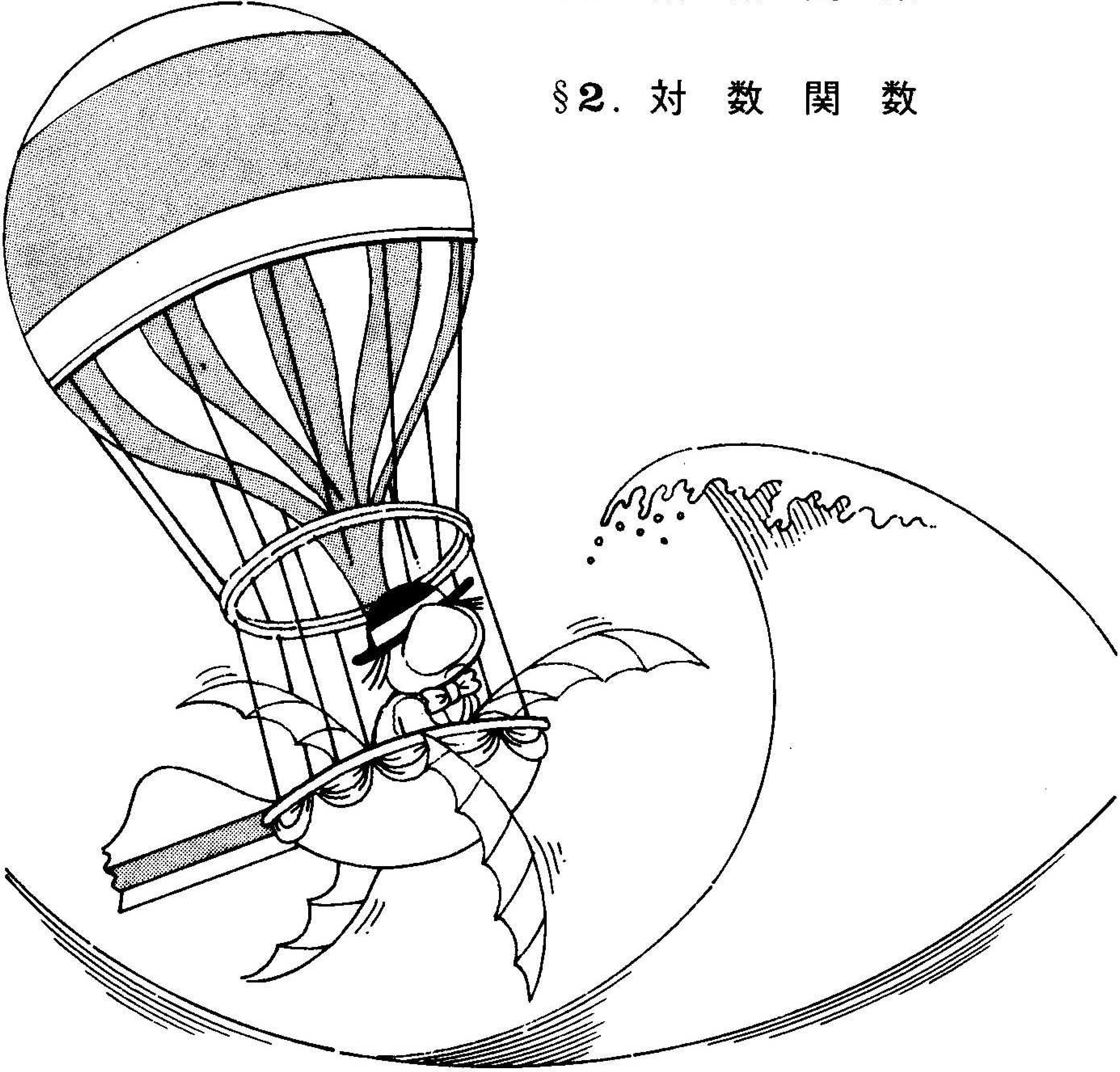
第2章

指数関数と対数関数



指数関数のグラフ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数関数のグラフに抵抗を感じる人は少ないらしい。しかし，これを活用できる人はきわめて少ないのはふしぎではないか。

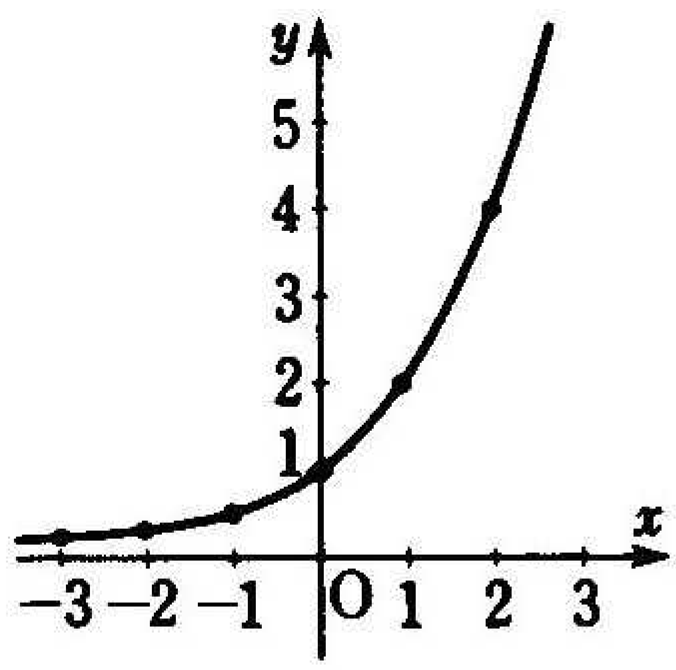
◆ 指数関数

$$f(x)=a^x \quad (a>0)$$

のグラフは $a>1$ のときと $0<a<1$ のときとでちがいます。どのようにちがうか。ともあれ，やってみましょう。

■練習 1. $y=2^x$ のグラフをかけ。

ヒント　x にいろいろな値を入れて計算してみますと下のようになります。



x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

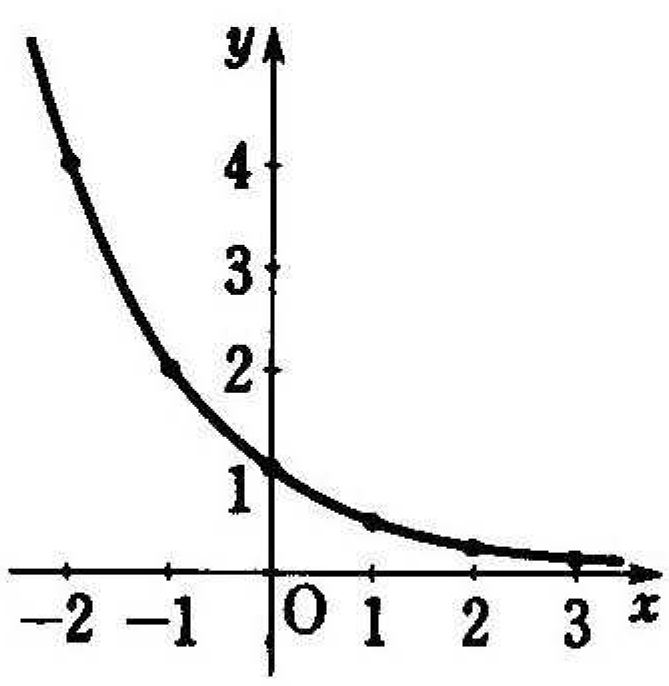
x	−1	−2	−3	−4
y	0.5	0.25	0.125	0.0625

■練習 2. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかけ。

ヒント　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\dfrac{1}{2^x}=2^{-x}$

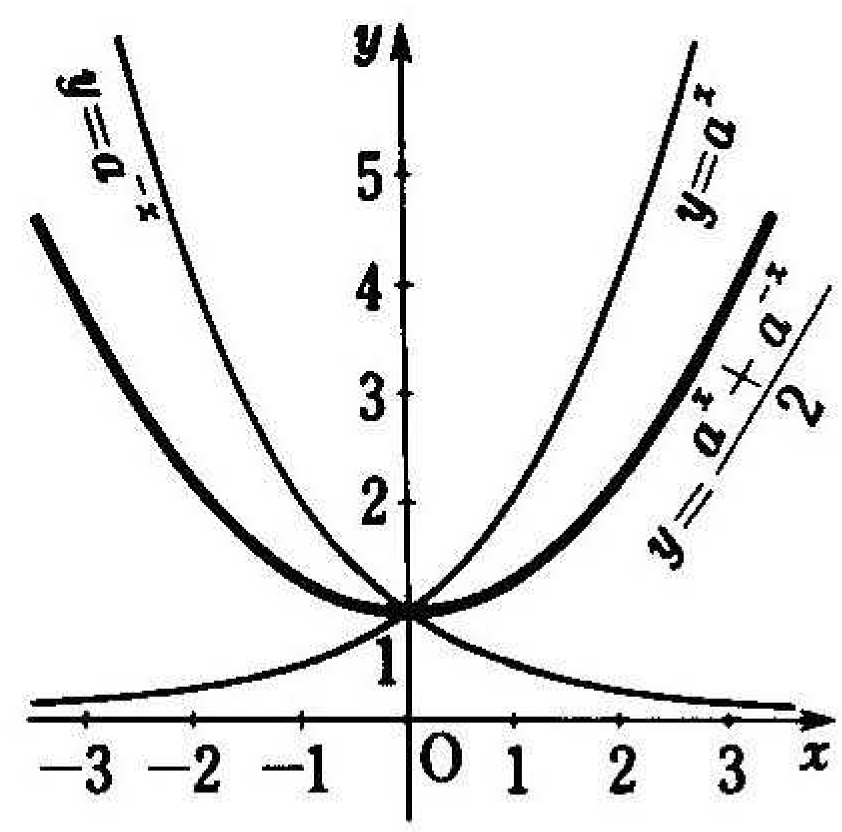
ですから，$y=2^x$ において x の代わりに $-x$ をおいたものです。これは y 軸について対称になるハズ。いや，そんな抽象的なことをいわずとも，x にいろいろ値を入れてみるとハッキリするでしょう。

結果は右の通りです。



■練習 3. $a>1$，$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ であるとき，この関数のグラフをかけ。　　（島根大）

ヒント　$y=a^x$ と $y=a^{-x}$ のグラフをかき，両方の y 座標の中点を結んで得られる曲線が求めるものです。



とはいっても a の値がわからないから困る。このようなときには，a に 2 とか 3 を入れたものについて正確にかけばいいでしょう。$a=2$ なら上のようになるハズ。

＊　＊　＊

◆ では，次に応用練習をしてみよう。

■練習 4. $y=2^x$ のグラフと次の関数のグラフの位置関係を調べよ。

(1)　$y=2^{x-1}$

(2)　$y=-2^x$

(3)　$y=2^{-x}$

(4)　$y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

ヒント　ていねいにグラフをかいてみればわかるハズです。結果だけ書いておきましょう。

(1)は x 軸方向へ 1 だけ平行移動したもの
(2)は x 軸に関して対称移動したもの
(3)は y 軸に関して対称移動したもの
(4)は原点に関して対称移動したもの

同じことですが，もう 1 つやってみましょう。

■練習 5. 曲線 $y=3^x$ と原点に関して対称な曲線の方程式を求めよ。また，直線 $y=x$ に関して対称な曲線の方程式を求めよ。

（同志社大）

ヒント $y=3^x$ と原点に関して対称な曲線は x の代わりに $-x$, y の代わりに $-y$ を代入したものなのですから

$$-y=3^{-x}$$

すなわち

$$y=-\frac{1}{3^x}$$

で与えられます。

次に，直線 $y=x$ に関して対称な曲線は x の代わりに y，y の代わりに x を代入して得られるのですから

$$x=3^y$$

対数をとって

$$\log_3 x=y$$

つまり

$$y=\log_3 x$$

です。

答 $y=-\frac{1}{3^x},\ y=\log_3 x$

練習 6. 関数 $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ は x の増加関数であることを示せ。 （佐賀大）

