです。

■練習 4. n を正の整数とし，2^n までの正の整数の逆数の和を S_n とおく。すなわち

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$

このとき，次の不等式を数学的帰納法によって証明せよ。

$$S_n \leqq \frac{1}{2}+n$$ (学習院大)

(ヒント) $n=1$ のとき　$S_1=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

であるから，明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k} \leqq \frac{1}{2}+k$$

両辺に $\dfrac{1}{2^k+1}+\dfrac{1}{2^k+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}$ を加えると

$$\text{左辺}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\text{右辺}=\frac{1}{2}+k+\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$<\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k+1}\times 2^k<\frac{1}{2}+(k+1)$$

ゆえに $n=k$ のときに成り立てば $n=k+1$ のときにも成り立つことがわかります。

ゆえに，よって，されば，…というわけ。

* * *

◆ 次には整除問題に応用してみましょう。

■練習 5. n が自然数のとき n^3+2n は 3 で割りきれることを示せ。

(解) $n=1$ のとき $1^3+2 \cdot 1=3$ であるから明らかに 3 で割りきれる。

$n=k$ のとき 3 で割りきれるとすると

$$k^3+2k=(3)$$

ここに(3)は 3 の倍数を表す。そして

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^3+2(k+1)\\
&=k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\
&=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)\\
&=(3)+(3)=(3)
\end{aligned}
$$

ゆえに，数学的帰納法によって証明された。

■練習 6. p および n を 2 以上の整数とする。このとき，整数 $p^n+(1-p)n-1$ は整数 $(p-1)^2$ で割りきれることを証明せよ。 (京都産業大)

(ヒント) $n=k+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&p^{k+1}+(1-p)(k+1)-1\\
&=p\{p^k+(1-p)k-1\}+(p-1)^2k
\end{aligned}
$$

であることを使えばよいでしょう。

* * *

◆ 数学的帰納法にも，いわば変種があります。それらについては (☞ p.134) を参照してください。また，変種でなくても，いわば手ごわいのもあります。これらについては (☞ p.136) を参照あれ。

◯ （ふつうの）数学的帰納法の扱い方(1)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈帰納の反対は何か。演繹（エンエキ）です。数学的演繹法というのがないのは，ハテ，どうしたわけだろう。

◆ 数学的帰納法とはどんなものか，については（☞ p.132）を参照してください。ここでは，ややめんどうなものをやってみませんか。

練習 1. n は正の整数であって，$0<x<1$ であるとき

$$nx^{n-1}<\frac{1}{1-x}$$

であることを証明せよ。　（お茶の水女大）

（解） 与えられた不等式を（A）とする。

$n=1$ のとき（A）の左辺は 1，右辺は $\dfrac{1}{1-x}$ であり，

$$\frac{1}{1-x}-1=\frac{1-(1-x)}{1-x}=\frac{x}{1-x}>0$$

であるから確かに（A）は成り立つ。

$n=k$ のとき（A）が成り立つとすると

$$kx^{k-1}<\frac{1}{1-x}$$

両辺に x を掛けると

$$kx^k<\frac{x}{1-x}$$

両辺に x^k を加えると

$$(k+1)x^k<\frac{x}{1-x}+x^k$$

ところが

$$\frac{1}{1-x}-\left(\frac{x}{1-x}+x^k\right)$$
$$=\frac{1-x}{1-x}-x^k=1-x^k>0$$
$$\therefore\quad (k+1)x^k<\frac{1}{1-x}$$

したがって $n=k$ のとき（A）が成り立てば $n=k+1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，一般に不等式は成り立つ。

練習 2. 不等式

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2 \leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$$

を n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし，n は自然数で，a_1，a_2，…，a_n はすべて実数とする。　（福岡女大）

（ヒント） $n=k$ のとき成り立つとしますと

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2\leqq k(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_k{}^2)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &(k+1)(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_k{}^2+a_{k+1}{}^2)\\
&-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1})^2\\
=&\{k(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_k{}^2)+ka_{k+1}{}^2\\
&+(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{k+1}{}^2)\}\\
&-\{(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^2+a_{k+1}{}^2\\
&+2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)a_{k+1}\}\\
=&\{k(a_1{}^2+\cdots+a_k{}^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2\}\\
&+(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2\\
&+\cdots\cdots+(a_k-a_{k+1})^2\geqq 0
\end{aligned}$$

したがって証明された。

練習 3.

$$S_n=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots\cdots+n\cdot n!$$

とするとき，次の問に答えよ。

(1) S_1，S_2，S_3 を求めよ。

(2) S_n+1 の値を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

（京都薬大）

（ヒント） (1) $S_1=1$，$S_2=5$，$S_3=23$

(2) $S_1+1=2$，$S_2+1=6$，$S_3+1=24$

から $S_n+1=(n+1)!$ が推定されます。

（チョット無理かな。S_1，S_2，……，S_5 くらい計算しても階差数列からはわからない。しかし，$\dfrac{S_2+1}{S_1+1}$，$\dfrac{S_3+1}{S_2+1}$，…… を作ってみると気がつく）

問題は数学的帰納法で証明することです。

$$S_k+1=1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots\cdots+k\cdot k!+1$$
$$=(k+1)!$$

とすると,

$$S_{k+1}+1=(k+1)!+(k+1)\cdot(k+1)!$$
$$=(k+1)!\{1+(k+1)\}$$
$$=(k+1)!(k+2)=(k+2)!$$

となります。証明は意外と楽だったなあ。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや変わったものを練習してみませんか。

練習 4. m, n を正の整数とするとき

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}\geqq mn+1$$

が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。　(お茶の水女大)

(ヒント) mとnと2つありますから，どちらかについて数学的帰納法を適用すればよいでしょう。mをとりあげてみましょうか。

$m=1$ のとき

$$左辺=\frac{(1+n)!}{1!n!}=n+1$$
$$右辺=1\cdot n+1=n+1$$

となり，確かに成り立ちます。

次に $m=k$ のとき成り立つと仮定しますと

$$\frac{(k+n)!}{k!n!}\geqq kn+1$$

で,

$$\frac{(\overline{k+1}+n)!}{(k+1)!n!}=\frac{(k+n)!(k+1+n)}{k!n!(k+1)}$$
$$\geqq(kn+1)\frac{k+1+n}{k+1}$$

ところが

$$\frac{(kn+1)(k+1+n)}{k+1}-\{(k+1)n+1\}$$
$$=\frac{kn(n-1)}{k+1}\geqq0$$

ですから,

$$\frac{(\overline{k+1}+n)!}{(k+1)!n!}\geqq(k+1)n+1$$

となって，うまくいったわけ。

◆ では，次には行列や微分係数の入ったものをひとつあげておきましょう。まず：——

練習 5. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ とするとき, $A^2, A^3,$ ……から，任意の自然数nに対する A^n の形を予想し，その予想が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。ただし，A^2, A^3, ……は $A^2=AA$, $A^3=A^2A$, …… の意味である。　(一橋大)

(解) $$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$$
$$A^3=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$A^n=\begin{pmatrix}a^n & na^{n-1}b\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$$

となることが予想される。

次に，$n=k$ のときこの予想が正しいとすると

$$A^k=\begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1}b\\ 0 & a^k\end{pmatrix}$$
$$\therefore\quad A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1}b\\ 0 & a^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a^{k+1} & (k+1)a^kb\\ 0 & a^{k+1}\end{pmatrix}$$

となるから，$n=k$ のとき成り立つとすると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

$n=1$ のときには明らかに成り立つから，数学的帰納法によって一般に成り立つことがわかる。　Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ そして，最後はこれです。

練習 6. nが自然数のとき，関数 $f_n(x)$ は次式で定義されるものとする。

$$f_n(x)=(1-x+x^2)^n$$

このとき $f_n'(0)=-n$ であることを数学的帰納法によって証明せよ。　(九大)

(ヒント) $$f_{k+1}(x)=f_k(x)\cdot(1-x+x^2)$$
$$\therefore\quad f_{k+1}'(x)=f_k'(x)(1-x+x^2)+f_k(x)(-1+2x)$$
$$\therefore\quad f_{k+1}'(0)=\cdots\cdots=-(k+1)$$

(特殊な)数学的帰納法の扱い方(2)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数学的帰納法にも，いろいろ変わり種があります。例えば，$n=k$ のとき成立するとしないで，$n \leqq k$ のとき成立するとするとか。

◆ ふつうの数学的帰納法では第2段階で，$n=k$ のとき成り立つと仮定して $n=k+1$ のとき成り立つことを証明します。しかし，$n=k$ で成り立つとしないで，$1 \leqq n \leqq k$ で成り立つと仮定したほうがいいこともあります。また，$n=k$ について成り立つと仮定して $n=k\pm1$ のとき成り立つことを証明することもあります(どんな場合かな)。$n=k$ のときに成り立つと仮定して $n=k+2$ のとき成り立つとしてもよいでしょう。そんな変わり種をいくつか練習してみませんか。

*　*　*

練習 1. n が任意の整数のとき $5n+n^3$ は6の倍数であることを示せ。

(解) $n=0$ のとき0となるから6で割りきれる。

いま $n=k$ のとき成り立つとすると

$$5k+k^3=(6)$$

である。ここに(6)は6の倍数を表す。このとき

$$\begin{aligned}&5(k+1)+(k+1)^3\\&=5k+5+k^3+3k^2+3k+1\\&=(5k+k^3)+(3k^2+3k+6)\\&=(6)+3k(k+1)+6=(6)\end{aligned}$$

ここに $k(k+1)$ は連続2整数の積は2で割りきれることを使った。

次に，

$$\begin{aligned}&5(k-1)+(k-1)^3\\&=5k-5+k^3-3k^2+3k-1\\&=(5k+k^3)-3(k-1)k-6=(6)\end{aligned}$$

したがって n のすべての整数値に対して $5n+n^3$ は6で割りきれる。

(注) $n<0$ のとき $5n+n^3$ は

$$-\{5(-n)+(-n)^3\}$$

となるから $n>0$ の場合だけ証明すればよいが，数学的帰納法をマトモに使うと上のようになるのです。なお，n が正のときは信州大で出題されています。

練習 2. n が2以上の偶数であるとき，10^n-1 は99で割りきれることを証明せよ。

(解) $n=2$ のとき $10^n-1=10^2-1=99$ であるから99で割りきれる。

$n=k$ のとき成り立つとすると

$$10^k-1=(99)$$

ここに(99)は99の倍数を表す。

ゆえに，

$$\begin{aligned}&10^{k+2}-1=10^k\cdot10^2-1\\&=100\cdot10^k-1=(99+1)10^k-1\\&=99\cdot10^k+(10^k-1)\\&=(99)+(99)=(99)\end{aligned}$$

すなわち，$n=k$ のとき成り立てば，$n=k+2$ のとき成り立つ。しかるに $n=2$ のとき成り立つのであるから，2以上のすべての偶数について成り立つ。

(注) $n=2m$ とすると

$$10^n-1=10^{2m}-1=(10^m+1)(10^m-1)$$

で，10^m+1 は11で，10^m-1 は9で割りきれることを示してもよいのですが，ここでは $n=k$ のとき成り立つことを仮定して $n=k+2$ のとき成り立つことを証明することに重点をおいたのです。

*　*　*

練習 3. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=a_2=1$，$a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ $(r=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たしているとき，a_{4n} $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ は3の倍数であることを証明せよ。　(一橋大)

(ヒント) $a_4=a_3+a_2=(a_2+a_1)+a_2$

$=a_1+2a_2=1+2\cdot1=3$

であるから，確かに3の倍数です。

次に，kを4の倍数として $r=k$ のとき成り立つとすると a_k は3の倍数ですね。そして，このとき

$$\begin{aligned} a_{k+4}&=a_{k+3}+a_{k+2}\\ &=(a_{k+2}+a_{k+1})+(a_{k+1}+a_k)\\ &=\{(a_{k+1}+a_k)+a_{k+1}\}+(a_{k+1}+a_k)\\ &=3a_{k+1}+2a_k \end{aligned}$$

です。ここで，$3a_{k+1}$ も $2a_k$ も3の倍数であることから，a_{k+4} も3の倍数であることがわかります。こうして a_r はrが4の倍数であるとき3の倍数であることが数学的帰納法で証明されるのです。

＊　＊　＊

◆ これは難問，ムリにやることもありませんが，やってみませんか。

練習 4. nが自然数のとき $\cos nx$ は $\cos x$ の整式で表されることを示せ。　（慶大）

（ヒント）　$n=1$ のとき $\cos1\cdot x$ はいうまでもなく $\cos x$ の1次式です。

$n=k$ のとき $\cos kx$ が $\cos x$ の整式であるとしますと

$\cos(k+1)x=\cos kx\cos x-\sin kx\sin x$

となって，ナルホド，$\cos kx\cos x$ は $\cos x$ の $(k+1)$ 次式になりますが，$\sin kx\sin x$ には困ってしまいます。

そこで，次のようにするのです。

（解）　$\cos nx$ と $\sin x\sin nx$ が共に $\cos x$ の整式であることを証明する。

$n=1$ のとき $\cos1\cdot x$，$\sin x\sin1\cdot x(=1-\cos^2x)$ はいずれも $\cos x$ の整式である。

$n=k$ のとき上の命題が成り立つと仮定すると

$\cos(k+1)x=\cos kx\cos x-\sin kx\sin x$

また，$\sin x\sin(k+1)x$

$=\sin x\cdot(\sin kx\cos x+\cos kx\sin x)$

$=(\sin x\sin kx)\cos x+\cos kx\sin^2x$

$=(\sin x\sin kx)\cos x+\cos kx(1-\cos^2x)$

であるから，$n=k+1$ のときにも上の命題が成り立つ。

ゆえに，数学的帰納法によって，上の命題の成り立つことが証明された。

＊　＊　＊

◆ 最後にもう1つ，こんなのもあります。

練習 5. a_1，a_2，……，$a_n>0$ で

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3$

ならば，$a_n=n$ であることを証明せよ。

（解）　$n=1$ のとき

$$a_1{}^2=a_1{}^3$$

$a_1>0$ であるから，両辺を $a_1{}^2$ で割って

$$a_1=1$$

ゆえに $n=1$ のとき成り立つ。

$n\leqq k$ のとき成り立つとすると

$$a_1=1,\ a_2=2,\ \cdots\cdots,\ a_k=k$$

$$\therefore\ (1+2+\cdots\cdots+k+a_{k+1})^2=1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+a_{k+1}{}^3$$

$$\therefore\ \left\{\frac{1}{2}k(k+1)+a_{k+1}\right\}^2=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+a_{k+1}{}^3$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}k^2(k+1)^2+k(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+a_{k+1}{}^3$$

$$\therefore\ a_{k+1}{}^3-a_{k+1}{}^2-k(k+1)a_{k+1}=0$$

ところが $a_{k+1}>0$

$$\therefore\ a_{k+1}{}^2-a_{k+1}-k(k+1)=0$$

$$\therefore\ (a_{k+1}+k)\{a_{k+1}-(k+1)\}=0$$

$a_{k+1}+k>0$ であるから

$$a_{k+1}=k+1$$

すなわち，$n\leqq k$ について成り立つとすると $n=k+1$ についても成り立つ。

しかるに，$n=1$のとき成り立つから，$n=2$のとき成り立つ。$n=1$，2のとき成り立つから $n=3$のとき成り立つ。$n=1$，2，3のとき成り立つから $n=4$ のとき成り立つ。

以下同様にして，nのすべての自然数値に対して成り立つことが証明された。

⑪ 数列の帰納的定義とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈帰納的定義とは，また，親しみにくいコトバですが，その本質はべつにめんどうではありません。

◆ 数列は数をある規則にしたがって並べたものですが，その規則とはどんなものか。大きく分けて5つに分けられます。

第1は，言葉に表されるもの。例えば次々に一定の数を加えて作ったものが等差数列で，一定の数を掛けて作ったのが等比数列で，逆数が等差数列をなすとき調和数列という，といったぐあいです。

第2は，第n項を表す式を直接与えるもの。例えば，$a_n=n^2+n+1$ である数列とか $a_n=2^n-1$ である数列とか，$a_n=\sin n$ である数列といったもの，です。

第3は，直接第n項を与えないで，第n項 a_n，第$(n-1)$項 a_{n-1} などの関係を与えるもの，いわゆる漸化式で与えられるもの。例えば $a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+2)$，$a_1=a$ なる数列といったぐあい。

第4は，第n項までの和 S_n などが与えられているもの。例えば

$$S_n=n^2+n+1$$

なる数列や，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n^2$ なる数列といったぐあい。

第5は，直接，規則が与えられていないもの，例えば，2, 6, 12, 20, …… は規則を発見することに主眼点がおかれます。

もちろん，上の5つは，確然と分かれているわけではありません。例えば，等差数列は $a_n-a_{n-1}=d$ であるもの，といえば第3になるでしょうし，$a_n=a+(n-1)d$ と与えれば第2になるでしょう。また，第4も第3の中に含ませることもできましょう。

＊　＊　＊

◆ さて，第n項 a_n が，それに先行するいくつかの項から漸化式で与えられるとき，すなわち，

$$a_n=2a_{n-1}+4$$

とか

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

などで与えられるとき，これを **数列の帰納的定義** といいます。

では，次の練習をやってみませんか。

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$ で，$a_n-a_{n-1}=3$ で帰納的に与えられている。a_n を求めよ。

ヒント　$a_n-a_{n-1}=3$，つまり　$a_n=a_{n-1}+3$ ですから，これは公差3の等差数列であることがわかります。つまり，初項1，公差3の等差数列です。だから

$$a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=5$，$a_n=4a_{n-1}$ で帰納的に与えられている。a_n を求めよ。

ヒント　初項5，公比4の等比数列ですから $a_n=5\cdot 4^{n-1}$ となります。

練習 3. 調和数列を帰納的に定義せよ。

ヒント　調和数列とは逆数が等差数列をなすのですから

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+d$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}=\frac{da_{n-1}+1}{a_{n-1}}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{a_{n-1}}{da_{n-1}+1}$$

これが求める関係です。

＊　＊　＊

◆ 次には帰納的定義を与える関係式を導く問題を練習してみませんか。

練習 4. ある年の元旦に雨が降る確率を p_1，その年の n 日目に雨が降る確率を p_n とする。ただし，ある日の天候が，その前日の天候と同じ型である確率を p とし，天気の型は，雨が降るか降らないかの2つとする。

(1) p_{n-1} と p_n との関係を求めよ。

(2) p_n を p および p_1 を用いて表せ。

（日本大）

ヒント (1) 第 $(n-1)$ 日目に雨が降る確率は p_{n-1} であるから，第 $(n-1)$ 日目に雨，第 n 日目も雨である確率は $p_{n-1}\cdot p$ で，第 $(n-1)$ 日目が晴で，第 n 日目が雨である確率は $(1-p_{n-1})(1-p)$ ですから，

$$p_n=p_{n-1}\cdot p+(1-p_{n-1})(1-p)$$
$$=(2p-1)p_{n-1}+(1-p)$$

(2) **平衡値**（☞ p.144）を求めると，$\frac{1}{2}$になりますから

$$p_n-\frac{1}{2}=(2p-1)p_{n-1}-\left(p-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{2}=(2p-1)\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}$$

$$\therefore\quad p_n=(2p-1)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ \cdots\ \boxed{\text{答}}$$

練習 5. 正方形のタイル n 枚が1列に並べてある。l 色の塗料のすべてまたはこのうちの何色かを用いて，この n 枚のタイルを次の〔1〕，〔2〕のようにして塗る。

〔1〕 隣り合う2枚のタイルの色は異なるように塗る。

〔2〕 隣り合う2枚のタイルおよび両端の2枚のタイルの色は異なるように塗る。

〔1〕，〔2〕の塗り方がそれぞれ a_n 通り，b_n 通りあるものとする。ただし，$l\geqq 3$.

