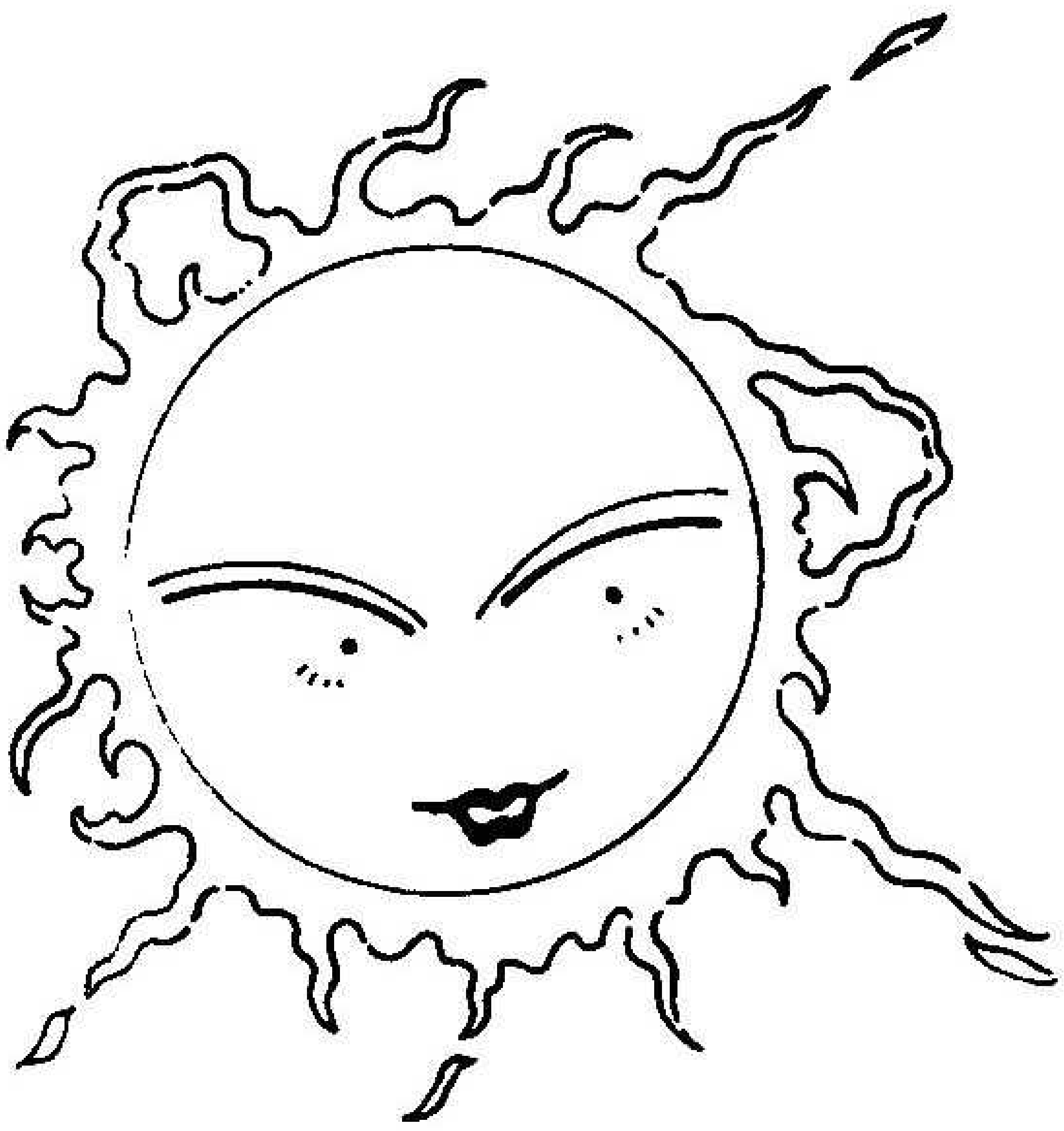
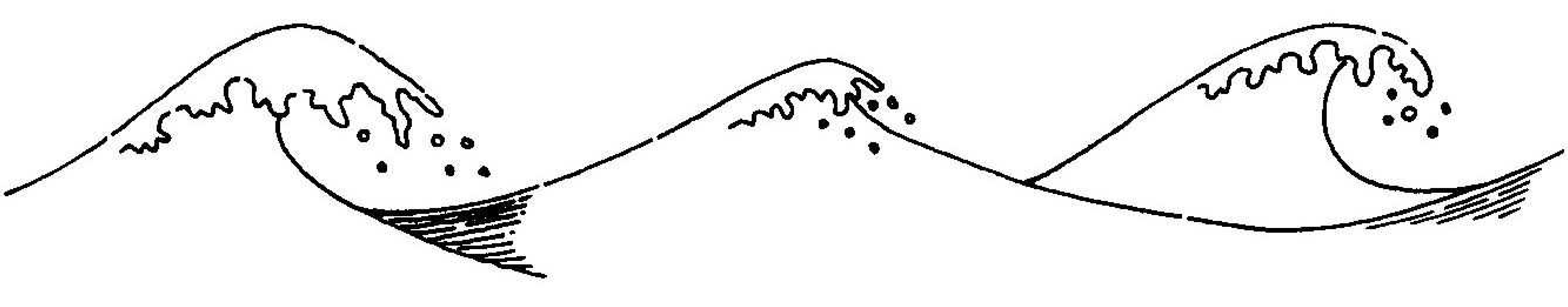
第1章

三角関数



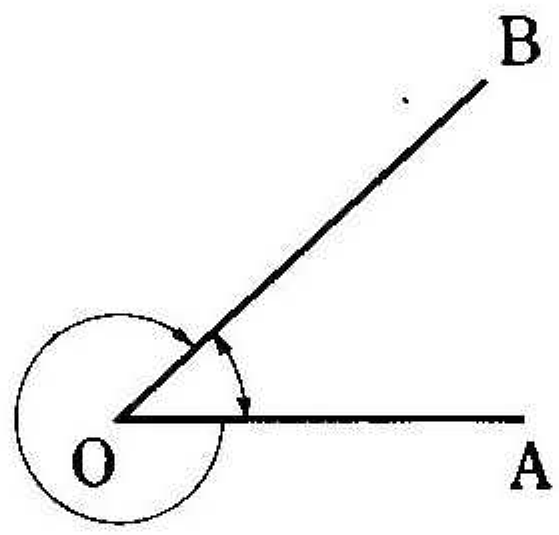


1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

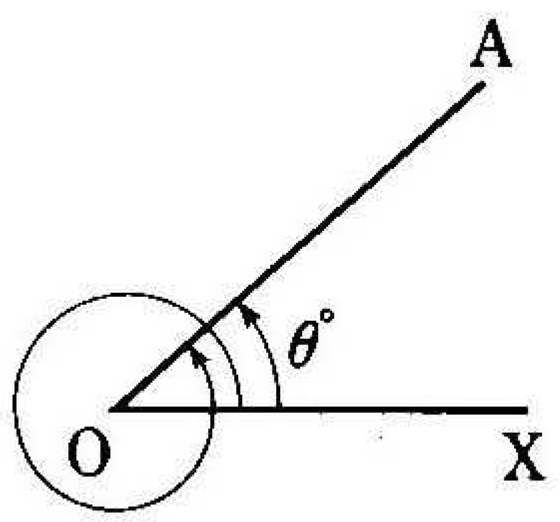
○一般角とは何か

◆一般解，一般角，一般項などなど，一般と名のつくコトバは多い。ハテ？　一般とはそもそも何のことだい。

◆ **角**（かく）というのは，1点Oから2つの半直線OA，OBを引いてできる図形のことをいいますが，角の大きさといえば，どちらに目をつけるかによってちがってきます。これを区別するために小さいほうを**劣角**(れっかく)，大きいほうを **優角**(ゆうかく）ということもあります。



また同じ図形でありながら次のように扱ったほうが便利なこともあります。下の図において，OXを固定し，半直線OAが回転した量を角と考えるのです。このとき，この角を **一般角** といいます。そして OX を **始線**（しせん），OA を **動径**（どうけい）といいます。



さらに，OAがOXから出発して反時計まわりに回転したと考えたときプラス，時計まわりに回転したと考えたときマイナスと約束します。

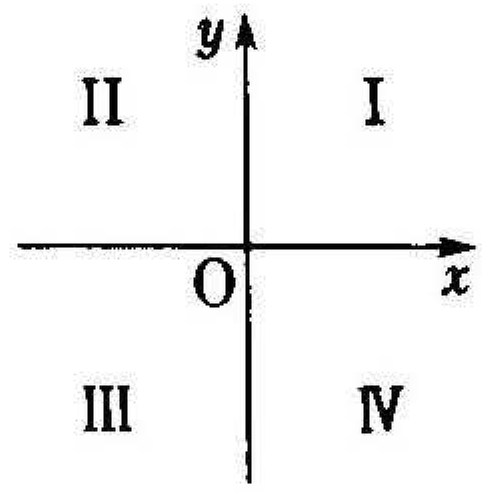
もう1つ，360°回転すると，動径は1回転して同じ位置にきますから，1つの動径は

$$360°\times n+\theta° \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

を表すことになります。

角の大きさを測るにはふつうの **角度**（°）のほかに **ラジアン** も使われます（ラジアンについては（☞p.16）参照)。

一般角を扱うとき第何象限の角，ということばをよく使います。つまり，座標平面を右のように分けたとき x，y の符号によって



＋＋の部分を 第1象限
－＋の部分を 第2象限
－－の部分を 第3象限
＋－の部分を 第4象限

といいます。座標軸は各象限（しょうげんと読む，ぞうげんと読んではいけません）の境界線であって，いずれの象限にも属してはいません。

*　*　*

◆ さて，動径OAが第1象限にあれば，これを第1象限の角というように表すのです。

練習 1. 次の角は第何象限の角か。

1820°，　−300°，　2620°

（解）　$1820°=360°\times5+20°$

であるから，1820° は第1象限の角である。

$$-300°=360°\times(-1)+60°$$

であるから，−300° は第1象限の角である。

$$2620°=360°\times7+100°$$

であるから，2620° は第2象限の角である。

4/25

練習 2. 25ラジアン は第何象限の角か。

（解）　πラジアン（つまり 3.1415…ラジアン）が 180° に等しいから，25 ラジアンを 2π で割ると

$$\frac{25}{2\pi}=\frac{25}{6.283\cdots}=3.97\cdots$$

を得る。ゆえに

$$25^{\text{ラジアン}}=6\pi^{\text{ラジアン}}+6.15\cdots^{\text{ラジアン}}$$

ところが

$$\frac{3\pi}{2}<6.15<2\pi$$

であるから 25ラジアン は第4象限の角である。

◆ 一般角の三角関数を求める練習をしておきましょう。

4/25

■練習 3. $\sin 78° = a$ のとき $\tan 1968°$ の値を a で表せ。　(鹿児島大)

ヒント　$1968° = 360° \times 5 + 168°$

ですから

$$\tan 1968° = \tan 168°$$

であることはすぐわかります。次に

$$168° = 180° - 12°$$

ですから

$$\tan 168° = -\tan 12°$$

余角の三角関数から

$$\tan 12° = \cot 78°$$

ところが，$\sin 78° = a$ より $\cos 78° = \sqrt{1-a^2}$

$$\therefore\quad \cot 78° = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

なるほど，

$$\tan 1968° = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

上の解は考えるままに書いたものですからかなり冗漫。もう少し，簡潔に表すこともできます。それはキミにやってもらうとしよう。

4/25

■練習 4. どんな角の正接でも $-90°$ から $90°$ までの適当な角の正接で表せる。
$\tan(-840°)$ はどうなるか。　(京都工繊大)

ヒント　$-840° = 360° \times (-3) + 240°$

$$\therefore\quad \tan(-840°) = \tan 240°$$

$$\tan 240° = \tan(240° - 180°) = \tan 60°$$

ゆえに $-840°$ の正接は $60°$ の正接に等しい。

4/26

■練習 5. $\sin 870°$, $\cos(-430°)$, $\tan 1310°$, $\sin(-2095°)$, $\cos 1900°$ の大小を吟味せよ。　(東大)

ヒント　$\sin 870° = \sin 150° = \sin 30°$

$$\cos(-430°) = \cos 70° = \sin 20°$$

$$\tan 1310° = \tan 50° > \tan 45° = 1$$

$$\sin(-2095°) = \sin 65°$$

$$\cos 1900° = \cos 100° = -\sin 10°$$

$$\therefore\quad \cos 1900° < \cos(-430°) < \sin 870° < \sin(-2095°) < \tan 1310°$$

*　*　*

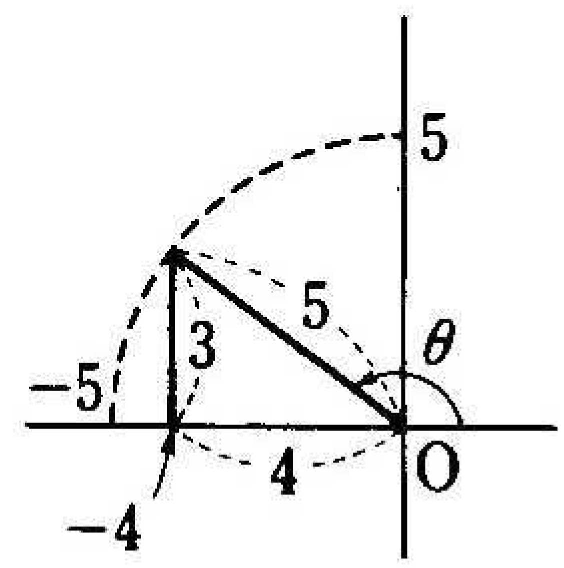
◆ ここで練習した問題はすべて，第何象限にあるかを探すことが主眼でした。

次は角の象限が与えられた問題を練習してみませんか。

4/26

■練習 6. θ が第 2 象限の角であって，$\sin\theta = \frac{3}{5}$ であるとき，$\cos\theta$, $\tan\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$ の値を求めよ。　(東京工大)

ヒント　θ が第 2 象限の角で $\sin\theta = \frac{3}{5}$ だというのですから，右図のようになっているハズ。さては



$$\cos\theta = -\frac{4}{5},$$

$$\tan\theta = -\frac{3}{4},\quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$$

となるでしょう。

図を使わないでやるなら，まず

$$\cos\theta < 0,\quad \tan\theta < 0,\quad \mathrm{cosec}\,\theta > 0$$

であることをつかむ。その上で，

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore\quad \cos\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{5}\Big/\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$$

といったことになる。次は難しいよ。

■練習 7. $\sin\theta = a$ のとき $\tan\theta$ を a で表せ。

$$\boxed{答}\begin{cases} \theta \text{ が第 1，4 象限の角なら} & \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} \\ \theta \text{ が第 2，3 象限の角なら} & -\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} \end{cases}$$

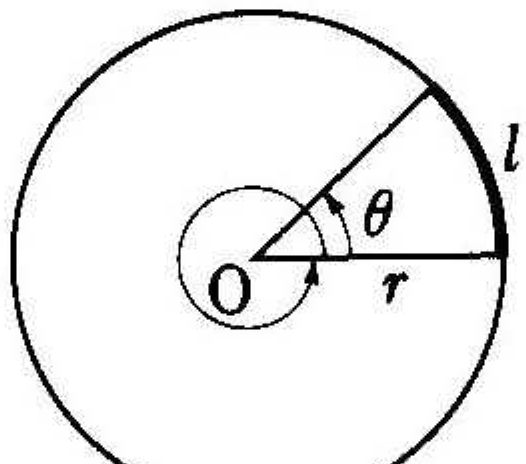
(たいていの人は θ が第 1，第 3 象限の角のとき $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$，θ が第 2，第 4 象限の角のとき $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ としてしまうもの。さて，キミはどうです)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○ラジアンとは何か

◆角度の大きさは，ふつう度（°）を使いますが，数学ではラジアンを使うことが多いのです。ラジアンとは何者か。

◆ 角の大きさを表すにはいろいろの方法がありますが，ふつうは直角を 90° とするいわゆる **度**（記号 °）が用いられています。しかし数学では **弧度法**（こどほう）というものを使うことが多いのです。



右のような円と扇形を考えてみましょう。扇形の中心角と弧の長さは比例しますから

$$l : 2\pi r = \theta : (\text{中心のまわりの角})$$

そこで，中心のまわりの角，つまり 360° を 2π とすると

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\theta = \frac{l}{r}}$$

と表せることになります。

単位としては **ラジアン(radian)** を使うこともありますが，ふつうは **無名数** で使います。例えば sin1 といえば，この 1 は 1° ではなく 1 radian（または rad）なんです。

度と radian の換算公式は次のようです。

$360° = 2\pi$ rad ですから

$$\pi^{\text{rad}} = 180°$$

したがって

$$\boldsymbol{1^{\text{rad}} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ},\quad 1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)^{\text{rad}}}$$

というわけです。

では，ちょっと練習をやってみませんか。

■練習 1. 1 ラジアンと 60° とではいずれが大きいか。

(ヒント)　$1\text{ ラジアン} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

$$= \left(\frac{180}{3.1415\cdots}\right)^{\circ} < \left(\frac{180}{3}\right)^{\circ} = 60°$$

ゆえに 60° のほうが大きい。

■練習 2. 次の表は弧度（radian）と度（°）との関係を示したものである。空いているところを適当に埋めよ。

弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$		π
度	0°	30°		60°	90°		135°	150°	180°

[答]　左から順に 45°, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 120°, $\frac{5}{6}\pi$

*　*　*

◆ ところで弧度法が便利であることは微分や積分でいやというほど，多くの例を見ることでしょう。ここでは扇形の弧や面積が簡単に表せることを注意しておきます。

つまり，半径 r，中心角 θ の扇形の弧 l と面積 S は次のように表せます。

$$\boldsymbol{l = r\theta,\quad S = \frac{1}{2}r^2\theta}$$

では，次の練習をやってみませんか。

■練習 3. 半径が $r$cm，中心角が θ ラジアンである扇形の面積を求めよ。　（茨城大）

(ヒント)　いわずもがな，書かずもがな。

■練習 4. $y = \sin(\cos x)$ のグラフの大体の形をかけ。

(ヒント)　x にいろいろな値を代入して y の値を求め，プロットするとよい。例えば $x=0$ のとき $\cos x = \cos 0 = 1$，これは 1 radian だから y の大体の値は $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ になるでしょう。

◆度⇄ラジアンの換算表◆

ラジアン ⟶ 度

ラジアン	度	度	分	秒
.000 01	.000 573			2.063
.000 02	.001 146			4.125
.000 03	.001 719			6.188
.000 04	.002 292			8.251
.000 05	.002 865			10.313
.000 06	.003 438			12.376
.000 07	.004 011			14.439
.000 08	.004 584			16.501
.000 09	.005 157			18.564
.000 1	.005 730			20.626
.000 2	.011 459			41.253
.000 3	.017 189		1	1.879
.000 4	.022 918		1	22.506
.000 5	.028 648		1	43.132
.000 6	.034 377		2	3.759
.000 7	.040 107		2	24.385
.000 8	.045 837		2	45.012
.000 9	.051 566		3	5.638
.001	.057 296		3	26.265
.002	.114 592		6	52.530
.003	.171 887		10	18.794
.004	.229 183		13	45.059
.005	.286 479		17	11.324
.006	.343 775		20	37.589
.007	.401 070		24	3.854
.008	.458 366		27	30.118
.009	.515 662		30	56.383
.01	.572 958		34	22.648
.02	1.145 916	1	8	45.296
.03	1.718 873	1	43	7.944
.04	2.291 831	2	17	30.592
.05	2.864 789	2	51	53.240
.06	3.437 747	3	26	15.888
.07	4.010 705	4	0	38.536
.08	4.583 662	4	35	1.184
.09	5.156 620	5	9	23.833
.1	5.729 578	5	43	46.481
.2	11.459 156	11	27	32.961
.3	17.188 734	17	11	19.442
.4	22.918 312	22	55	5.922
.5	28.647 890	28	38	52.403
.6	34.377 468	34	22	38.884
.7	40.107 046	40	6	25.364
.8	45.836 624	45	50	11.845
.9	51.566 202	51	33	58.326
1	57.295 780	57	17	44.806
2	114.591 559	114	35	29.612
3	171.887 339	171	53	14.419
4	229.183 118	229	10	59.225
5	286.478 898	286	28	44.031
6	343.774 677	343	46	28.837
7	401.070 457	401	4	13.644
8	458.366 236	458	21	58.450
9	515.662 016	515	39	43.256
10	572.957 795	572	57	28.062
ラジアン	度	度	分	秒