ヒント グラフをかいて示すこともできるし，$x_1>x_2$ のとき，対応する y の値について $y_1>y_2$ が成り立つことをいってもよいでしょう。すなわち，

$$y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$$

$$=\frac{(10^{2x}+1)-2}{10^{2x}+1}$$

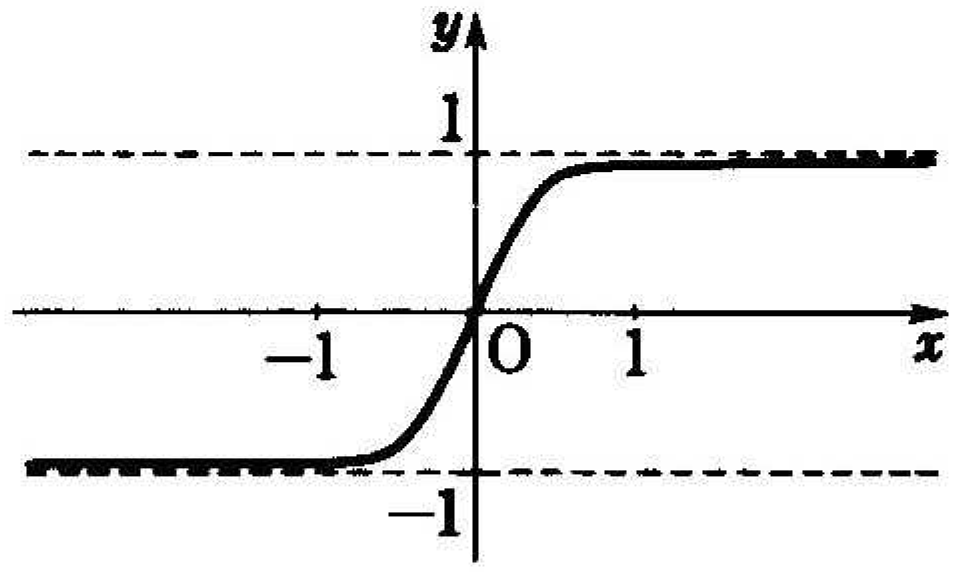
$$=1-\frac{2}{10^{2x}+1}$$

ところが x が増加するにつれて $10^{2x}+1$ は増加し，つねに正。したがって

$$y=\frac{2}{10^{2x}+1}$$

は減少関数で，これを1から引いた関数は増加関数である。こうしてみると，グラフをかくまでもなかった。

なお x にいろいろ値を入れて概形をかいてみると，次のようになります。



練習 7. a, b, c を0でない定数とするとき，

$$y=10^{a+bx}+c$$

のグラフが，3点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ を通るとき，c を y_1, y_2, y_3 で表せ。ただし，$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$, $x_1\neq x_2$ とする。 （金沢大）

ヒント $y=10^{a+bx}+c$

であるから

$$y-c=10^{a+bx}$$

$$\therefore\ \log(y-c)=a+bx$$

$$\therefore\ x=\frac{\log(y-c)-a}{b}$$

ゆえに

$$x_1=\frac{\log(y_1-c)-a}{b}$$

$$x_2=\frac{\log(y_2-c)-a}{b}$$

$$x_3=\frac{\log(y_3-c)-a}{b}$$

これを $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$ に代入すると

$$2\log(y_3-c)=\log(y_1-c)+\log(y_2-c)$$

すなわち

$$(y_3-c)^2=(y_1-c)(y_2-c)$$

が得られる。バラバラにして

$$c(y_1+y_2-2y_3)=y_1y_2-y_3{}^2$$

ところが，a, b は0でないから $y=10^{a+bx}$ のグラフからわかるように3点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ は1直線上にありえない。したがって

$$y_1+y_2-2y_3\neq 0$$

$$\therefore\ c=\frac{y_1y_2-y_3{}^2}{y_1+y_2-2y_3} \quad \cdots\cdots 答$$

○指数計算の仕方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数(シスウ)をユビスウと読む生徒がいた。聞いてみると，高校には行かないで独学しているという。独学の難しさ!!

◆ 指数計算の基本公式は次のようです。

$$a^m \times a^n = a^{m+n},\quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn},\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad (m,\ n \text{は自然数})$$

$$a^0 = 1$$

では，まず上の公式の練習から：――

■練習 1. $81^{-\frac{3}{4}}$ を計算せよ。

（解）$81^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{3^4})^3}$

$= \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$　　答 $\dfrac{1}{27}$

■練習 2. $32^{-0.4}$ を計算せよ。

（解）$32^{-0.4} = \dfrac{1}{32^{0.4}} = \dfrac{1}{(2^5)^{0.4}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

答 $\dfrac{1}{4}$

■練習 3. $100^{2.5}$ を計算せよ。

（解）$100^{2.5} = (10^2)^{2.5} = 10^5 = 100000$

答 100000

＊　＊　＊

◆ 次に，やや複合された計算をやってみませんか。

■練習 4. $(x^a)^{b-c}(x^b)^{c-a}(x^c)^{a-b}$ を簡単にせよ。

（解）与式 $= x^{ab-ac} \cdot x^{bc-ba} \cdot x^{ca-cb}$

$= x^{ab-ac+bc-ba+ca-cb}$

$= x^0 = 1$

■練習 5. $\left(a^{\frac{x}{x-y}}\right)^{\frac{x}{z-x}} \times \left(a^{\frac{y}{y-z}}\right)^{\frac{y}{x-y}} \times \left(a^{\frac{z}{z-x}}\right)^{\frac{z}{y-z}}$ を簡単にせよ。

（ヒント）$a^{\frac{x^2}{(x-y)(z-x)} + \frac{y^2}{(y-z)(x-y)} + \frac{z^2}{(z-x)(y-z)}}$

となります。

そこで，指数だけを計算しますと

$$\frac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

となって，さらに，この分子は

$$\begin{aligned} \text{分子} &= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z) \\ &= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\} \\ &= (y-z)(x-y)(x-z) \\ &= -(x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

となり，結局，指数は -1 になります。

$\therefore$　与式 $= a^{-1} = \dfrac{1}{a}$　　答 $\dfrac{1}{a}$

（注）これなどは指数計算というよりは，むしろ，因数分解の問題というべきでしょう。

＊　＊　＊

◆ 次に，やや複雑な問題をやってみることにしましょう。

■練習 6. $4^{2x} = 5$ のとき，次の式の値を求めよ。

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$$

（千葉大）

（ヒント）$2^x = u$ とおいてみたらどうだろう。

$$4^{2x} = (2^2)^{2x} = 2^{4x} = (2^x)^4 = u^4$$

と書けますから

$$u^4 = 5 \qquad \therefore \quad u^2 = \sqrt{5}$$

さて，

$$\text{与式} = \frac{u^3+\frac{1}{u^3}}{u+\frac{1}{u}} = \frac{\left(u+\frac{1}{u}\right)\left(u^2-1+\frac{1}{u^2}\right)}{u+\frac{1}{u}}$$

$$= u^2-1+\frac{1}{u^2} = \sqrt{5}-1+\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{6-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}-5}{5}$$

答 $\dfrac{6\sqrt{5}-5}{5}$

/21
■練習 7.

$$\left\{1-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}\right\}\div\left\{1-\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{(e^x+e^{-x})^3}\right\}$$

を簡単にせよ。ただし，$e>0$. (東京外語大)

(ヒント) ものすごい式ほど簡単なもの。これなども簡単にちがいない。

$e^x+e^{-x}=u$ とおいてみますと

$$e^{2x}+e^{-2x}=(e^x+e^{-x})^2-2=u^2-2$$

$$e^{3x}+e^{-3x}=(e^x+e^{-x})^3-3(e^x+e^{-x})$$
$$=u^3-3u$$

となりますから

$$与式=\left\{1-\frac{u^2-2}{u^2}\right\}\div\left\{1-\frac{u^3-3u}{u^3}\right\}$$

$$=\frac{2}{u^2}\div\frac{3u}{u^3}=\frac{2}{u^2}\cdot\frac{u^2}{3}=\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

*　　*　　*

◆ 簡単な条件のもとで，式の値を求める問題も多いのです。例えば，これをやってみませんか。

/23
■練習 8. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$ のとき $x+x^{-1}$ を a で表せ。

(解) $$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$$

の両辺を2乗すると

$$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=a^2$$

$$\therefore\quad x+2+x^{-1}=a^2$$

$$\therefore\quad x+x^{-1}=a^2-2\qquad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

■練習 9. $x=\frac{1}{2}(a^{\frac{n}{m}}+a^{-\frac{n}{m}})$ のとき $(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{m}{n}}$ を簡単にせよ。ただし，$a\geqq1$ で，m, n は正の整数とする。

(ヒント) $a^{\frac{n}{m}}=u$ とおいてみますと $u>0$

そして，$$x=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$$

$$\therefore\quad x^2-1=\frac{1}{4}\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-1$$
$$=\frac{1}{4}\left(u^2-2+\frac{1}{u^2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(u-\frac{1}{u}\right)^2$$

$$\therefore\quad\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\quad\left(\because\ u-\frac{1}{u}\geqq0\right)$$

かくして

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)$$
$$=u=a^{\frac{n}{m}}$$

$$\therefore\quad(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{m}{n}}=a\quad\cdots\ \boxed{答}$$

(注) $a\geqq1$ という条件があったから $\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)$ となったのです。もし $0<a<1$ なら $\sqrt{x^2-1}=-\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)$ となります。そして，このとき $(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{a}$ となります。余裕があったらやってみてください。

17/1.
■練習 10. $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ のとき，$f(x+y)$ を $f(x)$ と $f(y)$ で表せ。

(岐阜薬大)

(ヒント) これは難しい。$f(x+y)$ を変形して $f(x)$ と $f(y)$ で表そうとして，制限時間内にできる人はほとんどいないでしょう。これは $$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$$

を変形して a^{2x} を求めて $f(x+y)$ に代入してやればいいのです。では，解答を：——

(解) $$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$

より

$$a^{2x}=\frac{-f(x)-1}{f(x)-1}$$

ゆえに，

$$f(x+y)=\frac{a^{2(x+y)}-1}{a^{2(x+y)}+1}=\frac{a^{2x}\cdot a^{2y}-1}{a^{2x}\cdot a^{2y}+1}$$

$$=\frac{\dfrac{-f(x)-1}{f(x)-1}\cdot\dfrac{-f(y)-1}{f(y)-1}-1}{\dfrac{-f(x)-1}{f(x)-1}\cdot\dfrac{-f(y)-1}{f(y)-1}+1}\qquad\cdots\cdots(*)$$

$$=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\qquad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

この (*) から結果への計算は必ずやっておいてください。

○指数方程式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数方程式などは，きまった方法で，きまった順序を踏んでやれば必ずできるのですから，イヤガッタリ敬遠してはいけない。