(1) b_2 を求めよ。また，a_n を l と n で表せ。

(2) $n\geqq 3$ のとき，b_n，b_{n-1} および a_n の間にはどんな関係が成立するか。

(3) b_n を l と n で表せ。　　（高知大）

ヒント (1) b_2 は2枚のタイルを l 色の中から2色を選んで塗る場合の数に等しいのですから ${}_l\mathrm{P}_2=l(l-1)$ で与えられます。

$$\therefore\quad b_2=l(l-1)$$

次に，a_n を求めましょう。

左端のタイルを塗る仕方は l 通りあって，そのおのおのの仕方に対して，その右のタイルを塗る仕方は $(l-1)$ 通り，さらに，その右隣りも同じく $(l-1)$ 通り，……というわけですから

$$a_n=l(l-1)^{n-1}$$

(2) n 枚のタイルについて，両端の色のちがう場合の数 b_n は a_n から両端の同じ場合の数を除いたものです。ところが，両端が同じ色となるのは第1番目と第 $(n-1)$ 番目と異なる場合ですから b_{n-1} 通りあります。

$$\therefore\quad b_n=a_n-b_{n-1}$$

あるいは

$$b_n+b_{n-1}=a_n$$

となりましょう。

(3)
$$b_n\ \ +b_{n-1}=l(l-1)^{n-1}\quad\cdots\cdots ⓐ$$
$$b_{n-1}+b_{n-2}=l(l-1)^{n-2}\quad\cdots\cdots ⓑ$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_4\ +\ b_3=l(l-1)^3\quad\cdots\cdots ⓧ$$
$$b_3\ +\ b_2=l(l-1)^2\quad\cdots\cdots ⓨ$$

ⓐ＋ⓑ×(-1)＋……

ⓧ×$(-1)^{n-4}$＋ⓨ×$(-1)^{n-3}$

を作ると，右辺は等比数列の和ですから

$$b_n+b_2(-1)^{n-3}=(l-1)^n+(-1)^{n-3}(l-1)^2$$

$$\therefore\quad b_n=(l-1)^n+(l-1)(-1)^n\cdots\cdots\ \boxed{\text{答}}$$

となりましょう。（☞ p.162「参考」）

このように，応用的な問題には帰納的定義に導かれるものが多いのです。

○漸化式で与えられた数列とは何か

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆これをクイズ化する人のなんと多きことよ。これこそ，きまったやり方を，きまったように適用するとできるのだ。

◆ 漸化式で与えられる数列は大きく分けて3つになります。第1は相隣り合う2項 a_n と a_{n-1} の漸化式が与えられた場合，第2は相隣り合う3項 a_n，a_{n-1}，a_{n-2} の漸化式が与えられた場合，第3は二重数列です。

＊　　＊　　＊

◆ さて，第1のものは，細分すると4つになります。

(1)　$a_n=7a_{n-1}+12$ のように1次式のとき

(2)　$a_n=\dfrac{3a_{n-1}+4}{5a_{n-1}+2}$ のように1次の分数式のとき

(3)　$a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+2)$ のように高次式のとき

(4)　$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ のように無理式のとき

で，これらは，多少のちがいはあるものの，ほぼ同じ方法で処理することができるのです。

＊　　＊　　＊

◆ 第2のものは，細分すると2つになります。

(1)　$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ のようなもの

(2)　$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+3$ のようなもの

いずれも，きまったやり方で扱うことができますから，考える余地はありません。

＊　　＊　　＊

◆ 第3のものは

(1)　$$a_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$$
$$b_n=4a_{n-1}+5b_{n-1}$$

といった形のもの。もう少しめんどうになると

(2)　$$a_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}+4$$
$$b_n=4a_{n-1}+5b_{n-1}+2$$

といった形のもの，がありますが，これらも同じこと，きまったやり方で扱うことができます。

＊　　＊　　＊

◆ ところで，上にあげたのはすべて a_n や a_{n-1} や a_{n-2} の間の関係式でしたが，これに n が入ってくるとやっかいになることが多いのです。例えば

$$a_n=3a_{n-1}+n^2$$

とか

$$na_n=(n-1)a_{n-1}+n^2$$

といったぐあい。これについては，それぞれ特有の方法で扱うことも必要になりますが，多くはヒントが与えられていることが多く，かえってやさしい，ということにもなります。

具体的なことは，それぞれの項を参照してください。ここでは一般的な問題をいくつか扱ってみることにしましょう。

＊　　＊　　＊

◆ ついでに，帰納的定義についてちょっとふれておきましょう。自然数 n によってきまるような命題 $\mathrm{A}(n)$ を次のように定義することができます。すなわち

(1)　$\mathrm{A}(1)$ を与えること

(2)　$\mathrm{A}(n)$ から $\mathrm{A}(n+1)$ を定める規則を与えること

例えば，次の練習1.をやってみませんか。

練習 1. $a_1=1$，　$a_{n+1}=2a_n+1$ によって帰納的に定義された数列の第4項を求めよ。

解　$a_1=1$

$a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=3$

$a_3=2a_2+1=2\cdot3+1=7$

$a_4=2a_3+1=2\cdot7+1=15$　……答

*　　*　　*

◆ 第3は二重数列です。例えば

練習 2. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があって,

$$a_1=1,\ b_1=0$$
$$a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}$$
$$b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$$

のとき, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ。

(解) 順次計算すると

$$a_2=2a_1+3b_1=2\cdot1+3\cdot0=2$$
$$b_2=3a_1+2b_1=3\cdot1+2\cdot0=3$$
$$a_3=2a_2+3b_2=2\cdot2+3\cdot3=13$$
$$b_3=3a_2+2b_2=3\cdot2+2\cdot3=12$$
$$a_4=2a_3+3b_3=2\cdot13+3\cdot12=62$$
$$b_4=3a_3+2b_3=3\cdot13+2\cdot12=63$$

練習 3. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があって,

$$a_1=1,\ b_1=2$$
$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

のとき, a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。

(解) $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$

$$b_2=\sqrt{a_1b_1}=\sqrt{2}$$
$$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$
$$b_3=\sqrt{a_2b_2}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\frac{9}{2}}$$

答 (順に) $\dfrac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$, $\sqrt[4]{\dfrac{9}{2}}$

(注) 数値を小数で表してみますと,

$$a_1=1,\ a_2=1.5,\ a_3\fallingdotseq1.45$$
$$b_1=2,\ b_2\fallingdotseq1.41,\ b_3\fallingdotseq1.46$$

どうやら, 同じ値に近づくらしいことがわかりますね。このように数列というのは, ある種の数値を求めるにも有用ですし, 方程式の近似値を求めるにも使えるのです。

*　　*　　*

◆ 以上で漸化式で与えられた数列の3つのタイプがあること, それは, ふつうきまったやり方で解けることを注意したのですが, 実はこれら3つのタイプのものも, お互いに関係があります。これを次に, 当たっておきましょう。

練習 4. $a_n=a_{n-1}+2$ のとき, a_n, a_{n-1}, a_{n-2} の間にどんな関係があるか。

(解)
$$\begin{array}{rl} & a_n=a_{n-1}+2 \\ -) & a_{n-1}=a_{n-2}+2 \\ \hline & a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2} \end{array}$$

$\therefore\ a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$　……答

(注) 実は $a_n=a_{n-1}+2$ は公差2の等差数列ですが, それは隣接3項の関係でも表せるわけです。

練習 5. $a_n=2a_{n-1}+n$ のとき a_n, a_{n-1}, a_{n-2} の間にどんな関係があるか。また, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} の間にどんな関係があるか。

(解)
$$\begin{array}{rl} & a_n=2a_{n-1}+n \\ -) & a_{n-1}=2a_{n-2}+(n-1) \\ \hline & a_n-a_{n-1}=2a_{n-1}-2a_{n-2}+1 \end{array}$$

$\therefore\ a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=1$

これが求めるものである。

次に,

$$\begin{array}{rl} & a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=1 \\ -) & a_{n-1}-3a_{n-2}+2a_{n-3}=1 \\ \hline & a_n-4a_{n-1}+5a_{n-2}-2a_{n-3}=0 \end{array}$$

これが求めるものである。

練習 6.
$$a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$$
$$b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$$

のとき a_n, a_{n-1}, a_{n-2} の関係を求めよ。

(ヒント) 第1式より $b_{n-1}=a_n-2a_{n-1}$

$\therefore\ b_n=a_{n+1}-2a_n$

$\therefore\ a_{n+1}-2a_n=a_{n-1}+2(a_n-2a_{n-1})$

$\therefore\ a_{n+1}-4a_n+3a_{n-1}=0$

$\therefore\ a_n-4a_{n-1}+3a_{n-2}=0$

これが求めるものです。

（数列における）逐次代入法とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆逐次代入法など，やればできるさ，などとうそぶいていてはいけない。決して簡単ではありません。

◆ 漸化式で与えられた数列の第 n 項を求めるのに次々に代入してゆく方法を **逐次代入法**（ちくじだいにゅうほう）といいます。その際の大切なことは計算しすぎないことなんです。こういっただけではわからない人も多いでしょう。具体的にやってみましょう。

■練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=2$, $a_n=3a_{n-1}+1$ のとき a_n を求めよ。

（ヒント）
$$a_2=3a_1+1=3\cdot2+1$$
$$a_3=3a_2+1=3^2\cdot2+3+1$$
$$a_4=3a_3+1=3^3\cdot2+3^2+3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これから推定されるように
$$a_n=3^{n-1}\cdot2+3^{n-2}+3^{n-3}+\cdots\cdots+3+1$$
$$=3^{n-1}\cdot2+\frac{1(1-3^{n-1})}{1-3}$$
$$=2\cdot3^{n-1}+\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$$
$$=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}$$

となります。$a_n=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}$ の正しいことは **数学的帰納法** で証明されます。すなわち
$$a_1=\frac{5}{2}\cdot3^{1-1}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$$

いま $a_k=\frac{5}{2}\cdot3^{k-1}-\frac{1}{2}$ とすると
$$a_{k+1}=3\left(\frac{5}{2}\cdot3^{k-1}-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{5}{2}\cdot3^k-\frac{1}{2}$$

となって，確かに成り立つことがわかります。

（注）このような逐次代入法を使わないでやることもできます。（☞ p.148）

■練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=1$, $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$ である。a_n を求めよ。

（ヒント）
$$a_1=1$$
$$\therefore\quad a_2=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
$$a_3=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$
$$a_4=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

どうやら $a_n=\dfrac{1}{n}$ らしいね。あとは数学的帰納法で証明すればよい。

（注）逐次代入法を使わないでやるのは（☞ p.154）を参照してください。

■練習 3. 数列 $\{x_n\}$ において
$$x_1=\sqrt[3]{a},\quad x_n=\sqrt[3]{x_{n-1}}$$
である。x_n を求めよ。

（ヒント）
$$x_1=\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$$
$$\therefore\quad x_2=\sqrt[3]{x_1}=(x_1)^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3^2}}$$
$$\therefore\quad x_3=\sqrt[3]{x_2}=(x_2)^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{1}{3^2}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3^3}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=\sqrt[3]{x_{n-1}}=(a^{\frac{1}{3^{n-1}}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3^n}}$$

ということらしい。つまり
$$x_n=\sqrt[3^n]{a}$$

でしょう。証明には数学的帰納法を使うとよい。

（注）逐次代入法を使わないでももちろんできます。（☞ p.158）参照。

■練習 4. 数列 $\{u_n\}$ において，$u_1=a$, $u_n=u_{n-1}(u_{n-1}+2)$ のとき u_n を求めよ。

（ヒント）
$$u_2=a^2+2a=(a+1)^2-1$$
$$u_3=u_2{}^2+2u_2=(u_2+1)^2-1=(a+1)^4-1$$

もういいでしょう。

(注) 一般的なやり方は（☞ p.156）を参照してください。

* * *

◆ では，ややめんどうなものをやってみませんか。

練習 5. Nが自然数であるとき

$$p(n)=\frac{(n-1)N(N-1)\cdots\cdots(N-n+2)}{N^n}$$
$$(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N+1)$$

とする。

(1) $1-p(2)$，$1-p(2)-p(3)$ を簡単にせよ。

(2) (1)より $1-p(2)-p(3)-\cdots-p(n)$ の形を推定し，この推定が $n=2,\ 3,\ \cdots\cdots N+1$ なる自然数nについて正しいことを証明せよ。

(3) $p(2)+p(3)+\cdots\cdots+p(N+1)$ の値を求めよ。 (愛媛大)

(解) (1) $1-p(2)=1-\frac{1\cdot N}{N^2}=1-\frac{1}{N}=\frac{N-1}{N}$

$$1-p(2)-p(3)=\frac{N-1}{N}-\frac{2N(N-1)}{N^3}$$
$$=\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$$

(2) 上のことから

$$1-p(2)-p(3)-\cdots\cdots-p(n)$$
$$=\frac{(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-n+1)}{N^{n-1}}$$

と推定される。次にこれを数学的帰納法によって証明する。

$n=2$ のときは(1)によって明らかである。

$n=k\ (\leqq N+1)$ について成り立つと仮定すると

$$1-p(2)-\cdots\cdots-p(k)$$
$$=\frac{(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-k+1)}{N^{k-1}}$$

ゆえに

$$1-p(2)-\cdots\cdots-p(k)-p(k+1)$$
$$=\frac{(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-k+1)}{N^{k-1}}$$
$$-\frac{kN(N-1)\cdots\cdots(N-k+1)}{N^{k+1}}$$
$$=\frac{(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-k+1)(N-k)}{N^k}$$

ゆえに，$N=k+1\ (\leqq N+1)$ のときにも成り立つ。よって，証明された。

(3) $p(2)+p(3)+\cdots\cdots+p(N+1)$

$$=1-\frac{(N-1)(N-2)\cdots\cdots\{N-(N+1)+1\}}{N^N}$$
$$=1-0=1$$

答 1

練習 6. 有限数列 $f(0)$，$f(1)$，$\cdots\cdots$，$f(n)$ において，

$$f(k)=\frac{n-k+1}{k}f(k-1)\ (k=1,2,\cdots,n)$$

かつ $\sum_{k=0}^{n}f(k)=1$ とする。このとき，

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 一般項 $f(k)$ を求めよ。 (千葉大)

(ヒント) (1) $f(0)$ を求めるために，一般式において $k=0$ とおくと分母が0になってダメである。というよりも $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ とあるから，$k=0$ を代入することがもともといけないことでした。こうしてみると割合めんどうそうだなあ。ともあれ，一般式に $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入してみようか。

$$f(1)=nf(0),\qquad f(2)=\frac{n-1}{2}f(1)$$
$$f(3)=\frac{n-2}{3}f(2),\ f(4)=\frac{n-3}{4}f(3),\cdots\cdots$$

また，

$$f(0)+f(1)+\cdots\cdots+f(n)=1$$

だというのですから，

$$f(1)=nf(0),\ f(2)=\frac{(n-1)n}{2!}f(0)$$
$$f(3)=\frac{(n-2)(n-1)n}{3!}f(0),\ \cdots\cdots$$

なるほど，逐次代入してゆくと

$$f(k)=\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots\cdots n}{k!}f(0)$$
$$={}_n\mathrm{C}_kf(0)$$

らしい。正しいことは数学的帰納法ですぐできます。かくて，$\cdots\cdots$

答 $f(0)=2^{-n}$，$f(k)=2^{-n}{}_n\mathrm{C}_k$

◎（数列の）平衡値とは何か

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆平衡値なんて聞いたこともない，だって!!
それで数列がイヤだ，などと，よくもいえたものだ。