度 ⟶ ラジアン

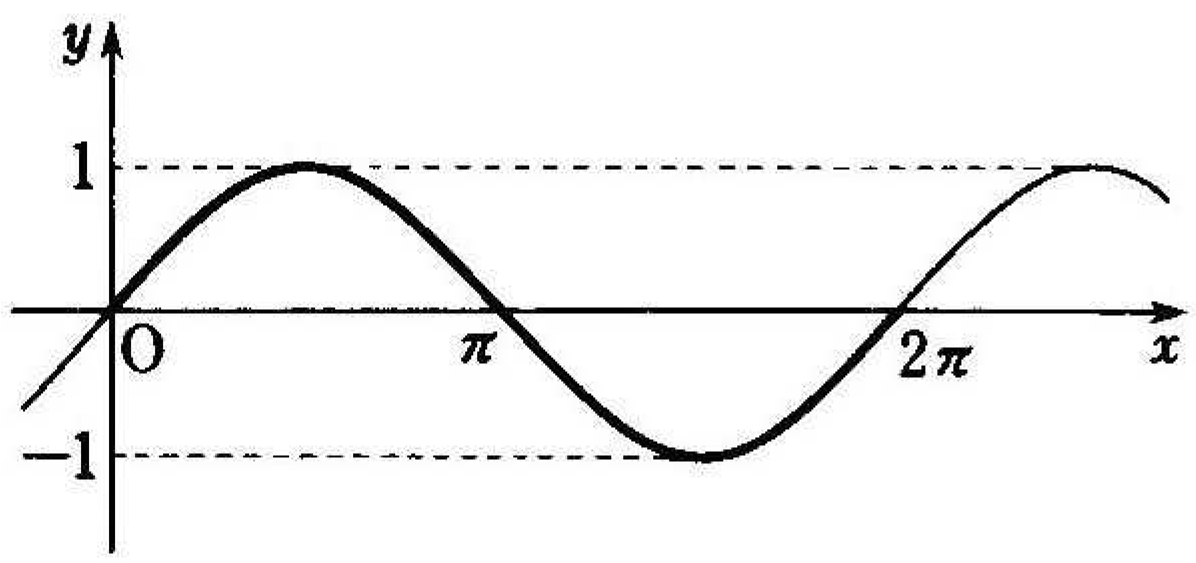
度	ラジアン	度	ラジアン
0	.00000 00	60	1.04719 76
1	.01745 33	61	1.06465 08
2	.03490 66	62	1.08210 41
3	.05235 99	63	1.09955 74
4	.06981 32	64	1.11701 07
5	.08726 65	65	1.13446 40
6	.10471 98	66	1.15191 73
7	.12217 30	67	1.16937 06
8	.13962 63	68	1.18682 39
9	.15707 96	69	1.20427 72
10	.17453 29	70	1.22173 05
11	.19198 62	71	1.23918 38
12	.20943 95	72	1.25663 71
13	.22689 28	73	1.27409 04
14	.24434 61	74	1.29154 36
15	.26179 94	75	1.30899 69
16	.27925 27	76	1.32645 02
17	.29670 60	77	1.34390 35
18	.31415 93	78	1.36135 68
19	.33161 26	79	1.37881 01
20	.34906 59	80	1.39626 34
21	.36651 91	81	1.41371 67
22	.38397 24	82	1.43117 00
23	.40142 57	83	1.44862 33
24	.41887 90	84	1.46607 66
25	.43633 23	85	1.48352 99
26	.45378 56	86	1.50098 32
27	.47123 89	87	1.51843 64
28	.48869 22	88	1.53588 97
29	.50614 55	89	1.55334 30
30	.52359 88	90	1.57079 63
31	.54105 21	91	1.58824 96
32	.55850 54	92	1.60570 29
33	.57595 87	93	1.62315 62
34	.59341 19	94	1.64060 95
35	.61086 52	95	1.65806 28
36	.62831 85	96	1.67551 61
37	.64577 18	97	1.69296 94
38	.66322 51	98	1.71042 27
39	.68067 84	99	1.72787 60
40	.69813 17	100	1.74532 93
41	.71558 50	110	1.91986 22
42	.73303 83	120	2.09439 51
43	.75049 16	130	2.26892 80
44	.76794 49	140	2.44346 10
45	.78539 82	150	2.61799 39
46	.80285 15	160	2.79252 68
47	.82030 47	170	2.96705 97
48	.83775 80	180	3.14159 27
49	.85521 13	190	3.31612 56
50	.87266 46	200	3.49065 85
51	.89011 79	210	3.66519 14
52	.90757 12	220	3.83972 44
53	.92502 45	230	4.01425 73
54	.94247 78	240	4.18879 02
55	.95993 11	250	4.36332 31
56	.97738 44	260	4.53785 61
57	.99483 77	270	4.71238 90
58	1.01229 10	280	4.88692 19
59	1.02974 43	290	5.06145 48
60	1.04719 76	300	5.23598 78
度	ラジアン	度	ラジアン

1 回目　　年　　月　　日
2 回目　　年　　月　　日
3 回目　　年　　月　　日

◑ 周期関数とは何か

◈自然界には周期的に変わるものが多い。いや，周期的でないものすら，周期関数で表せる，という事実がある!!

◆ $y=\sin x$ のグラフは下のように同じような変化をくり返しています。



x が 2π だけ変わると，元の値と等しくなるのです。このように，同じ変化をくり返すような関数を，**周期関数** というのです。そして，この 2π を **周期** といいます。一般に

$y=f(x)$ がすべての x について
$$f(x+l)=f(x)$$
のとき，
$f(x)$ を周期関数，l を周期

というのです。

$$f(x+l)=f(x)$$

なら，

$$f(x+2l)=f((x+l)+l)$$
$$=f(x+l)=f(x)$$

ですから

$$f(x+2l)=f(x)$$

つまり，$2l$ も周期です。一般に l が周期ならその整数倍も周期です。正の周期の中でもっとも小さいものを **最小周期** ということがあります。$\sin x$ の最小周期は 2π なのです。

4/16

■練習 1. $f(x)=\sin 2x$ の最小周期は何か。

(ヒント) $\sin x$ の周期は 2π です。ということは x が 2π だけ変わると元にもどる，ということなんです。 してみると $\sin 2x$ なら $2x$ が 2π だけ変わると元にもどる。いいかえると，x が π だけ変わると元にもどる。つまり，周期は π なんです。

一般に $f(x)=\sin nx$ の周期は $\dfrac{2\pi}{n}$ なのです。

4/16

■練習 2. $\sin(3\theta+50°)$ の最小周期は何度か。　　(埼玉大)

(解) $3\theta+50°$ が $360°$ 変化するためには θ は $\dfrac{360°}{3}=120°$ 変化すればよい。よって，求める周期は $120°$ である。

答 $120°$

4/16

■練習 3. 次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。もし適当な数がないときは×と記入せよ。

θ の関数 $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+30\right)^\circ$ の正の最小周期は $\boxed{}°$ である。

θ の関数 $\dfrac{1}{1+\tan 3\theta°}$ の正の最小周期は $\boxed{}°$ である。　　(東大)

(解) $\left(\dfrac{\theta}{2}+30\right)^\circ$ が $360°$ 変わるためには θ は $720°$ 変わらなければならない。また $3\theta°$ が $180°$ (tan の周期は $180°$) 変わるためには，θ は $60°$ 変わらなければならないから，最小周期はそれぞれ $720°$，$60°$ である。

くどいが，もう1つやっておきましょう。

4/16

■練習 4. 次の関数の最小周期はそれぞれいくらか。

$$y=4\sin x,\quad y=\sin 4x,\quad y=\tan\frac{x}{4}$$

(岐阜大)

(解) 順に $360°$，$90°$，$720°$

◆ 以上で周期とは何か，ということが，ほぼつかめたでしょう。次には，やや高度のことをやっておきたい。周期がとくにイヤな人は敬遠してもかまいません。では：——

4/26

■練習 5. a が $f(x)$ の周期ならば

$$f(x+2a)=f(x),\ f(x-a)=f(x)$$

であることを証明せよ。　(奈良女大)

(ヒント) a が $f(x)$ の周期であるということは，すべての x の値に対して

$$f(x+a)=f(x)$$

であるということであるから

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=f(x+a)$$
$$=f(x)$$

次に，

$$f(x)=f((x-a)+a)=f(x-a)$$
$$\therefore\ f(x-a)=f(x)\qquad \text{Q.E.D.}$$

4/26

■練習 6. 関数 $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$ の最小周期を，理由を述べて求めよ。(奈良女大)

(ヒント) 「理由を述べて」とあるが，どの程度理由を書かなければならないか，がわからなくて悩む人が多いもの。周期の定義をはっきり述べて，その定義に合うように理由を書けばいいでしょう。

さて，x のすべての値に対して

$$f(x+a)=f(x)$$

が成り立つような最小の正の定数があるとき a を周期ということにする。

a が周期ならば $f(0+a)=f(0)$ でなければならないから

$$F(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$$

の周期を a とすると

$$\sqrt{1+\cos a}+\sqrt{1-\cos a}=\sqrt{2}$$

両辺を2乗すると

$$2+2\sqrt{1-\cos^2 a}=2$$

$$\therefore\ \sqrt{\sin^2 a}=0\quad \therefore\ \sin a=0$$

これを満足する最小の正の値は π である。すなわち，周期がもしあるなら π でなければならないことがわかったのです。

そこで，次は π が確かに周期であることを確かめなければなりません。

$$F(x+\pi)=\sqrt{1+\cos(x+\pi)}+\sqrt{1-\cos(x+\pi)}$$
$$=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}$$
$$(\because\ \cos(x+\pi)=-\cos x)$$
$$=F(x)$$

ナルホド，うまくいったなあ。

(注) 三角関数のもっと程度の高い公式を知っていると別な解答もできますが，上のように扱って，いいでしょう。

◆ 三角関数の周期を利用するなら，次のような問題も扱うことができます。

■練習 7. $\sin x$ が x の整式で表せる関数であるかどうか，すなわち

$$\sin x=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$
$$(n\geqq 1,\ a_0\neq 0)$$

とおけるかどうか調べよ。　(滋賀大，名大)

(解) $\sin x=\sin(x+2\pi)$ であるから，上の式が成り立つとすると

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$
$$=a_0(x+2\pi)^n+a_1(x+2\pi)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

ところが，この右辺を展開すると

$$a_0x^n+(2n\pi a_0+a_1)x^{n-1}+\cdots\cdots$$

であるから

$$a_1=2n\pi a_0+a_1$$

でなければならない。

$$\therefore\ a_0=0$$

これは仮定に反する。

ゆえに $\sin x$ は x の整式で表せない。

■練習 8. 次の条件を満足する関数 $f(x)$ を1つあげよ。ただし，$f(x)$ は定数でないものとする。

$$f(x+1)=f(x)\qquad (徳島大)$$

(ヒント) 1つあげよ，というのですから，

$$f(x)=\sin 2\pi x$$

などいかが。ほかにも考えてみませんか。すべて求めよう，と思ってはいけませんよ。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○三角関数表の使い方(度)

◆三角関数がいろいろと役に立つ最大の理由は三角関数表が手軽に使える，という点にある。それなのに，使い方を知らないだって!!

◆ ふつう三角関数表は $0° \leqq \theta° \leqq 90°$ の角 $\theta°$について $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を与えてあります。右のページに示してあるのは1°きざみ，つまり，0°, 1°, 2°, ……, 89°, 90° について上の3つの関数の値を示してあります。例えば

$\theta° = 31°$ の場合なら

$$\sin\theta = 0.5150$$
$$\cos\theta = 0.8572$$
$$\tan\theta = 0.6009$$

といったぐあい。

途中の値，つまり，表にない角度については，もっと詳しい表を使えばもちろんよいが，手元にないときには **比例部分の法則** を使えばよい。つまり，その区間では θ の増加量と関数の値の増加量は比例する，と考えるのです。例えば $\theta° = 31°40'$ に対する $\sin\theta$ の値の求め方を下にあげておきます。

$\sin 31°$ ……………… 0.5150
$\sin 31°40'$ ………… ?
$\sin 32°$ ……………… 0.5299

表差 $= 0.5299 - 0.5150 = 0.0149$

ですから $40'$ に対する増加量は

$$0.0149 \times \frac{40}{60} = 0.0149 \times \frac{2}{3}$$
$$= 0.0298 \times \frac{1}{3} = 0.00993\cdots\cdots$$

ということになります。ゆえに

$$\sin 31°40' = 0.5150 + 0.0099 = 0.5249$$

ということになりましょう。なお正しい値は $0.524976\cdots$ ですから，十分よい近似度だと申せましょう。では，次の練習を右の表から求めてみませんか。

練習 1. $\sin 38°30'$ を求めよ。

答 0.6225

練習 2. $\cos 61°10'$ を求めよ。

（解）

$$\begin{array}{rl} & \cos 62° = 0.4695 \\ -) & \cos 61° = 0.4848 \\ \hline & -0.0153 \end{array}$$

$$\cos 61°10' = 0.4848 + (-0.0153) \times \frac{10}{60}$$
$$= 0.4848 - 0.0026$$
$$= 0.4822 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ この右の表には $\cot\theta$ は入っていませんが $\boldsymbol{\cot\theta = \tan(90° - \theta)}$ ですから $\tan\theta$ の表を使うことができます。例えば

$$\cot 40° = \tan 50° = 1.1918$$

といったぐあい。

$\sec\theta$ や $\mathrm{cosec}\,\theta$ はそれぞれ $\cos\theta$ や $\sin\theta$ の表を使うより仕方がありません。つまり，

$$\boldsymbol{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}}$$

だからです。

練習 3. $\sec 40°$ を求めよ。

（解） $\sec 40° = \dfrac{1}{\cos 40°} = \dfrac{1}{0.7660}$

$$= 1.30548\cdots = 1.3055 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ なお，三角関数のことを円関数ともいいますので，三角関数表のことを円関数表としたのもあります。また，角をラジアンで表した三角関数表も市販されていますから容易に手に入れることもできます。(☞ p.23)

なお，江戸時代末期には八線表といわれたものでした。それは sin, cos, tan, cot, sec, cosec のほかに vers, covers と合計8つあったからです。

◆三 角 関 数 表◆

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)	角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0335
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞

1 回目	年	月	日
2 回目	年	月	日
3 回目	年	月	日

○三角関数表の使い方（ラジアン）

◆度といっても，ラジアンといっても三角関数表の使い方にちがいのあろうハズはないのですが，……

◆ π^{rad} は180°ですから

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}\fallingdotseq 0.017\,\mathrm{rad}$$

$$1\,\mathrm{rad}=\frac{180^\circ}{\pi}\fallingdotseq 57.3^\circ$$

大体の見積りなら $1^{\mathrm{rad}}\fallingdotseq 60^\circ$ と考えて一般にさしつかえありません。(☞ p.16)

練習 1. $\sin(\cos\theta)$ と $\cos(\sin\theta)$ の大小を吟味せよ。

ヒント　マトモにやるには

$$\sin(\cos\theta)-\cos(\sin\theta)$$

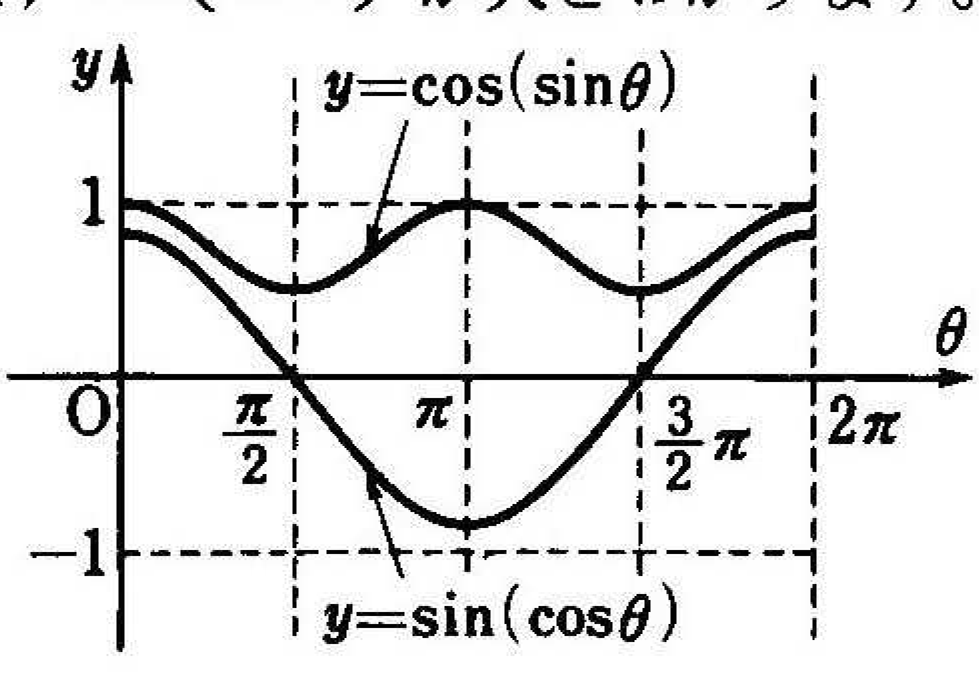
の符号を調べるところですが，そのためには積で表す必要があります。しかし，ヤヤ欠点はあるにしても次のように扱うことができます。

θ にいろいろの値を入れてグラフをかいてみるのです。

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\sin(\cos\theta)$	約$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	約$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0	約$\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos(\sin\theta)$	1	約$\frac{1}{2}$	1	約$\frac{1}{2}$	1

かくして，グラフはほぼ下の通り。してみると，$\cos(\sin\theta)$ が大とわかります。



◆ しかし，細かい値が必要になると，度からラジアンに，またはラジアンから度になおして三角関数表を引くのはムダなことです。

練習 2. 右の三角関数表を使って $\theta=0.1$ ～0.5 に対する $\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を0.1間隔で小数第3位を四捨五入して第2位まで求めよ。

答

θ	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0.1	0.10	0.10
0.2	0.20	0 20
0.3	0.30	0.31
0.4	0.39	0.42
0.5	0.48	0.55

注　こうしてみると，θ の小さい値に対して $\sin\theta$ や $\tan\theta$ の値はほとんど θ の値と等しいこと，すなわち

$\theta\fallingdotseq 0$ ならば

$$\sin\theta\fallingdotseq\theta,\quad \tan\theta\fallingdotseq\theta$$

がわかるでしょう。このようなことも，弧度法の便利な点の1つなのです。

練習 3.

$$\sin 0.80=0.71736$$
$$\sin 0.81=0.72429$$
$$\sin 0.82=0.73115$$

から $\sin 0.813$ の値を求めよ。

ヒント　0.813 は 0.81 と 0.82 の間を 3：7 に内分する点です。他方 0.72429 と 0.73115 の間を 3：7 に内分する点は

$$\frac{3\times 0.73115+7\times 0.72429}{3+7}$$

$$=\frac{1}{10}(2.19345+5.07003)$$

$$=0.726348$$　　答 0.72635

実際は，数表にある **表差** を使うと少し簡単にできます。

◆ 三 角 関 数 表 ◆

（xの単位はラジアン）

0.00～2.00

x	sin x	tan x	cot x	cos x	x	sin x	tan x	cot x	cos x
0.00	.000 00	.000 00	∞	1.000 00	1.02	.852 11	1.628 1	.614 20	.523 37
.02	.020 00	.020 00	49.993	.999 80	.04	.862 40	1.703 6	.586 99	.506 22
.04	.039 99	.040 02	24.987	.999 20	.06	.872 36	1.784 4	.560 40	.488 87
.06	.059 96	.060 07	16.647	.998 20	.08	.881 96	1.871 2	.534 41	.471 33
.08	.079 91	.080 17	12.473	.996 80	1.10	.891 21	1.964 8	.508 97	.453 60
0.10	.099 83	.100 33	9.966 6	.995 00	.12	.900 10	2.066 0	.484 04	.435 68
.12	.119 71	.120 58	8.293 3	.992 81	.14	.908 63	2.175 9	.459 59	.417 59
.14	.139 54	.140 92	7.096 1	.990 22	.16	.916 80	2.295 8	.435 58	.399 34
.16	.159 32	.161 38	6.196 6	.987 23	.18	.924 61	2.427 3	.411 99	.380 92
.18	.179 03	.181 97	5.495 4	.983 84	1.20	.932 04	2.572 2	.388 78	.362 36
0.20	.198 67	.202 71	4.933 2	.980 07	.22	.939 10	2.732 8	.365 93	.343 65
.22	.218 23	.223 62	4.471 9	.975 90	.24	.945 78	2.911 9	.343 41	.324 80
.24	.237 70	.244 72	4.086 4	.971 34	.26	.952 09	3.113 3	.321 21	.305 82
.26	.257 08	.266 02	3.759 1	.966 39	.28	.958 02	3.341 3	.299 28	.286 72
.28	.276 36	.287 55	3.477 6	.961 06	1.30	.963 56	3.602 1	.277 62	.267 50
0.30	.295 52	.309 34	3.232 7	.955 34	.32	.968 72	3.903 3	.256 19	.248 18
.32	.314 57	.331 39	3.017 6	.949 24	.34	.973 48	4.255 6	.234 98	.228 75
.34	.333 49	.353 74	2.827 0	.942 75	.36	.977 86	4.673 4	.213 98	.209 24
.36	.352 27	.376 40	2.656 7	.935 90	.38	.981 85	5.177 4	.193 15	.189 64
.38	.370 92	.399 41	2.503 7	.928 66	1.40	.985 45	5.797 9	.172 48	.169 97
0.40	.389 42	.422 79	2.365 2	.921 06	.42	.988 65	6.581 1	.151 95	.150 23
.42	.407 76	.446 57	2.239 3	.913 09	.44	.991 46	7.601 8	.131 55	.130 42
.44	.425 94	.470 78	2.124 1	.904 75	.46	.993 87	8.988 6	.111 25	.110 57
.46	.443 95	.495 45	2.018 4	.896 05	.48	.995 88	10.983	.091 05	.090 67
.48	.461 78	.520 61	1.920 8	.886 99	1.50	.997 49	14.101	.070 91	.070 74
0.50	.479 43	.546 30	1.830 5	.877 58	.52	.998 71	19.670	.050 84	.050 77
.52	.496 88	.572 56	1.746 5	.867 82	.54	.999 53	32.461	.030 81	.030 79
.54	.514 14	.599 43	1.668 3	.857 71	.56	.999 94	92.621	.010 80	.010 80
.56	.531 19	.626 95	1.595 0	.847 26	.58	.999 96	−108.65	−.009 20	−.009 20
.58	.548 02	.655 17	1.526 3	.836 46	1.60	.999 57	−34.233	−.029 21	−.029 20
0.60	.564 64	.684 14	1.461 7	.825 34	.62	.998 79	−20.307	−.049 24	−.049 18
.62	.581 04	.713 91	1.400 7	.813 88	.64	.997 61	−14.427	−.069 31	−.069 15
.64	.597 20	.744 54	1.343 1	.802 10	.66	.996 02	−11.181	−.089 44	−.089 09
.66	.613 12	.776 10	1.288 5	.789 99	.68	.994 04	−9.1208	−.109 64	−.108 99
.68	.628 79	.808 66	1.236 6	.777 57	1.70	.991 66	−7.6966	−.129 93	−.128 84
0.70	.644 22	.842 29	1.187 2	.764 84	.72	.988 89	−6.6524	−.150 32	−.148 65
.72	.659 38	.877 07	1.140 2	.751 81	.74	.985 72	−5.8535	−.170 84	−.168 40
.74	.674 29	.913 09	1.095 2	.738 47	.76	.982 15	−5.2221	−.191 49	−.188 08
.76	.688 92	.950 45	1.052 1	.724 84	.78	.978 20	−4.7101	−.212 31	−.207 68
.78	.703 28	.989 26	1.010 9	.710 91	1.80	.973 85	−4.2863	−.233 30	−.227 20
0.80	.717 36	1.029 6	.971 21	.696 71	.82	.969 11	−3.9294	−.254 49	−.246 63
.82	.731 15	1.071 7	.933 09	.682 22	.84	.963 98	−3.6245	−.275 90	−.265 96
.84	.744 64	1.115 6	.896 35	.667 46	.86	.958 47	−3.3608	−.297 55	−.285 19
.86	.757 84	1.161 6	.860 91	.652 44	.88	.952 58	−3.1304	−.319 45	−.304 30
.88	.770 74	1.209 7	.826 68	.637 15	1.90	.946 30	−2.9271	−.341 64	−.323 29
0.90	.783 33	1.260 2	.793 55	.621 61	.92	.939 65	−2.7463	−.364 13	−.342 15
.92	.795 60	1.313 3	.761 46	.605 82	.94	.932 62	−2.5843	−.386 95	−.360 87
.94	.807 56	1.369 2	.730 34	.589 79	.96	.925 21	−2.4383	−.410 12	−.379 45
.96	.819 19	1.428 4	.700 10	.573 52	.98	.917 44	−2.3058	−.433 68	−.397 88
.98	.830 50	1.491 0	.670 71	.557 02	2.00	.909 30	−2.1850	−.457 66	−.416 15
1.00	.841 47	1.557 4	.642 09	.540 30					