◆ 3^x や a^n の式において，x や n のことを**指数**(しすう)といいます。指数に未知数の入った方程式を **指数方程式** というのです。

ここでは指数方程式の解き方を学ぶことにしましょう。まず，もっとも単純なタイプはこれです。

12/10

練習 1. $4^x=\dfrac{1}{32}$ を解け。

ヒント　$4=2^2$，$32=2^5$ といったふうに素数の積に分けることを **素因数に分解する** というのでしたね。また，$(a^m)^n=a^{mn}$ でしたから与えられた方程式は

$$(2^2)^x=\frac{1}{2^5}\qquad \text{つまり}\qquad 2^{2x}=2^{-5}$$

と書けます。これから

$$2x=-5\qquad \therefore\ x=-\frac{5}{2}\quad \cdots\cdots \text{答}$$

では，次のをやってみませんか。

12/10

練習 2. $27^x=9$ を解け。

$$(3^3)^x=3^2\qquad \therefore\ 3^{3x}=3^2$$

$$\therefore\ 3x=2\qquad \therefore\ x=\frac{2}{3}\quad \cdots\cdots \text{答}$$

12/10

練習 3. $3^{x^2}=(3^x)^3$ を解け。　(天理大)

ヒント　$3^{x^2}=3^{3x}\qquad \therefore\ x^2=3x$

$$\therefore\ x(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=0,\ 3\quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 次に，

指数が和や差になっているときは

$$\boldsymbol{a^{m+n}=a^m a^n,\quad a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}}$$

を使って分離する

のが定石です。

12/10

練習 4. $5^{2x-1}=\dfrac{1}{125}$ を解け。

ヒント　$5^{2x}\cdot 5^{-1}=\dfrac{1}{5^3}$

$$\therefore\ 5^{2x}=5^{-2}\qquad \therefore\ 2x=-2$$

$$\therefore\ x=-1\quad \cdots\cdots \text{答}$$

12/10

練習 5. $9^{x+2}=243$ を解け。

ヒント　原則通りやりますと

$$9^x\cdot 9^2=243$$

両辺を81で割って

$$9^x=3$$

$$\therefore\ (3^2)^x=3\qquad \therefore\ 3^{2x}=3^1$$

$$\therefore\ 2x=1\qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}\quad \cdots\cdots \text{答}$$

もちろん，次のようにやってもできます。

$$(3^2)^{x+2}=3^5$$

$$\therefore\ 3^{2x+4}=3^5$$

$$\therefore\ 2x+4=5\qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}$$

このほうが簡単じゃないか，と，キミは思うかもしれませんが，多くの場合，きまった手順を守ることにしたほうがよいのです。

*　*　*

◆ 次は，項が多いときは，上の手順を経てから，**適当なものをおきかえる** のがコツです。では，次のものを例にとって説明しましょう。

12/10

練習 6. $2^{x+1}-3\times 2^{-x}+5=0$ を解け。

(神戸外語大)

ヒント　まず $2^{x+1}=2^x\cdot 2$ とすると

$$2\times 2^x-3\times\frac{1}{2^x}+5=0$$

第2段階は $2^x=u$ とおきましょう。

そうすると

$$2u-\frac{3}{u}+5=0$$

$$\therefore\quad 2u^2+5u-3=0$$

因数分解できて

$$\begin{array}{rcr} 2 & \times & -1 \\ 1 & & 3 \\ \hline -1 & & 6 \end{array}$$

$$(2u-1)(u+3)=0$$

ところが $u=2^x>0$ ですから $u+3\neq 0$

$$\therefore\quad 2u-1=0 \qquad \therefore\quad u=\frac{1}{2}=2^{-1}$$

$$\therefore\quad 2^x=2^{-1}$$

$$\therefore\quad x=-1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

さあ，これで大切なことは全部終わりです。あとは多少計算のめんどうなのがあるだけです。

11/13

■練習 7. $2^{2x}-3\cdot 2^{x+2}+32=0$ を解け。 （弘前大）

（解） 与えられた方程式を変形して

$$(2^x)^2-3\cdot 2^x\cdot 2^2+32=0$$

$$\therefore\quad (2^x)^2-12\cdot 2^x+32=0$$

$2^x=u$ とおくと

$$u^2-12u+32=0$$

$$\therefore\quad (u-4)(u-8)=0$$

$$\therefore\quad u=4,\ 8$$

$$\therefore\quad 2^x=2^2,\ 2^3$$

$$\therefore\quad x=2,\ 3 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　　*　　*

◆ 次は連立方程式です。これは指数方程式としてのめんどうさはべつにありません。ともあれ，具体的な問題をやってみましょう。

11/13

■練習 8. $3^x+3^y=12,\ 3^{x+y}=27$ を解け。 （大阪女大）

（ヒント） 上の手順を忠実に守ってやれば，まず第２式から

$$3^x\cdot 3^y=27$$

そこで，$3^x=u,\ 3^y=v$ とおきますと，

$$u+v=12,\quad uv=27$$

この連立方程式を解くには $v=12-u$ を第２式に代入してもいいし，解と係数の関係を使ってもよいのです。その結果は

$$u=3,\ v=9\ ;\ u=9,\ v=3$$

$$\therefore\quad 3^x=3,\ 3^y=3^2\ ;\ 3^x=3^2,\ 3^y=3$$

$$\therefore\quad x=1,\ y=2\ ;\ x=2,\ y=1$$

解は２組ありましたね。

■練習 9. 連立方程式 $4^x-4^y=48,\ 2^{x+y}=32$ を解け。 （一橋大）

$\boxed{答}$ $x=3,\ y=2$

*　　*　　*

◆ 多少意地のわるい問題もあります。例えば，これなど，その部類です。

11/10

■練習 10. $2^{2x}=2^x+6$ を解け。 （慶大）

（ヒント） 定石通りやろう。

$2^x=u$ とおくと，$u>0$ で，

$$u^2=u+6$$

$$\therefore\quad u^2-u-6=0$$

$$\therefore\quad (u-3)(u+2)=0$$

$$\therefore\quad u=3 \qquad \therefore\quad 2^x=3$$

ここで解なし，などといってはいけません。両辺の対数をとると

$$x\log 2=\log 3 \qquad \therefore\quad x=\frac{\log 3}{\log 2}$$

あるいは，これを $x=\log_2 3$ と書いてもかまいません。

次も同類の問題です。

11/10

■練習 11. $|a|<1$ のとき，$\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}=a$ を x について解け。 （北大）

（ヒント） $10^x=u$ とおくと

$$\frac{u-u^{-1}}{u+u^{-1}}=a \qquad \therefore\quad \frac{u^2-1}{u^2+1}=a$$

$$\therefore\quad u^2=\frac{1+a}{1-a}$$

ところが $u>0$ ですから

$$u=\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \qquad \therefore\quad 10^x=\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

両辺の対数をとって

$$x=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

⑪ 指数不等式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数方程式の扱い方さえわかっていれば，とくに変わったことはありません。しかし，とかくイヤガラレル分野ですね。

◆ 指数が不得意の人は，**指数方程式の解法**（☞ p.60）を一度復習してからはじめるのがいいでしょう。

さて，指数方程式でも指数不等式でも解法は3段階でやります。第1は指数に＋や－がついていたら，これをとってしまうこと，第2はおきかえ，第3はそれを解いてもとにもどすこと。

こういっただけで，ピンとくる人はよくわかっている人。ピンとこなければ，p.60 の練習をやりながら，なるほど，そういう意味かとわかれば卒業です。では：——

*　*　*

◆ まずもっとも単純なタイプからはじめましょう。

12/10

練習 1. $2^x<8$ を解け。

（解）　$2^x<8$　　$\therefore\ 2^x<2^3$

$\therefore\ x<3$

答　$x<3$

12/10

練習 2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<16$ を解け。

（解）　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<16$　　$\therefore\ \dfrac{1}{2^x}<16$

$\therefore\ \dfrac{1}{16}<2^x$

$\therefore\ 2^{-4}<2^x$

$\therefore\ -4<x$　　答　$x>-4$

12/10

練習 3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x}\geqq 4$ を解け。

（解）　$x^2-3x=u$ とおくと

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^u\geqq 4$

$\therefore\ 2^u\leqq\dfrac{1}{4}$　　$\therefore\ 2^u\leqq 2^{-2}$

$\therefore\ u\leqq -2$

$\therefore\ x^2-3x\leqq -2$

$\therefore\ x^2-3x+2\leqq 0$

$\therefore\ (x-1)(x-2)\leqq 0$

$\therefore\ 1\leqq x\leqq 2$　　……答

*　*　*

◆ 次はやや複雑なものです。

12/10

練習 4. $9^x-8\cdot 3^x>-12$ を解け。

（解）　$3^x=u$ とおくと

$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2=u^2$

$\therefore\ u^2-8u+12>0$

$\therefore\ (u-2)(u-6)>0$

$\therefore\ u>6$　あるいは　$u<2$

$\therefore\ 3^x>6$　あるいは　$3^x<2$

$\therefore\ x>\log_3 6,\ x<\log_3 2$　　……答

12/10

練習 5. $2^{2x}-2^{x+1}<0$ を解け。

（解）　$2^{2x}-2\cdot 2^x<0$

$2^x=u$ とおくと $u>0$ で，

$u^2-2u<0$

$\therefore\ u(u-2)<0$

$\therefore\ u<2$

$\therefore\ 2^x<2^1$

12/10

$\therefore\ x<1$　　……答

練習 6. $2^{2x}-3\cdot 2^{x+2}+32>0$ を解け。

（解）　$2^{2x}-3\cdot 2^2\cdot 2^x+32>0$

$2^{2x}=(2^x)^2$ であるから $2^x=u$ とおくと

$u^2-12u+32>0$

$\therefore\ (u-4)(u-8)>0$

$\therefore\ u>8$　あるいは　$u<4$

$\therefore\ 2^x>8$　あるいは　$2^x<4$

$\therefore\ x>3$　あるいは　$x<2$　　……答

練習 7. $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}-24\leqq 0$ を解け。

(解)　$4\cdot 4^x-5\cdot 2^2\cdot 2^x-24\leqq 0$

$$\therefore\quad 4^x-5\cdot 2^x-6\leqq 0$$

$2^x=u$ とおくと

$$u^2-5u-6\leqq 0$$

$$\therefore\quad (u-6)(u+1)\leqq 0$$

$u>0$ であるから

$$u\leqq 6$$

$$\therefore\quad 2^x\leqq 6$$

$$\therefore\quad x\leqq \log_2 6$$ ……答

*　　*　　*

◆ 次はかなりめんどうな部類です。めんどうといっても，本質的には上と変わるところはありません。ムリにやるほどのこともありませんが，ファイトのある人はやってみるといい。

11/10 **練習 8.** $a>0$ のとき次の不等式を解け。

$$a^{2x}+a<a^{x+1}+a^x$$

(解)　$(a^x)^2+a<a\cdot a^x+a^x$

$a^x=u$ とおいて変形すると

$$u^2-(a+1)u+a<0$$

$$\therefore\quad (u-1)(u-a)<0$$

$1<a$ のとき

$$1<u<a$$

$$\therefore\quad a^0<a^x<a^1$$

$$\therefore\quad 0<x<1$$

$a=1$ のとき

$(u-1)^2<0$，これは解なし。

$0<a<1$ のとき

$$a<u<1$$

$$\therefore\quad a^1<a^x<a^0$$

$$\therefore\quad 1>x>0$$

答 $\begin{cases} a\fallingdotseq 1 \text{ のとき } & 0<x<1 \\ a=1 \text{ のとき } & \text{解なし。} \end{cases}$

練習 9. $a^{2x}+1<a^{x+2}+a^{x-2}$ を解け。ただし，$a>0$ とする。　（東京水産大）

(解)　$a^{2x}+1<a^2a^x+a^{-2}a^x$

$a^x=u$ とおくと

$$u^2+1<a^2u+\frac{1}{a^2}u$$

$$\therefore\quad u^2-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)u+1<0$$

$$\therefore\quad (u-a^2)\left(u-\frac{1}{a^2}\right)<0$$

$a>1$ のとき

$$\frac{1}{a^2}<u<a^2$$

$$\therefore\quad a^{-2}<a^x<a^2$$

$$\therefore\quad -2<x<2$$

$0<a<1$ のとき

$$a^2<u<\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore\quad a^2<a^x<a^{-2}$$

$$\therefore\quad 2>x>-2$$

$a=1$ のとき

$(u-1)^2<0$，これは解なし。

答 $\begin{cases} a=1 \text{ のとき } & \text{解なし。} \\ a\fallingdotseq 1 \text{ のとき } & -2<x<2 \end{cases}$