◆ 漸化式で与えられた数列において **平衡値**（へいこうち）あるいは **均衡値**（きんこうち）といわれるものがずいぶんと役に立ちます。ここでは，それが使える場合はどんな場合か，使えない場合はどうか，を，ハッキリつかんでおきたいものです。では，次の具体的な問題にいきましょう。

■練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=2$,
$a_n=4a_{n-1}+9$ のとき a_n を求めよ。

（ヒント） a_n と a_{n-1} のところへ x を入れて得られる方程式

$$x=4x+9$$

を解いてみますと

$$x=-3$$

が得られます。この値をこの数列の平衡値といいます。この -3 を与えられた漸化式の両辺から引くと a_n+3 と $a_{n-1}+3$ の関係が得られます。つまり

$$a_n-(-3)=4a_{n-1}+9-(-3)$$

$$\therefore\quad a_n+3=4(a_{n-1}+3)$$

この関係は何を意味するか？　ほかでもない，数列 $\{a_n+3\}$ が初項 a_1+3 $(=5)$，公比 4 の等比数列をなすことを意味しているのです。

$$\therefore\quad a_n+3=(a_1+3)\cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=-3+5\cdot 4^{n-1}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

◆ 平衡値が使えるのは a_n と a_{n-1} の関係式が与えられ，しかも n がマトモには入ってこないときです。例えば

$$a_n=4a_{n-1}+n^2$$

ではだめです。とはいえ，これでも平衡値を使えるように変形することはできますが，いや，いまのところ，そんなことを考えてはいけませんよ。

では，次をやってみませんか。

■練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=7$,
$a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+9$ のとき a_n を求めよ。

（解）　$a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+9$

を変形すれば

$$a_n-12=\frac{1}{4}(a_{n-1}-12)$$

$$\therefore\quad a_n-12=(a_1-12)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-5\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\therefore\quad a_n=12-\frac{5}{4^{n-1}}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

（注） 答案としては，このように，平衡値を求める足場を答案用紙のウラでやって，あとは**《変形すれば》**といったサリゲナイやり方がスッキリするでしょう。

*　　*　　*

◆ では，次は，分数の場合をやってみましょう。

■練習 3. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=3$,
$a_n=\dfrac{5a_{n-1}-1}{2a_{n-1}+2}$ のとき a_n を求めよ。

（ヒント） 平衡値はどうなるか？

$$x=\frac{5x-1}{2x+2}$$

とおいて解くと

$$x=1,\ \frac{1}{2}$$

平衡値が 2 つ出てきました。2 つ使ってもできるし，1 つだけでもできるのです。ここでは 2 つ使いましょう。与えられた漸化式の両

辺から1を引いて，両辺に a_n-1, $a_{n-1}-1$ が出るようにしてやりますと

$$a_n-1=\frac{3}{2(a_{n-1}+1)}(a_{n-1}-1) \quad \cdots\cdots ①$$

となります。ここで，公比 $\frac{3}{2(a_{n-1}+1)}$ の等比数列と思いこんで

$$a_n-1=(a_1-1)\cdot\left\{\frac{3}{2(a_{n-1}+1)}\right\}^{n-1}$$

とやる人が実に多いのです。これは a_{n-1} を含んでいますから定数ではなく，公比にはなりえないのです。ご用心あれ。

次に与えられた漸化式の両辺から $\frac{1}{2}$ を引いて同じようにやりますと

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{2}{a_{n-1}+1}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots ②$$

①÷②を作りますと

$$\frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}-\frac{1}{2}}$$

これなら立派な等比数列です。

$$\therefore \quad \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}=\left(\frac{a_1-1}{a_1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

これを a_n について解いて

$$a_n=\frac{5\cdot4^{n-1}-2\cdot3^{n-1}}{5\cdot4^{n-1}-4\cdot3^{n-1}} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ 次は高次式の場合をやってみましょう。

1/17

練習 4. $a_1=a$, $a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+2)$ のとき a_n を求めよ。（阪大）

ヒント 平衡値はどうなのか？

$$x=x(x+2)$$

とおいて解くと

$$x=0,\ -1$$

高次のときは，この2つのうち，どれか一方を使うとうまくいく（0を引いても変わりばえはしない。-1 にちがいない)。

-1 を漸化式の両辺から引いてみますと，

$$a_n+1=a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1$$

$$\therefore \quad a_n+1=(a_{n-1}+1)^2$$

$a_n+1=b_n$ とおいてみると

$$b_n=b_{n-1}^2$$

$$\therefore \quad b_n=b_1^{2^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore \quad a_n+1=(a_1+1)^{2^{n-1}}=(a+1)^{2^{n-1}}$$

$$\therefore \quad a_n=-1+(a+1)^{2^{n-1}} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

注 上のヒントで，(*) のところが，どうしてもわからない，という人が多いのだが，キミはどうでした？

$$b_2=b_1^2$$
$$b_3=b_2^2=(b_1^2)^2=b_1^{2^2}$$
$$b_4=b_3^2=(b_1^{2^2})^2=b_1^{2^3}$$

といったぐあいに，次々に計算してみるとワカルハズ!!

＊　＊　＊

◆ 最後が無理関数のときです。これは，一般に第 n 項を求めよ，という形ではなく，第 n 項に関係した不等式を求める，という形で出ています。

11/28

練習 5. 数列 $a_1=1$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}+20}$ のとき，次の不等式を示せ。

$$|a_n-5|<\frac{1}{5}|a_{n-1}-5|$$

ヒント 平衡値はどうなのか？

$$x=\sqrt{x+20}$$

とおいて解くと

$x=5$ （-4 は無縁解で棄(す)てる）

これを両辺から引きますと

$$a_n-5=\sqrt{a_{n-1}+20}-5$$

（オヤ，困ッタゾ，右辺カラ $a_{n-1}-5$ ガ出ナイジャナイカ!!）

いや，出るのです。有理化しよう。

$$a_n-5=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+20}+5}(a_{n-1}-5)$$

$$\therefore \quad |a_n-5|=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+20}+5}|a_{n-1}-5|$$

$$\therefore \quad |a_n-5|<\frac{1}{5}|a_{n-1}-5|$$

⑪ 数列へのグラフの応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈数列が単調増加するとか，ある値を越えることができないとか，そういった問題にグラフが大きな役割を果たすことが多いのだ。

◆ 漸化式で与えられた数列の性質を調べるのにグラフが大いに有効なことがあります。いくつかの例について学んでおきましょう。

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において，

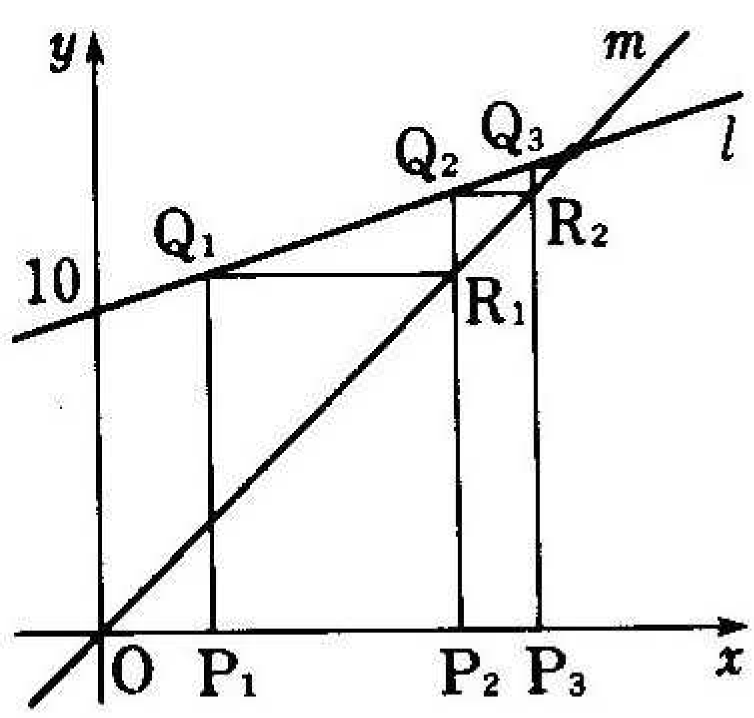
$$a_1=1,\quad a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+10$$

のとき，$\{a_n\}$ は増加関数であることを示せ。

(解) $l: y=\frac{1}{3}x+10$

$m: y=x$

のグラフは右のようになります。



いま，$a_1=1$ ですから点$P_1(1,\ 0)$をとり，P_1 においてx軸に垂線を立て，l との交点を Q_1 とします。Q_1 を通り x 軸に平行な直線が m と交わる点を R_1 とし，R_1 から x 軸に下した垂線の足を P_2 とします。以下同様にして，図のように P_2, Q_2, R_2, …… をとりますと，

$$P_2 \text{ の } x \text{ 座標}=OP_2=P_2R_1=P_1Q_1$$
$$=\frac{1}{3}a_1+10=a_2$$

となりましょう。以下同様にして

P_3, P_4, …… の x 座標は a_3, a_4, ……

です。そして，作図から明らかなように

$$a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots$$

ゆえに $\{a_n\}$ は単調増加関数です。

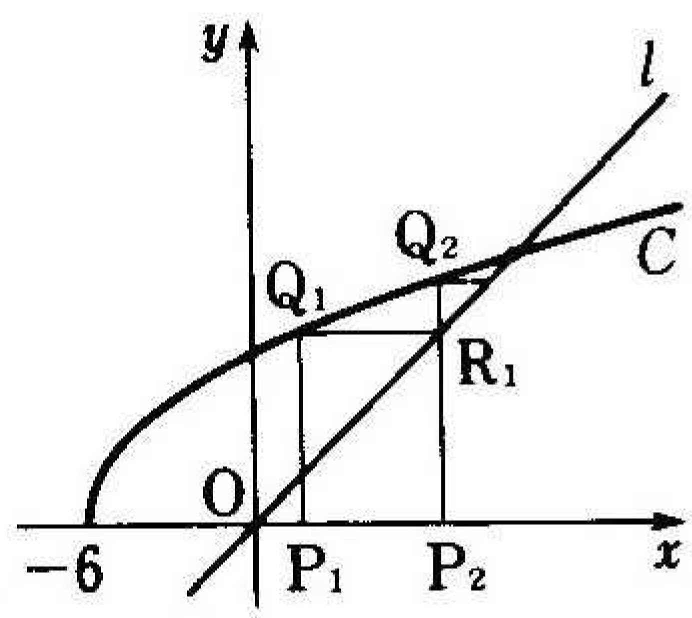
(注) グラフによるやり方の欠点は説明がゴタゴタすることです。だから，その欠点を除くには，図を大きく正確にかいて，右図に示すように……とでもやればいいでしょう。

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_1=1,\quad a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$$

のとき，数列 $\{a_n\}$ は単調増加関数であることを示せ。

(解) $y=\sqrt{x+6}$ と $y=x$ のグラフをそれぞれ C, l とする。



いま点 $P_1(1,\ 0)$ において x 軸に垂線 P_1Q_1 を引き曲線 C との交点を Q_1 とし，Q_1 より x 軸に平行に Q_1R_1 を引き l との交点を R_1 とする。R_1 より x 軸に下した垂線の足を P_2 とする。以下同様にして，P_3, P_4, ……をとると，グラフから明らかなように

$$\overline{OP_n}=\overline{P_nR_{n-1}}=\overline{P_{n-1}Q_{n-1}}$$
$$=\sqrt{a_{n-1}+6}=a_n$$

そして

$$\overline{OP_{n-1}}<\overline{OP_n}$$
$$\therefore\quad a_{n-1}<a_n$$

ゆえに，数列 a_n は単調増加数列である。

(注) これらはもちろんグラフを使わないでも証明できます。ただ，ここではグラフの応用としてやったというわけ，次のようなものはグラフを使わないではスゴクやっかいです。

練習 3. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=\frac{\pi}{6}$, $a_n=\frac{\pi}{2}\sin a_{n-1}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示せ。

(ヒント) 上とまったく同じにやればいいことはいうまでもなし。グラフの効用はスバラシイというべきでしょう。

＊　＊　＊

◆ では，次にはやや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. $0<a<1$，$0<x_0<1$ とし，

$$x_n=a(1-x_{n-1})+(1-a)x_{n-1}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

のとき，$0<x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であることを証明せよ。　　　（都立大）

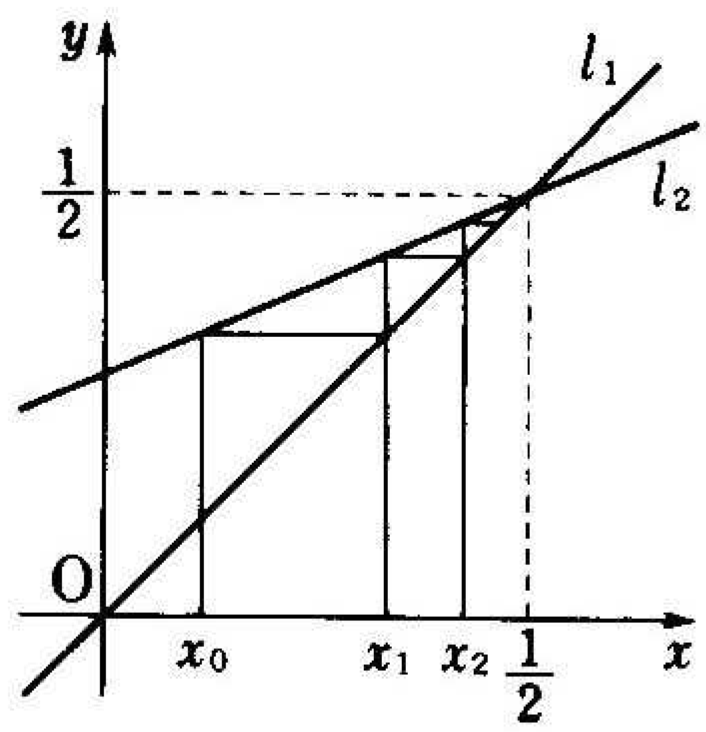
ヒント　$l_1: y=x$

および

l_2：

$y=(1-2a)x+a$

のグラフは $0<x_0<\dfrac{1}{2}$のとき右のようですから，右の図のように，x_1，x_2，……



を作図することができます。したがって

$$0<x_n<\frac{1}{2}<1$$

です。$\dfrac{1}{2}<x_0<1$ のときも同様にできます。

練習 5. $0\leqq c\leqq 1$ なる定数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\ \ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}(c-a_n{}^2)$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定めるとき，すべての n に対して

$$0\leqq a_n\leqq\sqrt{c}$$

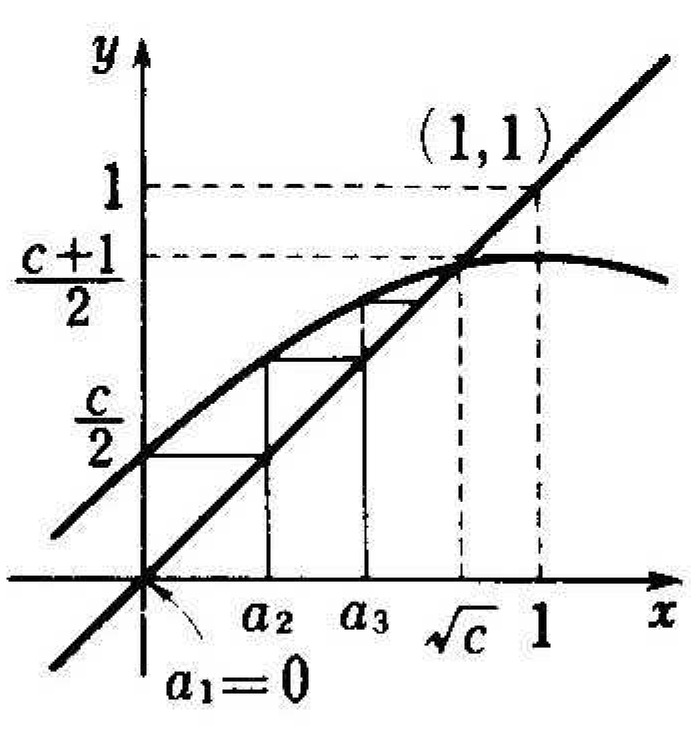
が成り立つことを証明せよ。　　　（九大）

ヒント　$l_1: y=x$

$$l_2: y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{c}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{c+1}{2}$$

で $0\leqq c\leqq 1$ であることから，l_1，l_2 のグラフは右の通り。

したがって $a_1=0$ から順次 a_2，a_3，……を作図から求めていくと，



$$0\leqq a_n\leqq\sqrt{c}$$

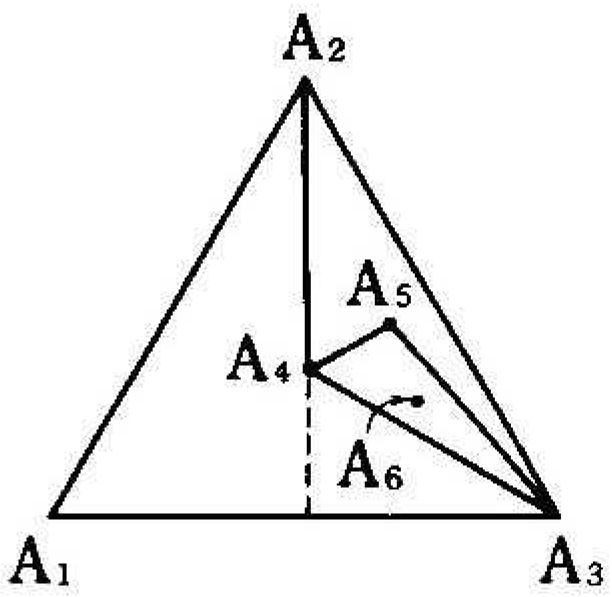
であることは明らかでしょう。

では，もう１つ：これは変わり種ですが。

練習 6. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=0$，

$a_2=1$，$a_3=2$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}}{3}$ のとき，　$1<a_n<2$

$(n\geqq 5)$ を証明せよ。



ヒント　$\triangle A_1A_2A_3$ を作り，その頂点 A_1，A_2，A_3 の x 座標がそれぞれ $0,\ 1,\ 2$ であるようにすると，$\triangle A_1A_2A_3$ の重心 A_4 の x 座標は $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$，つまり a_4 です。

次に $\triangle A_2A_3A_4$ の重心 A_5 の x 座標は $\dfrac{a_2+a_3+a_4}{3}=a_5$ です。以下同様にして a_6，a_7，…… が次々に作る三角形の重心の x 座標になるのです。ところが，$\triangle A_3A_4A_5$ の重心は明らかに $1<x<2$ の間に存在していますから，その x 座標も $1<a_n<2$ にあるハズ。

これを答案らしく書くことはキミの問題です!! もちろん計算だけでできますが，ここでは図を使う例にあげた，というわけ。

＊　＊　＊

◆ このように数列の問題をグラフを使って扱うと，その意味がよくわかってくる，少なくも **問題の本質を別の点から眺められる，** という利点があるのです。

なお，二重数列，例えば

≪$x_1=1$，$y_1=0$ で

$$x_n=\frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{3}y_{n-1}$$
$$y_n=\frac{1}{3}x_{n-1}+\frac{2}{3}y_{n-1}$$

のとき，点 $(x_n,\ y_n)$ がどのように動くか≫

といったものも扱うことができます。

① 漸化式 $a_n=ka_{n-1}+l$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆これは漸化式で与えられる数列の中で，もっとも基礎的で，しかも，もっとも大切なものなんです。ネゴトの中でも正確に!!