◐三角関数で大切なこと

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆基礎解析では，三角関数は虐待されている。
しかし，うまく使えば，スゴク役に立つもの。
バカにしてはいけません。

◆ 数Ⅰでは，三角比で大切なことは3つありました。第1は $\tan\theta$ や $\cot\theta$ や $\mathrm{cosec}\,\theta$ といったものは $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表して考えるのが楽だということ。第2は $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の使い方，これがもっともめんどうだった。そして，第3は正弦定理・余弦定理の使い方だったのです。

ところで，基解の三角関数は教科書によって，範囲もとり扱い方もマチマチです。問題集などでも，この部分は教科書になかったら省略していい，などとただし書きがついているものがあるくらい。

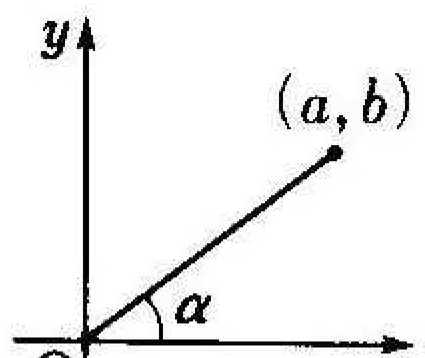
しかし，受験生なら，あるいは受験生の卵なら，大切なことはきまっています。それは大きくいって1つ，細かくいって2つです。

第1は，

三角関数の合成の公式

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ここに α は原点から点 (a, b) に引いた半直線が x 軸の正の方向となす角なのです。



第2は，加法定理を変形して得られる公式

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

の使い方です。

では，いくつか次にやってみませんか。

*　*　*

◆ まず三角関数の公式を使ってみましょう。

4/1 ■**練習 1.** $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を合成せよ。

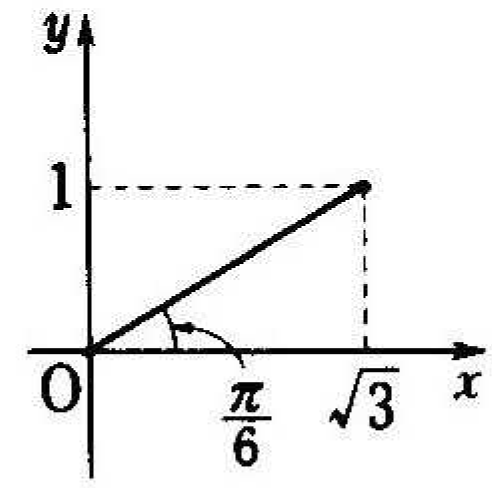
（ヒント） 公式と比べてみますと

$a=\sqrt{3}$, $b=1$

$\sqrt{a^2+b^2}=2$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ 与式 $=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



（注） この公式を使わないでも同じ公式を導くことができますよ。例えば

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{3}\cdot\sin\theta+1\cdot\cos\theta$

$=(\sqrt{3},\ 1)\cdot(\sin\theta,\ \cos\theta)$

つまりベクトルの内積で表したわけです。そして，それは，もう1つの公式から

$=2\cdot1\cdot\cos\varphi$

ここに2はベクトル $(\sqrt{3},\ 1)$ の長さ，1はベクトル $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ の長さ，そして φ はこの2つのベクトルのなす角です。そして，それから練習1.の結果が導かれるのです。

しかし，ナンというくどさ!! 三角関数の合成の公式をオボエルにしくはありません。

*　*　*

◆ 続いて，練習2.をやってみませんか。

5/1

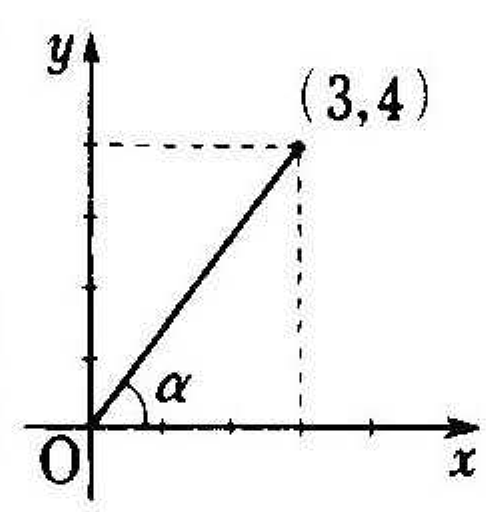
■**練習 2.** $3\sin\theta+4\cos\theta$ の最大値・最小値を求めよ。

（解） $3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$ ……①

ここに α は第1象限の角で

$$\tan\alpha=\frac{4}{3}$$

である。①から明らかに求める最大値は5で，最小値は -5 である。



（答） 最大値 5，最小値 -5

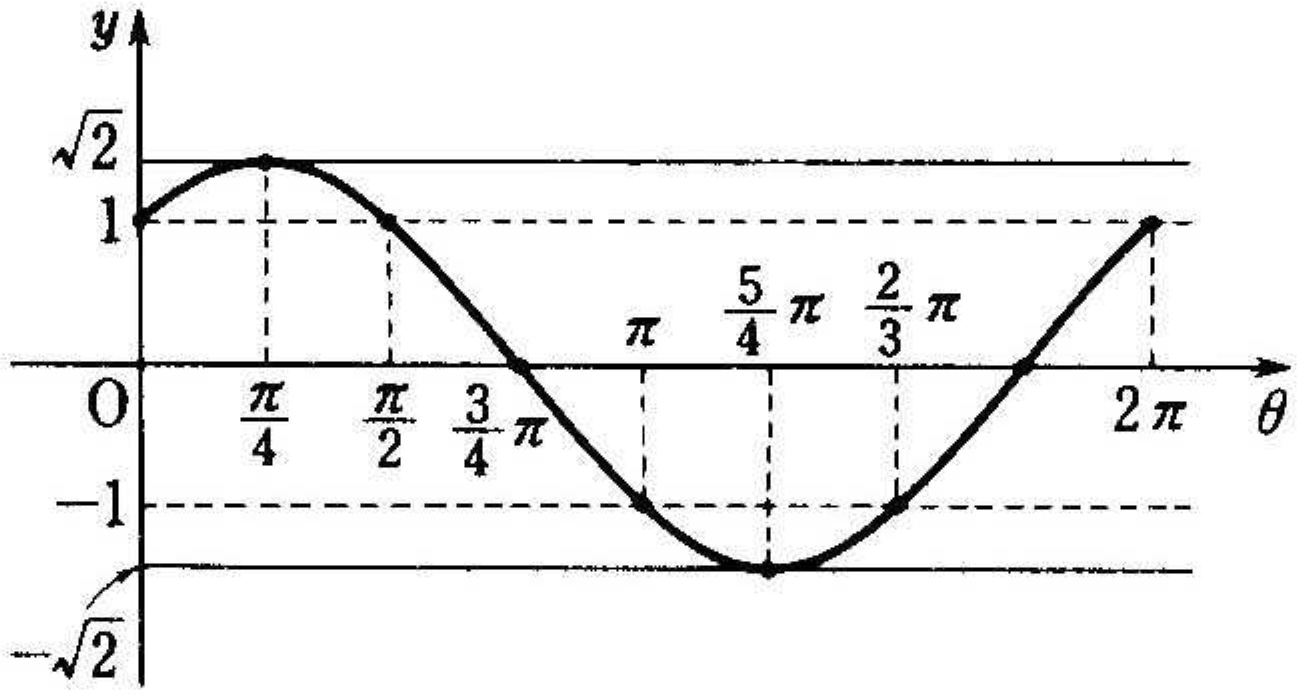
4/1

■**練習 3.** $f(\theta)=|\sin\theta+\cos\theta+1|$ のグラフの概形をかけ。$(0\leqq\theta\leqq2\pi)$　（東大）

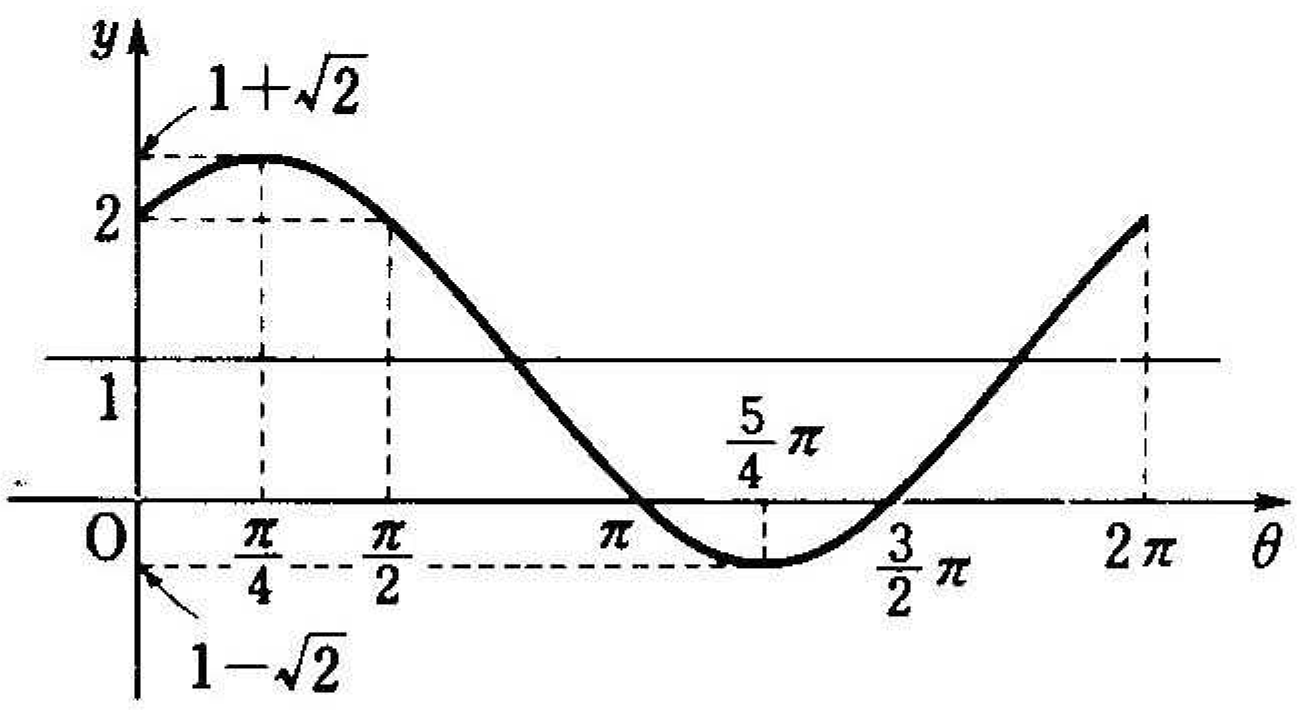
(ヒント) 第1段階：$\sin\theta+\cos\theta$ のグラフをかくこと。第2段階：$\sin\theta+\cos\theta+1$ のグラフをかくこと。第3段階：$|\sin\theta+\cos\theta+1|$ のグラフをかくこと。そして，第1段階では三角関数の合成を使うこと，です。

(解) $y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

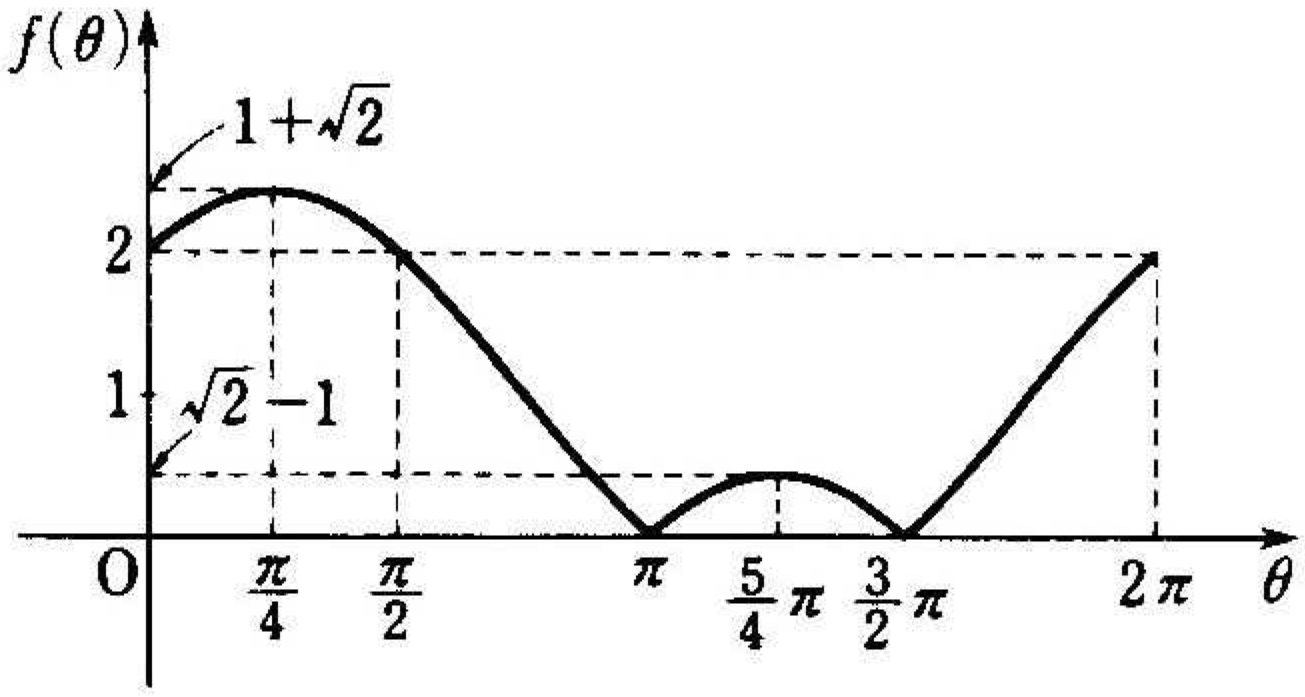
のグラフは下のようである。



ゆえに $y=\sin\theta+\cos\theta+1$ のグラフは下のようになる。

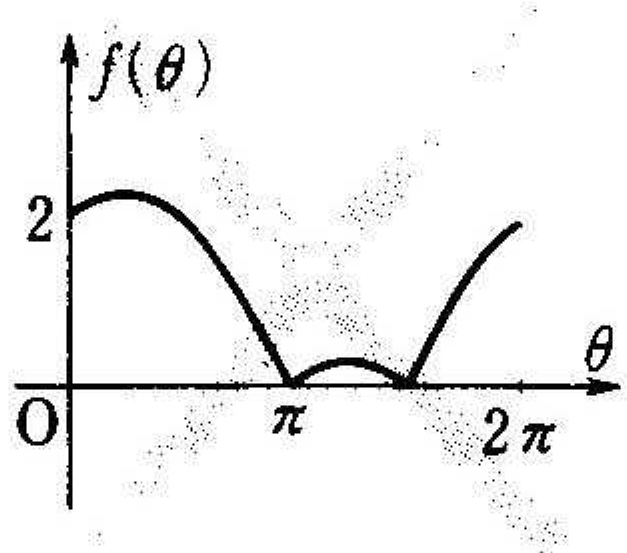


したがって $f(\theta)=|\sin\theta+\cos\theta+1|$ のグラフは下のようである。



(注) このグラフはたいていの人は右のようにかくが，これはよくない。くれぐれも注意すること。

曲線の凹凸に目をつけてください!!



練習 4. $f(\theta)=\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

(ヒント) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

ですね。また，

$$u=\sin\theta+\cos\theta$$

とおきますと

$$u^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{u^2-1}{2}$$
$$\therefore\quad f(\theta)=u^3-3\cdot\frac{u^2-1}{2}\cdot u$$
$$=\frac{1}{2}(-u^3+3u)$$
$$(-\sqrt{2}\leqq u\leqq\sqrt{2})$$

もうできるでしょう。$-\sqrt{2}\leqq u\leqq\sqrt{2}$ において $f(u)=\frac{1}{2}(-u^3+3u)$ のグラフをかいてみればよいのです。

(答) 最大値 1，最小値 -1

*　*　*

◆ 次に $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ の使い方の1例をやってみませんか。

練習 5. $4\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta$ の最大値・最小値を求めよ。　(千葉大)

(ヒント) 与式

$$=4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\cdot\sin 2\theta+3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$=2\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{7}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{7}{2}$$

ここに α は第1象限の角で $\tan\alpha=\frac{1}{2}\Big/2=\frac{1}{4}$ です。そして，最大値は $\frac{7+\sqrt{17}}{2}$，最小値は $\frac{7-\sqrt{17}}{2}$ です。

(注) 数Iの範囲でもできますよ。

① $\tan\theta$ や $\cot\theta$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ で表せ

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆$\tan\theta$ や $\cot\theta$ をおそれてはいけません。だって，キミ，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の比にすぎないではありませんか。

◆ ここでは $\tan\theta$ や $\cot\theta$ の扱い方を学ぶことにしましょう。もし，余裕があるなら，(☞ p.24) を一度読んでからやるといいでしょう。では：——

$\tan\theta$ や $\cot\theta$ の入った問題の扱い方は原則として $\sin\theta$ や $\cos\theta$ で表してからやるべきだ。ということです。そんなら，$\tan\theta$ や $\cot\theta$ をやめてしまったほうがいいじゃないか，とキミはいうかもしれません。実際，だんだん減ってきているのです。明治10年頃までは

$\sin\theta$（正弦），　$\cos\theta$（余弦）
$\tan\theta$（正接），　$\cot\theta$（余接）
$\sec\theta$（正割），　$\mathrm{cosec}\,\theta$（余割）
$\mathrm{vers}\,\theta$（正矢），　$\mathrm{covers}\,\theta$（余矢）

と8通りあったもの。だから，江戸末期の三角関数表をみると，八線表とかいてあります。8個あるから，数表は8行になるところから出ているのです。

おやおや，いささか蛇足めいてきた。そのうち $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ しか知らない時代がくることでしょう。

*　*　*

◆ さっそくながら，具体的な問題にいくとしましょう。

■練習 1. $(\mathrm{cosec}\,\theta-\sin\theta)^2-(\cot\theta-\tan\theta)^2+(\cos\theta-\sec\theta)^2$ を簡単にせよ。

ヒント $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\mathrm{cosec}\,\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

ですから，代入してからバラバラにしてみましょう。代入してからバラバラにするか，バラバラにしてから代入するか，ちょっと考えるところだが，大してちがいはなさそう。

$$与式=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)^2-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+\left(\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}-2+\sin^2\theta-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+2-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\cos^2\theta-2+\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2$$

$$=1+1+1-2=1$$

答 1

4/2

■練習 2. 次式を簡単にせよ。

$$(\sin\theta+\sec\theta)^2+(\cos\theta+\mathrm{cosec}\,\theta)^2-(1+\sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta)^2$$

解 $$与式=\sin^2\theta+2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos^2\theta+2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}-1-2\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta-1)+2\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-1}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=0$$

*　*　*

◆ 次は，やや複雑な場合にいくとしましょう。

5/2

■練習 3. $\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき $\tan\theta$ を a で表せ。ただし $a^2\neq1$.　（慶大）

ヒント いろいろな考え方がありますが，ここでは原則通り，$\tan\theta$ は $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表すことからはじめましょう。そうすると，

≪$\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，$x=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を a で表せ≫

という問題に変わったわけです。x を a で表したいのだから，θ はジャマ。

さては，この2式から θ を消去すればいいにちがいない。上の2式を並べかえて

$$\sin\theta+\cos\theta=a \qquad \cdots\cdots①$$

$$\sin\theta-x\cos\theta=0 \qquad \cdots\cdots②$$

としましょう。これから θ を消去する方法はきまっている。$\sin\theta$, $\cos\theta$ について解いて，2乗して，加えればよいのです。つまり