(注)　$y=a^x$ $(a>0,\ a\fallingdotseq 1)$ のグラフは

$\begin{cases} \boldsymbol{a>1} \textbf{ のとき} & \textbf{単調増加} \\ \boldsymbol{1>a>0} \textbf{ のとき} & \textbf{単調減少} \end{cases}$

する。だから

$1<3^x<3^1$　なら　$0<x<1$

であるし，

$\dfrac{1}{3}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<1$　でも　$0<x<1$

となるのです。これがとかくわからなくなる点です。まとめておきますと，

指数関数 $\boldsymbol{y=a^x}$ $\boldsymbol{(a>0,\ a\fallingdotseq 1)}$ で，

$\boldsymbol{a>1}$ のとき

$$\boldsymbol{a^p<a^q \rightleftarrows p<q}$$

$\boldsymbol{1>a>0}$ のとき

$$\boldsymbol{a^p<a^q \rightleftarrows p>q}$$

練習 10. $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}<a$

を解け。ただし，a は実数である。

(ヒント)　$2^x=u$ とおくと

$$u^2-2au-1<0$$

これを解いて……

答　$x<\log_2(a+\sqrt{a^2+1})$

立方根の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈立方根に関係したいくつかの典型的な問題の扱い方は，イワバ，暗記もの。覚えておくより仕方がありません。

◆ 立方根の入った問題の扱い方を主なものについて，練習しておくのが目的です。ところで，それは2つあります。第1は立方根の求め方です。まず，具体例から：

練習 1. 1の立方根を求めよ。

ヒント　$z^3=1$ を満足する z を求めればいいのです。移項して

$$z^3-1=0$$

$$\therefore\quad (z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore\quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ の一方を ω で表すと，他方は ω^2 で表せるのでした。そこで 1 の立方根を 1, ω, ω^2 と表せるわけ。これについて詳しくは数Ⅰ（☞ p.122）参照。

練習 2. 数 a の立方根の1つを α で表すと，他の2つは $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ で表されることを示せ。ここに ω は1の虚数立方根である。ただし，$a\neq 0$.

ヒント　題意により $\alpha^3=a$ であるから

$$(\alpha\omega)^3=\alpha^3\omega^3=\alpha^3=a$$
$$(\alpha\omega^2)^3=\alpha^3\omega^6=\alpha^3=a$$

で，したがって $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ は a の立方根であることがわかります。そして，

$$\alpha-\alpha\omega=\alpha(1-\omega)\neq 0$$
$$\alpha-\alpha\omega^2=\alpha(1-\omega^2)\neq 0$$
$$\alpha\omega-\alpha\omega^2=\alpha\omega(1-\omega)\neq 0$$

で，すべて異なるから，確かに成立することがわかります。こういうわけで立方根は3つのうち，1つさえ求められれば，あとの2つはすぐ出るのです。

そこで，おこるのは次のような問題です。

練習 3. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$ を満足する有理数 a, b を求めよ。　（東京工大）

ヒント　$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$

の両辺を3乗しますと

$$\begin{aligned}7+5\sqrt{2}&=a^3+3a^2b\sqrt{2}+3ab^2\cdot 2\\&\quad+b^3\cdot 2\sqrt{2}\\&=(a^3+6ab^2)+(3a^2b+2b^3)\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a^3+6ab^2=7\qquad\cdots\cdots①$$
$$3a^2b+2b^3=5\qquad\cdots\cdots②$$

この左辺は3次の同次式ですから，定数項を消去するのが定石。そこで，

①×5−②×7 を作ると

$$5a^3-21a^2b+30ab^2-14b^3=0$$

両辺を b^3 で割って $\dfrac{a}{b}=x$ とおきますと

$$5x^3-21x^2+30x-14=0$$

$x=1$ を入れてみると，幸い0になりますから，左辺は因数分解できて，右のようになります。すなわち，

1	5	−21	30	−14
		5	−16	14
	5	−16	14	0

$$(x-1)(5x^2-16x+14)=0$$

ところが第2因数の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=8^2-5\cdot 14=64-70=-6<0$$

ですから，　$x=1$　つまり　$a=b$

これを①に代入して　$a^3=1$　　$\therefore\quad a=1$

答　$a=b=1$

＊　＊　＊

◆ 第2は，立方根のついた無理数を解とする3次方程式を作ることです。

練習 4. $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ を解とする3次の有理係数の方程式を作れ。

(ヒント)　$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
を使うのです。つまり

$$x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$$

の両辺を3乗しますと

$$x^3=3+9+3\sqrt[3]{27}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$$

$$\therefore\quad x^3=12+3\cdot 3x$$

$$\therefore\quad x^3-9x-12=0 \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

そこでこんな問題もよく出されるのです。

17/10

■練習 5. $x=\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$ のとき $x^3-21x+5$ の値を求めよ。

(解)　$x=\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$ の両辺を3乗すると

$$x^3=7+49+3\sqrt[3]{7\cdot 49}(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49})$$

$$\therefore\quad x^3=56+21x$$

$$\therefore\quad x^3-21x=56$$

$$\therefore\quad x^3-21x+5=61$$

答　61

*　*　*

◆ 以上で大切なことは終わりましたが，次にはいくつか応用的問題に当たっておくことにしましょう。

M/10

■練習 6. $a>0,\ b>0$ のとき

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} \text{ と } \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}$$ の大小を吟味せよ。

(ヒント)　$\sqrt[3]{a}=\alpha,\ \sqrt[3]{b}=\beta$ とおきますと

$$a=\alpha^3,\ b=\beta^3$$

ゆえに $\sqrt[3]{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}}$ と $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の大小を比べてみればよい。そして，そのためには

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \text{ と } \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$

の大小が問題になる。前のほうから後のほうを引いてみますと

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\frac{1}{8}(\alpha+\beta)^3$$

$$=\frac{1}{8}(\alpha+\beta)\{4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2\}$$

$$=\frac{3}{8}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2\geqq 0$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\geqq\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}$$

■練習 7. 2数 $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{10}$ の大小を吟味せよ。

(ヒント)

$$(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$$

$$(\sqrt[4]{10})^{12}=10^3=1000$$

答　$\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$

17/10

■練習 8. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{-x+1}=2$ を解け。

(ヒント)　$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ を使うのがコツです。

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{-x+1}=2$$

の両辺を3乗して上の公式を適用すると

$$(x+1)+(-x+1)$$
$$+3\sqrt[3]{(x+1)(-x+1)}\cdot 2=8$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{1-x^2}=1$$

$$\therefore\quad 1-x^2=1 \qquad \therefore\quad x=0$$

答　0

(注)　3乗しても実数の無縁根は出てきません。つまり，A，B が実数のとき $A=B$ と $A^3=B^3$ は同値ですから，代入して調べる必要はありません。念のため。

12/10

■練習 9. 2次方程式 $x^2-9x+m=0$ の2つの実数解の3乗根の和が3に等しいという。mの値を求めよ。

(ヒント)　2つの実数解を α，β とすると

$$\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=3$$

両辺を3乗して

$$\alpha+\beta+3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})=27$$

$$9+3\sqrt[3]{m}\cdot 3=27$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{m}=2 \qquad \therefore\quad m=8$$

答　$m=8$

*　*　*

◆ このように3乗根の関係した問題の扱い方で大切なのは，3乗の公式の使い方です。くどいけれども，もう一度いっておきます。

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ではいけない。

$$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)}$$

で，その **$a+b$ があれだ**，ということです。

◐対数関数のグラフ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対数関数のグラフを正確にかける人は少ない。というのも $y=\log x$ のグラフをもとに考えるからです。そうではなく，こうする!!