◆ 漸化式が $a_n=3a_{n-1}+4$ のような1次式で与えられているときの数列の扱い方をマスターするのが目的です。それには主なものが3つあります。第1は等比数列を作る方法，第2は平衡値を使う方法，第3は階差数列を使う方法です。

＊　＊　＊

◆ 第1の **等比数列を作る方法** は次のようです。

11/2

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において　$a_1=3$,
$a_n=5a_{n-1}+8$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント)　$a_n=5a_{n-1}+8$ を変形して

$$a_n+k=l(a_{n-1}+k)$$

とすると，対応する項の係数を比較して

$$l=5 \quad \cdots\cdots①$$
$$lk-k=8 \quad \cdots\cdots②$$

が得られます。

$$\therefore\quad l=5,\ k=2$$
$$\therefore\quad a_n+2=5(a_{n-1}+2)$$

この結果は数列 $\{a_n+2\}$ が初項 $a_1+2(=5)$，公比5の等比数列であることを示しております。だから，

$$a_n+2=5\cdot5^{n-1}=5^n$$
$$\therefore\quad a_n=5^n-2 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

11/2

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=3$,
$a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+6$ のとき a_n を求めよ。

(解)　$a_n+k=l(a_{n-1}+k)$

とおいて比較すると

$$l=\frac{1}{4},\ lk-k=6$$
$$\therefore\quad l=\frac{1}{4},\ k=-8$$
$$\therefore\quad a_n-8=\frac{1}{4}(a_{n-1}-8)$$
$$\therefore\quad a_n-8=(a_1-8)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{5}{4^{n-1}}$$
$$\therefore\quad a_n=8-\frac{5}{4^{n-1}} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ 第2は **平衡値を使う方法** です。

12/2

練習 3. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=5$,
$a_n=2a_{n-1}+3$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント)　漸化式において a_n と a_{n-1} の代わりに x とおいてみると

$$x=2x+3$$

これを解くと

$$x=-3$$

となります。この値のことを **平衡値**（へいこうち）といいます。さて，この平衡値を漸化式の両辺から引いてみますと

$$a_n+3=2a_{n-1}+6=2(a_{n-1}+3)$$
$$\therefore\quad a_n+3=(a_1+3)\cdot2^{n-1}=8\cdot2^{n-1}=2^{n+2}$$
$$\therefore\quad a_n=-3+2^{n+2}$$

です。解答としては，平衡値を求めるところは書かないでもかまわない。つまり：——

(解)　$a_n=2a_{n-1}+3$

を変形して

$$a_n+3=2(a_{n-1}+3)$$
$$\therefore\quad a_n+3=(a_1+3)\cdot2^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n=-3+2^{n+2}$$

$$\boxed{答}\quad a_n=-3+2^{n+2}$$

でいいでしょう。もちろん，書いてもかまわないが，少しゴタゴタするから。

＊　＊　＊

◆　第3は **階差数列を使う方法** です。

11/v

練習 4. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=1$,
$a_n=5a_{n-1}+8$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　　$a_n=5a_{n-1}+8$　　……①

ですから n の代わりに $n-1$ を入れて

$$a_{n-1}=5a_{n-2}+8 \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より

$$a_n-a_{n-1}=5(a_{n-1}-a_{n-2})$$

この結果は階差数列が公比5の等比数列をなすことを示しています。ところが

$$a_1=1 \quad \therefore \quad a_2=5a_1+8=13$$

$$\therefore \quad a_2-a_1=12$$

ゆえに階差数列は

$$12,\ 12\cdot5,\ 12\cdot5^2,\ \cdots\cdots$$

したがって

$$a_n=1+\{12+12\cdot5+12\cdot5^2+\cdots\cdots\ (n-1)\text{ 項}\}$$

$$=1+\frac{12(1-5^{n-1})}{1-5}=1-3(1-5^{n-1})$$

$$=-2+3\cdot5^{n-1}$$

答　$a_n=-2+3\cdot5^{n-1}$

*　*　*

◆　これで大切なことは全部終わりました。では，やや総合的な練習をしてみませんか。

12/v

練習 5. $p\neq1$ とし，$a_n=pa_{n-1}+1$,
$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき，a_n を p の式で表せ。ただし，$a_0=1$ とする。

（大阪電通大）

解 1.　　$a_n=pa_{n-1}+1$

を変形して

$$a_n-\frac{1}{1-p}=p\left(a_{n-1}-\frac{1}{1-p}\right)$$

$$\therefore \quad a_n-\frac{1}{1-p}=\left(a_0-\frac{1}{1-p}\right)p^n$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{1-p}+\left(a_0-\frac{1}{1-p}\right)p^n$$

$a_0=1$ であるから

$$a_n=\frac{1}{1-p}+\frac{-p^{n+1}}{1-p}=\frac{1-p^{n+1}}{1-p}$$

解 2.

$$\begin{array}{rl} & a_n=pa_{n-1}+1 \\ -) & a_{n-1}=pa_{n-2}+1 \\ \hline & a_n-a_{n-1}=p(a_{n-1}-a_{n-2}) \end{array}$$

ゆえに階差数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ は公比 p の等比数列である。そして　$a_1=p+1$

$$\therefore \quad a_n=1+\{p+p^2+\cdots\cdots\ (n\text{ 項})\}$$

$$=1+\frac{p(1-p^n)}{1-p}=\frac{1-p+p-p^{n+1}}{1-p}$$

$$=\frac{1-p^{n+1}}{1-p} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

11/v

練習 6. $0<a<1$, $0<x_0<1$ とし，

$$x_n=a(1-x_{n-1})+(1-a)x_{n-1}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とする。

(1)　x_n を a と a_0 で表すと

$$x_n=\boxed{}+(\boxed{})^n\left(x_0-\frac{1}{2}\right)$$

である。$\boxed{}$内に適当な数または a の式を記入せよ。

(2)　$0<x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であることを証明せよ。　　（都立大）

ヒント　(1)　$x_n=(1-2a)x_{n-1}+a$　　……①

平衡値を x としますと

$$x=(1-2a)x+a$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}$$

そこで①を変形して

$$x_n-\frac{1}{2}=(1-2a)\left(x_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad x_n-\frac{1}{2}=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)(1-2a)^n \quad \cdots\cdots ②$$

$$\therefore \quad x_n=\frac{1}{2}+(1-2a)^n\left(x_0-\frac{1}{2}\right)$$

これで，$\boxed{}$の中はわかりました。

(2)　②より

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=\left|x_0-\frac{1}{2}\right||1-2a|^n$$

ところが　$0<a<1$　　$\therefore$　$|1-2a|<1$

また，$0<x_0<1$　　$\therefore$　$\left|x_0-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$

よって，…………

◎ 漸化式 $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta n$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈これは重要さにおいてはさほどではありませんが，n が exact に入っているものの見本です。

◆ 漸化式で与えられた数列はたいていきまったことをきまった通りやればできるものですが，そのうちでややめんどうなのは n がマトモに入っているときです。こういっただけではピンとこないでしょう。やはり，具体的な問題から始めたほうがいいですね。

では，これです。

■練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1=2,\ \ a_n=a_{n-1}+n$$

のとき a_n を求めよ。

ヒント　2つのやり方があります。1つは

$$a_n-a_{n-1}=n$$

と書きかえてみるとわかるように階差がわかっているのですから，もはや問題なし。つまり，

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\ \cdots\cdots \\ & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ a_n&=a_1+\{2+3+4+\cdots\cdots\ \ (n-1)\text{項}\}\\&=2+(2+3+4+\cdots\cdots+n)\\&=1+(1+2+\cdots\cdots+n)\\&=1+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{2}(n^2+n+2)\qquad\cdots\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

もう1つのやり方は **n を消去する** ことです。

$$a_n=a_{n-1}+n$$

$$\therefore\ \ a_{n-1}=a_{n-2}+(n-1)$$

辺々相減ずると

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}+1\ \cdots\cdots(*)$$

ここで $a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$ とおきますと

$$b_{n-1}=b_{n-2}+1$$

つまり

$$b_n=b_{n-1}+1$$

これで b_n つまり階差数列が公差1の等差数列であることがわかった。なーんだ，これではさっきと同じじゃないか，と思うかもしれませんが，さにあらず。このほうがずっと一般的であることがわかるでしょう。

(*) のところから，次のようにしてもよいのです。

$$a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=1$$

これなら隣接3項の漸化式になって，そのほうのきまったやり方があるわけです。

12/3

■練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=2$, $a_n=3a_{n-1}+2n$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　上の第2のやり方でいきます。

$$a_n=3a_{n-1}+2n$$

$$\therefore\ \ a_{n-1}=3a_{n-2}+2(n-1)$$

辺々相減ずると

$$a_n-a_{n-1}=3(a_{n-1}-a_{n-2})+2$$

そこで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおきますと

$$b_{n-1}=3b_{n-2}+2$$

$$\therefore\ \ b_n=3b_{n-1}+2$$

(平衡値は -1 ですから，両辺から -1 を引いて)

$$b_n+1=3(b_{n-1}+1)$$

$$\therefore\ \ b_n+1=(b_1+1)\cdot 3^{n-1}$$

ところが

$$a_2=3a_1+2\cdot 2=10$$

$$\therefore\ \ b_1=a_2-a_1=10-2=8$$

$$\therefore\ \ b_n=-1+9\cdot 3^{n-1}=-1+3^{n+1}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ a_n&=a_1+(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{n-1})\\&=2+\sum_{k=1}^{n-1}(-1+3^{k+1})\end{aligned}$$

$$=2+(-1)(n-1)+\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}$$

$$=2-n+1+\frac{9}{2}(3^{n-1}-1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}-n-\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. 関係式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k+(n+1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列について，次の問に答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。また $\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n の式で表せ。　（島根大）

（解）(1)

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \quad +(n+1) \\ -) & a_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+n \\ \hline & a_{n+1}-a_n=a_n+1 \end{array}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=2a_n+1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(2) (1)の結果を変形して

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

ゆえに数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2 $(=a_1+1)$，公比 2 の等比数列をなす。

$$\therefore\quad a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=2^n-1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n$$

$$=2^{n+1}-n-2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 4. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくとき，　$a_1=2$，

$a_{n+1}=S_n+n^2-n+2$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

である。この数列の一般項 a_n を求めよ。

（筑波大）

（ヒント）

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \quad +n^2-n+2 \\ -) & a_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+(n-1)^2 \\ & \qquad\qquad -(n-1)+2 \\ \hline & a_{n+1}-a_n=a_n+2n-2 \end{array}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=2a_n+2n-2 \qquad \cdots\cdots ①$$

したがって

$$a_n=2a_{n-1}+2(n-1)-2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①−②より

$$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})+2$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n+2=2(a_n-a_{n-1}+2)$$

ところが

$$a_2=S_1+1^2-1+2=a_1+2=4$$

であるから，数列 $\{a_{n+1}-a_n+2\}$ は初項 4 $(=4-2+2)$，公比 2 の等比数列をなす。

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n+2=4\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=4\cdot 2^{n-1}-2$$

$$\therefore\quad a_n=a_1+\sum_{n=1}^{n-1}(4\cdot 2^{n-1}-2)$$

$$=2+4\cdot\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-2(n-1)$$

$$=2^{n+1}-2n \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 5. 数列 a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_n，$\cdots\cdots$ に対して，

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1},\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$$

とおく。$a_{2n}=(n-1)a_{2n-1}+A_n$ $(n\geqq 1)$ が成り立つとき，$B_n=nA_n$ $(n\geqq 1)$ を証明せよ。

（京都工繊大）

（ヒント） B_n と A_n の関係を導けばいいのですから，ジャマな a_{2n} や a_{2n-1} を消去すればいいでしょう。

ところが $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$ ですから

$$A_n-A_{n-1}=a_{2n-1}$$

同様に

$$B_n-B_{n-1}=a_{2n}$$

これを $a_{2n}=(n-1)a_{2n-1}+A_n$ に代入して

$$B_n-B_{n-1}=(n-1)(A_n-A_{n-1})+A_n$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad B_n-nA_n&=B_{n-1}-(n-1)A_{n-1}\\&=B_{n-2}-(n-2)A_{n-2}\\&=\cdots\cdots\\&=B_1-A_1=a_2-a_1=0\end{aligned}$$

（最後のところは自分で考えてみてくださいよ）

○漸化式 $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta^n$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平衡値の使えない場合の チャンピオン，150 ページの場合とならんで，この機会にものにしようじゃないか。

◆ このタイプのものでよく出るのは $\alpha=\beta$ の場合です。まずそれからはじめるとしましょう。では，ガンバッテ：——

12/4

練習 1. $a_1=1$, $a_n=2a_{n-1}+2^n$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　両辺を 2^n で割りますと

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1$$

となります。そこで $\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とおきますと

$$b_n=b_{n-1}+1$$

オヤ，コレハ等差数列ではないか。

$$\therefore\quad b_n=b_1+(n-1)\cdot 1$$
$$=\frac{a_1}{2}+(n-1)$$
$$=\frac{1}{2}+(n-1)$$
$$=n-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{a_n}{2^n}=n-\frac{1}{2}\qquad \therefore\quad a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)2^n$$

では，もうちょっと変えてみようか。

12/4

練習 2. $a_1=3$, $a_n=5a_{n-1}+5^{n+1}$ のとき a_n を求めよ。

(解)　$a_n=5a_{n-1}+5^{n+1}$

の両辺を 5^n で割ると

$$\frac{a_n}{5^n}=\frac{a_{n-1}}{5^{n-1}}+5$$

$$\therefore\quad \frac{a_n}{5^n}=\frac{a_1}{5}+(n-1)5=\frac{3}{5}+5(n-1)$$
$$=5n-\frac{22}{5}$$

$$\therefore\quad a_n=\left(5n-\frac{22}{5}\right)5^n$$
$$=(25n-22)5^{n-1}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

さあ，これでできた。では，もう少し複雑な場合にいきましょう。

*　*　*

12/4

練習 3. $a_1=2$, $a_n=9a_{n-1}+3^n$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　両辺を 3^n で割ると

$$\frac{a_n}{3^n}=9\frac{a_{n-1}}{3^n}+1$$

左辺は $\frac{a_n}{3^n}$ でまとまっているから，右辺の方も $\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}$ でまとめなければならないわけ。そこで

$$\frac{a_n}{3^n}=3\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+1$$

とかいて，$\frac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと

$$b_n=3b_{n-1}+1\quad\left(b_1=\frac{2}{3}\right)$$

これならもう扱い方はきまっています。平衡値は $-\frac{1}{2}$ ですから

$$b_n+\frac{1}{2}=3\left(b_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$$

と変形できます。かくて

$$b_n+\frac{1}{2}=\left(b_1+\frac{1}{2}\right)3^{n-1}=\frac{7\cdot 3^{n-1}}{6}$$
$$=\frac{7\cdot 3^{n-2}}{2}$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{7\cdot 3^{n-2}-1}{2}$$

かくして

$$a_n=\frac{7\cdot 3^{n-2}-1}{2}\cdot 3^n$$

ハイ，デキマシタ。

*　*　*

◆　ではやや総合的な問題をやってみましょう。

練習 4. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき

$$2a_n-S_n=3^n$$

なる関係が成り立つ。一般項を求めよ。

ヒント　$S_n=2a_n-3^n$　……①

において，n の代わりに $n-1$ とおいて

$$S_{n-1}=2a_{n-1}-3^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

①−②をつくると

$$a_n=2a_n-2a_{n-1}-3^n+3^{n-1}$$ $a_1=S_1$

$$\therefore\quad a_n=2a_{n-1}+2\cdot 3^{n-1}\quad (a_1=3)$$

ここまでくると，もう前ページ右のタイプじゃありませんか。両辺を 3^n で割ると

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{2}{3}$$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと

$$b_n=\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{2}{3}\quad (b_1=1)$$