①−② を作ると

$$(1+x)\cos\theta=a \qquad \cdots\cdots③$$

①×x+② を作ると

$$(1+x)\sin\theta=ax \qquad \cdots\cdots④$$

③^2+④^2 を作ると

$$(1+x)^2=a^2+a^2x^2$$

$$\therefore\quad (a^2-1)x^2-2x+(a^2-1)=0$$

$a^2\neq1$ であるから，解の公式を使って解くと

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-(a^2-1)^2}}{a^2-1}$$

$$=\frac{1\pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}$$

(注) 根号内に $2-a^2$ が入っているから，$|a|>\sqrt{2}$ のときはどうなるのか，と気にする人もあろうが，実は $|\sin\theta+\cos\theta|\leqq\sqrt{2}$ であることが証明されますから，$\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，とあれば，$|a|\leqq\sqrt{2}$ であることは約束されていると思うべきです。$|a|>\sqrt{2}$ のとき解なし，などとやってはいけません。

* * *

◆ $\tan\theta$ や $\cot\theta$ があったとき $\sin\theta$ と $\cos\theta$ で表すべきなのは原則で，もちろん例外もあります。それはここでは省略して，次は，方程式や不等式について練習してみませんか。

5/2

■練習 4. $0°\leqq\theta<360°$ のとき次の方程式を解け。

$$3\tan\theta+\cot\theta=5\operatorname{cosec}\theta$$

(ヒント) $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表して

$$3\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=5\frac{1}{\sin\theta}$$

分母をはらうのは当然のこと。

$$3\sin^2\theta+\cos^2\theta=5\cos\theta$$

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混在しているから，$\cos\theta$ に統一しよう。

$$3(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta=5\cos\theta$$

$$\therefore\quad 2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0$$

$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3)=0$$

$\cos\theta+3\neq0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=60°,\ 300° \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 5. $3(\sec^2\theta+\cot^2\theta)=13$

を解け。 (姫路工大)

(解) $\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$, $\cot^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

であるから，$\cos^2\theta=u$ とおくと

$$3\left(\frac{1}{u}+\frac{u}{1-u}\right)=13$$

分母をはらって整理すると

$$16u^2-16u+3=0$$

$$(4u-1)(4u-3)=0$$

$$\therefore\quad u=\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$$

ところが $u=\cos^2\theta$ であるから

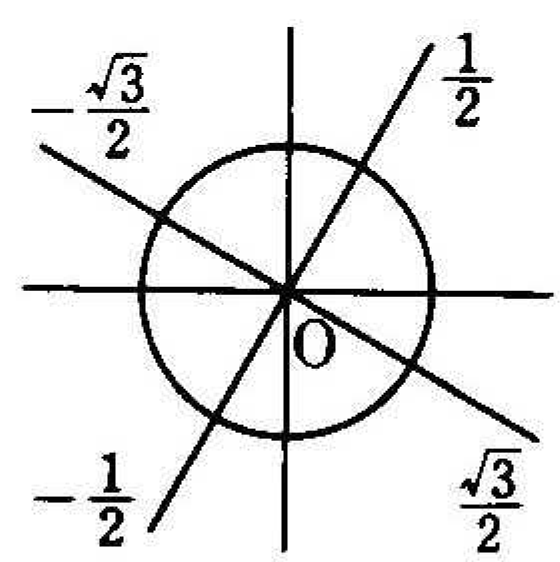
$$\cos\theta=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを満足する θ は右の図からわかるように

$$\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2}$$

(n は任意の整数)

である。



$\boxed{答}$ $\theta=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{n}{2}\right)\pi$ (n は任意の整数)

* * *

◆ 最後に，例外をひとつ。$\sin\theta+\cos\theta=0$ を解け，なら $\tan\theta=-1$ と変形したほうがラク。また $\tan\theta=2$ のとき $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ，なら分母を $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ として分母・分子を $\cos^2\theta$ で割れば $\tan\theta$ だけになる。

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

○ $\sin\theta, \cos\theta$ を $\tan\theta$ で表すとき

◆表があればこそ裏がある。$\tan\theta$ があったらふつう $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表すのが原則ですが，例外あり。これがここの目的です。

◆ $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の同次式は $\tan\theta$ で表すことができます。その扱い方がここの目的です。

では，まず，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の1次式から：——

練習 1. $3\sin\theta+4\cos\theta=0$ のとき $\tan\theta$ の値を求めよ。

(ヒント)　$3\sin\theta+4\cos\theta=0$

両辺を $\cos\theta$ で割ると

$$3\tan\theta+4=0$$

$$\therefore\quad \tan\theta=-\frac{4}{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 2. $\tan\theta=3$ のとき $\sin\theta+2\cos\theta$ の値を求めよ。

(ヒント)

$$\sin\theta+2\cos\theta=\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{1}$$

$$=\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}$$

分母・分子を $\cos\theta$ で割ると

$$=\frac{\tan\theta+2}{\pm\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\frac{5}{\pm\sqrt{10}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

オヤオヤ，コノ±ハドコカラデテキタノカ。というかも知れませんね。$\cos\theta>0$ のとき＋，$\cos\theta<0$ のとき－をとるのです。

＊　＊　＊

◆ 次は $\sin\theta$，$\cos\theta$ の2次の同次式の場合です。では，これを：——

練習 3. $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=0$ のとき $\tan\theta$ の値を求めよ。

(ヒント) 両辺を $\cos^2\theta$ で割りますと

$$\tan^2\theta+\tan\theta-1=0$$

となりましょう。あとは2次方程式の解の公式を使って

$$\tan\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

となります。

練習 4. $2\sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta=1$ のとき $\tan\theta$ の値を求めよ。

(解)

$$2\sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$\therefore\quad \sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta=0$$

両辺を $\cos^2\theta$ で割って

$$\tan^2\theta+3\tan\theta-5=0$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 5. $\tan\theta=2$ のとき

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$$

の値を求めよ。

(ヒント)

$$\text{与式}=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}{1}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

分母・分子を $\cos^2\theta$ で割って

$$=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta+4}{\tan^2\theta+1}$$

$$=\frac{4+4+4}{4+1}$$

$$=\frac{12}{5}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ では3次の同次式はどうです。

練習 6. $\sin^3\theta-6\sin^2\theta\cos\theta+11\sin\theta\cos^2\theta-6\cos^3\theta=0$

のとき $\tan\theta$ の値を求めよ。

(ヒント) 両辺を $\cos^3\theta$ で割ると

$$\tan^3\theta-6\tan^2\theta+11\tan\theta-6=0$$

ここで $\tan\theta=x$ とおくと

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

オヤ因数分解デキソウダナア，ヤッテミルト……

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ 2,\ 3$$

答　1, 2, 3

練習 7. $\tan\theta=2$ のとき

$$\sin^3\theta+2\cos^3\theta$$

の値を求めよ。

ヒント　$\sin^3\theta+2\cos^3\theta=\dfrac{\sin^3\theta+2\cos^3\theta}{1}$

$$=\frac{\sin^3\theta+2\cos^3\theta}{(\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta})^3}$$

$$=\frac{\tan^3\theta+2}{\pm(\sqrt{\tan^2\theta+1})^3}$$

コノ±ニツイテハ練習2トオナジデスヨ。

$$=\pm\frac{2^3+2}{(\sqrt{5})^3}=\pm\frac{10}{5\sqrt{5}}$$

$$=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\quad\cdots\cdots 答$$

*　*　*

◆ こんなふうにも応用できるのです。

練習 8. $a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ が θ の値にかかわらず一定であるための条件を求めよ。

ヒント　一定値をKとおいてみましょう。

$$a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta=K$$

とおいて

$$a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$$
$$=K(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$\therefore\quad (a-K)\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta$$
$$+(c-K)\cos^2\theta=0$$

両辺を $\cos^2\theta$ で割って，$\tan\theta=x$ とおくと

$$(a-K)x^2+2bx+(c-K)=0$$

これがxについての恒等式になるための条件は

$$a-K=0,\ 2b=0,\ c-K=0$$

$$\therefore\quad a=c,\ b=0\quad\cdots\cdots 答$$

注　$a=c=K$, $b=0$ としてはいけませんよ。というのは，一定値が与えられているわけではないのですから……。

また，2次の同次式の最大値・最小値を求めるのにも使えます。

練習 9. $2\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\cos^2\theta$ の最大値・最小値を求めよ。

ヒント　$K=2\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\cos^2\theta$

$$=\frac{2\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2t^2+4t+6}{t^2+1}\quad(t=\tan\theta)\cdots\cdots(*)$$

とかけます。もちろん $-\infty<t<\infty$

そこで分母を払って変形しますと

$$(K-2)t^2-4t+(K-6)=0\cdots\cdots(**)$$

t の実数条件から，判別式をDとしますと

$$\frac{D}{4}=2^2-(K-2)(K-6)\geqq 0$$

$$\therefore\quad K^2-8K+8\leqq 0$$

$$\therefore\quad 4-2\sqrt{2}\leqq K\leqq 4+2\sqrt{2}$$

さてこそ，最大値は $4+2\sqrt{2}$，最小値は $4-2\sqrt{2}$ なのです。

注　$(**)$で $K=2$ のときどうするのか，とか$(*)$で $\cos\theta=0$ のときどうするのか，といったサイなことは省略しました。気があればキミがやってみるのだ。

では，もうひとつ：——

練習 10. $4\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

ヒント　$K=4\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$$=\frac{4t^2+4t+3}{t^2+1}\quad(t=\tan\theta)$$

$$\therefore\quad (K-4)t^2-4t+(K-3)=0$$

$$\frac{D}{4}=2^2-(K-4)(K-3)\geqq 0$$

$$\therefore\quad K^2-7K+8\leqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{7-\sqrt{17}}{2}\leqq K\leqq\frac{7+\sqrt{17}}{2}$$

オヤ，モウデキタデハナイカ。

最大値は $\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$，最小値は $\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}$ なのです。

なお，三角関数の合成法でやってもできます。（☞ p.44）

◎ $\sin^2\theta$と$\cos^2\theta$の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆この項は数Ⅰにもありましたが，基解では微分法や積分法と結びついて，より高度になるのです。

◆ 基解でこれが問題となるのは，ほとんど最大・最小の問題についてなんです。だから，ここでも，それに焦点をおいてやってみましょう。では，まず，これです。

練習 1. $\sin^8\theta+\cos^8\theta$ の最大値・最小値を求めよ。 4/8

ヒント $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使って，

$\sin\theta$ または $\cos\theta$ だけで表す

のがコツ。どっちにしようか，などと，30分も考えてはいけませんよ。では：——

$$\sin^8\theta+\cos^8\theta=\sin^8\theta+(1-\sin^2\theta)^4$$

ここで $\sin^2\theta=u$ とおくと，$0\leqq u\leqq 1$ で

$$=u^4+(1-u)^4$$

これを $F(u)$ とおくと

$$F(u)=2u^4-4u^3+6u^2-4u+1$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad F'(u)&=8u^3-12u^2+12u-4\\&=4(2u^3-3u^2+3u-1)\\&=4(2u-1)(u^2-u+1)\end{aligned}$$

ゆえに

$$u<\frac{1}{2}\quad で\quad F'(u)<0$$

$$u>\frac{1}{2}\quad で\quad F'(u)>0$$

ゆえに $u=\dfrac{1}{2}$ で極小値かつ最小値をとるだろう。そして，それは

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

そして，$0\leqq u\leqq 1$ であることを考えると，最大値は $F(0)$ と $F(1)$ の大きいほう，ということになります。ところが

$$F(0)=1,\ F(1)=1$$

これは驚いた!! どっちも1である。つまり，最大値は1なのだ，とわかるのです。

* * *

◆ では，もう1つ：——

4/8 **練習 2.** $\sin^{10}\theta+\cos^{10}\theta$ の最大値・最小値を求めよ。

解

$$\begin{aligned}&\sin^{10}\theta+\cos^{10}\theta\\&=\sin^{10}\theta+(1-\sin^2\theta)^5\end{aligned}$$

ここで $\sin^2\theta=u$ とおくと

$$=u^5+(1-u)^5$$

ゆえに $0\leqq u\leqq 1$ において

$$f(u)=u^5+(1-u)^5$$

の最大値，最小値を求めればよい。

ところが，

$$f'(u)=5u^4+5(1-u)^4(-1)$$

（**チョットご注意**：ココデ，公式 **$\dfrac{d}{dx}(ax+b)^n=n(ax+b)^{n-1}\cdot a$** ヲ使イマシタヨ!!）

$$\begin{aligned}&=5\{u^4-(1-u)^4\}\\&=5\{u^2+(1-u)^2\}\{u^2-(1-u)^2\}\\&=5\{u^2+(1-u)^2\}(2u-1)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$u\leqq\frac{1}{2}\ のとき\quad f'(u)\leqq 0$$

$$u\geqq\frac{1}{2}\ のとき\quad f'(u)\geqq 0$$

であるから $u=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{16}$ をとる。また，$f(0)=f(1)=1$ であるから，最大値は1である。

答 最小値 $\dfrac{1}{16}$，最大値 1

注 このように，sin と cos だけの式があるときには一方だけで表せばよいのです。しかし，両方とも奇数乗のときは困る。それはまた，まったく別の問題なのです!!

＊　＊　＊

◆ 次には，やや，総合的な問題をやってみませんか。

4/8

練習 3. $y=\sin^3 x+\cos^3 x-3\sin x\cos x$ がある。

(1) $\sin x+\cos x=t$ とおくとき，y を t で表せ。

(2) yの最大値と最小値とを求めよ。

（名大）

ヒント (1) $\sin x+\cos x=t$ の両辺を2乗しますと，

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=t^2$$

$$\therefore\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad y&=(\sin x+\cos x)^3\\&\quad-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)\\&\quad-3\sin x\cos x\\&=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t-\frac{3}{2}(t^2-1)\\&=-\frac{1}{2}(t^3+3t^2-3t-3)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

ですから（☞ p.44）

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots②$$

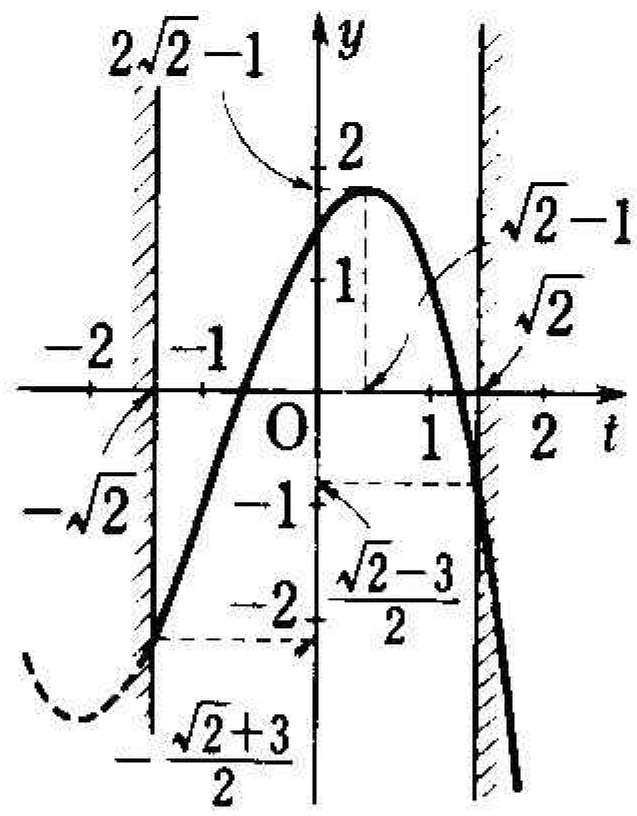
そこで，②なる条件の下に①の最大値・最小値を求めればよい，ということになったわけです。さて，

$$\begin{aligned}y'&=-\frac{1}{2}(3t^2+6t-3)\\&=-\frac{3}{2}(t^2+2t-1)\\&=-\frac{3}{2}(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

増減表を作ってみますと下の通り。

t	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}$
y'		+	0	−	
y	$-\frac{\sqrt{2}+3}{2}$	↗	$2\sqrt{2}-1$	↘	$\frac{\sqrt{2}-3}{2}$

これをもとにグラフをかいてみますと，右のようになります。これからわかるように，



最大値は $2\sqrt{2}-1$

最小値は $-\frac{\sqrt{2}+3}{2}$

です。

＊　＊　＊

◆ では，最後にもう1つやってみませんか。

練習 4. 関数 $\sin^3\theta+2\cos^2\theta+\sin\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

ヒント $\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混在していますね。一方をなくしたいが，$\sin\theta$ は1乗の項があるからまずい。しかし，$\cos\theta$ は $\cos^2\theta$ しかないから $\sin\theta$ にしてやればいいだろう。

もうできたらしいぞ。

$$\begin{aligned}&\sin^3\theta+2\cos^2\theta+\sin\theta\\&=\sin^3\theta+2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta\\&=\sin^3\theta-2\sin^2\theta+\sin\theta+2\end{aligned}$$

ここで $\sin\theta$ を t とおいて

$$f(t)=t^3-2t^2+t+2$$

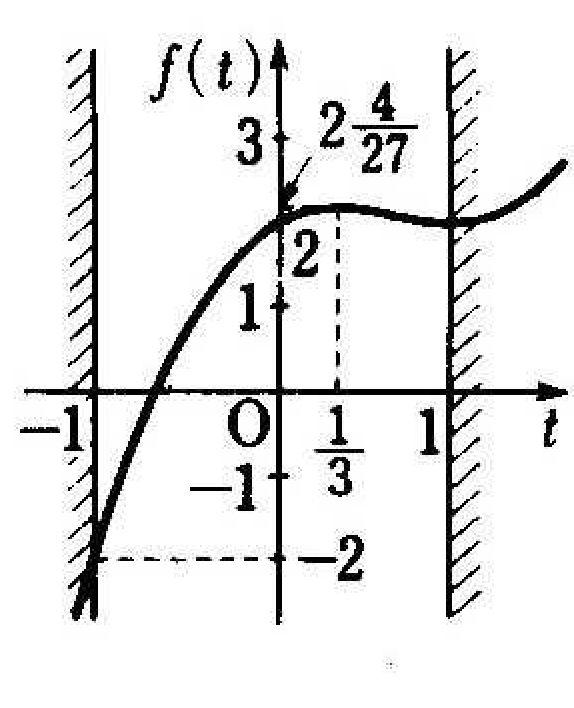
としましょう。

$$f'(t)=3t^2-4t+1=(t-1)(3t-1)$$

ですから，増減表は下の通りです。

t		$\frac{1}{3}$		1	
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	$2\frac{4}{27}$	↘	2	↗

グラフをかくほどのこともありませんが，右の通り。



$-1\leqq t\leqq 1$ を考慮して求める最大値は $2\frac{4}{27}$，最小値は -2 です。

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

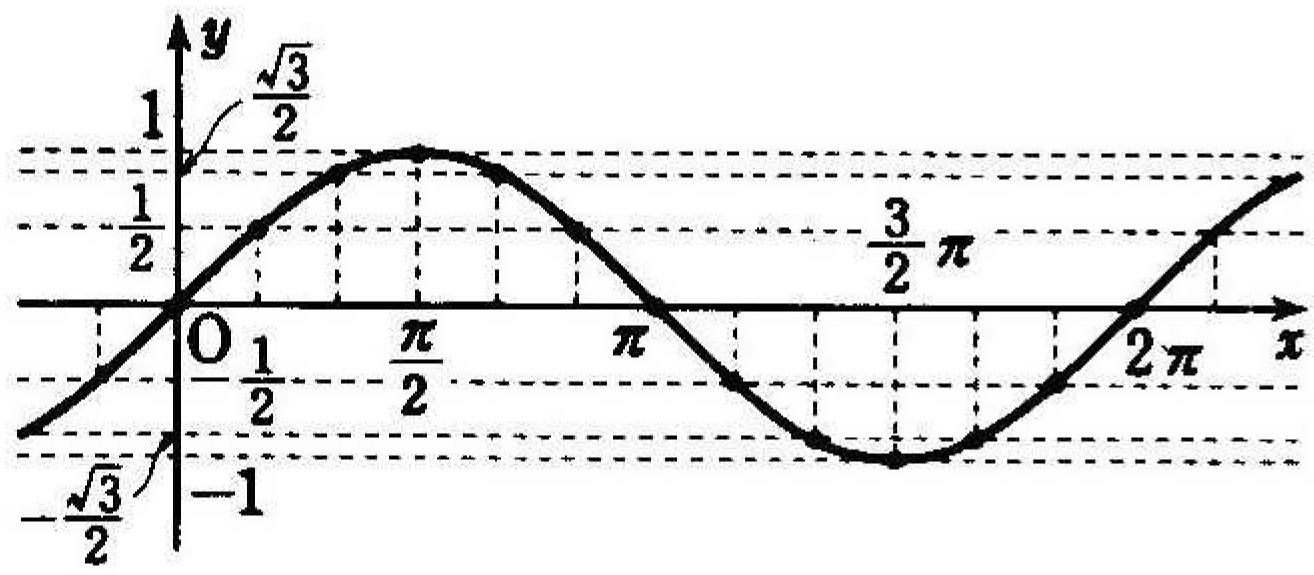
⑩ 三角関数のグラフ

◆三角関数のグラフを確実にかけるようになれば，もうおそれる必要はありません。何が，だって!!　もちろん三角関数を，だ。

◆ 三角関数のグラフを手軽にかけるように練習しておくことが必要です。では：——

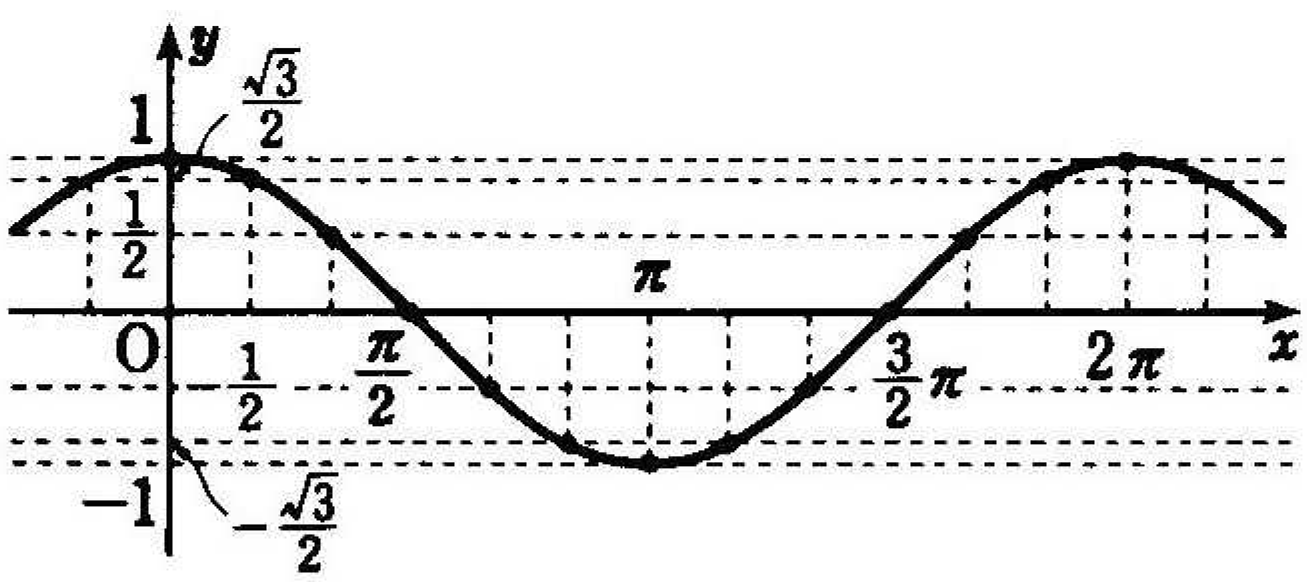
練習 1. $y=\sin x$ のグラフをかけ。

(ヒント)　xに $0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \cdots\cdots$ を入れたときの $\sin x$ の値は知っていなければなりません。これらの点をプロットしてなめらかに結ぶと下のようになります。