◆ 対数というのは

$$y=\log_a x$$

で表されますが，これは

$$a^y=x$$

と同値です。ただし

$$a>0,\ a\neq 1,\ x>0$$

をお忘れなく。グラフはこの関係を使ってかくことです。では：——

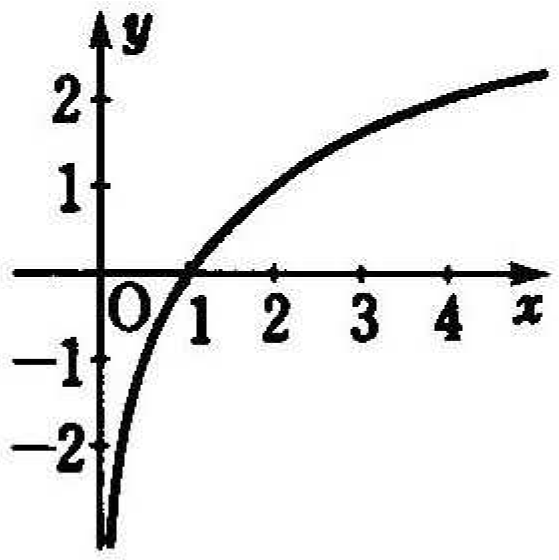
12/10

練習 1. $y=\log_2 x$ のグラフをかけ。

(ヒント) $y=\log_2 x$

$\therefore\ 2^y=x$

yにいろいろ値を入れてxを求め，プロットしてグラフをかけば，右のようになります。



12/8

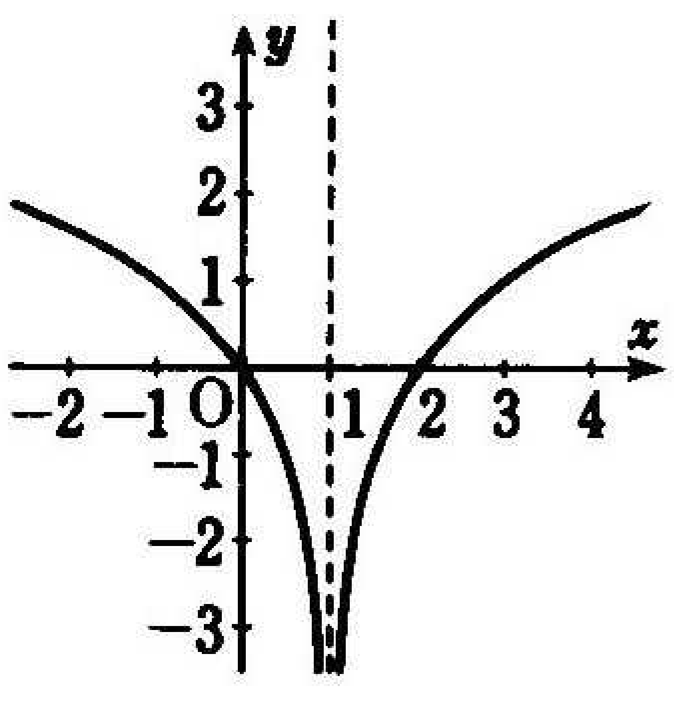
練習 2. $y=\log_2|x-1|$ のグラフをかけ。（長崎大）

(ヒント) $2^y=|x-1|$

$\therefore\ x-1=\pm 2^y$

$\therefore\ x=1\pm 2^y$

yに 0，± 1，± 2，…… を入れ x を求めグラフをかくと右のようになります。



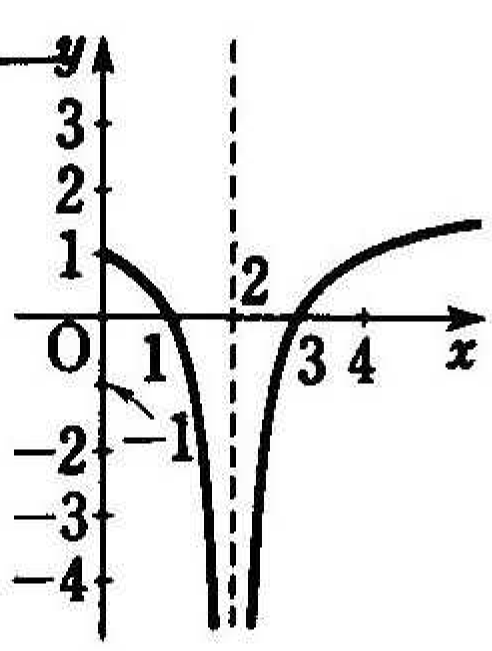
12/5

練習 3. $y=\log_2||x|-2|$ のグラフをかけ。

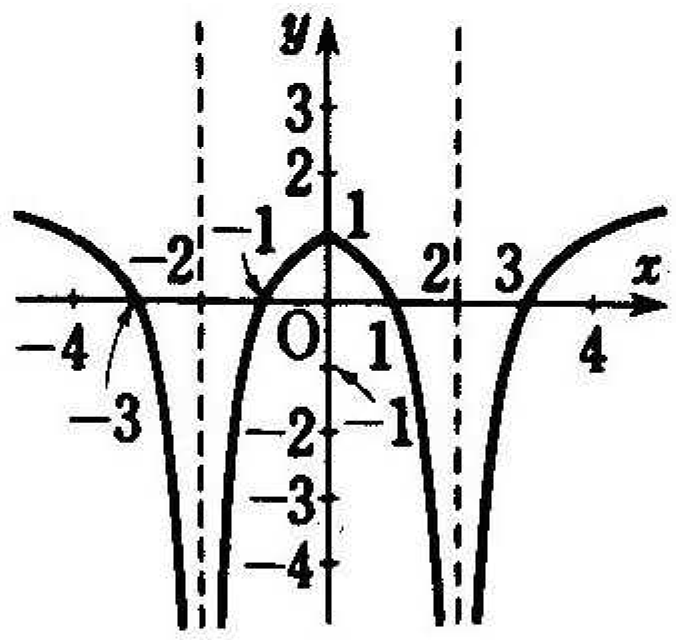
(解) xの符号を変えても変わらないから偶関数で，したがってグラフはy軸に関して対称である。いま，$x\geqq 0$ とすると

$y=\log_2|x-2|$

$\therefore\ 2^y=|x-2|$



$x\geqq 0$ についてグラフをかくと左下図のようになり，したがって求めるグラフは右のようになる。



＊　＊　＊

◆ 次には，いくらかめんどうなものをいくつか扱ってみませんか。方針はまったく同じです。

12/10

練習 4. $\log(x+y+2)=\log x+\log(y+2)$ のグラフをかけ。（千葉大）

(解) $\log(x+y+2)=\log x(y+2)$

$\therefore\ x+y+2=x(y+2)$

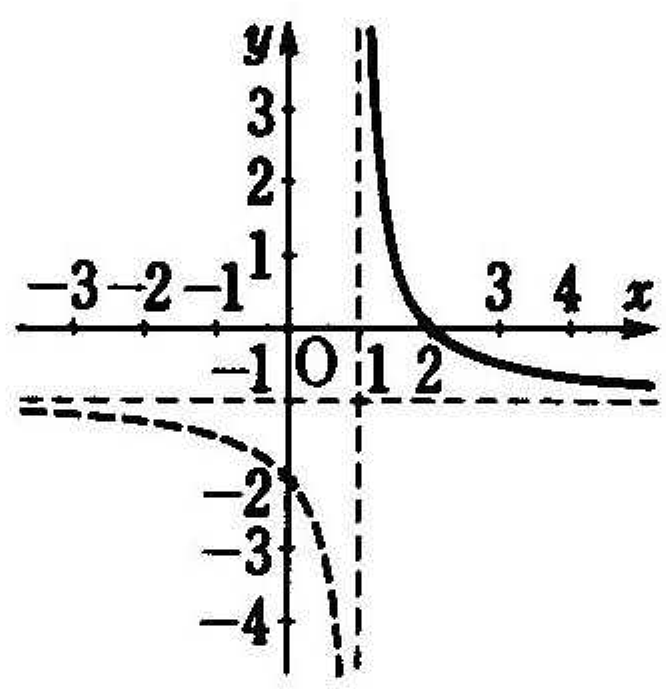
これをyについて解くと

$$y=\frac{-x+2}{x-1}$$

ただし，

$x>0,\ y>-2$

よって，求めるグラフは右のようになる。



分数関数のグラフのかき方については数Ⅰ（☞ p.220）を参照してください。

練習 5. $\log_3 x^2+2\log_3\left(\dfrac{y}{2}-\sqrt{y}\right)=2$ なるとき $y=f(x)$ の形に表してグラフをかけ。（東北大）

(解) $2\log_3|x|+2\log_3\left(\dfrac{y}{2}-\sqrt{y}\right)=2$

$$\therefore\ \log_3\left\{|x|\left(\frac{y}{2}-\sqrt{y}\right)\right\}=1$$

$$\therefore\ |x|\left(\frac{y}{2}-\sqrt{y}\right)=3$$

$$\therefore\ y-2\sqrt{y}-\frac{6}{|x|}=0$$

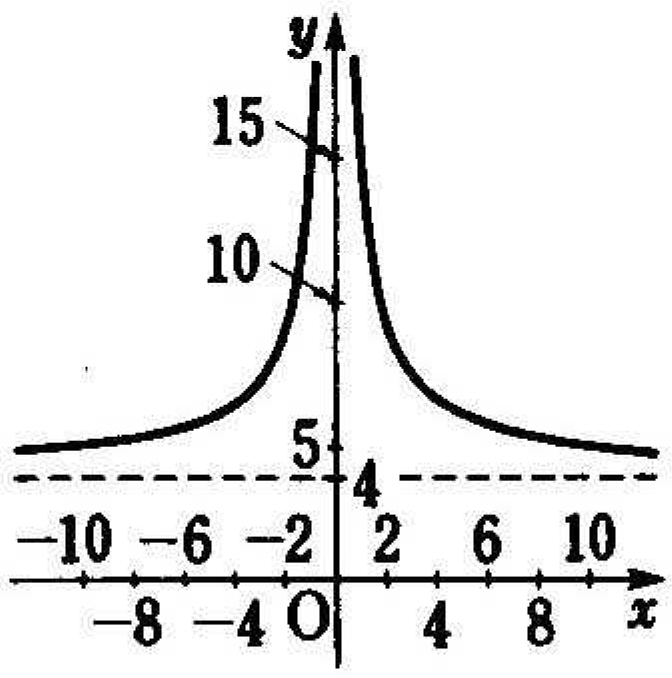
$\sqrt{y}$ の2次方程式とみて解くと

$$\sqrt{y}=1+\sqrt{1+\frac{6}{|x|}}\quad（負の解を捨てる）$$

$$\therefore\quad y=2+\frac{6}{|x|}+2\sqrt{1+\frac{6}{|x|}}$$

x	0.75	2	10	100
y	16	9	約 5.1	約 4.1

ゆえにグラフは右のようになる。



＊　＊　＊

◆ 次には対数関数のグラフについてその性質や関係を調べておきましょう。

練習 6. $y=\log_a x$ と $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフとどんな関係があるか。（奈良女大）

（ヒント） 底のちがうときには，公式

$$\log_a x=\frac{\log_m x}{\log_m a}$$

を使って底をそろえるのでしたね。だから

$$\log_{\frac{1}{a}} x=\frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}}=\frac{\log_a x}{-1}=-\log_a x$$

となって，2つのグラフは x 軸に関して対称であることがわかります。

練習 7. $y=\log_{\frac{1}{2}}|x+2|$ と $y=\log_2|x-2|$ のグラフはどんな位置関係にあるか。

（香川大）

（ヒント） 底を10に変えてみましょう。

$$y=\log_{\frac{1}{2}}|x+2|=\frac{\log|x+2|}{\log\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{\log|x+2|}{\log 2}\quad\cdots\cdots①$$

$$y=\log_2|x-2|=\frac{\log|x-2|}{\log 2}\quad\cdots\cdots②$$

ところが①において x の代わりに $-x$ を，y の代わりに $-y$ を代入すると②と一致します。してみると，①，②は原点に関して対称であることがわかります。

練習 8. $y=\log_2 4(x+1)$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを直線 $y=\boxed{}$ に関して対称に移動し，さらに，これを x 軸の正の向きに $\boxed{}$，y 軸の正の向きに $\boxed{}$ だけ平行移動したものである。（慶大）

（ヒント） これは対数関数のグラフとはいうものの本質的には写像の問題です。

$$y=\log_2 4(x+1)$$

$$\therefore\quad 2^y=4(x+1)$$

$$\therefore\quad 2^{y-2}=x+1\quad\cdots\cdots①$$

ところで，$y=2^x$ を直線 $y=x$ について対称に移動しますと $2^y=x$ となりますから，これをさらに x 軸の正の方向へ -1，y 軸の正の方向へ2だけ平行移動すると①のグラフになります。　（答）（順に）x，-1，2

（注） 実は解はこれだけではありませんが，1つ書けばいいでしょう。

練習 9. 下に書いてあるイからトまでの方程式の中から適当なものを選んで次の $\boxed{}$ に記入せよ。

(1) $\boxed{}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸に平行に移動したものである。

(2) $\boxed{}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを y 軸に平行に移動したものである。

(3) $\boxed{}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを原点に関して対称にうつしたものである。

(4) $\boxed{}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸に関して対称にうつしたものである。

(5) $\boxed{}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称にうつしたものである。

イ．$y=a^x$　ロ．$a^y=x+k$　ハ．$x=y^a$

ニ．$xa^y=-1$　ホ．$xa^{y+k}=1$

ヘ．$y=\log_a\frac{x}{k}$　ト　$y=\log_{\frac{1}{a}}x$

ただし，$a>0$，$a\neq1$，$k>0$，$k\neq1$ とする。

（東大）

（答） (1)ロ　(2)ヘ　(3)ニ　(4)ト　(5)イ

① 対数の計算

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対数の重要性はトミに色あせてしまった。計算機の進歩のもたらしたもの。しかし，対数関数そのものはいぜんとして重要デス。

◆ 対数の計算で大切なことは，まず，演算の規則です。

$$\log a+\log b=\log ab$$

$$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$$

$$\log a^n=n\log a$$

などはいわずもがな。底を変える公式

$$\log_a x=\frac{\log_m x}{\log_m a}$$

もオボエテおくこと。

＊　＊　＊

◆ さて，まず対数の値を求めることからはじめようか。

12/11

練習 1. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}4$ の値を求めよ。（福島大）

（解）
$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}4=x$$

とおくと

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=4 \qquad \therefore\ \frac{1}{2^{\frac{x}{2}}}=2^2$$

$$\therefore\ 2^{-\frac{x}{2}}=2^2$$

$$\therefore\ -\frac{x}{2}=2 \qquad \therefore\ x=-4$$

答　-4

12/11

練習 2. $\log_2 12-\log_2 3$ の値を求めよ。（東京学芸大）

（解）
$$\log_2 12-\log_2 3=\log_2\frac{12}{3}=\log_2 4$$
$$=2$$

答　2

12/11

練習 3. $\log_a 5=3$ を満足する a の値を求めよ。（早大）

（解）
$$a^3=5 \quad (a>0,\ a\neq 1)$$
$$\therefore\ a=\sqrt[3]{5} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ さて，第１段階は終わりました。次は，やや複合された計算です。