平衡値は 2 ですから

$$b_n-2=\frac{2}{3}(b_{n-1}-2)$$

$$\therefore\quad b_n-2=(b_1-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=2-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\left\{2-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\cdot 3^n$$

$$=2\cdot 3^n-3\cdot 2^{n-1}\quad\cdots\cdots 答$$

＊　＊　＊

◆　なお，このタイプのものは隣接 3 項の場合にも現れてきます。例えば，これです。

練習 5. $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ は

$$a_{n+2}+ka_{n+1}=l(a_{n+1}+ka_n)$$

の形に変形することができます。上の 2 式を比較して

$$l-k=6\quad\cdots\cdots①$$

$$lk=-9\quad\cdots\cdots②$$

①より

$$l=k+6$$

これを②に代入すると

$$(k+6)k=-9$$

$$\therefore\quad k^2+6k+9=0$$

$$\therefore\quad (k+3)^2=0$$

$$\therefore\quad k=-3$$

$$\therefore\quad l=3$$

そこで

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

となります。つまり，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 1（$=1-0$），公比 3 の等比数列ですから

$$a_{n+1}-3a_n=1\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=3a_n+3^{n-1}$$

これは，前ページの左のタイプです。つまり，両辺を 3^{n-1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n-1}}=\frac{a_n}{3^{n-2}}+1$$

したがって数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^{n-2}}\right\}$ は初項 $0\left(=\dfrac{0}{3^{-1}}\right)$ 公差 1 の等差数列をなす。

$$\therefore\quad \frac{a_n}{3^{n-2}}=0+(n-1)\cdot 1$$

$$\therefore\quad a_n=(n-1)3^{n-2}\quad\cdots\cdots 答$$

これで万事終わりです。

＊　＊　＊

◆　上の場合は①，②の解が重解の場合でした。しかし，重解でない場合も，前ページ右の方を使えば処理することができます。

ともかく，このようにして，いろいろ応用もできるわけです。

もし，キミがやる気があれば，次の問題を上の仕方でやってみませんか。

練習 6. $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　$a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ を変形して

$$a_{n+1}+a_n=3(a_n+a_{n-1})$$

$$a_{n+1}-3a_n=(-1)(a_n-3a_{n-1})$$

の双方についてやってみたらどうだろう。

＊　＊　＊

○ 漸化式 $a_n=\dfrac{\gamma a_{n-1}+\delta}{\alpha a_{n-1}+\beta}$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この漸化式で特に重要なものは $\delta=0$ のときなんですが，$\delta\neq0$ のときも，ついでにやっておくべきです。

◆ 隣接する2項 a_n と a_{n-1} の関係が漸化式で与えられている数列には4つのタイプがあります。第1は $a_n=3a_{n-1}+4$，第2は1次の分数式の場合で，第3は高次式の場合で $a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+2)$ といったもの，第4は無理関数で，$a_n=\sqrt{a_{n-1}+2}$ といったとき；ここでは，第2の1次の分数式の場合を扱ってみることにしよう，というわけ。

*　*　*

◆ では，これを：——

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=2$，

$a_n=\dfrac{4a_{n-1}}{3a_{n-1}+1}$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント) このように，分子には a_{n-1} しかないときは簡単です。**逆数をとる** とよい!!

つまり，こうです。

$$\frac{1}{a_n}=\frac{3a_{n-1}+1}{4a_{n-1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{3}{4}$$

ここで，

$$\frac{1}{a_n}=b_n$$

とおくと，

$$b_n=\frac{1}{4}b_{n-1}+\frac{3}{4}$$

これならやり方はきまっています。(☞ p.148)，すなわち，平衡値を求めてみると1，そこで，両辺から1を引いて

$$b_n-1=\frac{1}{4}(b_{n-1}-1)$$

$$\therefore\quad b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\therefore\quad b_n=1-\frac{1}{2\cdot4^{n-1}}=\frac{2\cdot4^{n-1}-1}{2\cdot4^{n-1}}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2\cdot4^{n-1}}{2\cdot4^{n-1}-1}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

このように，分子が a_{n-1} しかなければうまくいく。しかし，次はどうです。

12/5

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=2$，

$a_n=\dfrac{a_{n-1}+5}{5a_{n-1}+1}$ のとき，a_n を求めよ。

(ヒント) 平衡値を求めるために，a_n と a_{n-1} を x とおいてみると，

$$x=\frac{x+5}{5x+1}$$

$$\therefore\quad 5x^2+x=x+5$$

$$\therefore\quad x=\pm1$$

この1と -1 の一方のみを使ってもできるし，両方を使ってもできるのですが，ここでは両方を使ってみましょう。

与えられた漸化式から1を引いて

$$a_n-1=\frac{-4}{5a_{n-1}+1}(a_{n-1}-1)\quad\cdots\cdots①$$

与えられた漸化式の両辺から (-1) を引いて

$$a_n+1=\frac{6}{5a_{n-1}+1}(a_{n-1}+1)\quad\cdots\cdots②$$

①÷②を作ると

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}$$

オヤ，これはなんだ？ 数列 $\left\{\dfrac{a_n-1}{a_n+1}\right\}$ が公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列をなすことを示しているではないか!!

$$\therefore\quad \frac{a_n-1}{a_n-1}=\left(\frac{a_1-1}{a_1+1}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ところが，　$a_1=2$

$$\therefore\quad \frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^n}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^n-(-1)^{n-1}2^{n-1}}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

114

練習 3. 次の数列について a_2, a_3, a_4 を求め，それから a_n を推定し，さらに，その推定の正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$$a_1=a\quad (a<1),\ a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$$

（横浜国大）

(ヒント)　$a_1=a$

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-a}$$

$$a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\dfrac{1}{2-a}}=\frac{2-a}{3-2a}$$

$$a_4=\frac{1}{2-a_3}=\frac{1}{2-\dfrac{2-a}{3-2a}}=\frac{3-2a}{4-3a}$$

これから推定して

$$a_n=\frac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}$$

であろうということになります。

次に，これを数学的帰納法で証明するには，$n=1$ の場合はもういうまでもなく成り立つのですから，$n=k$ のとき成り立つとしますと

$$a_k=\frac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}$$

で，したがって

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}$$

よって，……

(参考) ここでは，数学的帰納法を使ってやれというのですから，平衡値を使うことはできませんが，それでやってみると，次のようになります。

a_{n+1} も a_n も x とおいてみますと

$$x=\frac{1}{2-x}\qquad \therefore\quad x=1\quad（重複解）$$

両辺から 1 を引いて

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{2-a_n}$$

そこで，$a_n-1=b_n$ とおいてみますと

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{-b_n+1}$$

そこで，両辺の逆数をとりますと

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}-1$$

つまり

$$\frac{1}{b_1},\ \frac{1}{b_2},\ \frac{1}{b_3},\ \cdots\cdots$$

は初項 $\dfrac{1}{a-1}\left(=\dfrac{1}{b_1}\right)$，公差 (-1) の等差数列ですから

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{a-1}+(n-1)\cdot(-1)$$

$$=\frac{n-(n-1)a}{a-1}$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{a-1}{n-(n-1)a}$$

$$\therefore\quad a_n-1=\frac{a-1}{n-(n-1)a}$$

$$\therefore\quad a_n=1+\frac{a-1}{n-(n-1)a}=\frac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}$$

＊　＊　＊

◆ こうして，当然のことながら，同じ結果が得られるのです。平衡値が 1 つしか出てこないとき，つまり，重複解になったときは，一般に上のようにしてやればいいのです。平衡値が 2 つあるときでも，その一方だけをとりあげて，上のようにやることもできます。

このように，いろいろと活用する余地があるわけです。大変重要というのではありませんが，やっておきたいものですね。

●漸化式$a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+2)$の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆a_n が a_{n-1} の高次式で与えられているときは平衡値の1つが，大きな威力を提供することが多いのです。

◆ 数列 $\{a_n\}$ の相隣り合う2つの項 a_n と a_{n-1}の漸化式が与えられたものには4つのタイプがあります。第1は1次式：$a_n=5a_{n-1}+8$ といったもの（☞ p.148)，第2は1次の分数式：$a_n=\dfrac{3a_{n-1}}{a_{n-1}+2}$ といったもの（☞ p.154)，第3はここで扱う高次（2次以上のもの)，そして第4は無理関数の場合（☞ p.158）です。

さて，次のものを考えてみましょう。

12/10

練習1. 数列 a_n において $a_1=1$,
$a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+2)$ ならば a_n を求めよ。

ヒント　**平衡値**（☞ p.144）を求めてみましょう。a_n と a_{n-1} を x とおいて

$$x=x(x+2)\qquad \therefore\ x^2+x=0$$
$$\therefore\ x=0,\ -1$$

高次の場合はふつう平衡値のどれか1つをとるとうまくいきます。このときは -1 を採用しましょう。与えられた漸化式の両辺から -1 を引いて（つまり1を加えて）

$$a_n+1=a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1$$
$$\therefore\ a_n+1=(a_{n-1}+1)^2$$

もう，デキタゾ。つまり

$$a_2+1=(a_1+1)^2=2^2$$
$$a_3+1=(a_2+1)^2=(2^2)^2=2^{2^2}$$
$$a_4+1=(a_3+1)^2=(2^{2^2})^2=2^{2^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n+1=(a_{n-1}+1)^2$$
$$=(2^{2^{n-2}})^2=2^{2^{n-1}}$$
$$\therefore\ a_n=-1+2^{2^{n-1}}\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

というわけです。

$a_1=1$ の代わりに $a_1=a$ とおいたのが阪大に出題されていますよ。

5/16

練習2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1$,
$a_n=a_{n-1}(a_{n-1}^2+3a_{n-1}+3)$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　平衡値を求めるために a_n と a_{n-1} に x を入れてみますと

$$x=x(x^2+3x+3)$$
$$\therefore\ x^3+3x^2+2x=0$$
$$\therefore\ x=0,\ -1,\ -2$$

3つのうちどれがいいか？ -1 らしいことはすぐ気がつきます。

解　与えられた漸化式を変形すると

$$a_n+1=(a_{n-1}+1)^3$$
$$\therefore\ a_n+1=(a_1+1)^{3^{n-1}}=2^{3^{n-1}}$$
$$\therefore\ a_n=-1+2^{3^{n-1}}$$

$\boxed{答}$　$a_n=-1+2^{3^{n-1}}$

9

練習3. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=a(>0)$

12/17 $a_n=a_{n-1}^3+6a_{n-1}^2+12a_{n-1}+6$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　平衡値を求めるために a_n と a_{n-1} を x とおいてみますと

$$x=x^3+6x^2+12x+6$$
$$\therefore\ x^3+6x^2+11x+6=0$$
$$\therefore\ (x+1)(x+2)(x+3)=0$$
$$\therefore\ x=-1,\ -2,\ -3$$

$x=-1$ を採用すると
$$a_n+1=(a_{n-1}^2+5a_{n-1}+7)(a_{n-1}+1)$$
$x=-2$ を採用すると
$$a_n+2=(a_{n-1}+2)^3$$
$x=-3$ を採用すると
$$a_n+3=(a_{n-1}^2+3a_{n-1}+3)(a_{n-1}+3)$$
となります。もはや，きまった。$x=-2$ がいいのだ!!

（解）　与えられた漸化式を変形すると

$$a_n+2=(a_{n-1}+2)^3$$

$$\therefore\quad a_n+2=(a_1+2)^{3^{n-1}}=(a+2)^{3^{n-1}}$$

$$\therefore\quad a_n=-2+(a+2)^{3^{n-1}}$$

答　$a_n=-2+(a+2)^{3^{n-1}}$

＊　＊　＊

◆　では，やや総合的な問題をやってみるとしよう。まず，これです。

9

練習 4. $f(x)=x^3-3x^2+3x$ として，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって，順次に定められる数列 x_1，x_2，x_3，……を考える。この数列が単調増加（$x_n<x_{n+1}$）となるような x_1 の値の範囲を定めよ。（上智大）

（解）

$$x_{n+1}=x_n^3-3x_n^2+3x_n$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる数列 $\{x_n\}$ が単調増加（$x_n<x_{n+1}$）ならば

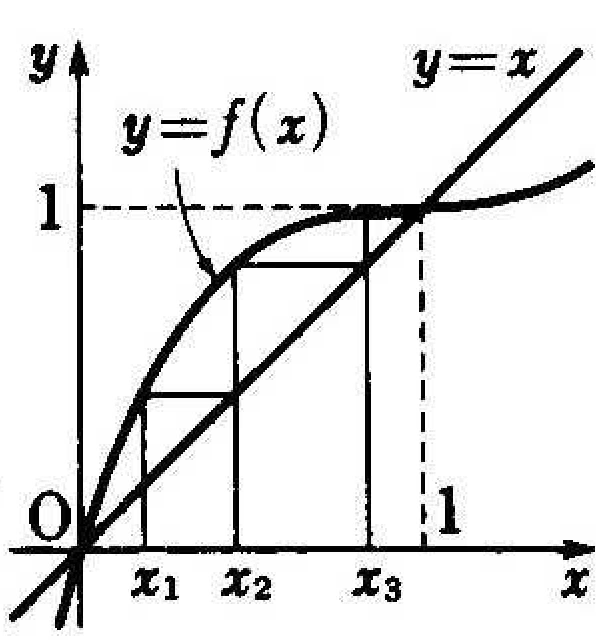
$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=(x_n^3-3x_n^2+3x_n)-x_n\\&=x_n^3-3x_n^2+2x_n\\&=x_n(x_n^2-3x_n+2)\\&=x_n(x_n-1)(x_n-2)>0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 0<x_n<1,\ 2<x_n$$

が，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ について成り立つ。

答　$0<x_1<1,\ 2<x_1$

（注）　この結果の意味は，$y=f(x)$ のグラフと $y=x$ のグラフをかいて，x_1，x_2，……を順次作図してみるとわかるでしょう。例えば $0<x_n<1$ のとき右のようになります。$2<x_n$ の場合をグラフをかいて調べてみませんか。なお，漸化式とグラフについては（☞ p. 146）を参照してください。



練習 5. $a_1=1+\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+2}{3}$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ は単調減少数列であることを示せ。（明治薬大）

（解）

$$\begin{aligned}&a_{n+1}-a_n\\&=\frac{a_n^2+2}{3}-a_n=\frac{a_n^2-3a_n+2}{3}\\&=\frac{1}{3}(a_n-1)(a_n-2)\end{aligned}$$

ところが　$a_1=1+\dfrac{1}{2}$ より

$$1<a_1<2$$

であるから，

$$a_2-a_1<0\qquad\therefore\quad a_1>a_2$$

次に，$n=k$ のとき $a_k>a_{k+1}$ とすると

$$\begin{aligned}a_{k+2}-a_{k+1}&=\frac{a_{k+1}^2+2}{3}-\frac{a_k^2+2}{3}\\&=\frac{1}{3}(a_{k+1}^2-a_k^2)\\&=\frac{1}{3}(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k)\end{aligned}$$

明らかに $a_n>0$ であるから，上の関係から

$a_k>a_{k+1}$ ならば $a_{k+1}>a_{k+2}$

であることがわかる。

したがって，数学的帰納法によって一般に成り立つ。

（注）　上のように単調増加や単調減少を証明するには漸化式を使って a_{k+2} と a_{k+1} の大小関係と a_{k+1} と a_k の大小関係を結びつけるのがコツです。

練習 6. 数列 $\{x_n\}$ が次の条件を満足しているとき，(1)，(2)に答えよ。

$$x_{n+1}=2x_n-x_n^2\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$y_n=1-x_n$ とおくとき，y_n と y_{n+1} の間の関係を求めよ。

(2)　$0<x_1<1$ のとき，$0<x_n<1$ を証明せよ。

（ヒント）　(1)　$x_n=1-y_n$ を代入すると

$$1-y_{n+1}=2(1-y_n)-(1-y_n)^2$$

$$\therefore\quad y_{n+1}=y_n^2$$

(2)　$x_{k+1}=2x_k-x_k^2=x_k(2-x_k)$

において $0<x_k<1$ とすると，……

そこで，数学的帰納法を使ってみるとよいのです。

● 漸化式 $a_n=\sqrt{a_{n-1}+\alpha}$ の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆漸化式が無理式のときも，やり方はキマッテいる。何はともあれ，この手順をものにすべきである。さて，どうかな。

◆ 隣接2項 a_n と a_{n-1} の漸化式が与えられた数列に4つの型があった（☞ p.148, 154, 156）。その第4がこの無理関数の場合です。

12/10

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1$，$a_n=\sqrt{a_{n-1}+2}$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$|a_n-2|<\frac{1}{2}|a_{n-1}-2|$$

ヒント **平衡値**（☞ p.144）を求めてみましょう。a_n と a_{n-1} を x とおいてみると

$$x=\sqrt{x+2}$$
$$\therefore\quad x^2=x+2$$
$$\therefore\quad (x-2)(x+1)=0$$
$$\therefore\quad x=2,\ -1$$

-1 はいわゆる **無縁解**（むえんかい）で適しません。つまり，平衡値は2だけです。この2を与えられた漸化式の両辺から引きますと

$$a_n-2=\sqrt{a_{n-1}+2}-2$$

平衡値の特徴は両辺に a_n-2，$a_{n-1}-2$ が現れることでした。ここにはそれがない。まさに絶望的，と，思うのは早合点というもの。右辺を有理化してみましょう。

$$a_n-2=\frac{a_{n-1}-2}{\sqrt{a_{n-1}+2}+2}$$

つまり

$$a_n-2=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+2}+2}(a_{n-1}-2)$$

もうできそうだ。少し，考えてから次を読んでください。

さあ，両辺の絶対値をとって

$$|a_n-2|=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+2}+2}|a_{n-1}-2|$$

ところが，

$$\sqrt{a_{n-1}+2}+2>2$$
$$\therefore\quad |a_n-2|<\frac{1}{2}|a_{n-1}-2|$$

Q. E. D.

注 もう気がついた人もありましょうが，$a_1=1$ という条件は不要だったのではないでしょうか。

実は $a_1=2$ のときは

$$a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=2$$

となって

$$|a_n-2|=\frac{1}{2}|a_{n-1}-2|$$

となります。だから，実は $a_1\neq 2$ だけが必要だったのです。しかし，いま，こんなことにこだわる必要はありません。次へ，いこう。

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1$，$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ のとき，

$$|a_n-3|<\frac{1}{3}|a_{n-1}-3|$$

を証明せよ。

ヒント 平衡値を求めてみると，さてはあれだな!!