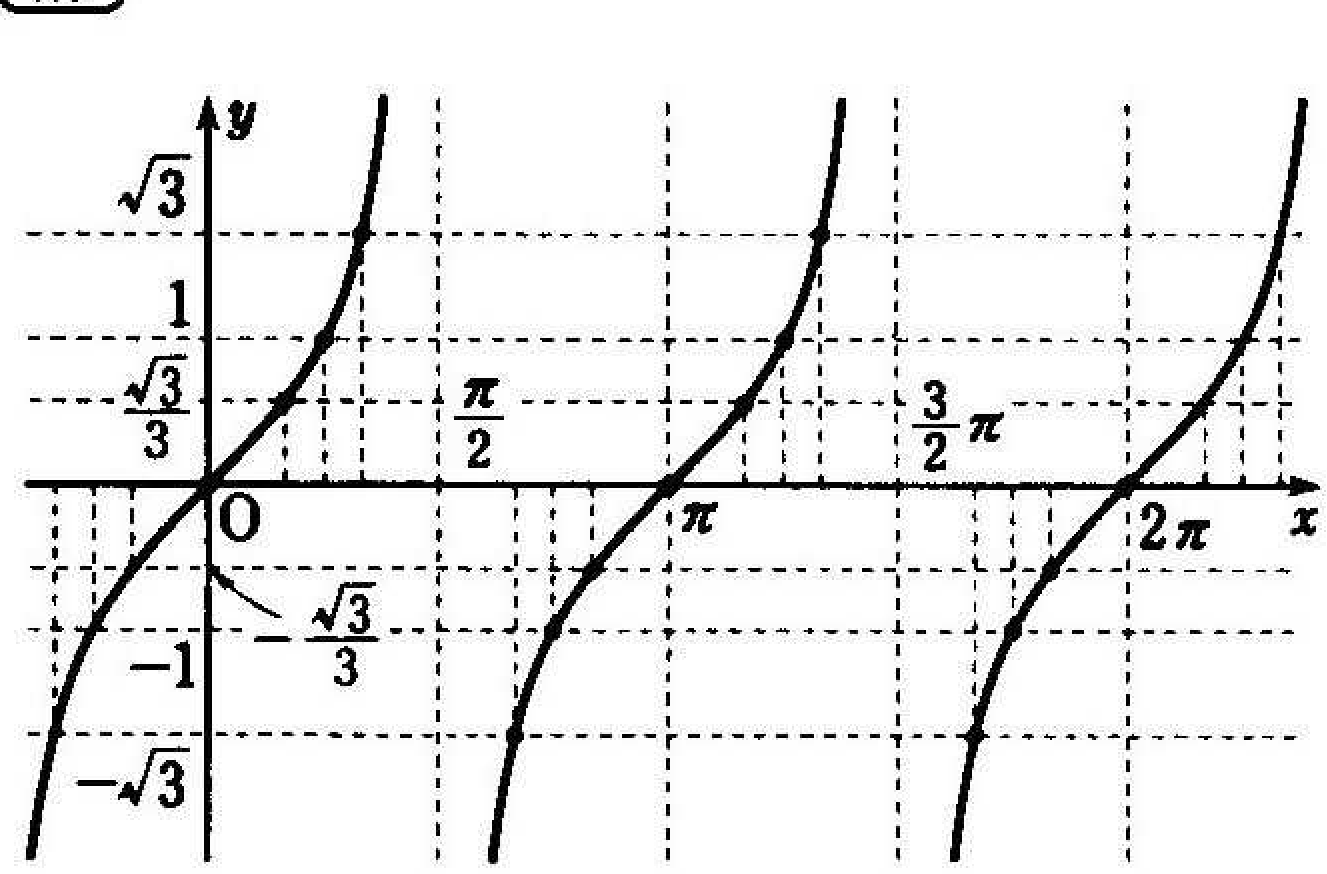
練習 2. $y=\cos x$ のグラフをかけ。

(ヒント)　xに $0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \cdots\cdots$ を入れてyの値を求めてプロットするとかける。



練習 3. $y=\tan x$ のグラフをかけ。

(解)



(注)　$\pi \fallingdotseq 3.14$ ですから，勝手に横の目盛をとるのはいけません。しかし，それを正しくとるのが無理な場合もありますから，絶対に，というわけではありませんが，……。

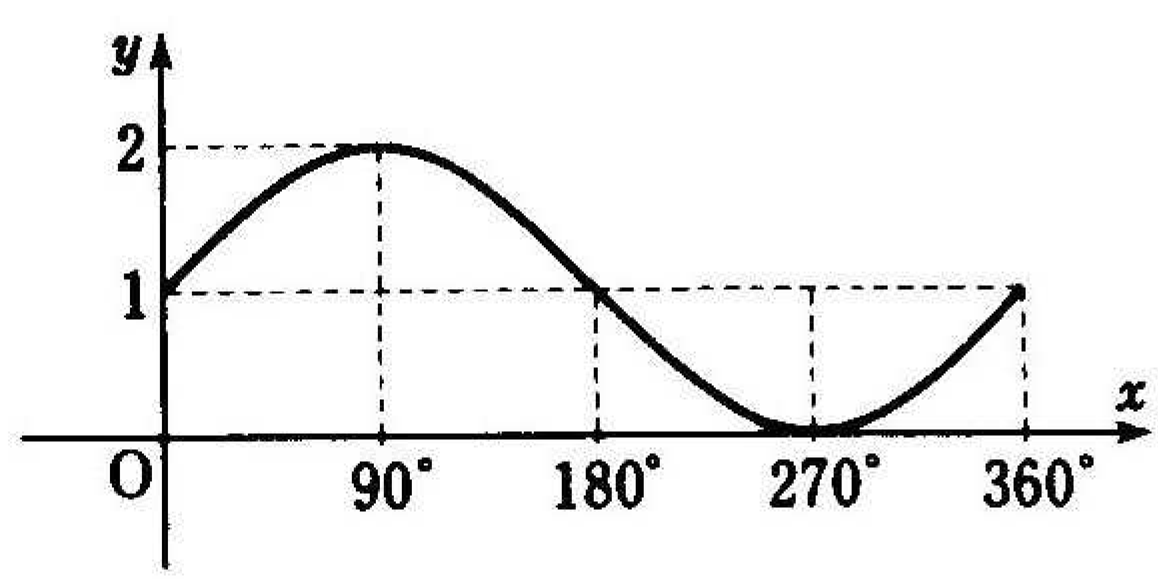
*　　*　　*

◆ 次は，やや複合されたものをやってみませんか。

練習 4. $y=1+\sin x$ のグラフをかけ。

ただし，$0°\leqq x\leqq 360°$.　(横浜市大)

(ヒント)　$y=\sin x$ のグラフを y 軸の正の方向に1だけ平行移動すればよい。

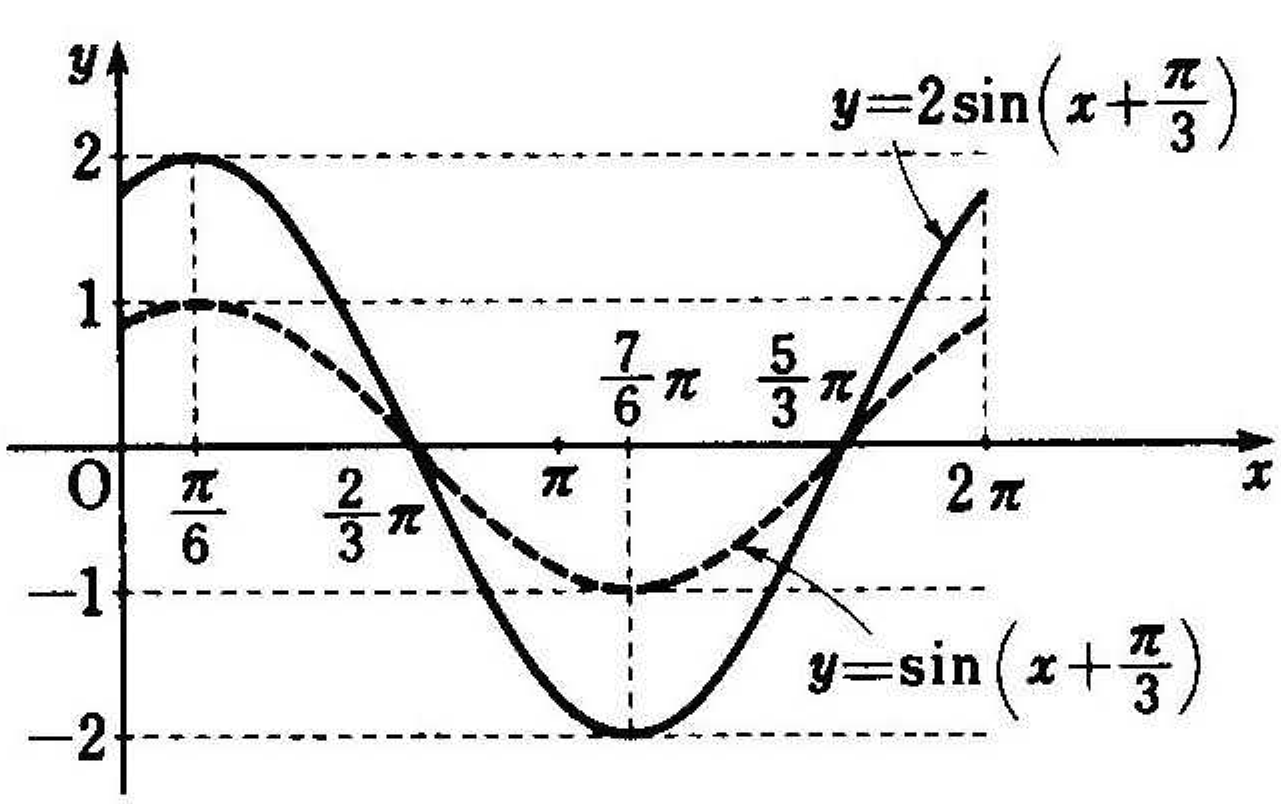


練習 5. $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。

ただし，$0\leqq x\leqq 2\pi$.

(ヒント)　xにいろいろ入れて計算してかくのがもっとも確実です。（また，$y=2\sin x$ のグラフをx軸の負の方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものをかいてもいい）

結果を示すと下の通りです。



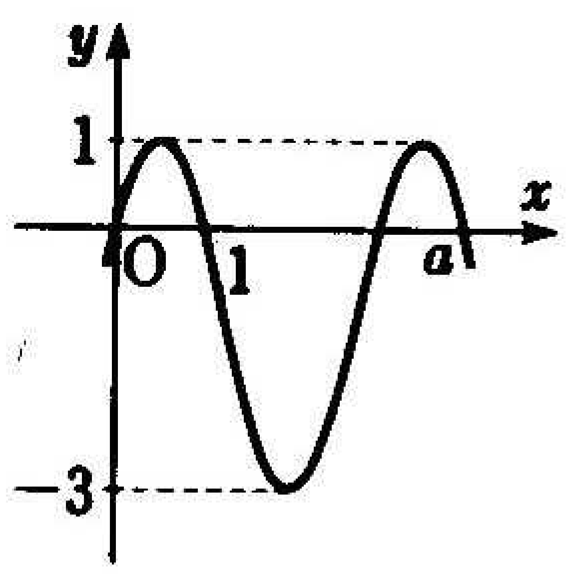
＊　＊　＊

◆ 逆に，三角関数のグラフが与えられて，関数をきめる問題も出題されています。例えば，これです。

4/9
練習 6. 右の図は

$y=R\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\theta\right)-1$

のグラフの一部である。R，θ および a の値を求めよ。ただし，



Rは正の数で，角は弧度法を用いて表すものとする。　（岡山大）

ヒント　Rは振幅ですから，$\dfrac{1-(-3)}{2}=2$ です。だから，与えられた方程式は

$$y=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x+\theta\right)-1 \qquad \cdots\cdots①$$

となります。

次に，$x=0$，$x=1$ で x 軸に交わっていますから，

$$2\cos\theta-1=0 \quad \text{かつ} \quad 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)-1=0$$

第1の方程式から

$$\cos\theta=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \theta=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

これを第2式の左辺の第1項に代入します。＋をとると

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=2\cos(\overline{2n+1}\pi)=-2$$

となって適しません。－をとると

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$$

で確かに満足します。

$$\therefore\ \theta=-\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

となります。次に周期は $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$ で，図から

これは $a-1$ に等しいハズ。

$$\therefore\ a-1=3 \qquad \therefore\ a=4$$

答　$R=2$，$\theta=2n\pi-\dfrac{\pi}{3}$，$a=4$

（nは整数）

＊　＊　＊

◆ 三角関数で表されたグラフをかく問題には次のようなものもあります。

4/9
練習 7. $0\leqq x\leqq\pi$，$0\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$\sin x=\cos 2y$ をみたす x と y の関係をグラフで示せ。　（広島大）

ヒント　$\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2y\right)$

とかけます。

ところが，一般に

$$\sin\theta=\sin\alpha$$

なら，

$$\theta=(-1)^n\alpha+n\pi$$

なる関係がありますから（☞ p.34）

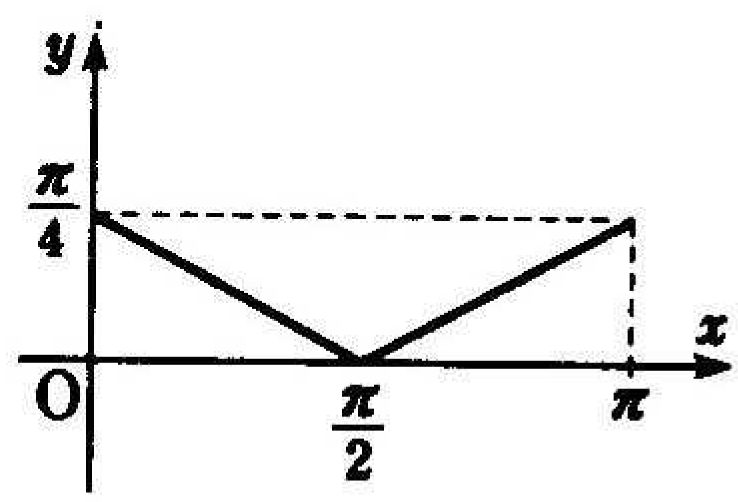
$$\frac{\pi}{2}-2y=(-1)^n x+n\pi$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}\left\{-(-1)^n x+\frac{\pi}{2}-n\pi\right\}$$

$n=0$ のとき　$y=\dfrac{1}{2}\left(-x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$n=1$ のとき　$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

ほかの n に対しては与えられた範囲を越えてしまうので不要です。



練習 8.

$\cos x+\cos y=0$ のグラフを x，y が共に絶対値 3π 以下の範囲で描け。　（京大）

ヒント　$\cos x=-\cos y$

$\therefore\ \cos x=\cos(y+\pi)$

ところが一般に

$\cos\theta=\cos\alpha$

なら

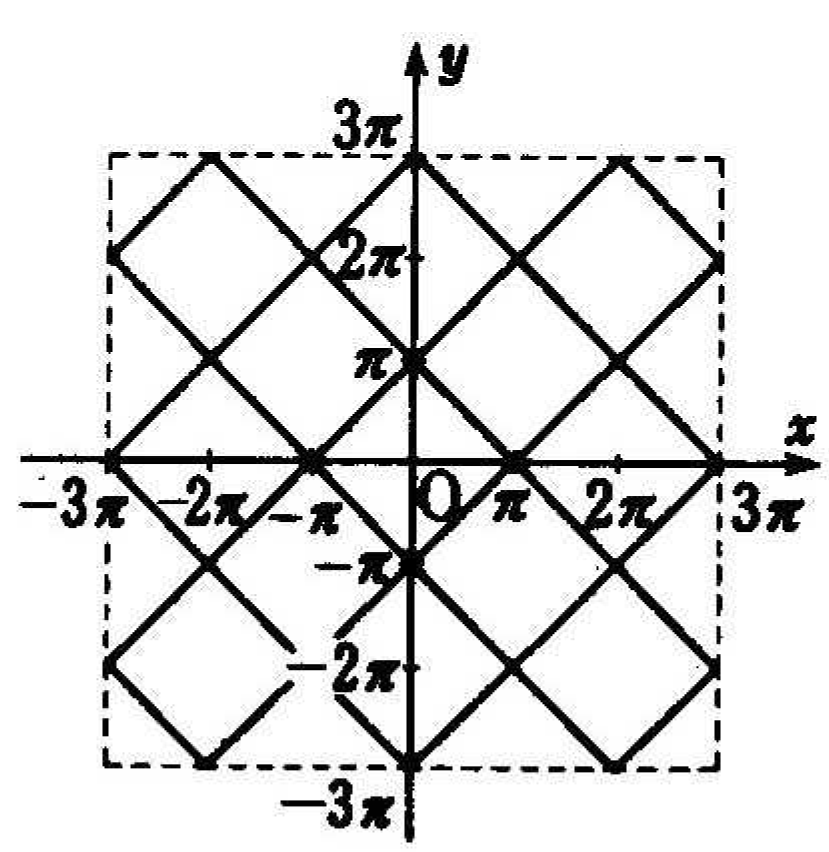
$\theta=\pm\alpha+2n\pi$

$\therefore\ y+\pi$

$=\pm x+2n\pi$

$\therefore\ y=\pm x$

$+(2n-1)\pi$



あとは，グラフをかくだけ。

① 三角方程式の解法

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆三角関数の扱い方が中心です。方程式が主となることはほとんどないのに，たいていの人は方程式に目がくらむ。

◆ 三角方程式に強くなるコツは2つあります。第1は，特別な角の三角関数の値はオボエテおくこと。第2は，一般解の求め方をマスターしておくこと，なんです。

さて，まず，どうしてもオボエテおくべきものを表にしますと，下の通り。

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$

では，まず第1段階の練習から。

■練習 1. $\sin\alpha=0.5$ を満足する鋭角 α を求めよ。（都立大）

ヒント　**鋭角**（えいかく）とは **0°より大で90°より小の角** です。だから $\sin\alpha=0.5$ は知っていなければならぬ場合で $\alpha=30°$ としてもいいし，$\alpha=\frac{\pi}{6}$ としてもいい。しかし，答に 30° と $\frac{\pi}{6}$ の両方書くのはまずい。つまり

$$\boxed{答}\ \ 30°,\ \frac{\pi}{6}$$

としないこと。

■練習 2. $\sin 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる鋭角 θ を求めよ。（三重大）

ヒント　$\sin 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$3\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \cdots\cdots$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{9},\ \frac{2\pi}{9},\ \frac{7\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9},\ \cdots\cdots$$

ところが θ は鋭角というのだから $\frac{\pi}{9}$，$\frac{2\pi}{9}$ の2つだけ。もちろん 20° と 40° といってもよい。答案としては，次のような書き方のほうがいい。

解　θ は鋭角であるから

$$0<3\theta<\frac{3\pi}{2}$$

ゆえに，$\sin 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$3\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{9},\ \frac{2\pi}{9}\ \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 3. $2\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$ を解け。ただし，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$（大分大）

ヒント　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから

$$-\frac{\pi}{3}\leqq 3\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{12}\pi$$

$$\therefore\ 3\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\qquad\cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次は第2段階です。

■練習 4. $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$ を解け。

ただし，$0\leqq\theta<2\pi$.