12/11

練習 4. $\log_8(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$ の値を求めよ。（法政大）

（解）
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

まったく同様にして

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \text{与式}=\log_8\sqrt{2}=x$$

とおくと

$$8^x=\sqrt{2} \qquad \therefore\ 2^{3x}=2^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ 3x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

12/11

練習 5. 次の式を簡単にせよ。

$$(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25}0.5)$$

（東京外語大）

（解）

$$\text{与式}=\left(\frac{\log 5}{\log 2}+\frac{\log 0.2}{\log 4}\right)\left(\frac{\log 2}{\log 5}+\frac{\log 0.5}{\log 25}\right)$$
$$=\frac{2\log 5+\log 0.2}{2\log 2}\cdot\frac{2\log 2+\log 0.5}{2\log 5}$$
$$=\frac{\log 5\cdot\log 2}{4\log 2\cdot\log 5}=\frac{1}{4}$$

答　$\frac{1}{4}$

＊　＊　＊

◆ では，条件のついた対数の計算に入るとしましょう。

■練習 6. $\log_a 2=x$, $\log_a 3=y$ のとき，$\log_a 72$ を x および y で表せ。　（静岡大）

（解）$72=2^3\cdot 3^2$ であるから

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \log_a 72 &= \log_a 2^3\cdot 3^2 \\ &= 3\log_a 2+2\log_a 3 \\ &= 3x+2y \quad \cdots\cdots \text{答} \end{aligned}$$

■練習 7. $a>0$, $b>0$ で $a^2+b^2=7ab$ ならば

$$\log\frac{a+b}{\boxed{}}=\frac{\log a+\log b}{\boxed{}}$$

である。$\boxed{}$ の中に適当な数を入れよ。

（小樽商大）

（ヒント）$\log\dfrac{a+b}{x}=\dfrac{\log a+\log b}{y}$

とおいて変形してみようか。右辺は

$$\frac{1}{y}\log ab=\log(ab)^{\frac{1}{y}}$$

であるから

$$\frac{a+b}{x}=(ab)^{\frac{1}{y}}$$

あるいは

$$\left(\frac{a+b}{x}\right)^y=ab$$

ところが $a^2+b^2=7ab$ であるから

$$\left(\frac{a+b}{x}\right)^y=\frac{a^2+b^2}{7}$$

なるほど，両辺の次数が等しくなければならないから　　$y=2$

$$\therefore\ \left(\frac{a+b}{x}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{7}$$

$$\therefore\ 7(a^2+2ab+b^2)=x^2(a^2+b^2)$$

またも $7ab=a^2+b^2$ を代入して

$$7(a^2+b^2)+2(a^2+b^2)=x^2(a^2+b^2)$$

$$\therefore\ x^2=9$$

$x>0$ であるから　$x=3$

答　（順に）3，2

（注）実は同じ結果を出すだけなら，カンタンにできます。

$$a^2+b^2=7ab$$

$$\therefore\ (a+b)^2=9ab$$

$$\therefore\ \left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$$

両辺の対数をとると

$$2\log\frac{a+b}{3}=\log a+\log b$$

$$\therefore\ \log\frac{a+b}{3}=\frac{\log a+\log b}{2}$$

■練習 8. a, b, c, d の間に

$$2a+2b+2c+2d=11 \quad \cdots\cdots①$$

$$2(a+b)(c+d)=5 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つとき，

$$\log(a+b)^2\log(c^2-d^2) \\ -\log(a+b)\log(c-d)^2$$

の値を求めよ。ただし，$\log 2=0.3010$ として，答は小数第4位未満を切り捨てよ。

（小樽商大）

（解）①，②より

$$(a+b)+(c+d)=\frac{11}{2} \quad \cdots\cdots③$$

$$(a+b)(c+d)=\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots④$$

ゆえに，$a+b$, $c+d$ は t についての2次方程式

$$t^2-\frac{11}{2}t+\frac{5}{2}=0$$

の2つの解である。これを解くと

$$t=\frac{1}{2},\ 5 \quad \cdots\cdots⑤$$

ところで

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 2\log(a+b)\log\{(c+d)(c-d)\} \\ &\quad -2\log(a+b)\log(c-d) \\ &= 2\log(a+b)\{\log(c+d)+\log(c-d) \\ &\quad -\log(c-d)\} \\ &= 2\log(a+b)\log(c+d) \end{aligned}$$

⑤を代入して

$$\begin{aligned} &= 2\log\left(\frac{1}{2}\right)\log 5 \\ &= 2\log\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{10}{2}\right) \\ &= 2(-\log 2)(1-\log 2) \end{aligned}$$

$\log 2=0.3010$ を代入して

$$\begin{aligned} &= -2\times 0.3010\times 0.6990 \\ &= -0.420798 \end{aligned}$$

答　-0.4207

対数方程式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対数方程式は不得意だという人が驚くほど多い。しかし，対数方程式がイヤなのではなく，対数がイヤなんだ，なあ。

◆ 対数方程式を解く基本は何といってもこれです。すなわち，

$\log_a x=b$ ならば　$x=a^b$

ただし，$a\neq 1$，$a>0$，$x>0$

ということ。では，さっそく，これをやってみませんか。

12/12

■練習 1. $\log_2 x=3$ を解けｇ。

(解)　$x=2^3=8$　　答　8

12/12

■練習 2. $\log_2(\log_3 x)=2$ を解け。　（早大）

(解)　$\log_3 x=2^2=4$

$\therefore\ x=3^4=81$　　答　81

次のは対数方程式ではありませんが，同じやり方ですから，この機会にやっておこうではありませんか。

12/12

■練習 3. $\log_x\sqrt{2}=2$ を解け。

(解)　$x^2=\sqrt{2}$

$x=\sqrt[4]{2}$　(>0)　　答　$\sqrt[4]{2}$

12/12

■練習 4. $\log_2 8=x$ を解け。

(解)　$2^x=8$　$\therefore\ 2^x=2^3$

$\therefore\ x=3$　　答　3

＊　＊　＊

◆ さて，これで第1段階は終わった。次はいささか高度のものをやってみましょう。

12/12

■練習 5. $\log_2(x-2)+\log_2(x-5)=2$ を解け。　（東京学芸大）

(ヒント)　まず左辺をまとめて

$\log_2(x-2)(x-5)=2$

ここまでくれば上と同じで

$(x-2)(x-5)=2^2$

$\therefore\ x^2-7x+6=0$

$\therefore\ (x-1)(x-6)=0$

$\therefore\ x=1,\ 6$

ここでやめてはいけない。**真数を正にしないものは捨てる** 必要がある。

さて，$x=1$ は適さない。$x=6$ は適す。

答　6

12/12

■練習 6. $\sqrt{3+\log_3 x^2}=\log_3 x$ を解け。

（明治大）

(ヒント)　まず $\log_3 x=u$ とおくと

$\log_3 x^2=2\log_3 x=2u$

$\therefore\ \sqrt{3+2u}=u$　　……①

さあ，まず，これを解こうじゃないか。

両辺を2乗すると

$3+2u=u^2$

$\therefore\ u^2-2u-3=0$

$\therefore\ (u-3)(u+1)=0$

$\therefore\ u=3,\ -1$

$u=-1$ は①の右辺を負にするから適さない。$u=3$ は確かに適す。

そこで，第2段階は

$\log_3 x=3$

を解くこと。すなわち

$x=3^3=27$　　答　27

＊　＊　＊

◆ さて，次は連立方程式を解くこと。べつにめんどうはないのです。

12/12

■練習 7.　$x-y=3$，$\log x+\log y=1$ を連立させて解け。　（広島工大）

(解)　$x-y=3$，$xy=10$

が得られる。yを消去して

$x(x-3)=10$

これを解いて

$x=5,\ -2$　($x=-2$ は不適)

$\therefore\quad x=5,\ y=2$　……答

17/12

■練習 8. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{\log x+\log y}{2}=\log\dfrac{x+y}{2} & \cdots\cdots① \\ \dfrac{\log x+\log y}{3}=\log\dfrac{x+y}{3} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

(解) ①より

$$\frac{1}{2}\log xy=\log\frac{x+y}{2}$$

$$\therefore\quad xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad\cdots\cdots③$$

$$\therefore\quad 4xy=x^2+2xy+y^2$$

$$\therefore\quad (x-y)^2=0 \qquad \therefore\quad x=y \quad\cdots\cdots④$$

これを②に代入して

$$\frac{2}{3}\log x=\log\frac{2x}{3}$$

$$\therefore\quad 2\log x=3\log\frac{2x}{3}$$

$$\therefore\quad x^2=\left(\frac{2x}{3}\right)^3 \qquad \therefore\quad x^2=\frac{8x^3}{27}$$

$x>0$ に注意して解いて

$$x=\frac{27}{8},\quad y=\frac{27}{8} \quad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

◆ 上の程度までできれば結構ですが，さらにやや高級な問題をやっておきましょう。

17/12

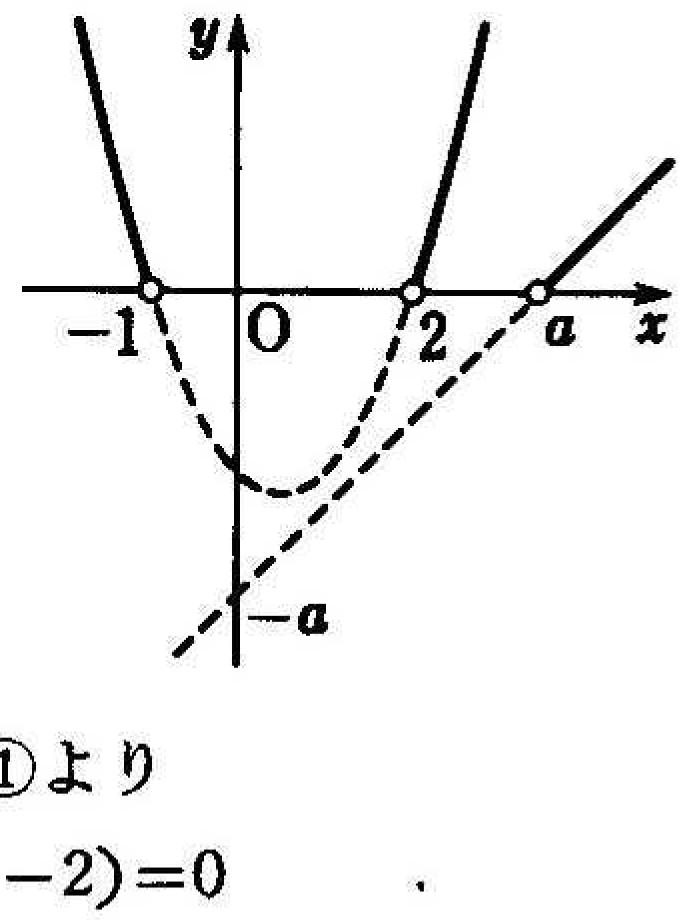
■練習 9. $\log(x^2-x-2)=\log(x-a)$ を解け。ここに a は定数である。

(ヒント)　$x^2-x-2=x-a>0$　……①

を満足する x を求めればよい。

$$y=x^2-x-2,\ y=x-a$$

のグラフをかいてみると，右のような放物線と直線になります。これらが x 軸の上のほうで交われば解があるわけです。



そして，この図から明らかなように，①より

$$x^2-2x+(a-2)=0$$

の2つの解を α，β ($\alpha<\beta$) とするとき

$$\alpha=1-\sqrt{3-a},\ \beta=1+\sqrt{3-a}$$

で，次のようになることがわかります。

$a\geqq 2$　のとき　解なし

$-1\leqq a<2$　のとき　解は β

$a<-1$ のとき　解は α と β

17/13

■練習 10. a，b が正の数で

$$\log ax\cdot\log bx+1=0$$

をみたす正の数 x があるとき $\dfrac{b}{a}$ はどんな範囲にあるか。ただし，底は 10 である。

(東大)