解 $$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$$
$$\therefore\quad a_n-3=\sqrt{a_{n-1}+6}-3$$

右辺を有理化して

$$a_n-3=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+6}+3}(a_{n-1}-3)$$

両辺の絶対値をとって

$$|a_n-3|=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+6}+3}|a_{n-1}-3|$$

$a_1\neq 3$ であるから，　$a_n\neq 3$

$$\therefore\quad |a_n-3|<\frac{1}{3}|a_{n-1}-3|$$

Q. E. D.

* * *

◆ ここまでわかれば第1の要点は終わりです。さて，次は，これです。

練習 3. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=8$,
$a_n=\sqrt{a_{n-1}+12}$ のとき，

$$|a_n-4|<\frac{1}{4^{n-2}}\quad(n\geqq 2)$$

を証明せよ。

ヒント　まず $|a_n-4|<\dfrac{1}{4}|a_{n-1}-4|$ を前ページの方法で導きますと，

$$|a_n-4|<\frac{1}{4}|a_{n-1}-4|$$
$$|a_{n-1}-4|<\frac{1}{4}|a_{n-2}-4|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|a_3-4|<\frac{1}{4}|a_2-4|$$
$$|a_2-4|<\frac{1}{4}|a_1-4|$$

これらを辺々相乗ずると，両辺から同じ項は約せて

$$|a_n-4|<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_1-4|$$

が得られます。ところが　$a_1=8$

$$\therefore\quad |a_n-4|<\frac{1}{4^{n-2}}\quad(n\geqq 2)$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 4. 数列 $\{a_n\}$ の項が

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって与えられているものとする。このとき

$$a_n=2\sin\theta_n,\quad 0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$$

を満たす θ_n を見い出せ。　（東大）

ヒント　$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ に

$$a_{n+1}=2\sin\theta_{n+1},\quad a_n=2\sin\theta_n$$

を代入しますと

$$2\sin\theta_{n+1}=\sqrt{2+2\sin\theta_n}$$

となりますね。ところで，この右辺のかっこ内は，

$$2(1+\sin\theta_n)=2\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)\right\}$$
$$=2\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)$$

（ココデ，**$1+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha$** ヲ使イマシタヨ）

$$=\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)\right\}^2$$

$$\therefore\quad 2\sin\theta_{n+1}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \sin\theta_{n+1}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)\right\}$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_n}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \theta_{n+1}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_n}{2}$$

$$\therefore\quad \theta_{n+1}-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\left(\theta_n-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \theta_n-\frac{\pi}{2}=\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \theta_n=\frac{\pi}{2}+\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ところで，$a_1=2\sin\theta_1$ とおくと

$$2\sin\theta_1=\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \theta_1=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \theta_n=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

答　$\theta_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}}\pi$

*　*　*

◆ 漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ で与えられる数列は **グラフを使うと便利** なことも多いし，慶大のようにグラフを使ってやれ，という形で出題されることもあります。これについては，（☞ p.146）を参照してください。

(数列における)特性方程式とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆特性方程式なんて，聞いたこともないね。そうでしょうね。やっぱりやらなければダメかな。そうでしょうね。

◆ 数列 $\{a_n\}$ において

$$a_n+2a_{n-1}=0$$
$$a_n+2a_{n-1}-3a_{n-2}=0$$
$$a_n+6a_{n-1}+11a_{n-2}+6a_{n-3}=0$$

などのように a_n，a_{n-1}，a_{n-2} などの1次式が $=0$ とおかれているときには **特性方程式** を使えば機械的にできますから，なるべく，これをマスターしておきたいものです。

では，具体的な問題でやってみましょう。

12/11

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1=5,\ a_n+3a_{n-1}=0$$

のとき a_n を求めよ。

(ヒント) $a_n=(-3)a_{n-1}$ ですから，これは公比 (-3) の等比数列です。

$$\therefore\quad a_n=5\cdot(-3)^{n-1}$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot5\cdot3^{n-1}$$

となります。しかし，ここでは，これに気がつかないとしましょう。

$$a_n+3a_{n-1}=0 \qquad \cdots\cdots①$$

は a_n と a_{n-1} の 1次式$=0$ の形ですから，

$$a_n=x^n\ (\neq0)$$

とおいてみますと

$$x^n+3x^{n-1}=0$$
$$\therefore\quad x+3=0 \qquad \therefore\quad x=-3$$

このとき A が何であろうと

$$a_n=A(-3)^n$$

は①を満足するのです。ところが $a_1=5$ である，というのですから

$$5=A(-3)^1 \qquad \therefore\quad A=-\frac{5}{3}$$
$$\therefore\quad a_n=-\frac{5}{3}\cdot(-3)^n$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot5\cdot3^{n-1} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

実は，チョット心配がアル!! なるほど，このようにして求めた a_n が①を満足するのは確かですが，このほかにも解がありはしないか，ということです。

しかし，それはないのです。

$$a_n=(-3)a_{n-1}$$

ですから，a_1 がきまれば a_2 がきまる，a_2 がきまれば a_3 がきまる，といったぐあい。

つまり解は1つしかない。さては，上で求めた a_n 以外に解はないのです。

*　*　*

12/11

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_n=4a_{n-1}+5a_{n-2}$ $(n\geqq3)$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント) $a_n=x^n$ とおくと

$$x^n=4x^{n-1}+5x^{n-2}$$
$$\therefore\quad x^2-4x-5=0 \qquad \cdots\cdots①$$

これを **特性方程式** というのです。

さて，①を解くと

$$x=5,\ -1$$

が得られます。これを **特性解**（とくせいかい）ということがあります。そして，

$$\boldsymbol{a_n=A\cdot5^n+B(-1)^n}$$

が与えられた漸化式を満足することは代入してみるとすぐわかります。あとは $a_1=0$，$a_2=1$ という条件から A，B の値をきめるだけ。かくて，

$$5A-B=0$$
$$25A+B=1$$
$$\therefore\quad A=\frac{1}{30},\ B=\frac{1}{6}$$
$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{6}\{5^{n-1}+(-1)^n\} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

(注) ここで，ちょっと注意を：——

a_n や a_{n-1} や a_{n-2} などの1次式であるからといっても

$$a_n=2a_{n-1}+5$$
$$a_n=3a_{n-1}+n$$

のように，5や n が入っていてはダメです。これらのことについてはそれぞれの項（☞ p.148, ☞ p.150）を参照してください。

では，次を：——

12/11

練習 3. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=2$, $a_2=4$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ という関係がある。

(1) a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_{10}a_k$ を求めよ。（東北学院大）

(解) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ において $a_n=x^n$ とおくと

$$x^{n+2}=3x^{n+1}-2x^n$$
$$\therefore\ x^2-3x+2=0$$
$$\therefore\ x=1,\ 2$$

ゆえに A, B を定数として

$$a_n=A\cdot1^n+B\cdot2^n$$

とおける。ところが $a_1=2$, $a_2=4$ だから

$$A+2B=2,\ A+4B=4$$
$$\therefore\ A=0,\ B=1$$
$$\therefore\ a_n=2^n$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_{10}a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_{10}2^k$

$$=(\log_{10}2)(1+2+\cdots\cdots+n)$$
$$=(\log_{10}2)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{\log_{10}2}{2}n(n+1)$$

答 $a_n=2^n$, $\dfrac{\log_{10}2}{2}n(n+1)$

* * *

◆ 特性方程式で困ることが1つあります。それは重複解をもつ場合です。例えば：——

12/11

練習 4. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=0$, $a_2=1$, $a_n+4a_{n-1}+4a_{n-2}=0$ のとき a_n を求めよ。（三重大）

(ヒント) $a_n=x^n$ とおいてみると

$$x^n+4x^{n-1}+4x^{n-2}=0$$
$$\therefore\ x^2+4x+4=0$$
$$\therefore\ x=-2\ \text{（重複解）}$$

このことから $a_n=a(-2)^n$ が与えられた漸化式を満足するのはわかりますが，

$$a_1=0,\ a_2=1$$

より

$$a(-2)^1=0,\ a(-2)^2=1$$
$$\therefore\ a=0\ \text{かつ}\ a=\frac{1}{4}$$

では困ります。実は，このときの解は

$$\boldsymbol{a_n=A\cdot(-2)^n+B\cdot n(-2)^n}$$

とおくのが定石です。$a_n=n(-2)^n$ を念のため代入してみますと，

$$a_n+4a_{n-1}+4a_{n-2}$$
$$=n(-2)^n+4(n-1)\cdot(-2)^{n-1}$$
$$+4(n-2)\cdot(-2)^{n-2}$$
$$=(-2)^{n-2}\{4n+(-2)\cdot4(n-1)+4(n-2)\}$$
$$=(-2)^{n-2}(4n-8n+8+4n-8)=0$$

となって，確かに成り立つのです。

そこで，$a_1=0$, $a_2=1$ より

$$-2A-2B=a_1=0$$
$$4A+8B=a_2=1$$
$$\therefore\ A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4}$$
$$\therefore\ a_n=-\frac{1}{4}(-2)^n+\frac{1}{4}\cdot(-2)^n$$
$$=-(-2)^{n-2}+n(-2)^{n-2}$$
$$=(n-1)(-2)^{n-2}\quad\cdots\cdots\ \text{答}$$

* * *

◆ では，定理の形で述べておくと次のようになります。

漸化式 $pa_n+qa_{n-1}+ra_{n-2}=0$ …(*) の特性方程式 $px^2+qx+r=0$ が重複解 α をもつとき (*) の一般解は

$$\boldsymbol{a_n=A\alpha^n+Bn\alpha^n}$$

で与えられる。あるいは

$$\boldsymbol{a_n=A\alpha^n+Bn\alpha^{n-1}}$$

としてもよく，B の値が変わるだけです。

○ 漸化式 $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆隣接3項の漸化式が与えられたとき，特に大切で，そして，簡単なのは $\alpha+\beta=1$ のときなんですが，……

◆ 漸化式が

$$a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$$

の形のときは扱い方が2つあります。第1は等比数列を作る方法，第2は特性方程式を使う方法です。

*　　*　　*

◆ 第1の **等比数列を作る** 方法は次のようです。

練習 1.　$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$，$a_1=0$，$a_2=1$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント)　$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$

を変形して

$$a_n+ka_{n-1}=l(a_{n-1}+ka_{n-2})$$

としますと，

$$l-k=2 \qquad \cdots\cdots①$$

$$lk=3 \qquad \cdots\cdots②$$

①から l を求め，②に代入しますと

$$(k+2)k=3$$

$$\therefore\quad k^2+2k-3=0$$

$$\therefore\quad (k+3)(k-1)=0$$

$$\therefore\quad k=-3,\ l=-1\ ;\ k=1,\ l=3$$

ゆえに

$$a_n-3a_{n-1}=(-1)(a_{n-1}-3a_{n-2}) \cdots\cdots③$$

と

$$a_n+a_{n-1}=3(a_{n-1}+a_{n-2}) \qquad \cdots\cdots④$$

が得られます。

③より数列 $\{a_n-3a_{n-1}\}$ は等比数列で

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)(-1)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-3a_n=(-1)^{n-1} \qquad \cdots\cdots⑤$$

④より

$$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)3^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}+a_n=3^{n-1} \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥－⑤より

$$4a_n=3^{n-1}-(-1)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{4}\{3^{n-1}-(-1)^{n-1}\} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(参考)　⑤あるいは⑥だけを使っても a_n を求めることができます。例えば⑥からやってみましょう。

$$\begin{aligned}
a_n\ \ &+a_{n-1}=3^{n-2}\\
a_{n-1}&+a_{n-2}=3^{n-3}\\
a_{n-2}&+a_{n-3}=3^{n-4}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_4\ \ &+a_3\ \ =3^2\\
a_3\ \ &+a_2\ \ =3^1\\
a_2\ \ &+a_1\ \ =1\ (=3^0)
\end{aligned}$$

上のほうから順に

$1,\ -1,\ (-1)^2,\ (-1)^3,\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n-2}$

を掛けて加えますと

$$a_n+(-1)^{n-2}a_1=3^{n-2}+(-1)3^{n-3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}\cdot 1$$

が得られます。右辺は等比数列の和ですから

$$\therefore\quad a_n=\frac{3^{n-2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot 3^{n-2}\left\{1-(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\{3^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$$

が得られます。

しかし，かなりゴタゴタするのです。もし，やる気があったら，⑤から同じようにして a_n を求めてみませんか。

*　　*　　*

◆ 第2は **特性方程式を使う** 方法です。これも具体的な例で説明しましょう。

12/11

練習 2. $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$, $a_1=0$, $a_2=1$ のとき，a_n を求めよ。

(ヒント) $a_n=x^n$ ($\neq 0$) とおいてみますと

$$x^n=x^{n-1}+2x^{n-2}$$

$$x^2-x-2=0$$

これを特性方程式といいます。これから

$$\therefore\ (x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore\ x=2,\ -1$$

ゆえに 2^n と $(-1)^n$ は $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ を満足します。

$$\therefore\ 2^n=2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2} \quad \cdots\cdots①$$

$$(-1)^n=(-1)^{n-1}+2(-1)^{n-2} \quad \cdots\cdots②$$

①×A＋②×B を作りますと

$$A\cdot 2^n+B(-1)^n$$
$$=\{A\cdot 2^{n-1}+B(-1)^{n-1}\}+2\{A\cdot 2^{n-2}+B(-1)^{n-2}\}$$

が得られます。つまり

$$\boldsymbol{a_n=A\cdot 2^n+B(-1)^n}$$

は与えられた漸化式を満足しています。

そこで，$a_1=0$, $a_2=1$ を考えて

$$2A-B=0$$

$$4A+B=1$$

$$\therefore\ A=\frac{1}{6},\ B=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{6}\cdot 2^n+\frac{1}{3}(-1)^n$$

$$=\frac{1}{6}\{2^n+2\cdot(-1)^n\}$$

が得られます。

しかし，まだ解がありはしないか，チョット心配です。しかし，それはありません。a_1, a_2 がきまれば a_3 も1つきまる，a_2, a_3 がきまれば a_4 も1つしかない，……，といったぐあいで解が2つはないからです。

* * *

◆ この方法で困るのは，重複解をもつときです。しかし，このときは，特性方程式の重複解が α なら，α^n のほかに $n\alpha^{n-1}$ を使えばよいのです。

では，ともあれ，やってみましょう。

12/

練習 3. $a_1=0$, $a_2=1$, $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=0$ のとき，a_n を求めよ。

(ヒント) 特性方程式を作るために $a_n=x^n$ とおきますと，

$$x^n-4x^{n-1}+4x^{n-2}=0$$

$$\therefore\ x^2-4x+4=0$$

$$\therefore\ (x-2)^2=0$$

$$\therefore\ x=2\ （重複解）$$

これでは困る。なぜなら $a_n=A\cdot 2^n$ が

$$a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=0$$

を満足するのは確かですが，

$$a_1=A\cdot 2^1 \text{ より} \quad A=0$$

しかし，これでは $a_2=1$ を満足しないからです。実は，

重複解をもつときは

$$\boldsymbol{a_n=A\cdot 2^n+B\cdot n\cdot 2^{n-1}}$$

とおくのがきまりです。代入してみますと，

$$a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}$$
$$=\{A\cdot 2^n+B\cdot n\cdot 2^{n-1}\}$$
$$-4\{A\cdot 2^{n-1}+B(n-1)2^{n-2}\}$$
$$+4\{A\cdot 2^{n-2}+B(n-2)2^{n-3}\}$$
$$=A\{2^n-4\cdot 2^{n-1}+4\cdot 2^{n-2}\}+B\{n\cdot 2^{n-1}-4(n-1)\cdot 2^{n-2}+4(n-2)2^{n-3}\}=0$$

となります。確かに，これは解です。

さて，$a_1=0$, $a_2=1$ より

$$A\cdot 2+B\cdot 1=0$$

$$A\cdot 2^2+B\cdot 2\cdot 2^1=1$$

$$\therefore\ A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a_n=-2^{n-2}+n\cdot 2^{n-2}$$

$$=(n-1)2^{n-2} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(注) 一般に，特性解が重複解 α をもつときには

$$a_n=A\alpha^n+Bn\alpha^{n-1}$$

とおけばよいのです。もちろん，A, B は定数ですから

$$\boldsymbol{a_n=A\alpha^n+Bn\alpha^n}$$

とおいても B がちがってくるだけで同じですが，$n\alpha^{n-1}$ のほうが微分したような形だから，オボエやすい，という利点はありましょう。

こんな問題は多いわけではありませんが，たまに出るから，ご注意あれ。

●漸化式 $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma$ の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この漸化式はさほど重要ではありません。しかし，だから，といって，敬遠してはいけませんよ。

◆ 漸化式が $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$ の形のもの（☞ p.162）をよくわかった上でこの項をやってください。