ヒント　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混在しているのはまずい。そこで，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ を使って $\cos\theta$ だけにしよう。

$$1-\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$$

$$\therefore\ 4\cos^2\theta+8\cos\theta-5=0$$

$$\therefore\ (2\cos\theta+5)(2\cos\theta-1)=0$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}\quad(\because\ \ 2\cos\theta+5>0)$$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 5.　$\sin^2 x-\cos^2 x+\cos x=0$
$(0 \leqq x<2\pi)$ を解け。　(神戸学院大)

(解)　$1-\cos^2 x-\cos^2 x+\cos x=0$

$$\therefore\ 2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$\therefore\ (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

$$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{2},\ 1$$

$$\therefore\ x=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 6. $4\cos^2 x+2(1+\sqrt{3})\sin x-(4+\sqrt{3})=0$ を満足する x の値を求めよ。ただし，$0 \leqq x<\pi$ とする。　(静岡大)

(解)　$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ を代入して変形すると

$$4\sin^2 x-2(1+\sqrt{3})\sin x+\sqrt{3}=0$$

$$\therefore\ (2\sin x-1)(2\sin x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次は第3段階です。これは **一般解を求めること**。これは次の公式をオボエテ，使エルコトが要点です。つまり

$\sin\theta=a$ の1つの解を α とすると，
すべての解は

$$\theta=(-1)^n\alpha+n\pi$$

$\cos\theta=a$ の1つの解を α とすると，
すべての解は

$$\theta=\pm\alpha+2n\pi$$

$\tan\theta=a$ の1つの解を α とすると，
すべての解は

$$\theta=\alpha+n\pi$$

(ただし，n は任意の整数)

ということです。では，次の練習へ。

練習 7. $\cos\alpha=a$ のとき $\cos\theta=a$ の一般解を求めよ。　(上智大)

(ヒント)　いうまでもなく解は

$$\theta=\pm\alpha+2n\pi$$

練習 8. $\sin\theta+\cos\theta=1$ を解け。

(ヒント)　$\cos\theta=1-\sin\theta$

両辺を2乗して

$$\cos^2\theta=(1-\sin\theta)^2$$

$\sin\theta=x$ とおくと

$$1-x^2=(1-x)^2$$

$$\therefore\ x=1,\ 0$$

$x=1$ のとき

$$\sin\theta=1,\ \cos\theta=0$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$x=0$ のとき

$$\sin\theta=0,\ \cos\theta=1$$

$$\therefore\ \theta=2n\pi$$

$$\boxed{答}\ \frac{\pi}{2}+2n\pi,\ 2n\pi$$

(注)　2乗したため，$\sin\theta$ $\cos\theta$ の両方の値から θ を求めないとまちがえる。

練習 9.　$\sin x+\sin y=1$
$\cos x+\cos y=0$
を解け。(ただし，$0<x<2\pi$，$0<y<2\pi$)

(ヒント)　1つの文字，例えば y を消去するのがコツ。

$$\sin y=1-\sin x,\ \cos y=-\cos x$$

辺々2乗して加えると

$$1=(1-\sin x)^2+(-\cos x)^2$$

$$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$$

$x=\frac{\pi}{6}$ のとき　$\sin y=\frac{1}{2}$，$\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ y=\frac{5\pi}{6}$$

$x=\frac{5\pi}{6}$ のとき　$\sin y=\frac{1}{2}$，$\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ y=\frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{答}\ \left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right),\ \left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$$

ハイ，これでできました。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

三角不等式の解法

◆三角不等式は三角方程式より簡単なのが多いものです。そして，それには円グラフか，三角関数のグラフを利用するほうがいい。

◆　$\sin\theta$ は第1，第2象限で正，第3，第4象限で負となり，$\theta=0$, π のとき（正確にいえば $n\pi$ のとき）0になります。そこで

≪$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)>0$ を解け。(三重大)≫

なら，n を整数として

$$2n\pi<\theta-\frac{\pi}{6}<(2n+1)\pi$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{6}+2n\pi<\theta<\frac{\pi}{6}+(2n+1)\pi$$

といったぐあい。

$\cos\theta$ なら第4，第1象限で正，第2，第3象限で負で，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ で $\left(\text{正確にいうと } \dfrac{\pi}{2}+n\pi \text{ のとき}\right)$ 0になります。そこで

≪$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$ を解け≫

なら，

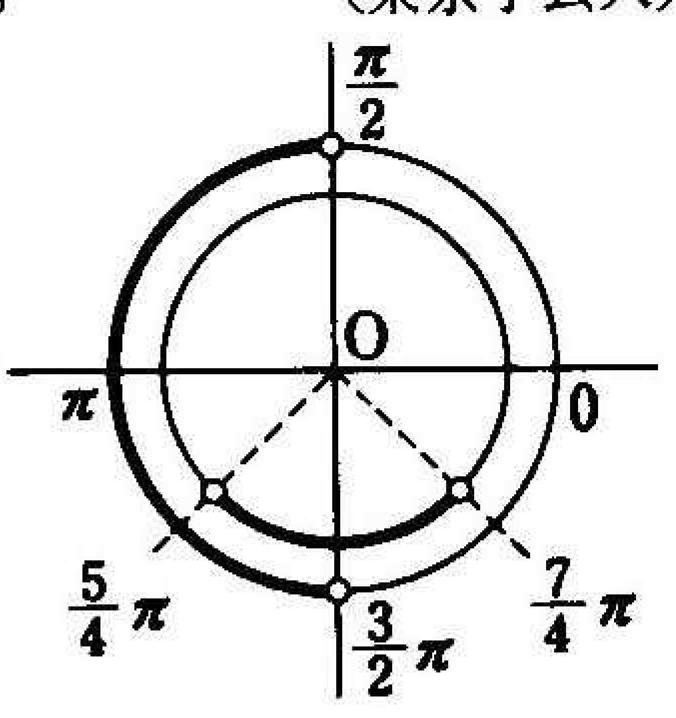
$$2n\pi-\frac{\pi}{2}<\theta+\frac{\pi}{3}<2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad -\frac{5}{6}\pi+2n\pi<\theta<\frac{\pi}{6}+2n\pi$$

といったぐあい。では，次の練習を。

練習 1. $\sin x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$ とする。　　(東京学芸大)

ヒント　円グラフをかいてみると右の通りです。つまり外側の円の太い実線が $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$ を示し，



内側の円の太い実線が $\sin x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満足する範囲です。だから，求める解はその共通な部分で，

$$\frac{5\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 2. 不等式 $1+\sin\theta\geqq 2\cos^2\theta$ を満足する θ の範囲を求めなさい。

ただし，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ とする。　(慶大)

ヒント　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混在しているのはまずい。何はともあれ，$\sin\theta$ で統一しよう。

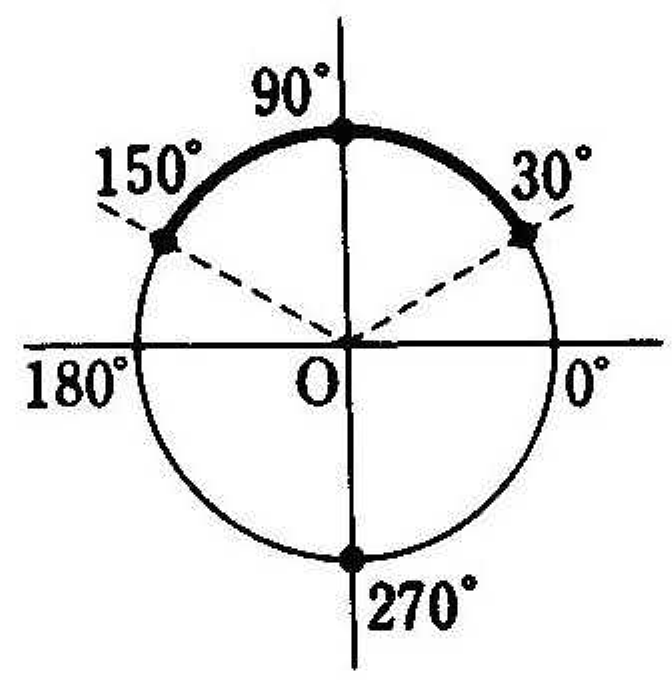
$$1+\sin\theta\geqq 2(1-\sin^2\theta)$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq 0$$

$$\therefore\quad (\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\sin\theta=-1\\ \dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq 1\end{cases}$$

円グラフをかくほどのこともないが，念のため，右にあげてあります。



$$\theta=270^\circ,\ 30^\circ\leqq\theta\leqq 150^\circ\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

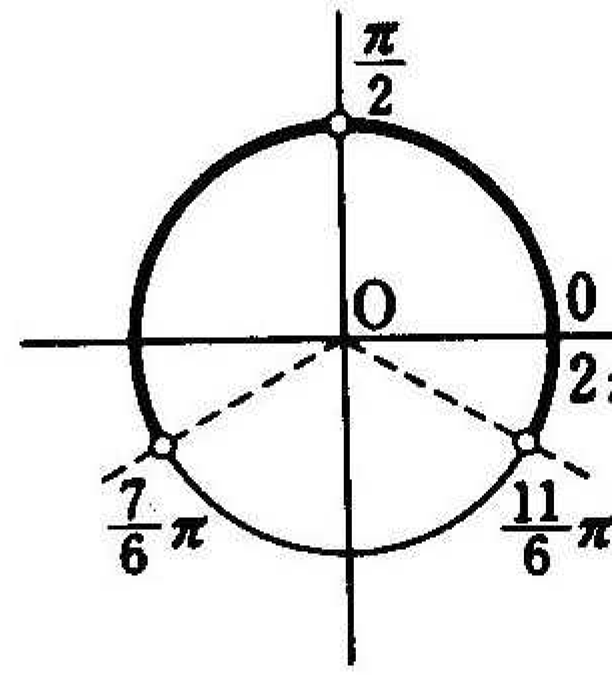
練習 3. 不等式 $2\cos^2x+\sin x-1>0$ を解け。ただし，$0\leqq x<2\pi$ とする。

(岡山大)

解　$2(1-\sin^2x)+\sin x-1>0$

$\therefore\quad 2\sin^2x-\sin x-1<0$

$\therefore\quad (2\sin x+1)\times(\sin x-1)<0$



$$\therefore\quad -\frac{1}{2}<\sin x<1$$

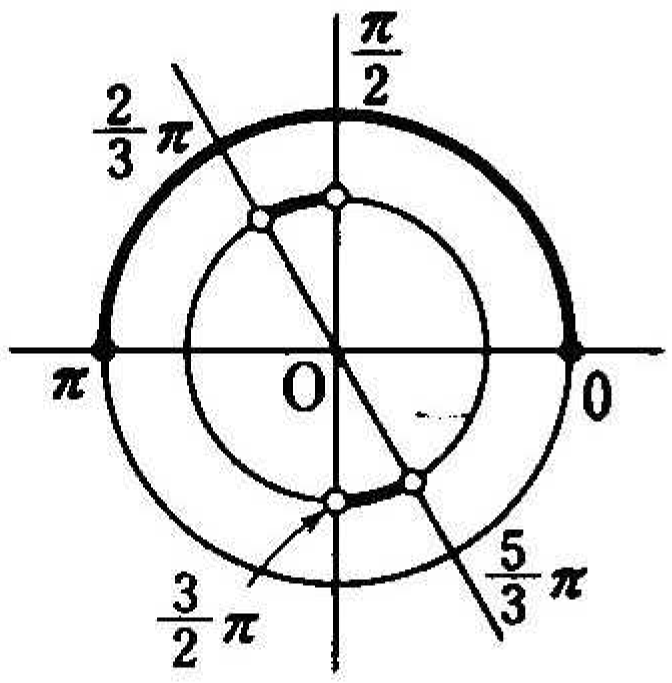
$0\leqq x<2\pi$ だから

$$0\leqq x<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<x<2\pi$$

◆ 以上で大切なことはほぼ終わりですが，$\tan\theta$ が残っていますね。

■練習 4. $0\leqq\theta\leqq\pi$ であるとき $\tan\theta<-\sqrt{3}$ を満足する θ の値の範囲を求めよ。

（東京学芸大）



ヒント　円グラフをかいてみると，

$0\leqq\theta\leqq\pi$　は外側の円の太い実線部分，

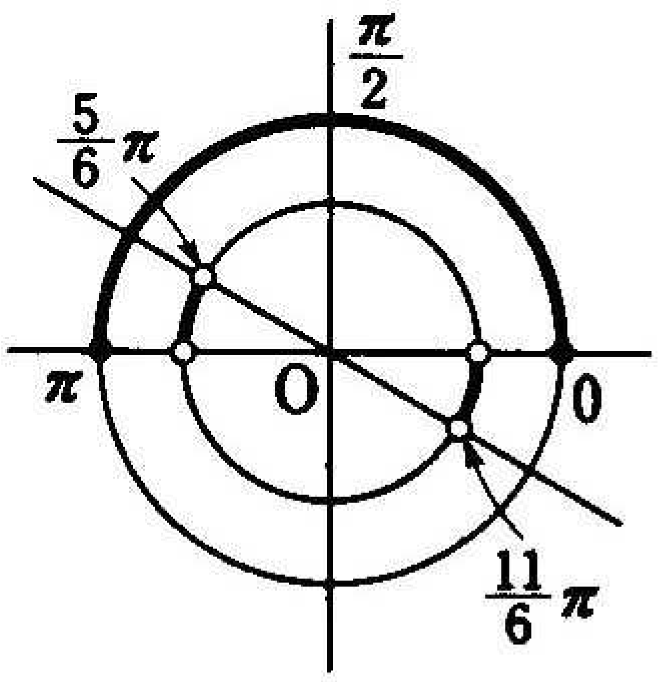
$\tan\theta<-\sqrt{3}$　は内側の円の太い実線部分。したがって，

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 5. $0\leqq\theta\leqq\pi$ であるとき，

$\cot\theta<-\sqrt{3}$

を解け。



ヒント　右に円グラフをあげておきます。もはや答を書くまでもないでしょう。

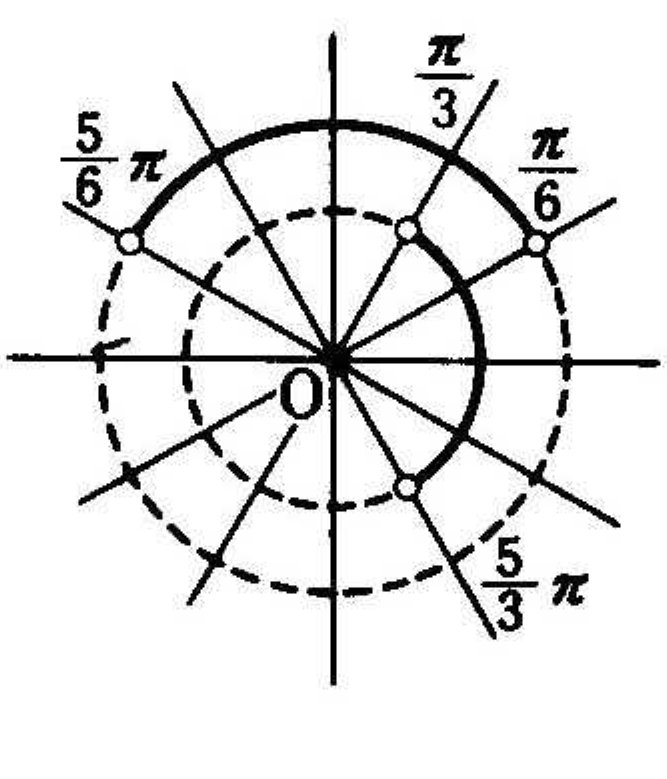
*　*　*

◆ では，総合的な問題やら，めんどうな問題やらをやってみませんか。

■練習 6. $0\leqq\theta\leqq2\pi$　のとき，次の不等式を解け。

$$\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)>0$$

ヒント　$\sin\theta-\frac{1}{2}$ と $\cos\theta-\frac{1}{2}$ の符号の正である部分を実線で，負である部分を破線で表して，右に示してあります。ただし，外側が $\sin\theta-\frac{1}{2}$，内側が $\cos\theta-\frac{1}{2}$ です。



これによると一目瞭然でしょう。

答　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{3}$

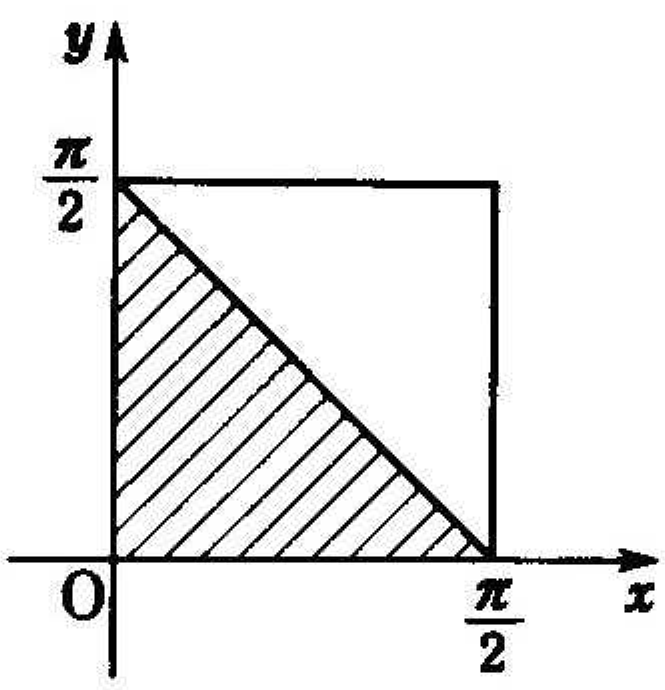
■練習 7. $0<x<\frac{\pi}{2}$，$0<y<\frac{\pi}{2}$ のとき，

$\sin x<\cos y$ なる領域に斜線を引け。

ヒント　x，y は第1象限の角ですから，$\sin x=\cos y$ になるのは $x+y=\frac{\pi}{2}$ のときで

$x+y<\frac{\pi}{2}$ なら　$\sin x<\cos y$

なるほど，求める範囲は右の図の斜線を引いた部分なのだ。境界線上の点を含まないことも明らか。



■練習 8. $0\leqq x\leqq\pi$，$0\leqq y\leqq\pi$ のとき，

$$\sin^2x+\cos^2y\geqq1$$

を満足する領域を図示せよ。（静岡薬大）

ヒント　$\sin^2x\geqq1-\cos^2y$

$\therefore\ \sin^2x\geqq\sin^2y\quad\cdots\cdots①$

ところが，$0\leqq x\leqq\pi$，$0\leqq y\leqq\pi$ ですから

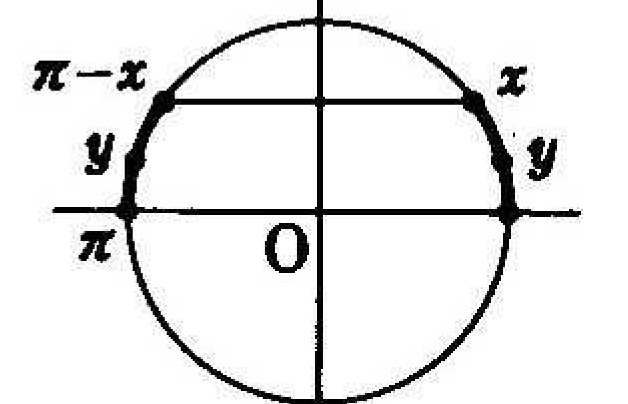
$\sin x\geqq0$，$\sin y\geqq0$

です。そこで，①から

$\sin x\geqq\sin y$

そこで円グラフからわかるように

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$

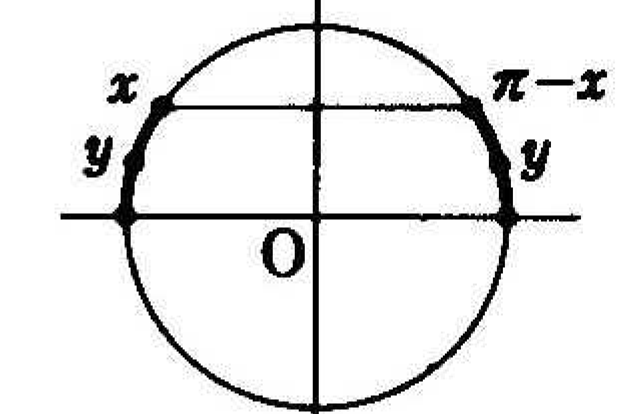


（i）$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$0\leqq y\leqq x$

あるいは

$\pi-x\leqq y\leqq\pi$

$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$



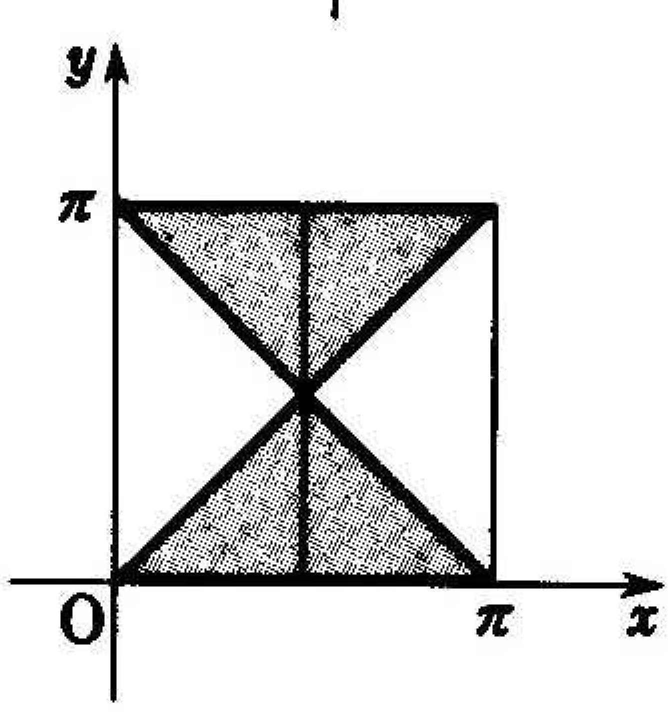
（ii）$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき

$0\leqq y\leqq\pi-x$

あるいは

$x\leqq y\leqq\pi$

したがって，求める範囲は右の通り。（境界も含む）



① (三角関数の)加法定理

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆基解で加法定理をどの程度やるべきか，ハッキリしていないために，みんな悩んでいる。しかし，受験生は必要ならやるのだ!!