(ヒント)　$(\log x+\log a)(\log x+\log b)+1=0$

$\log x=u$ とおくと

$$u^2+(\log a+\log b)u+(1+\log a\log b)=0$$

これを満足する u があるための条件は，判別式を D として

$$D=(\log a+\log b)^2-4\cdot1\cdot(1+\log a\log b)\geqq 0$$

$$\therefore\quad (\log a-\log b)^2\geqq 4$$

$$\therefore\quad \left(\log\frac{a}{b}\right)^2\geqq 4$$

$$\therefore\quad \log\frac{a}{b}\geqq 2 \text{ あるいは } \log\frac{a}{b}\leqq -2$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}\geqq 100 \text{ あるいは } 0<\frac{a}{b}\leqq\frac{1}{100}$$

これが求める範囲です。

17/13

■練習 11. $f(x)=\log x$，$g(x)=x^2$ のとき $f(g(x))=g(f(x))$ をみたす x の値をすべて求めよ。底は 10 とする。　(一橋大)

(ヒント)　$f(g(x))=f(x^2)$

$$=\log x^2=2\log x \quad (x>0)$$

$$g(f(x))=(\log x)^2$$

$$\therefore\quad 2\log x=(\log x)^2$$

$$\therefore\quad \log x(\log x-2)=0$$

$$\therefore\quad \log x=0,\ 2 \qquad \therefore\quad x=1,100$$

このように，対数方程式だからめんどうになるわけではない。対数に対するコンプレックスがよくないのです。

人

○対数不等式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対数不等式の重点は，底にある。ソコにあらず，テイである。ソコをまちがってはいけません。

◆ $\log_a x$ は $a>1$ のとき，増加関数ですが $0<a<1$ のときには減少関数です。だから次のようになります。

12/14

■練習 1． $\log_2 x>3$ を解け。

（解）　$x>2^3$

$\therefore\ x>8$　……答

12/14

■練習 2． $\log_{\frac{1}{2}} x>3$ を解け。

（解）　$0<x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$\therefore\ 0<x<\dfrac{1}{8}$　……答

12/14

■練習 3． $\log_a x>2$ を解け。

（解）　$a>1$ のとき　$x>a^2$

$0<a<1$ のとき　$0<x<a^2$

*　*　*

◆ そこで，これをややめんどうにすると次のようなことになります。

12/14

■練習 4． $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>2$ を解け。

（ヒント）　まず　$\log_{\frac{1}{2}}\boxed{}>2$

なら

$$0<\boxed{}<\frac{1}{4}$$

なのですから

$$0<\log_2 x<\frac{1}{4}$$

したがって，　$1<x<\sqrt[4]{2}$　……答

12/14

■練習 5． $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)>2$ を解け。

（ヒント）　上と同じように考えて

$$\log_{\frac{1}{2}} x>4$$

$\therefore\ 0<x<\dfrac{1}{16}$　……答

12/14

■練習 6． a を1でない正の定数とするとき次の不等式を解け。　（福岡大）

$$\log_a(x-a)\geqq\log_{a^2}(x-a)\cdots\cdots①$$

（ヒント）　底が一方は a，他方は a^2 ですから，まず a に統一しましょう。

そうすると

$$\log_{a^2}(x-a)=\frac{\log_a(x-a)}{\log_a a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\log_a(x-a)$$

したがって，①は

$$2\log_a(x-a)\geqq\log_a(x-a)$$

となります。だから

$$\log_a(x-a)^2\geqq\log_a(x-a)$$

と変形されます。ここまでくると，a が1より大か小かで分けます。

$1<a$ のとき

$$(x-a)^2\geqq(x-a)>0$$

$\therefore\ (x-a)(x-a-1)\geqq0$

$\therefore\ x\geqq a+1$　（$x>a$ に注意!!）

$0<a<1$ のとき

$$0<(x-a)^2\leqq x-a$$

$\therefore\ (x-a)(x-a-1)\leqq0$

$\therefore\ a<x\leqq a+1$　（$x\neq a$ に注意）

答　$\begin{cases}1<a\ \text{のとき} & a+1\leqq x\\ 0<a<1\ \text{のとき} & a<x\leqq a+1\end{cases}$

12/17

■練習 7． $\log_m(x+2)-\log_m(3-x)>0$ の解が $\dfrac{1}{2}<x<3$ のとき m の値の範囲を求めよ。

（ヒント）　$\log_m(x+2)>\log_m(3-x)$ を解こう。

$m>1$ なら

$$x+2>3-x$$

$$\therefore \quad x>\frac{1}{2}$$

ところが 真数>0 から

$$x>-2 \text{ かつ } x<3$$

ですから $m>1$ のとき

$$\frac{1}{2}<x<3$$

となります。

　では $0<m<1$ のときにはどうなるだろうか？　このときには

$$0<x+2<3-x$$

$$\therefore \quad -2<x<\frac{1}{2}$$

となってしまうので，これでわかった。求める範囲は $m>1$ なのです。

＊　＊　＊

◆ では次に対数不等式の表す領域について考えてみましょう。

17/7

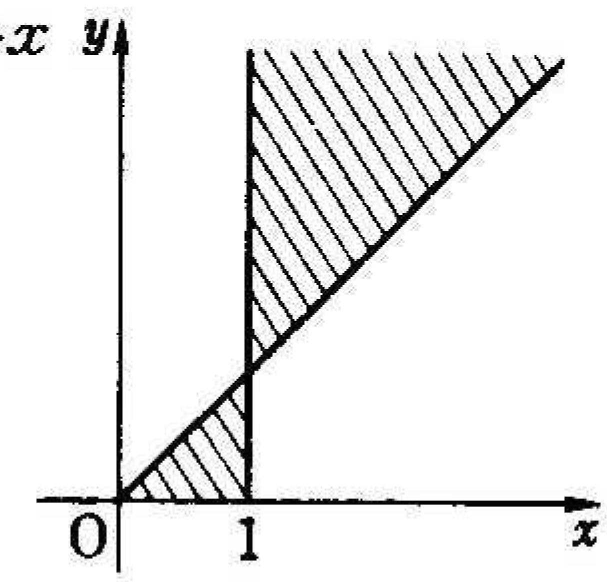
練習 8. $\log_x y>1$ を満足する点 $(x,\ y)$ の存在範囲に斜線を引け。

ヒント　$x>1$ のとき　$y>x$

$0<x<1$ のとき

$0<y<x$

ですから右の図のようになりましょう。もちろん境界線上の点は含みません。



17/7

練習 9. 次の不等式を満足する点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ。

$$\log_4 y-\log_2 x>1$$

ヒント　底がちがっている。そこで，2に統一しますと

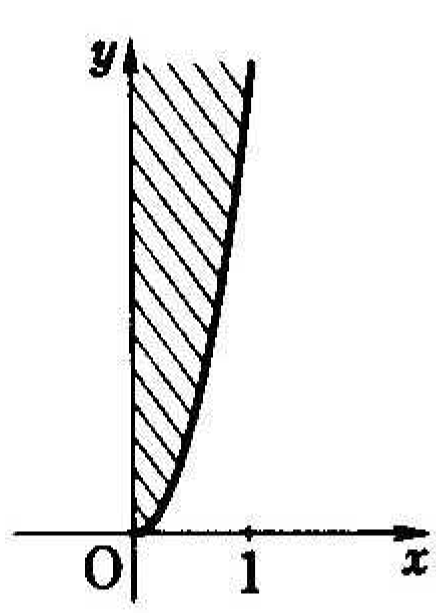
$$\frac{1}{2}\log_2 y-\log_2 x>1$$

$$\therefore \quad \log_2 y-2\log_2 x>2$$

$$\therefore \quad \log_2\frac{y}{x^2}>2$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x^2}>4$$

$$\therefore \quad y>4x^2$$



境界線上の点はすべて含まないことはいうまでもありません。

17/7

練習 10. $\log_x y \geqq 1+2\log_y x$ を満足する点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

ヒント　$\log_x y=\dfrac{\log y}{\log x}=t$ とおくと

$$\log_y x=\frac{\log x}{\log y}=\frac{1}{t}$$

となりますから

$$t \geqq 1+\frac{2}{t}$$

$$\therefore \quad t-1-\frac{2}{t}\geqq 0$$

$$\therefore \quad \frac{t^2-t-2}{t}\geqq 0$$

　両辺に t^2 を掛けて分母を払いますと（チョットゴ注意 t ヲ掛ケテハイケマセンヨ）

$$t(t-2)(t+1)\geqq 0$$

$$\therefore \quad -1\leqq t<0 \text{ あるいは } 2\leqq t$$

（$t<0$ ノトコロダケ等号ガツイテイマセンヨ）

$$\therefore \quad -1\leqq \log_x y<0 \quad \cdots\cdots ①$$

あるいは

$$2\leqq \log_x y \quad \cdots\cdots ②$$

　①より

$1<x$ のとき　$\dfrac{1}{x}\leqq y<1$　……③

$0<x<1$ のとき　$\dfrac{1}{x}\geqq y>1$　……④

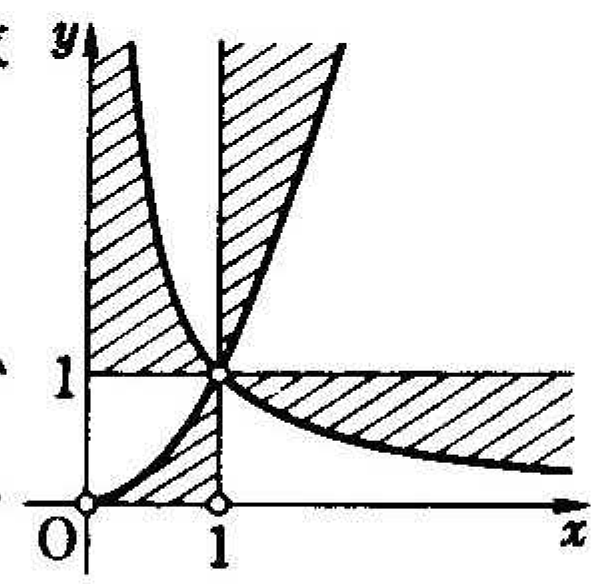
　②より

$1<x$ のとき　$x^2\leqq y$　……⑤

$0<x<1$ のとき　$0<y\leqq x^2$　……⑥

　③，④，⑤，⑥より求める範囲は右の図のようになります。

　ただし，境界線は太い実線の部分だけ含みます。



注　以上いずれも大小を扱うときに底が1より大か，小かが重要でした。これはくれぐれもお忘れなく……。

＊　＊　＊

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○常用対数表とは何か

◆対数表ができたため，天文学者の寿命が10年伸びた，といわれるほど，便利だったが，今や，電卓にもおよばなくなった。

◆ **常用対数**（じょうようたいすう）というのは底を10とする対数のことです。つまり

$$\log_{10}x \qquad (x>0)$$

のことで $y=\log_{10}x$ と $10^y=x$ とは同じことです。すなわち

$$\boldsymbol{y=\log_{10}x \iff 10^y=x}$$

ですから

$0\leqq y<1$ のとき　　$1\leqq x<10$
$1\leqq y<2$ のとき　　$10\leqq x<10^2$
$2\leqq y<3$ のとき　　$10^2\leqq x<10^3$
………………

といったことになります。

ですから

$\log_{10}7=0.\times\times\times\cdots\cdots$

といった値になるでしょうし，

$\log_{10}25=1.\times\times\times\cdots\cdots$
$\log_{10}878=2.\times\times\times\cdots\cdots$