ここでは数列 $\{a_n\}$ の漸化式が

$$a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}+\gamma$$

の形のものについて学ぶことにしましょう。

11/3

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+4$$

のとき，a_n を求めよ。

(ヒント) 漸化式の 4 がなければ

$$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2} \quad \cdots\cdots①$$

は等比数列の形に書きなおせるのでしたね。そして，それは

$$a_n-3a_{n-1}=(-1)(a_{n-1}-3a_{n-2}) \cdots②$$

と

$$a_n+a_{n-1}=3(a_{n-1}+a_{n-2}) \quad \cdots\cdots③$$

でした。（☞ p.162）

したがって

$$a_{n+1}-3a_n=u_n \quad \cdots\cdots④$$

$$a_{n+1}+a_n=v_n \quad \cdots\cdots⑤$$

とおくと，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+4$ は

$$u_n=(-1)u_{n-1}+4,\ u_1=1$$

$$v_n=3v_{n-1}+4,\ v_1=1$$

と書けます。これからよく知っていなければならないタイプ（☞ p.148）で，

$$u_n-2=(-1)(u_{n-1}-2)$$

$$\therefore\ u_n-2=(u_1-2)(-1)^{n-1}=(-1)^n$$

$$\therefore\ u_n=(-1)^n+2 \quad \cdots\cdots⑥$$

また

$$v_n+2=3(v_{n-1}+2)$$

$$\therefore\ v_n+2=(v_1+2)3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore\ v_n=3^n-2 \quad \cdots\cdots⑦$$

④，⑤より

$$a_n=\frac{1}{4}(v_n-u_n)$$

$$=\frac{3^n-(-1)^n}{4}-1 \quad \cdots\cdots 答$$

これでできました。もう1つのやり方でやってみましょう。

(解)
$$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+4 \quad \cdots\cdots①$$

$$\therefore\ a_{n-1}=2a_{n-2}+3a_{n-3}+4 \quad \cdots\cdots②$$

①－②を作り，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$b_{n-1}=2b_{n-2}+3b_{n-3}$$

$$\therefore\ b_n=2b_{n-1}+3b_{n-2},\ b_1=1,\ b_2=5$$

（ここまでくれば「ヒント」と同じ）

$$b_n=\frac{1}{2}(3^n-(-1)^{n-1})$$

$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\{3^k-(-1)^{k-1}\}$$

$$=\frac{3^n-(-1)^n}{4}-1 \quad \cdots\cdots 答$$

しかし，これは難問だったなあ。簡単にできないからといって歎くこともないが，簡単にできれば大いに自信をもっていい。

＊　＊　＊

◆ では，もう1つやってみようか。

11/13

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=2$$

のとき a_n を求めよ。

(ヒント) $a_{n+1}-2a_n=u_n,\ u_1=1$

とおくと

$$u_n=2u_{n-1}+2$$

$$\therefore\ u_n+2=2(u_{n-1}+2)$$

$$\therefore\quad u_n+2=(u_1+2)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore\quad u_n=3\cdot 2^{n-1}-2$$

これで第1段階は終わりです。さて，

$$a_n-2a_{n-1}=3\cdot 2^{n-2}-2$$
$$a_{n-1}-2a_{n-2}=3\cdot 2^{n-3}-2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_3-2a_2\quad=3\cdot 2\quad-2$$
$$a_2-2a_1\quad=3\cdot 1\quad-2$$

順次 $1,\ 2,\ 2^2,\cdots\cdots,\ 2^{n-2}$ を掛けて加えると

$$a_n-2^{n-1}a_1=3\cdot 2^{n-2}(n-1)$$
$$-2\cdot(1+2+\cdots\cdots+2^{n-2})$$
$$\therefore\quad a_n=3\cdot 2^{n-2}(n-1)+2(1-2^{n-1})$$

…… 答

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみましょう。

練習 3. 1けたの自然数 a を初項とする公比3の等比数列がある。第 n 項の1位の数を a_n とするとき，a_n+a_{n+2} は $a,\ n$ にかかわらず一定であることを示せ。

（大阪産業大）

ヒント 例えば $a=7$ なら，この等比数列は

7, 21, 63, 189, 567, ……

ゆえに

$$a_1=7,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_4=9,\ a_5=7$$

といったぐあい。これからわかるように

$$a_{4n+1}=7,\ a_{4n+2}=1,\ a_{4n+3}=3,\ a_{4n+4}=9$$

なんでしょう。したがって

$$a_n+a_{n+2}=10$$ …… 答

です。

注 大阪産業大の問題では a_n を求めよ，とは要求されていませんが，

《$a_1=7,\ a_2=1,\ a_n+a_{n+2}=10$ のとき a_n を求めよ》

ならどうするか？

$$a_n\ +a_{n+2}=10$$
$$\therefore\quad a_{n-1}+a_{n+1}=10$$

辺々相減じて変形すれば

$$a_{n+2}-a_{n+1}=(-1)(a_n-a_{n-1})$$

ところが

$$a_2-a_1=1-7=-6,\ a_3-a_2=2$$

ですから，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$b_n+b_{n-2}=0,\ b_1=-6,\ b_2=2$$

です。ここで

$$b_n=x^n$$

とおくと（☞ p.163）

$$x^n+x^{n-2}=0\qquad\therefore\quad x^2+1=0$$
$$\therefore\quad x=\pm i$$
$$\therefore\quad b_n=Ai^n+B(-i)^n$$
$$\therefore\quad Ai-Bi=-6$$
$$-A-B=2$$
$$\therefore\quad A=-1+3i,\qquad B=-1-3i$$
$$\therefore\quad b_n=(-1+3i)i^n+(-1-3i)(-i)^n$$
$$\therefore\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=7+(-1+3i)\frac{i(1-i^{n-1})}{1-i}$$
$$+(-1-3i)\frac{(-i)(1-(-i)^{n-1})}{1+i}$$
$$=5+i^{n-1}+(-i)^{n-1}+2\{i^n+(-i)^n\}$$

…… 答

ヤレヤレ思いのほかめんどうだったね。では，もう1つ。

練習 4. $p>q>0,\ r\neq 0$ のとき

$$(p+q)a_n+r=pa_{n+1}+qa_{n-1}$$
$$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots),$$

$a_0=1,\ a_1=1$ によって定められる数列について，a_n を求めよ。

ヒント 与えられた漸化式を変形しますと

$$p(a_{n+1}-a_n)=q(a_n-a_{n-1})+r$$

となりますから，$a_n-a_{n-1}=b_n$ とおくと

$$pb_{n+1}=qb_n+r$$

平衡値は $\dfrac{r}{p-q}$ ですから

$$p\left\{b_{n+1}-\frac{r}{p-q}\right\}=q\left\{b_n-\frac{r}{p-q}\right\}$$
$$\therefore\quad b_{n+1}-\frac{r}{p-q}=\frac{q}{p}\left\{b_n-\frac{r}{p-q}\right\}$$

だから，よって，……

$$a_n=a_0+\frac{r}{p-q}\left\{n-\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}\right\}$$
$$=\cdots\cdots\cdots$$

◑ 漸化式 $(n+3)a_n=na_{n+1}$ などの扱い方

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆ここで扱うのは，n が大手をふって入りこんできた場合です。ちょっとみるとめんどうそうですが，さにあらず!!

◆ この種のものはきまったやり方はありません。その中から何かまとまった形を見つければよいのです。ともかく，やってみましょう。

12/14

■練習 1. $a_1=2$, $(n+1)a_{n+1}=na_n+2$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　みるとすぐわかるように

$$(n+1)a_{n+1},\quad na_n$$

がまとまっているではありませんか。だから

$$na_n=b_n$$

とおくと

$$b_{n+1}=b_n+2\quad (b_1=2)$$

おや，これは等差数列だ。

$$\begin{aligned}\therefore\quad b_n&=b_1+(n-1)\cdot 2\\&=2+(n-1)\cdot 2\\&=2n\end{aligned}$$

$$\therefore\quad na_n=2n$$

$$\therefore\quad a_n=2 \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

12/14

■練習 2. $a_1=2$, $na_{n+1}=(n+1)a_n+1$ のとき a_n を求めよ。

ヒント　これは na_{n+1} と $(n+1)a_n$ はまとまっているわけではありませんよ。na_{n+1} において n の代わりに $(n+1)$ とおくと

$$(n+1)a_{n+2}$$

になるからです。ではどうするか？

両辺を $n(n+1)$ で割ってみますと

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

うん，これならいいぞ。

$$\frac{a_n}{n}=b_n \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}\quad (b_1=2)$$

となるではないか。

もうできそうですね。

$$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$b_{n-1}-b_{n-2}=\frac{1}{(n-2)(n-1)}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_3-b_2=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$+)\quad b_2-b_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$b_n-b_1=1-\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad b_n=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{3n-1}{n}$$

12/17

$$\therefore\quad a_n=3n-1 \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

■練習 3. $a_1=1$, $na_n=(n-2)a_{n-1}+n-1$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ に対して $b_n=n(n-1)a_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ に対する漸化式をつくれ。また，これを利用して a_n を求めよ。

ヒント　$b_n=n(n-1)a_n$

ですから

$$a_n=\frac{b_n}{n(n-1)}$$

したがって

$$a_{n-1}=\frac{b_{n-1}}{(n-1)(n-2)}$$

これらを与えられた漸化式に代入しますと

$$n\frac{b_n}{n(n-1)}=(n-2)\frac{b_{n-1}}{(n-1)(n-2)}+n-1$$

$$\therefore\quad \frac{b_n}{n-1}=\frac{b_{n-1}}{n-1}+(n-1)$$

$$\therefore\quad b_n=b_{n-1}+(n-1)^2$$

ここまでくれば，もはや問題はないでしょう。結果をあげると：——

$$b_n=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{b_n}{n(n-1)}$$

$$=\frac{2n-1}{6}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

*　*　*

◆ では，やや，総合的なものをやってみませんか。

練習 4. 数列 a_0, a_1, a_2, …… が漸化式により

$$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)a_{n-1}+(-1)^n 2n\quad(a_0=0)\qquad\cdots\cdots(*)$$

で定義されている。これに対して，次の問いに答えよ。

(1) $c_m=a_{2m}$ $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおくと，c_m は $mc_m=(\boxed{}m+\boxed{})c_{m-1}+\boxed{}m+\boxed{}$ を満たす。

(2) したがって a_n は n が正の偶数のときは $a_n=\boxed{}n+\boxed{}$ で与えられる。

(3) また n が奇数のときは $a_n=\boxed{}n+\boxed{}$ で与えられる。

（上智大）

ヒント (1) $mc_m=ma_{2m}$

$$=m\left\{\left(1-\frac{1}{2m}\right)a_{2m-1}+4m\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(2m-1)a_{2m-1}\left\{\left(1-\frac{1}{2m-1}\right)a_{2m-2}-2(2m-1)\right\}+4m^2$$

$$=(m-1)c_{m-1}+4m-1$$

となります。つまり$\boxed{}$の中は順次 1, -1, 4, -1 を入れればよいわけ。

(2)

$$\begin{array}{rl}
 & mc_m=(m-1)c_{m-1}+4m-1\\
 & (m-1)c_{m-1}=(m-2)c_{m-2}+4(m-1)-1\\
 & (m-2)c_{m-2}=(m-3)c_{m-3}+4(m-2)-1\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
+) & 1c_1=0c_0+4\cdot1-1\\
\hline
 & mc_m=4(1+2+\cdots+m)-m
\end{array}$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-m$$

$$=m(2m+1)$$

$$\therefore\quad c_m=2m+1$$

だから n が偶数のとき

$$a_n=c_{\frac{n}{2}}=n+1\qquad\cdots\cdots(**)$$

となります。

(3) 次は n が奇数のときです。(*) から

$$a_{2m+1}=\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)a_{2m}-2(2m+1)$$

ココデ，上ノ(**)ヲ使ッテ

$$=\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)(2m+1)-2(2m+1)$$

$$=(2m+1-1)-2(2m+1)$$

$$=-(2m+1)-1$$

ゆえに，n が奇数のとき

$$a_n=-n-1\qquad\cdots\cdots(***)$$

となります。ただし，これでは $n\geqq3$ 以上です。なぜなら $n=1$ のとき a_0 は求められていないからです。

しかし，a_1 は(*)から求められて

$$a_1=\left(1-\frac{1}{1}\right)a_0+(-1)^1 2\cdot1$$

$$=-2$$

で，上の(***)に含まれます。

したがって，一般に n が奇数のとき

$$a_n=-n-1$$

となるわけです。

かくして，答は

答 (1) 順次，1, -1, 4, -1

(2) $a_n=n+1$

(3) $a_n=-n-1$

注 つまり，この数列は具体的にかくと

-2, 3, -4, 5, -6, ……

となります。そして，(*) はその漸化式なのでした。

こうして，本体がわかってしまうと，逆にいろいろな扱い方も浮かんでこようというもの。どうです。別解をやってみませんか。

*　*　*

◎二重数列の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆2つの数列がからみあって，次々に項が生産されるのが二重数列，というと，いかにもめんどうそうですが，実はもっとも簡単。

◆ 二重数列というのは次のように2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がお互いにからみあっているときです。この扱い方は大きく分けて4通りあります。第1は加えたり，引いたりしてできる場合，これは特別な場合ではあるが，入試にはよく出るタイプです。第2は等比数列を作るもの，第3は隣接3項の漸化式にもってゆくもの，第4は行列を使う方法です。

では，順次やってみましょう。

12/17

■練習 1. $a_1=1$，$b_1=0$，$a_n=4a_{n-1}+2b_{n-1}$，$b_n=2a_{n-1}+4b_{n-1}$ のとき，a_n，b_n を求めよ。

ヒント　2つの漸化式を加えてみると

$$a_n+b_n=6(a_{n-1}+b_{n-1})$$

ゆえに $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=1+0=1$，公比6の等比数列をなし，

$$a_n+b_n=1\cdot6^{n-1} \qquad \cdots\cdots①$$

同様に，差をとることにより

$$a_n-b_n=1\cdot2^{n-1} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2}(6^{n-1}+2^{n-1})=2^{n-2}(3^{n-1}+1) \\ b_n=\dfrac{1}{2}(6^{n-1}-2^{n-1})=2^{n-2}(3^{n-1}-1) \end{cases}$$

注　このように a_n，b_n の漸化式がタスキガケに等しいときは加えたり，引いたりするとうまくいく。それは，特別な場合なんですが，入試問題としては多いから，特別にとり出したのです。一般の場合は次です。

12/17

■練習 2. $a_1=1$，$b_1=0$，$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$，$b_n=4a_{n-1}+3b_{n-1}$ のとき a_n，b_n を求めよ。

ヒント　a_n+kb_n を作ってみると

$$a_n+kb_n=(1+4k)a_{n-1}+(2+3k)b_{n-1}$$
$$=(1+4k)\left\{a_{n-1}+\frac{2+3k}{1+4k}b_{n-1}\right\}$$

として，もし，

$$k=\frac{2+3k}{1+4k}$$

となる k が与えられれば都合がいい。

さて，それは

$$4k^2-2k-2=0$$
$$\therefore\quad k=1,\ -\frac{1}{2}$$

こんなわけで

$k=1$：　$a_n+b_n=5(a_{n-1}+b_{n-1})$

$$\therefore\quad a_n+b_n=(a_1+b_1)5^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n+b_n=5^{n-1} \qquad \cdots\cdots①$$

$k=-\dfrac{1}{2}$：$a_n-\dfrac{1}{2}b_n=(-1)\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{2}b_{n-1}\right)$

$$\therefore\quad a_n-\frac{1}{2}b_n=\left(a_1-\frac{1}{2}b_1\right)(-1)^{n-1}$$
$$=(-1)^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n-\frac{1}{2}b_n=(-1)^{n-1} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②を解いて

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{3}\{5^{n-1}+2(-1)^{n-1}\} \\ b_n&=\frac{2}{3}\{5^{n-1}-(-1)^{n-1}\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　　*　　*

◆ 第3は隣接3項の漸化式に書きなおすものです。こんな抽象的なことをいっても仕方がないですね。具体例でいきましょう。

12/17

■練習 3. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ において

$$a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$$
$$b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$$

のとき a_n，a_{n-1}，a_{n-2} の関係を求めよ。

ヒント b_n を消去すればいいでしょう。第1式から $\quad b_{n-1}=a_n-2a_{n-1}$

$$\therefore \quad b_n=a_{n+1}-2a_n$$

これを第2式に代入して

$$a_{n+1}-2a_n=3a_{n-1}+2(a_n-2a_{n-1})$$

$$\therefore \quad a_{n+1}-4a_n+a_{n-1}=0 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ では，やや総合的な練習を：——

練習 4. $a_1=p$，$b_1=q$，$a_{n+1}=pa_n+5qb_n$，$b_{n+1}=qa_n+pb_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおく。$p^2-5q^2=1$ であるとき，すべての自然数 n に対して $a_n{}^2-5b_n{}^2=1$ であることを示せ。 (東京商船大)

ヒント いろいろなやり方がありますが，ひとつの方法は $a_{n+1}{}^2-5b_{n+1}{}^2$ を直接計算してみることでしょう。つまり：——

$$\begin{aligned}&a_{n+1}{}^2-5b_{n+1}{}^2\\&=(pa_n+5qb_n)^2-5(qa_n+pb_n)^2\\&=(p^2-5q^2)a_n{}^2+5(5q^2-p^2)b_n{}^2\\&=a_n{}^2-5b_n{}^2\end{aligned}$$

なのですから，もういいでしょう。

練習 5. a，b，c，d は実数の定数で

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$$

は相異なる2つの実数解 α，β をもつものとする。このとき

$$x_{n+1}=ax_n+by_n,\quad y_{n+1}=cx_n+dy_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満足する数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ について，