◆ **三角関数の加法定理** というのは3つあります。細かくいうと6つです。それは

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

と，β の代わりに $-\beta$ をおきかえたもの，そして

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta,\quad \cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

を考慮して得られる

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

です。これは歌なんか作ってオボエルより，何度も何度も大きな声でいってみてオボエルより仕方のないもの。ぜひ覚えてください。

＊　＊　＊

◆ まず加法定理を使っていくつかやってみましょう。

練習 1. $\sin75°$ の値を求めよ。

(解) $\sin75°=\sin(30°+45°)$

$$=\sin30°\cos45°+\cos30°\sin45°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
……答

練習 2. $\cos15°$ の値を求めよ。

(解) $\cos15°=\cos(45°-30°)$

$$=\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
……答

(注) もちろん

$$\cos15°=\sin(90°-15°)=\sin75°$$

からも求められます。ともあれ，このようにして，加法定理によって，数値を計算できる角が大幅に増えてくるわけです。

＊　＊　＊

◆ 次は加法定理を使ってやる計算を：——

練習 3. $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を導け。

(解) 加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

において $\alpha=\beta=\theta$ とおくと

$$\sin2\theta=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

Q. E. D.

(注) これを **2倍角の公式** といいます。

練習 4. $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
$=2\cos^2\theta-1$
$=1-2\sin^2\theta$

を導け。

(解) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

において $\alpha=\beta=\theta$ とおくと

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \quad ……①$$

を得る。ここで $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ を代入すると

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$$

を得る。また，① において $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ を代入すると

$$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$$

Q. E. D.

(注) これもまた，2倍角の公式です。

＊　＊　＊

◆ さて，加法定理の証明ですが，ベクトルの内積を使うか，行列を使うか，図を使ってやるか，この3つの方法がふつうです。

■練習 5. ベクトルの内積を使って

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

ヒント $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\cdot(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

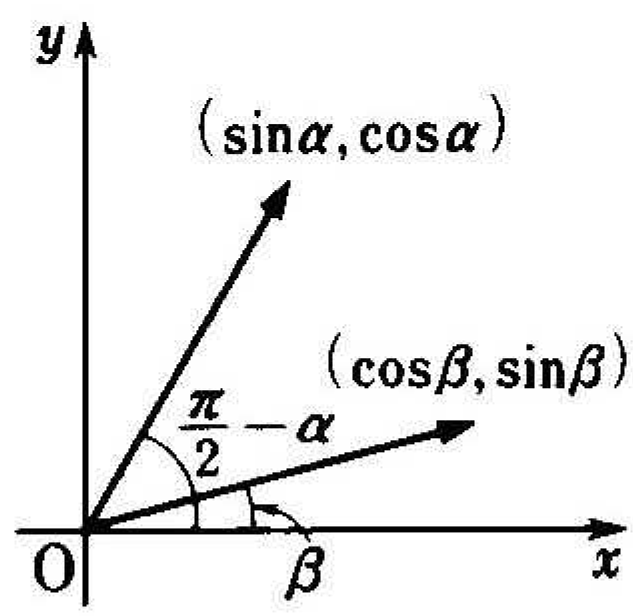
ところが

$$\vec{a}=(\sin\alpha,\ \cos\alpha),\ \vec{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

とおくと

$$|\vec{a}|^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$|\vec{b}|^2=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

また，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると



$$\theta=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sim\beta$$
$$=\left|(\alpha+\beta)-\frac{\pi}{2}\right|$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$$
$$=\sin(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\quad \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

Q. E. D.

■練習 6. 行列の積を使って

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

ヒント 行列 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ は，原点のまわりに正の方向に θ だけ回転する1次変換を表していますから，α だけ回転し，ついで $-\beta$ だけ回転するのも，$(\alpha-\beta)$ 回転するのも同じことですから

$$\begin{pmatrix}\cos(-\beta) & -\sin(-\beta)\\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

左辺を計算し，右辺と比較すると（2，1）成分から

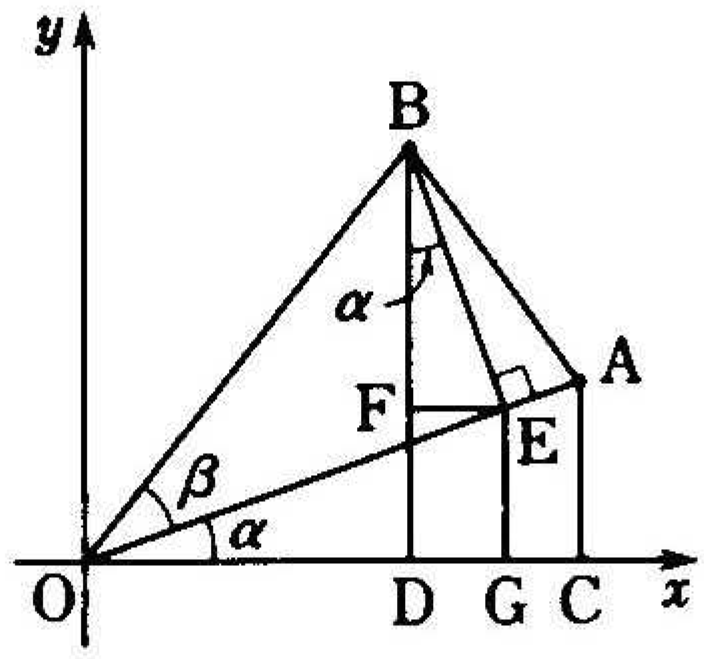
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

が得られます。まったく同様に $\cos(\alpha-\beta)$ の展開式も得られます。

■練習 7. $\sin(\alpha+\beta)$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

を図形的に導け。



ヒント 右の図で

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=1$

としますと

$$\sin(\alpha+\beta)=\overline{\mathrm{BD}}$$
$$=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FD}}$$

ところが

$$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BE}}\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$$

$$\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{EG}}=\overline{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\sin\alpha\cdot\frac{\cos\beta}{1}=\sin\alpha\cos\beta$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

注 図形的にやる方法はいろいろありますから，興味があるなら，3通りぐらい考えてみるとおもしろいでしょう。

* * *

◆ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

などからいろいろと重要な公式が導かれます。例えば，$\alpha=\beta=\theta$ とおくと

$$\sin2\theta=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta$$

となります。これを2倍角の公式といいます。

$$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta}$$

となります。これを3倍角の公式といいます。

正接についても，加法定理で $\alpha=\beta=\theta$ とおいて，2倍角の公式

$$\boldsymbol{\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

が得られます。しかし，ここでは，これらに立入らないことにしましょう。この機会に，公式を強引に覚えておくこと。

⑩ 三角関数の和から積へ

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆三角関数の計算の中でもっともキラワレルのは，和から積へ，また，積から和へのそれでしょう。しかし，やらずばなるまい。

◆
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

これはくりかえし，くりかえしやってオボエルこと。さて，その上で：——

12/26

■練習 1. $\sin\theta+\sin 2\theta=0$ を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$

ヒント $\sin\theta+\sin 2\theta=2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$

$$\therefore\quad \sin\frac{3\theta}{2}=0 \quad \text{あるいは} \quad \cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$\therefore\quad \frac{3\theta}{2}=0,\ \pi,\ 2\pi$$

および

$$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\ ;\ \pi \quad \cdots\cdots 答$$

注 いろいろな扱い方があります。例えば：——

$$\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta=0$$
$$\therefore\quad \sin\theta(2\cos\theta+1)=0$$
$$\therefore\quad \sin\theta=0,\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad \theta=0,\ \pi\ ;\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

あるいは次のように扱うこともできます。つまり

$$\sin 2\theta=-\sin\theta=\sin(-\theta)$$
$$\therefore\quad 2\theta=(-1)^n(-\theta)+n\pi$$
$$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{2+(-1)^n}$$

$n=0$ のとき 0

$n=1$ のとき π

$n=2$ のとき $\frac{2}{3}\pi$

$n=3$ のとき 3π（不適）

$n=4$ のとき $\frac{4}{3}\pi$

といったぐあい。

12/26

■練習 2. $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0$ を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$

ヒント キレイにならんでいるから，両端の方からまとめるのがコツです。すなわち

$$(\sin\theta+\sin 4\theta)+(\sin 2\theta+\sin 3\theta)=0$$
$$\therefore\quad 2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$$
$$\therefore\quad \sin\frac{5\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=0$$
$$\therefore\quad \sin\frac{5\theta}{2}\cdot 2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}=0$$

これから θ は

$$0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$$

となります。

* * *

■練習 3. $A+B+C=\pi$ のとき

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

が成り立つことを示せ。

ヒント $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ところが

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{C}{2}$$

また

$$\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{\pi-(A+B)}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{A+B}{2}$$

ですから上の式は

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

中カッコ内をまた積にして

$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(注) この種の問題は和から積の計算練習にはいい例になります。ではもうひとつ，やってみませんか。

練習 4. $A+B+C=\pi$ のとき

$$\cos A+\cos B+\cos C$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

を証明せよ。

(ヒント) $\cos A=\cos 2\cdot\frac{A}{2}=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

ですから

$$左辺=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\left\{\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right\}$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\left\{\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right\}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(注) 余裕があったら $A+B+C=0$ のとき，$A+B+C=\pi$ のとき，$A+B+C=2\pi$ のときなど，いろいろやってみるといい。少しずつちがってきます。

*　*　*

◆ ではちょっとした応用問題をやってみませんか。

練習 5. △ABC において

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

を証明せよ。

(ヒント) 正弦定理によれば，外接円の半径を R として

$$a=2R\sin A,\ \ b=2R\sin B$$

ですから

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}$$

$$=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}\qquad\cdots\cdots(*)$$

ところが分母，分子は積に変形して

$$分母=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$分子=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

ですから上の (*) は

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

オヤ，モウデキテシマッタデハナイカ。

なお本問の関係を正接定理ということがありますが，もちろんオボエル必要はありませんよ。

*　*　*

◆ ところで，和から積への公式で，もっとも≪アブナイ≫のは第4の

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

なのです。ただ，ここで大切なのは

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

であること，です。つまり，α，β の大小にかかわらないことです。

ここのところが，とかく，まちがいのもと。と，いうのも

$$\sin(\alpha-\beta)=-\sin(\beta-\alpha)$$

と混同するからです。キミ，迷うことなかれ。

◐ 三角関数の積から和へ

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆三角関数の積を和や差に表すのはとかくマチガウもの。というのも，何となくイヤな気がするからにちがいない。

◆ $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

をまず強引にオボエルこと。その上で，次にいきましょう。なお，これらの公式を使うときには，**右辺を和や差の公式で計算して左辺がでるかどうか**を常にチェックする心がけが大切です。では：——

練習 1. $\sin 3\theta\cos\theta$ を和か差で表せ。

ヒント $\sin 3\theta\cos\theta$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta) \quad \cdots\cdots 答$$

練習 2. 四角形 ABCD において

$$\sin A\sin C=\sin B\sin D$$

ならば，これはどんな四角形か。

ヒント 両辺とも積です。さては，和または差で表すのではあるまいか。

$$-\frac{1}{2}\{\cos(A+C)-\cos(A-C)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{\cos(B+D)-\cos(B-D)\}$$

$$\therefore\quad -\cos(A+C)+\cos(A-C)$$
$$=-\cos(B+D)+\cos(B-D)$$

ハテ，困ッタゾ。どうしようか。ここで，四角形の内角の和が 2π であることをおもいだすべきです。つまり

$$A+B+C+D=2\pi$$

$$\therefore\quad \cos(B+D)=\cos(2\pi-(A+C))$$
$$=\cos(A+C)$$

$$\therefore\quad \cos(A-C)=\cos(B-D)$$

ところが $-\pi<A-C<\pi$
$-\pi<B-D<\pi$

$$\therefore\quad A-C=B-D \quad \cdots\cdots ①$$

または

$$A-C=-(B-D) \quad \cdots\cdots ②$$

①ならば

$$A+D=B+C=\pi$$

②ならば

$$A+B=C+D=\pi$$

いずれにしても四角形 ABCD は台形であることがわかります。

* * *

◆ 方程式の解法にもでてきます。例えば

練習 3. $\cos x\cos 2x=\cos 3x\cos 4x$ を解け。

ヒント 両辺とも積を和に変形して

$$\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)=\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x)$$

$$\therefore\quad \cos 3x=\cos 7x$$

$$\therefore\quad \cos 7x-\cos 3x=0$$

オヤ，オヤ，コンドハ差ヲ積ニ変エルベキダナ。

$$-2\sin 5x\sin 2x=0$$

$$\therefore\quad 5x=n\pi,\ \text{または}\ 2x=n\pi$$

$$\therefore\quad x=\frac{n}{5}\pi,\ \frac{n}{2}\pi \quad \cdots\cdots 答$$

注 上のような場合は，いうなれば，積が表面にあらわれていて，和または差に変形してくれるのを待っているようなところがあります。しかし，次は，それがちょっと見えない。

練習 4. $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta$ の和を求めよ。ただし，$\theta\neq 2n\pi$ とする。

ヒント これははじめて出合ったら全くお手上

げです。幸い，大抵はヒントがついているものなのです。ではどうするか。

$$S=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta$$

の両辺に $2\sin\frac{\theta}{2}$ を掛けてみますと

$$2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)S=2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta+\cdots\cdots+2\sin\frac{\theta}{2}\sin n\theta$$

そこで右辺の各項を差に変えるのです。つまり

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta=\cos\frac{3}{2}\theta-\cos\frac{5}{2}\theta$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin 3\theta=\cos\frac{5}{2}\theta-\cos\frac{7}{2}\theta$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin n\theta=\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}$$

これを辺々相加えるとバラバラ消えて次のようになります。

$$\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}$$

さらにこれを積に変形して

$$2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$$

となりますから

$$S=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

では，もうひとつ：——

練習 5. $\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta$ の和を求めよ。ただし，$\theta\fallingdotseq 2n\pi$

ヒント　$S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta$

の両辺に $2\sin\frac{\theta}{2}$ を掛けると

$$2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)S=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\cos 2\theta+\cdots\cdots+2\sin\frac{\theta}{2}\cos n\theta$$

$$=\left(-\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\left(-\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{5\theta}{2}\right)+\cdots\cdots+\left(-\sin\frac{(2n-1)\theta}{2}+\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}$$

$$\therefore\quad S=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 練習 4 と練習 5 では一方が sin，他方が cos なのにどちらも $2\sin\frac{\theta}{2}$ を掛けたのに不安を感じた人もあるでしょう。実は

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha+(k-1)\beta)$$

でも

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(\alpha+(k-1)\beta)$$

でも $2\sin\frac{\beta}{2}$ を掛けてできるのです。

ファイトのある人は，この機会に，上の一般的な場合についてやってみませんか。

＊　＊　＊

◆ ところで，この公式をオボエルのにスゴク抵抗を感じる人が多いのです。と，いうのも，オボエルのがめんどうというよりも，オボエルことに意義を感じないからなのです。

だから，その人にいいたい。意味があろうと，なかろうと，試験のその日がおわるまでオボエなければならないのです。いや，それがルソーとニーチェのわかれ道なのです。

しかし，キミが受験生であるかぎり，これはやっぱり，やらなければなりません。

さあ，この公式をまだ，はっきりつかんでいないならば，小さい紙切れにかきこんで，3 日間，これを，見つづけ，オボエルのです。

○三角関数の合成

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

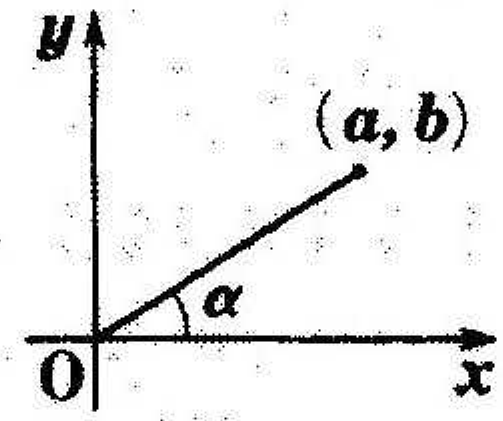
◆三角関数の合成，むかしは単振動の合成といった。正弦定理はかつて正弦法則といった。三角関数の技術へのレイゾクをみよ。

◆ 三角関数の合成は大切です。それはまさに $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を結びつける最大のキズナだからです。これをよくオボエ，よく利用し，ムダのない解法につとめるべきです。では，ともあれ，次にいきましょう。

三角関数の合成 とは

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ここに，α は，原点 O から点 $(a,\ b)$ に引いた直線が x 軸の正の方向となす角



をいうのです。ともあれ，具体的な例を扱ってみましょう。

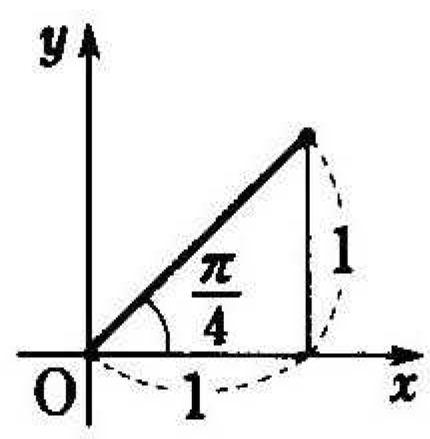
練習 1. $\sin\theta+\cos\theta$ を合成せよ。

(ヒント) 上の公式において

$a=1,\ b=1$

ですから

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$



$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

これが求めるものです。

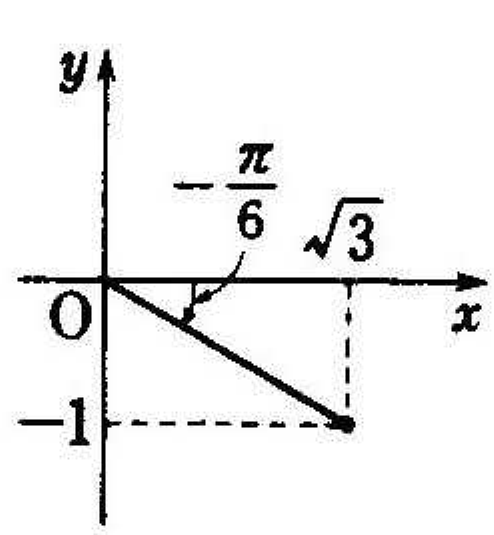
(注) これからわかるように $\sin\theta+\cos\theta$ の最大値は $\sqrt{2}$ で，最小値は $-\sqrt{2}$ です。

練習 2. $\sqrt{3}\sin x-\cos x$ を合成せよ。

(解) 与式 $=\sqrt{3}\sin x+(-1)\cos x$

$$=\sqrt{3+(-1)^2}\times\sin\left(x+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$



(注) いわずもがな，最大値は 2 で，最小値は -2 です。

*　*　*

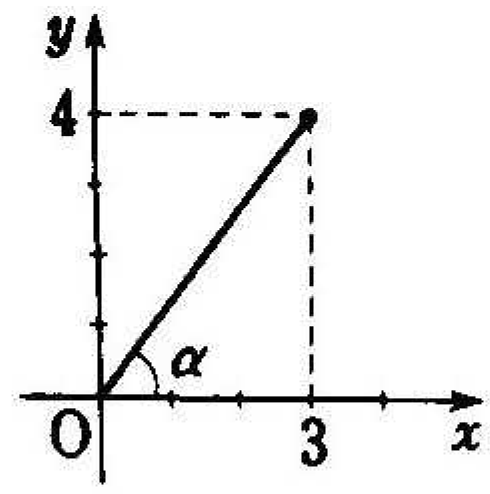
練習 3. $0\leqq\theta\leqq2\pi$ のとき $3\sin\theta+4\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

(解) $3\sin\theta+4\cos\theta$

$$=\sqrt{3^2+4^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$=5\sin(\theta+\alpha)$$

ここに α は第 1 象限の角で $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ である。



したがって，求める最大値は 5，最小値は -5 である。

練習 4. $0\leqq x\leqq2\pi$ において

$$\sin x-\cos x$$

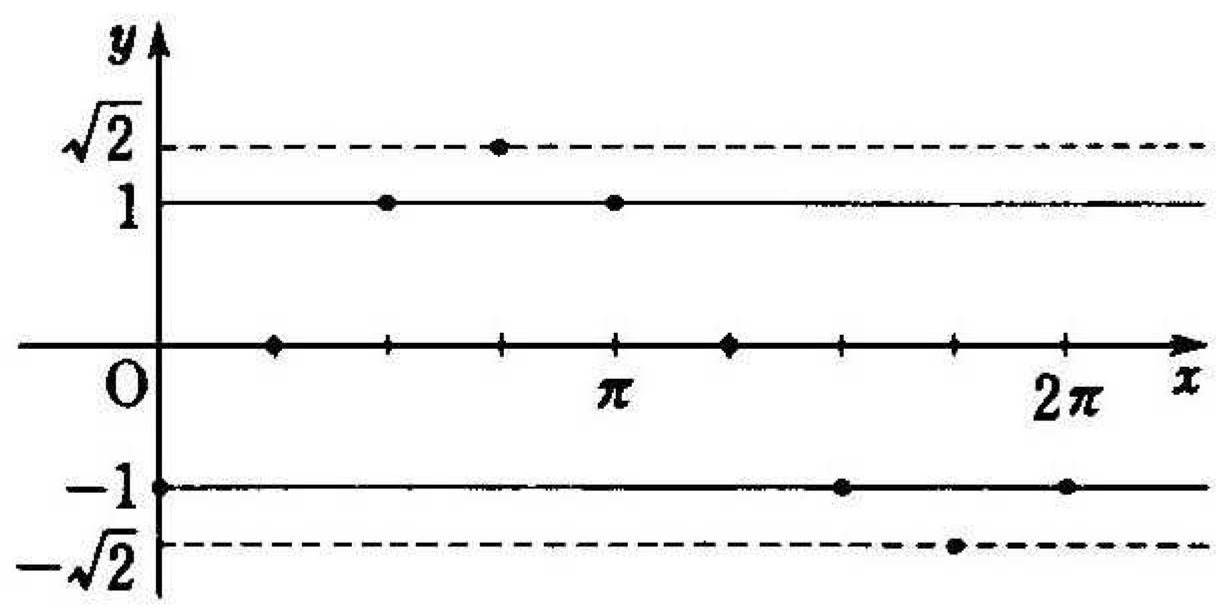
のグラフをかけ。

(ヒント) $y=\sin x-\cos x$

とおくと

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1

これだけでわかることは，このグラフは次の黒丸を通ることです。



これで大体の形がわかったようなものですが，キメ手は三角関数の合成です。つまり

$$y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

これから $x=\dfrac{3\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとることやその他がわかる，……