といった値になるでしょう。つまり，

$\log_{10}x$ の値は
x の整数部分が n 桁なら
$n-1$ に小数を加えたもの

になります。上では×××……で示したものです。つまり，$\log_{10}x$ の小数部分だけわかればいいのです。この小数部分を表にしたのが **常用対数表** なのです。

常用対数表の簡単なものの半分を右にあげてあります。ふつう市販されているのは小数5桁(けた)までのものや，7桁のものが多いのですが，ヨーロッパには11桁などというのもあります。

＊　＊　＊

◆ では，この表の構成を説明しますと，

数	0	1	2	3 ……
1.0				⋮
1.1				⋮
1.2	………			.0899
⋮				

となっています。これは

$$\log_{10}1.23=0.0899$$

だということを示しています。すでに説明したように，対数の性質から

$$\log_{10}12.3=1.0899,\quad \log_{10}123=2.0899$$

となりますから，右の表は単に1～5の数についてしか使えない，というわけではありません。しかし，

$$\log_{10}1.237$$

となると困ります。このときはもっと詳しい対数表を使えばいいわけですが，それが手元にないときは，**その付近でグラフが直線であるとみなして，比例関係を使う** のです。

右の図で

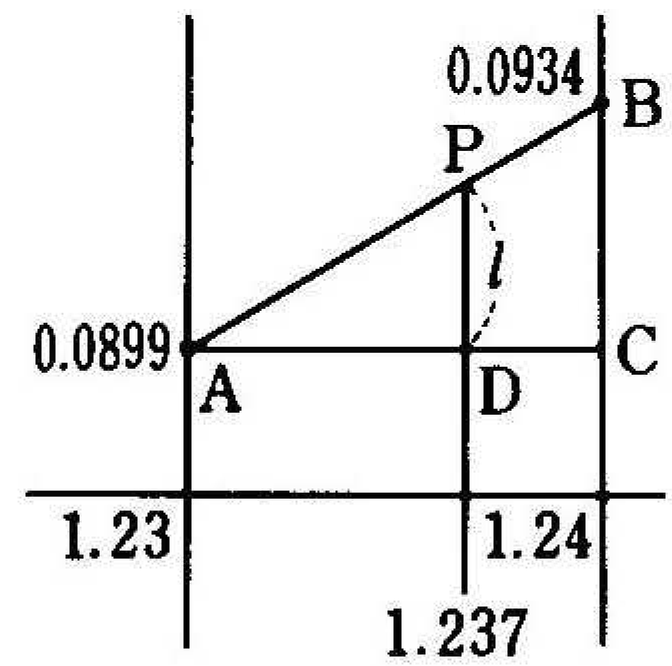
$\triangle APD \backsim \triangle ABC$

$\therefore\quad \dfrac{l}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$

$\therefore\quad l=BC\times\dfrac{AD}{AC}$

$=(0.0934-0.0899)$
$\quad\times\dfrac{1.237-1.23}{1.24-1.23}$

$=0.0035\times\dfrac{0.007}{0.01}\fallingdotseq 0.0025$



$$\therefore\quad \log_{10}1.237=0.0924$$

とするわけです。しかし，いちいち計算していてはめんどう。そこで，1.2の付近のとなりの数値との差に1～9を掛けたものを表に

して右のほうにあげてあります。これを比例部分と呼んでいます。

さきほどの例ですと

$$1.237-1.23=0.007$$

だから，7の下をみると24とある。これを末位をそろえて0.0899に加えて0.0923とするわけ。誤差が出ましたが，それはこのあらい表を使う限り仕方がないのです。

では，次の練習をやってみませんか。

■練習 1. $\log_{10}2.4$ を求めよ。

■練習 2. $\log_{10}3.45$ を求めよ。

■練習 3. $\log_{10}4.444$ を求めよ。

答 順に，0.3802，0.5378，0.6478

◆常用対数表 (1)◆ (つづきは ☞ (p. 77))

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

$\log\pi=0.4971$, $\log 2\pi=0.7982$

○常用対数表の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈常用対数表と類似の考えは，江戸時代の日本の数学者（これを和算家といいます）も独立に作りあげていました。

◆　ここでは常用対数表を使う具体的な計算法を学ぶことにしましょう。さっそく次の練習からはじめましょう。

■練習 1. $5.74^x=10$ を解け。

ヒント　両辺の対数をとりますと

$$\log 5.74^x=\log 10$$

$$\therefore\quad x\log 5.74=1$$

右の対数表から

$$\log 5.74=0.7589$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{0.7589}\fallingdotseq 1.3177$$

■練習 2. $\log_{7.93}9.567$ を求めよ。

ヒント　$\boldsymbol{\log_a x=\dfrac{\log_m x}{\log_m a}}$ でしたね。そこで，底を 10 に変えて，

$$\log_{7.93}9.567=\frac{\log 9.567}{\log 7.93}$$

$$=\frac{0.9808}{0.8993}\fallingdotseq 1.0906$$

ここで比例部分を使いましたが，それについては（☞ p.74）を参照してください。

*　*　*

◆　では，もっと応用的な問題をとりあげてみましょう。

■練習 3. ^{237}U（ウラン237）は一定の割合で崩壊して，7 日後にははじめの半分になるという。はじめの量の $\dfrac{1}{30}$ になるには何日かかるか。

解　1 日ごとに残量が m 倍になるとすると

$$m^7=\frac{1}{2}$$

ですから，両辺を $\dfrac{1}{7}$ 乗して

$$m=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}=2^{-\frac{1}{7}}$$

そこで，n 日後にはじめの量の $\dfrac{1}{30}$ になったとすると

$$\left(2^{-\frac{1}{7}}\right)^n=\frac{1}{30}$$

両辺の対数をとって

$$\log 2^{-\frac{n}{7}}=\log\frac{1}{30}$$

$$\therefore\quad -\frac{n}{7}\log 2=-\log 30$$

$$\therefore\quad n=\frac{7\log 30}{\log 2}=\frac{7\times 1.4771}{0.3010}$$

$$=\frac{10.3397}{0.3010}\fallingdotseq 34.4$$

答　35日

注　上の計算で $\log_{10}2$ や $\log_{10}3$ の計算が必要になったのですが，もちろん，p.75の常用対数表を使えばいい。しかし右の表だけでもできるのです。

$$\log 8=0.9031$$

$$\therefore\quad \log 2^3=0.9031$$

$$\therefore\quad 3\log 2=0.9031$$

$$\therefore\quad \log 2=0.3010$$

*　*　*

◆　では次をやってみませんか。

■練習 4. 右の常用対数表から $\log_{10}3$ を求めなさい。　答　0.4771

■練習 5. $\log_{10}x=0.9$ を解け。

ヒント　$0.8998<0.9<0.9004$

$$\therefore\quad \log 7.94<\log x<\log 7.95$$

$$\therefore\quad 7.94<x<7.95$$

これをもっと詳しくみるには，もっと詳しい対数表を使うか，あるいは比例部分を使えばいいのです。なお，比例部分については（☞ p.74）を参照してください。

＊　＊　＊

◆ 底が 10 でない対数については，公式

$$\log_a x=\frac{\log_{10}x}{\log_{10}a}$$

を使って計算すればよいのです。例えば，

練習 6. $\log_2 3$ の値を求めよ。

(解) $\log_2 3=\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{0.4771}{0.3010}=1.5850$

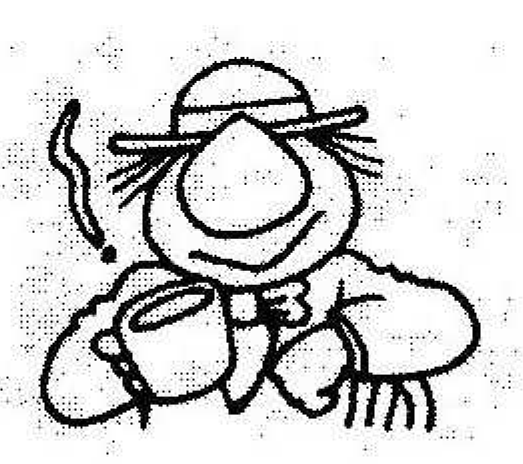
練習 7. $\log_3 10$ の値を求めよ。

(解) $\log_3 10=\frac{\log 10}{\log 3}=\frac{1}{\log 3}=\frac{1}{0.4771}$

$=2.0960$

◆常用対数表 (2)◆ ((1) は☞ (p.75))

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4



対数の入った絶対不等式と蛇足

◆不等式はイヤだ。対数はキライダ。ましては対数の入った不等式などみたくもない，というだろうが……

◆　ここでは対数の関係した絶対不等式について２，３やっておきましょう。

7/8

■練習 1.　$a>0$，$b>0$ のとき

$$\log\frac{a+b}{2}\geqq\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

を証明せよ。

ヒント　右辺を変形しますと

$$\log\sqrt{ab}$$

ですから

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

が証明できればよい。ところが，これは a，b の相加・相乗平均の関係ではないか。

7/12

■練習 2.　不等式

$$\log(10^m+10^n)\geqq\frac{m+n}{2}+\log 2$$

を証明せよ。

ヒント　左辺は log でまとまっているのに，右辺はしからず。さては，これを log でまとめればいいにちがいない。さあ，方針はきまったぞ。

$$\frac{m+n}{2}+\log 2=\log 10^{\frac{m+n}{2}}+\log 2$$

$$=\log 2\cdot 10^{\frac{m+n}{2}}$$

とかけます。さては

$$10^m+10^n\geqq 2\cdot 10^{\frac{m+n}{2}}$$

が証明できればいいだろう。うーん，両辺を２で割ってみようか。

$$\frac{10^m+10^n}{2}\geqq 10^{\frac{m+n}{2}}$$

うーん，左辺は 10^m と 10^n の相加平均だ。さては，　$\sqrt{10^m\cdot 10^n}=\sqrt{10^{m+n}}=10^{\frac{m+n}{2}}$

ナルホド，そうだったか!!

■練習 3.　$x\geqq 1$，$y\geqq 1$，$z\geqq 1$ のとき

$$\frac{\log x}{1+\log x}+\frac{\log y}{1+\log y}+\frac{\log z}{1+\log z}\geqq\frac{\log xyz}{1+\log xyz}$$

を証明せよ。

ヒント　$\log x=u$，$\log y=v$，$\log z=w$ とおいてみますと，　x，y，$z\geqq 1$　から

$$u\geqq 0,\ v\geqq 0,\ w\geqq 0$$

となります。そして証明すべき式は

$$\frac{u}{1+u}+\frac{v}{1+v}+\frac{w}{1+w}\geqq\frac{u+v+w}{1+u+v+w}\quad\cdots(*)$$

と変形されます。

そして，$1+u\leqq 1+u+v+w$ ですから

$$\frac{u}{1+u}\geqq\frac{u}{1+u+v+w}\quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{v}{1+v}\geqq\frac{v}{1+u+v+w}\quad\cdots\cdots②$$

$$\frac{w}{1+w}\geqq\frac{w}{1+u+v+w}\quad\cdots\cdots③$$

この３つを辺々相加えると (*) になります。

オヤ，モウデキタデハアリマセンカ。

トコロデ，コレハコレデ済ンダ。ツイデニ等号の成り立つのはどんな場合だろうか。

それは①，②，③がすべて等号の成り立つ場合です。そして，それは：——

$$u(v+w)=v(u+w)=w(u+v)=0$$

のときです。つまり

$$uv+uw=vu+vw=wu+wv=0$$

それは

$u=v=0$ または $v=w=0$ または $w=u=0$

すなわち

x，y，z のうち少なくも２つが１のときなのであった!!