(1) $\{cx_n+(\alpha-a)y_n\}$，$\{(\alpha-d)x_n+by_n\}$ は共に同じ公比をもつ等比数列となることを示し，その公比を求めよ。

(2) 上の結果から

$$\begin{cases}(\alpha-\beta)x_n\\=(\alpha^n-\beta^n)x_1+A(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\\(\alpha-\beta)y_n\\=(\alpha^n-\beta^n)y_1+B(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\end{cases}$$

の形を導き，定数 A，B を a，b，c，d，x_1，y_1 で表せ。 (横浜国大)

ヒント

$$x_{n+1}=ax_n+by_n \quad \cdots\cdots①$$

$$y_{n+1}=cx_n+dy_n \quad \cdots\cdots②$$

①$\times c+$②$\times(\alpha-a)$ を作ってみますと

$$\begin{aligned}&cx_{n+1}+(\alpha-a)y_{n+1}\\&=\{ac+(\alpha-a)c\}x_n+\{bc+(\alpha-a)d\}y_n\\&=\alpha cx_n+\{bc+(\alpha-a)d\}y_n\\&=\alpha\left\{cx_n+\frac{bc+(\alpha-a)d}{\alpha}y_n\right\}\end{aligned}$$

となりますから，

$$\frac{bc+(\alpha-a)d}{\alpha}=\alpha-a$$

となってくれればよいでしょう。

さて，分母をはらって変形しますと

$$\alpha^2-(a+d)\alpha+(ad-bc)=0$$

となりますから，もう大丈夫。あとは，自力でやってみること。

練習 6. 0，1，2，3 の4種類の数字を用いて n けた $(n\geqq 1)$ の正の整数を作るとき，数字1を偶数回含むものが a_n 個，奇数回含むものが b_n 個できたとする。ただし，1を含まないものも1を偶数回含むものとみなす。

(1) a_n と b_n の間にどんな関係があるか。

(2) a_n，b_n を a_{n-1} と b_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。 (関西学院大)

ヒント (1) 0，1，2，3 を用いて作れる n けたの正の整数は

$$4^n-4^{n-1}=3\cdot 4^{n-1} \text{ (個)}$$

あるから $\quad a_n+b_n=3\cdot 4^{n-1}$

(2) $(n-1)$ けたの正の整数のうち，1を偶数回含むものには末位に0，2，3を，奇数回含むものには末位に1を付け加えれば n けたの1を偶数回含むものが得られるから

$$a_n=3a_{n-1}+b_{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

同様にして

$$b_n=a_{n-1}+3b_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

(3) $\boxed{答}$ $a_n=2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}+1)$

●三重数列の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆二重数列についで三重数列が当然ながら出てきます。しかし，今まで入試にはごく僅かしか，出てはいませんが……

◆ 三重数列も二重数列とまったく同じに扱うことができます。とはいうものの，計算がかなりゴタゴタしますので，ついウマイ方法に走りがち。しかし，ここでは，必ずできる仕方に徹してやることにしましょう。

＊　＊　＊

◆ では二重数列の等比数列をつくるやり方でやってみようではないか。

17/8

練習 1. $a_1=0,\ b_1=0,\ c_1=1$ で

$$a_{n+1}=2a_n+b_n+c_n \quad \cdots\cdots ①$$
$$b_{n+1}=a_n+2b_n+c_n \quad \cdots\cdots ②$$
$$c_{n+1}=a_n+b_n+2c_n \quad \cdots\cdots ③$$

のとき $a_n,\ b_n,\ c_n$ を求めよ。

ヒント　①＋②×p＋③×q をつくりますと

$$a_{n+1}+pb_{n+1}+qc_{n+1}$$
$$=(2+p+q)a_n+(1+2p+q)b_n+(1+p+2q)c_n$$

コレガ等比数列トナルヨウニシタイノダ!!　ソコデ：——

$$=(2+p+q)\left(a_n+\frac{1+2p+q}{2+p+q}b_n+\frac{1+p+2q}{2+p+q}c_n\right) \quad \cdots\cdots (*)$$

だから

$$p=\frac{1+2p+q}{2+p+q} \quad \cdots\cdots ④$$
$$q=\frac{1+p+2q}{2+p+q} \quad \cdots\cdots ⑤$$

を解いて p，q を求めてみよう。④，⑤の分母を払って整理しますと

$$(p-1)(p+q+1)=0 \quad \cdots\cdots ④'$$
$$(q-1)(p+q+1)=0 \quad \cdots\cdots ⑤'$$

ゆえに，$p+q+1=0$ を満足する p，q はすべて解となります。また，$p+q+1\neq 0$ のときには

$$p=q=1$$

が得られます。そこで，④，⑤の解として3組

$$(p,\ q)=(1,\ 1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ -1)$$

を採用してみましょう。

さて，$p=q=1$ のとき(＊)は

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=4(a_n+b_n+c_n)$$
$$\therefore\quad a_n+b_n+c_n=1\cdot 4^{n-1}=4^{n-1} \cdots\cdots ⑥$$

$p=-1,\ q=0$ のとき(＊)は

$$a_{n+1}-b_{n+1}=1(a_n-b_n)$$
$$\therefore\quad a_n-b_n=0\cdot 1^{n-1}=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$p=0,\ q=-1$ のときも同様にして

$$a_{n+1}-c_{n+1}=1(a_n-c_n)$$
$$\therefore\quad a_n-c_n=(-1)\cdot 1^{n-1}=-1 \cdots\cdots ⑧$$

⑥，⑦，⑧を解いて

$$a_n=\frac{1}{3}(4^{n-1}-1)$$
$$b_n=\frac{1}{3}(4^{n-1}-1)$$
$$c_n=\frac{1}{3}(4^{n-1}+2)$$

となります。

注　左のようにして p，q を求めなくても①，②，③をみれば①＋②＋③をつくると

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=4(a_n+b_n+c_n)$$

となるし，①－②をつくると

$$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$$

①－③をつくると

$$a_{n+1}-c_{n+1}=a_n-c_n$$

となって，上と同じ結果が得られます。ここでは必ずできる仕方でやったというわけです。

＊　＊　＊

◆ 上の問題では漸化式がセイゼンとしていたので扱い易かったのですが次は，そうでは

ありません。これは，東大に出された問題の中から，数列の部分だけぬきだしたものなんですが，上と同じようにしてやってみようではありませんか。

練習 2. $a_1=\frac{1}{3}$，$b_1=\frac{2}{3}$，$c_1=0$ で

12/18

$$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$b_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{2}{3}c_{n-1} \cdots\cdots ②$$

$$c_n=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

のとき a_n，b_n，c_n を求めよ。

ヒント　前と同じようにやってみましょう。

①＋②×p＋③×q をつくると

$$a_n+pb_n+qc_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p\right)a_{n-1}$$

$$+\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}p+\frac{1}{6}q\right)b_{n-1}+\left(\frac{2}{3}p+\frac{1}{3}q\right)c_{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p\right)\left\{a_{n-1}+\frac{1+4p+q}{2+4p}b_{n-1}\right.$$

$$\left.+\frac{2p+q}{1+2p}c_{n-1}\right\}$$

そこで

$$p=\frac{1+4p+q}{2+4p},\quad q=\frac{2p+q}{1+2p}$$

とおいて分母を払って書きかえますと

$$4p^2-2p-q-1=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$$p(q-1)=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤より，　$p=0$ あるいは $q=1$

$p=0$ のとき④より，　$q=-1$

$q=1$ のとき④より

$$p=1，あるいは\ p=-\frac{1}{2}$$

さて $p=0$，$q=-1$ のとき

$$a_n-c_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}-c_{n-1})$$

$$\therefore\quad a_n-c_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdots\cdots ⑥$$

$p=q=1$ のとき

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n+b_n+c_n=1 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$p=-\frac{1}{2}$，$q=1$ のとき

$$a_n-\frac{1}{2}b_n+c_n=0 \quad \cdots\cdots ⑧$$

チョット待ッタ!!　このとき $1+2p=0$，つまり分母が0になるよ。それでもいいかい。

それは，①，②，③に戻って⑧がつくれるのだからかまわない。つまり

①×1＋②×$\left(-\frac{1}{2}\right)$＋③×1 をつくると，

こうなるからです。

そこで⑥，⑦，⑧を解くと

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$b_n=\frac{2}{3}$$

$$c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}\right)$$

となります。

注　上のようにやらないでも，もっと簡単にやることもできます。例えば：——

①＋②＋③から

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots\cdots$$
$$=a_1+b_1+c_1=1$$

がわかるのですから

$$b_n=\frac{2}{3}$$

がすぐでるわけ!

そこで，$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{9}$

これなら a_n は平衡値が $\frac{1}{6}$ であることから

$$a_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{1}{6}=\left(a_1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\cdots\cdots$$

また

$$c_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(c_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$$

から

$$c_n-\frac{1}{6}=\left(c_1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\cdots\cdots$$

といったぐあいですべて求められるわけです。しかし，どんなものでも，となると，≪ひとつの方法はここであげたような方法なのです。≫

では，何はともあれ，これをものにして，その上で，リンキオウヘンといくとしよう。

＊　＊　＊

◐数列への行列の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆漸化式で与えられた数列の中には行列を使うとキレイに扱えるものが少なくありません。その典型的なものをやるのが目的デス。

◆ ここでは数列に行列を応用するのが目的です。ともかく，具体的な例をやってみましょう。その上で，問題点はそれぞれの項目でものにしてください。

2/8 **練習 1.** 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，次の条件を満足するとき，a_n, b_n を求めよ。

$$a_1=1, \quad b_1=0$$
$$a_n=3a_{n-1}+b_{n-1}$$
$$b_n=2a_{n-1}+4b_{n-1}$$

ヒント この漸化式を行列を使って表せば，次のようです。

$$\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$$

いま $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\vec{u}_n$, $\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}=A$ とおくと

$$\vec{u}_n=A\vec{u}_{n-1}$$

これは等比数列の形と同じですね。つまり

$$\vec{u}_2=A\vec{u}_1,\ \vec{u}_3=A\vec{u}_2,\ \vec{u}_4=A\vec{u}_3$$

といったぐあい。かくして

$$\vec{u}_n=A^{n-1}\vec{u}_1$$

となりましょう。つまり

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

したがって，この A^{n-1} さえ計算できればよい。

そこで，その結果を示すと，こうです。

$$\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}^{n-1}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+5^{n-1} & -2^{n-1}+5^{n-1}\\ -2^n+2\cdot5^{n-1} & 2^{n-1}+2\cdot5^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+5^{n-1} & -2^{n-1}+5^{n-1}\\ -2^n+2\cdot5^{n-1} & 2^{n-1}+2\cdot5^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{3}(2^n+5^{n-1})$$
$$b_n=\frac{1}{3}(-2^n+2\cdot5^{n-1})$$

注 とはいうものの，$\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}^{n-1}$ の計算法をここに書かぬわけにもいくまい。というわけで，要点を書いておきます。それは：──

$$\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3x+y=\lambda x\\2x+4y=\lambda y\end{cases}$$

$$\therefore\quad (3-\lambda)x+y=0$$
$$2x+(4-\lambda)y=0$$

yを消去すると

$$\{(3-\lambda)(4-\lambda)-2\}x=0$$

$x\neq0$ より

$$\lambda^2-7\lambda+10=0$$
$$\therefore\quad (\lambda-2)(\lambda-5)=0$$
$$\therefore\quad \lambda=2,\ 5$$

$\lambda=2$ のとき　$x+y=0$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$\lambda=5$ のとき　$-2x+y=0$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

そこで，

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

なる行列を考えて $P^{-1}AP$ を計算してみると，

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\-2&10\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$$

両辺をn乗すると $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ であるから

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$$

左から P，右から P^{-1} を掛けて

$$A^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n&5^n\\-2^n&2\cdot5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1}+5^n&-2^n+5^n\\-2^{n+1}+2\cdot5^n&2^n+2\cdot5^n\end{pmatrix}$$

というわけ。これでは，行列計算が目的なのか数列計算が目的なのかわからなくなった感じ。

では，もう1つ，やりませんか。

17/18

練習2. 数列 $\{a_n\}$ において

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$$

のとき，a_n を求めよ。

(ヒント)　$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$

において $a_{n-1}=b_n$ とおきますと

$$a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}$$
$$b_n=a_{n-1}+0\cdot b_{n-1}$$

行列を使って表しますと

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}\quad(n\geqq2)$$

$$\therefore\quad\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

かくして $\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}$ の計算をすればよいことになったわけ。

さて，$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$ の固有値を λ，固有ベクトルを $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ としますと，

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad(2-\lambda)x+3y=0$$
$$x-\lambda y=0$$

これが (0, 0) でない解をもつための条件は

$$(2-\lambda)\lambda+3=0$$

$$\therefore\quad\lambda=3,\ -1$$

$\lambda=3$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=-1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

ですから，$P=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

ですから

$$P^{-1}AP=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&-3\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-12&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}^n$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^{n+1}&(-1)^n\\3^n&(-1)^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3^{n+1}+(-1)^{n+1}&-3^{n+1}+3(-1)^n\\-3^n+(-1)^{n+2}&-3^n+3(-1)^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a_n=-\frac{1}{4}(-3^n+(-1)^n)$$

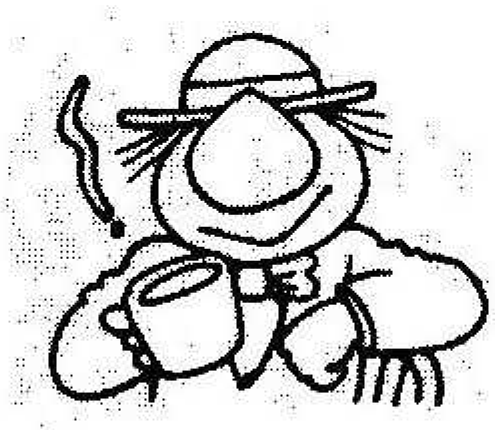
答　$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}$

*　*　*

◆ こうしてみると行列の計算さえできれば，十分行列も役に立つのだな，という気になりませんか。

実は，この程度の問題なら，行列を使わないで，等比数列を作るやり方のほうが簡単なのです。(☞ p.168)

しかし，入試問題には，ここであげたようなやり方を強制するものが少なくありませんから，どうしても，よくオボエテおきたいところです。



$a_n=pa_{n-1}+qn^2+rn+s$ についての蛇足

◆上のような形の漸化式については，ここであげるような，ウマイ方法があるのですが，キミの趣味にあいますか，どうか？

◆ 一般に $f(n)$ が n の k 次の多項式のとき

$$\boldsymbol{a_n=pa_{n-1}+f(n)} \quad (p\ (\neq 1)\ \text{は定数})$$

の形の漸化式の場合には次のように変形することができます。

$$\boldsymbol{a_n+g(n)=p(a_{n-1}+g(n-1))}$$

ただし，$g(n)$ は n について k 次の多項式です。だから第 n 項 a_n が容易に求められます。では，さっそく，これを：——

練習 1. $a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+n+2$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント) $a_n+An+B=2\{a_{n-1}+A(n-1)+B\}$

とおいて展開しますと

$$a_n=2a_{n-1}+An+(-2A+B)$$

となります。これを上の漸化式と比べて

$$A=1,\ -2A+B=2$$

とおきますと

$$A=1,\ B=4$$

$$\therefore\quad a_n+n+4=2(a_{n-1}+(n-1)+4)$$

$$\therefore\quad a_n+n+4=(a_1+1+4)2^{n-1}=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$$

$$\therefore\quad a_n=3\cdot 2^n-n-4 \quad \cdots\cdots\text{答}$$

これは150ページのやり方より便利でしょう。では，もうひとつ。

練習 2. $a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+n^2$ のとき a_n を求めよ。

(ヒント) a_n+An^2+Bn+C

$$=2\{a_{n-1}+A(n-1)^2+B(n-1)+C\}$$

とおいて展開しますと

$$a_n+An^2+Bn+C$$
$$=2(a_{n-1}+An^2-2An+A+Bn-B+C)$$
$$\therefore\quad a_n=2a_{n-1}+An^2+(-4A-3B)n+(2A-2B+C)$$

これを与えられた漸化式と比べて

$$A=1$$
$$-4A-3B=0$$
$$2A-2B+C=0$$

となります。

$$\therefore\quad A=1,\ B=-\frac{4}{3},\ C=-\frac{14}{3}$$

ゆえに数列 $\left\{a_n+n^2-\frac{4}{3}n-\frac{14}{3}\right\}$ は初項が

$a_1+1^2-\frac{4}{3}\cdot 1-\frac{14}{3}=-4$，公比2の等比数列となります。

$$\therefore\quad a_n+n^2-\frac{4}{3}n-\frac{14}{3}=-4\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=-2^{n+1}-n^2+\frac{4}{3}n+\frac{14}{3}\cdots\cdots\text{答}$$

となります。では，もうひとつ。

練習 3. $a_1=2$，$a_n=3a_{n-1}+2n^3+n$ ならば a_n を求めよ。

(ヒント) $a_n+An^3+Bn^2+Cn+D$

$$=3\{a_{n-1}+A(n-1)^3+B(n-1)^2+C(n-1)+D\}$$

とおいて展開しますと

$$a_n+An^3+Bn^2+Cn+D$$
$$=3(a_{n-1}+An^3-3n^2A+3nA-A+Bn^2-2Bn+B+Cn-C+D)$$

そこで与えられた漸化式と比べて

$$2A=2 \quad \cdots\cdots①$$
$$-9A+2B=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$9A-6B+2C=1 \quad \cdots\cdots③$$
$$-3A+3B-3C+2D=0 \quad \cdots\cdots④$$

これを解けば A，B，C，D が求められます。もはや，事もなし。