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題にいこう。

■練習 5. $\sin A+\sin B=1$，$\cos A+\cos B=1$ のとき $\sin(A-B)$ の値を求めよ。

（東京水産大）

（解）
$$\sin A+\sin B=1 \quad \cdots\cdots①$$
$$\cos A+\cos B=1 \quad \cdots\cdots②$$
$$\therefore\ \sin B=1-\sin A \quad \cdots\cdots③$$
$$\cos B=1-\cos A \quad \cdots\cdots④$$

辺々 2 乗して加えると
$$1=2-2\sin A-2\cos A+1$$
$$\therefore\ \sin A+\cos A=1 \quad \cdots\cdots(*)$$

三角関数の合成により
$$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$\therefore\ \sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに
$$A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2n\pi \qquad \therefore\ A=2n\pi$$

または
$$A+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2n\pi \qquad \therefore\ A=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

(i)　$A=2n\pi$ のとき
$$\sin A=0,\ \cos A=1$$

したがって③，④より
$$\sin B=1,\ \cos B=0$$
$$\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$=-1$$

(ii)　$A=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき
$$\sin A=1,\ \cos A=0$$
$$\therefore\ \sin B=0,\ \cos B=1$$
$$\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$=1$$

（答）　± 1

（注）　三角関数の合成を使わないでもできます。例えば，(*) から
$$\cos A=1-\sin A$$

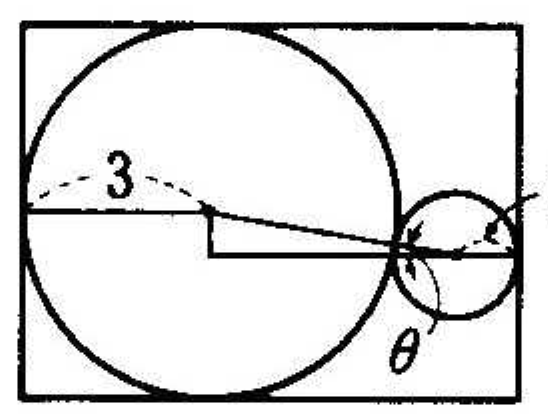
両辺を 2 乗して
$$\cos^2 A=(1-\sin A)^2$$
$$\therefore\ 1-\sin^2 A=(1-\sin A)^2$$
$$\therefore\ (1-\sin A)\{(1+\sin A)-(1-\sin A)\}=0$$
$$\therefore\ \sin A=1 \quad \text{あるいは} \quad \sin A=0$$

もういいでしょう。

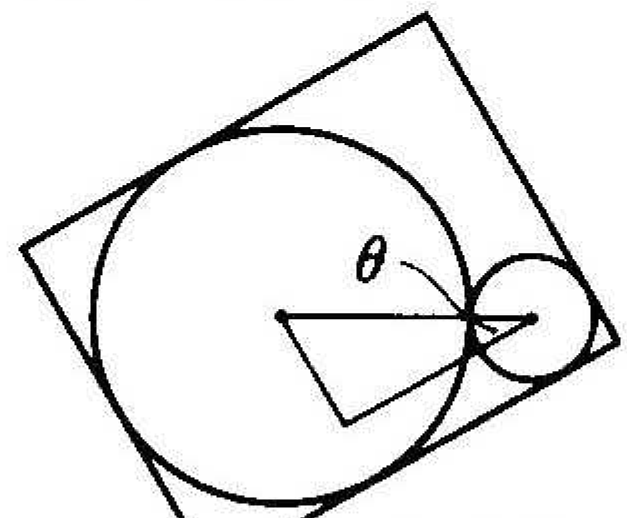
■練習 6. 半径 3 の円と半径 1 の円が互いに外接している。この 2 つの円からなる図形を長方形で囲み，その各辺がこの 2 つの円の少なくとも一方と接するようにする。長方形の周の長さの最大値と最小値を求めよ。

（東京理大）

（解）　2 円の中心を結ぶ直線と長方形の長いほうの辺とのなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq 45°)$ とすると，長方形の長いほうの辺の長さ l は次のようにして θ で表される。すなわち，

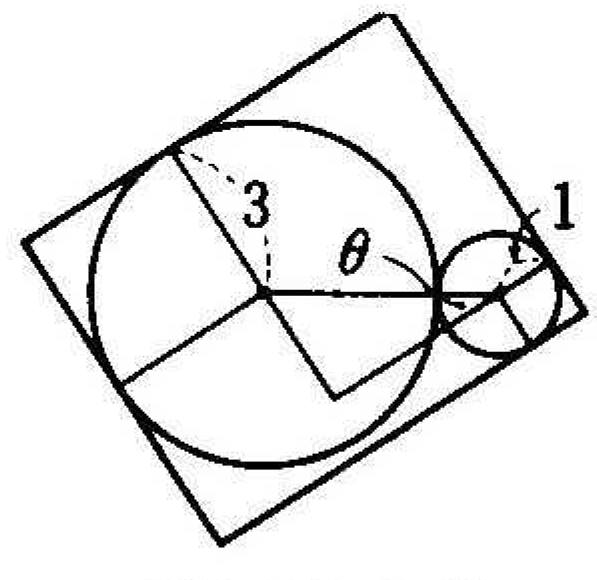


$0°<\theta<30°$



$\theta=30°$

大きい円が長方形の 3 つの辺に接する場合と，2 つの辺に接する場合とあり，いずれにしても図から



$30°<\theta\leqq 45°$

$$l=3+4\cos\theta+1=4(1+\cos\theta)$$

さて，長方形の周の長さを $f(\theta)$ とすると

(i)　$0°\leqq\theta\leqq 30°$ のとき
$$f(\theta)=2\{4(1+\cos\theta)+2\times 3\}$$
$$=4(5+2\cos\theta)$$

であるから，最大値は 28 $(\theta=0°)$，最小値は $4(5+\sqrt{3})$ $(\theta=30°)$ である。

(ii)　$30°\leqq\theta\leqq 45°$ のとき
$$f(\theta)=2\{4(1+\cos\theta)+4(1+\sin\theta)\}$$
$$=8\{2+\sqrt{2}\sin(\theta+45°)\}$$

最大値は $8(2+\sqrt{2})$ $(\theta=45°)$，最小値は $4(5+\sqrt{3})$ $(\theta=30°)$ である。

(i)，(ii)から求める最大値は 28 $(\theta=0°)$ で，最小値は $4(5+\sqrt{3})$ $(\theta=30°)$ である。

三角関数の最大・最小

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角関数の入った最大・最小問題は大きく分けて2つあります。第1は $\sin\theta$ や $\cos\theta$ だけにできるもの，第2は三角関数の合成だ。

◆ 三角関数の入った最大・最小問題は大きく分けて2つになります。もっとも，特殊なのが1つあるから，これも入れるなら3つというところなんですが，……

では，さっそく練習1. をやってみませんか。

■練習 1. $\sin^3\theta-3\sin\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

ヒント　$\sin\theta=x$ とおきますと，

$$\sin^3\theta-3\sin\theta=x^3-3x \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

ゆえに

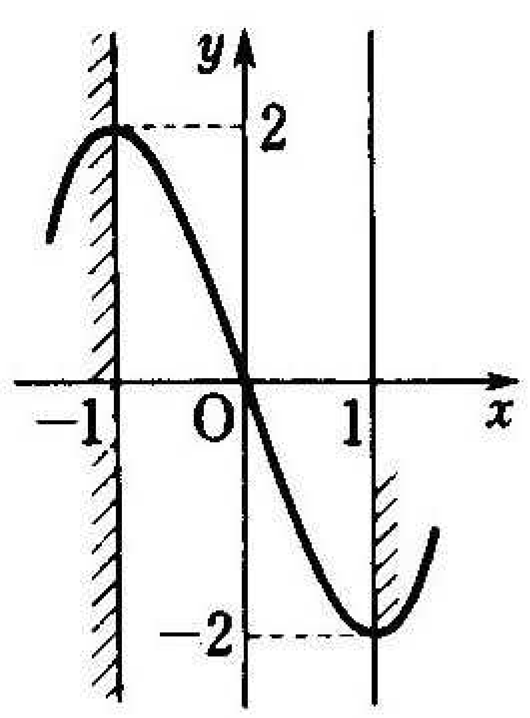
$$f(x)=x^3-3x \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

の最大値，最小値を求めればいいでしょう。

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$$
$$=3(x-1)(x+1)$$

増減表は下の通り。

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



したがって，グラフは右のようになります。

ゆえに，求める最大値は2，最小値は -2 です。

■練習 2. $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ のとき

$$f(\theta)=\sin^4\theta-4\sin\theta$$

の最大値，最小値を求めよ。

ヒント　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ であるから $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\theta\leqq 1$

したがって，$\sin\theta=x$ とおいて

$$F(x)=x^4-4x \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq 1\right)$$

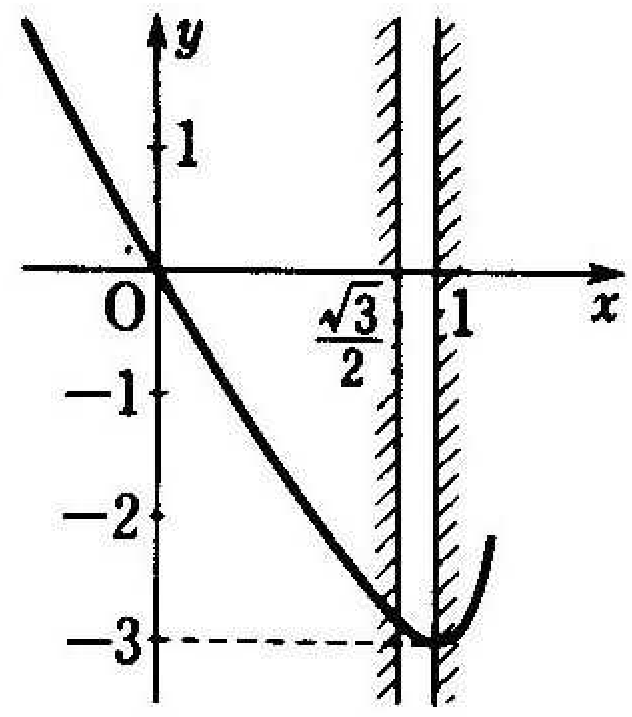
の最大値，最小値を求めればいいでしょう。

さて，

$$F'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$$
$$=4(x-1)(x^2+x+1)$$

ところが　$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

ですから，$x=1$ で極小値（かつ，最小値）をとるようです。グラフは右の通り。



そして，最大値は

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{9-32\sqrt{3}}{16}$$

最小値は

$$F(1)=1^4-4\cdot 1=-3$$

であることがわかります。

答　最大値 $\dfrac{9-32\sqrt{3}}{16}$，最小値 -3

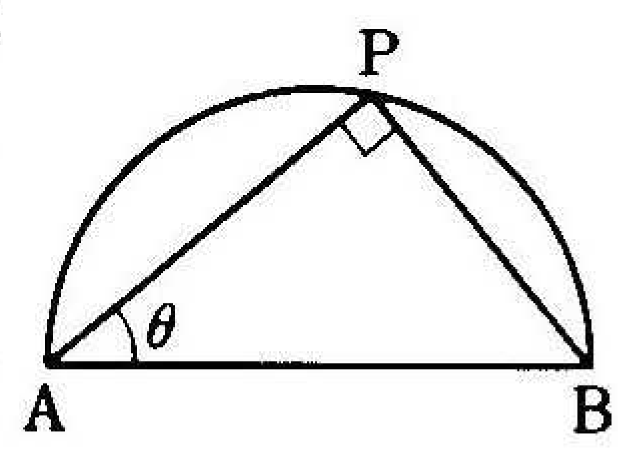
＊　＊　＊

◆ 第2は三角関数の合成の入ってくるものです。三角関数の合成というのは

$$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

です。ここに，α は点 $(a,\ b)$ と x 軸 $(\overrightarrow{\mathrm{O}x})$ とのなす角です。この公式については（☞ p. 44）を参照。さて，次をやってみませんか。

■練習 3. AB を直径とする半円の弧上に点Pがある。$3\overline{\mathrm{AP}}+4\overline{\mathrm{BP}}$ の最大値を求めよ。（東大）



(ヒント)　$\angle PAB=\theta$ とおきますと，$\overline{AB}=a$ として

$$3\overline{AP}+4\overline{BP}=3a\cos\theta+4a\sin\theta$$
$$=a\cdot\sqrt{4^2+3^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$=5a\sin(\theta+\alpha)$$

となります。ここに，α は第1象限の角で，$\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ です。

ともあれ，上の結果から，最大値は $5a$ であることがわかります。

練習 4. $\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$ の最大値・最小値を求めよ。　（奈良女大）

(ヒント)　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$，$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ ですから

$$与式=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta+3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$=2+\sin 2\theta-\cos 2\theta$$
$$=2+\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに，求める最大値は $2+\sqrt{2}$，最小値は $2-\sqrt{2}$ です。

*　*　*

◆ これで，2つのタイプはすみましたが，もう1つ，次のような変わったタイプもあります。ムリにやることもありませんが，……

練習 5. $\triangle ABC$ において

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

の最大値を求めよ。

(ヒント)　$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$0<C<\pi$ ですから $\cos\dfrac{C}{2}>0$ です。いまCを一定にしておいてA，Bをいろいろ変えてみますと $A=B$ のとき $\cos\dfrac{A-B}{2}=1$ となって最大です。つまり，$A=B$ でなければ最大にはなれない。同じようにして，$B=C$ でなければ最大にはなれない。だから，最大であるためには正三角形でなければならない。

こんなわけで $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をとるハズ。

(注)　実は，上の解には，ちょっとした欠点があります。気がつきましたか。それは最大値があると仮定していることです。そこを乗りきるには次のようにすればいいでしょう。

$$\sin A+\sin B+\sin C$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$
$$\leqq 2\cos\frac{C}{2}+\sin C$$

そこで

$$u=2\cos\frac{C}{2}+\sin C$$

とおきますと，

$$u=2\cos\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$\sin\dfrac{C}{2}=x$ (>0) とおきますと

$$u^2=4(1-x^2)(1+x)^2\quad(0<x<1)$$

の最大値を求めることができます。その上で等号の成り立つ場合を吟味してみること，です。

しかし，高校程度では「ヒント」であげた扱い方でもいいでしょう。

余裕があったら，こんな問題もやってみてもいい，そんなところです。では，ついでだ，もう1つやるか!!

練習 6. $\triangle ABC$ において $\cos A+\cos B+\cos C$ の最大値を求めよ。

(ヒント)　$\cos A+\cos B+\cos C$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C=\cdots\cdots$$

答　$\dfrac{3}{2}$　（正三角形）

*　*　*

◆ 三角関数の最大・最小にはあまりめんどうなものはありません。迷路に踏みこんで自縄自縛にならぬよう，ご用心。

◎ 三角形と三角関数

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角形こそ三角関数の演習場です。その場で三角関数を駆使する力を養えば万全というべし。

◆ 角と辺と混在しているときには，一般に辺だけで表して扱うのがコツ。しかし，計算力があれば角もまたスゴク便利なのです。ではこれを：──

■練習 1. △ABC において

$$a\cos A=b\cos B$$

ならばどんな三角形か。

(解) 1.　余弦定理を使って

$$a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\therefore\quad a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+b^2a^2-b^4$$

$$\therefore\quad (a^4-b^4)-c^2(a^2-b^2)=0$$

$$\therefore\quad (a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$\therefore$　$a=b$ あるいは $a^2+b^2=c^2$

答　$a=b$ の二等辺三角形または $\angle C=90°$ の直角三角形

(解) 2.　正弦定理を使って

$$2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B$$

$$\therefore\quad \sin 2A=\sin 2B$$

$\therefore$　$2A=2B$ あるいは $2A+2B=\pi$

$\therefore$　$A=B$ あるいは $C=\dfrac{\pi}{2}$

答　$a=b$ の二等辺三角形または $\angle C=90°$ の直角三角形

■練習 2. △ABC において

$$a\cos A=b\cos B+c\cos C$$

ならばどんな三角形か。

(解) 1.　余弦定理を使って

$$a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\therefore\quad a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+b^2a^2-b^4+c^2a^2+c^2b^2-c^4$$

$$\therefore\quad a^4-(b^4-2b^2c^2+c^4)=0$$

$$a^4-(b^2-c^2)^2=0$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$$

$\therefore$　$\angle C=90°$ あるいは $\angle B=90°$

答　$\angle B=90°$ または $\angle C=90°$ の直角三角形

(解) 2.　正弦定理を使って

$$2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C$$

$$\therefore\quad 2\sin A\cos A=\sin 2B+\sin 2C$$

$$\therefore\quad 2\sin A\cos A=2\sin(B+C)\cos(B-C)$$

$$\therefore\quad \sin A\cos A=\sin A\cos(B-C)$$

$\sin A\neq 0$ であるから

$$\cos A=\cos(B-C)$$

$\therefore$　$A=B-C$ あるいは $A=C-B$

ゆえに $\angle B=90°$ または $\angle C=90°$ の直角三角形である。

■練習 3. △ABC において

$$a=b\cos B+c\cos C$$

ならばどんな三角形か。

(解) 1.　余弦定理を使って

$$a=b\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

分母を払って

$$2a^2bc=b^2c^2+b^2a^2-b^4+c^2a^2+c^2b^2-c^4$$

$$\therefore\quad (b-c)^2a^2-(b^2-c^2)^2=0$$

$$\therefore\quad (b-c)^2\{a^2-(b+c)^2\}=0$$

$$\therefore\quad (b-c)^2(a+b+c)(a-b-c)=0$$

ところが $a+b+c>0$，$a-b-c<0$

$$\therefore\quad b=c$$

答　$b=c$ の二等辺三角形

(解) 2.　正弦定理を使って

$$2R\sin A=2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C$$

$$\therefore\quad 2\sin A=\sin 2B+\sin 2C$$

右辺を積にして

$$2\sin A=2\sin(B+C)\cos(B-C)$$

ところが　$\sin(B+C)=\sin A\neq 0$

$$\therefore\quad \cos(B-C)=1$$

$$\therefore\quad B=C \qquad \cdots\cdots 答$$

練習 4.　△ABC において

$$\cos B+\cos C=\sin A$$

のとき，どんな三角形か。

(解) 1.　$2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

ところが $\cos\dfrac{B+C}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\sin\dfrac{A}{2}\neq 0$

$$\therefore\quad \cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{B-C}{2}=\frac{A}{2}\ \text{あるいは}\ -\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad B=A+C\ \text{あるいは}\ C=A+B$$

ゆえに ∠B＝90° または ∠C＝90° の直角三角形である。

(解) 2.　(ムリニ辺デヤッテミマショウ)

$$(\cos B+\cos C)^2=\sin^2 A=1-\cos^2 A$$

$$\therefore\quad \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$\therefore\quad \frac{\{b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\}^2}{4a^2b^2c^2}=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$\therefore\quad (b+c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2=a^2(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)\times(a-b+c)$$

$(a+b-c)(a-b+c)\neq 0$ であるから

$$(b+c)^2(a+b-c)(a-b+c)=a^2(a+b+c)(b+c-a)$$

$$\therefore\quad a^4=(b^2-c^2)^2$$

$$\therefore\quad a^2=\pm(b^2-c^2)$$

$$\therefore\quad a^2+c^2=b^2\ \text{あるいは}\ a^2+b^2=c^2$$

つまり ∠B＝90° または ∠C＝90° の直角三角形

(注)　これなどは辺で表した方がかなりめんどうでした。

練習 5.　△ABC において

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

ならばどんな三角形か。

(解) 1.　①の両辺に $2\cos\dfrac{B}{2}$ を掛けて

$$2\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{B}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

ところが $\cos\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{A+C}{2}$ であるから左辺は

$$2\cos\frac{A-C}{2}\sin\frac{A+C}{2}=\sin A+\sin C$$

となり右辺は $2\sin B$ に等しい

$$\therefore\quad \sin A+\sin C=2\sin B$$

$$\therefore\quad a+c=2b$$

(解) 2.　①より

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$$

ところが

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

とすると

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

などが成り立つ。(☞ p.54)

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}=2\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\therefore\quad s+(s-b)=2b$$

$$\therefore\quad a+c=2b$$

(注)　このように角でやるのがよいのもあるし，辺でやる方が簡単なものもあります。練習としては，強引に2通りやってみるのがよいのだが，とかく，角の方は計算力が要ることになります。

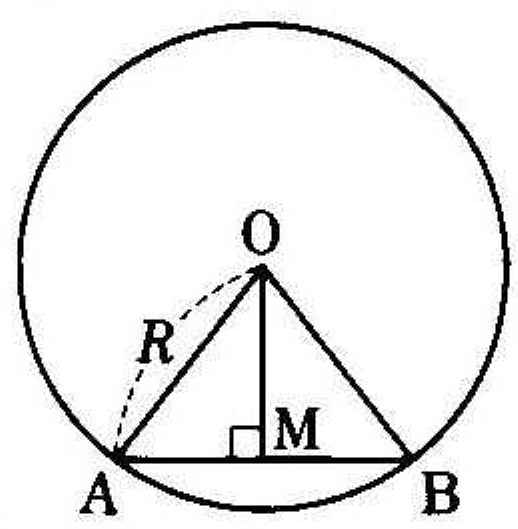
*　*　*

○正多角形と三角関数

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆正多角形の面積や内角や，いろいろな問題には三角関数が有効です。ここでは，その点に重点を指向するとしよう。

◆ 正 n 多角形と外接円の関係から出発しましょう。右の図において，



$\overline{\mathrm{AB}}$ を正 n 角形の1辺とすると

$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{2\pi}{n}$$

AB の中点をMとすると

$$\angle \mathrm{AOM}=\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{OA}}\sin\angle\mathrm{AOM}=\overline{\mathrm{AM}}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AB}}=2R\sin\frac{\pi}{n}$$

練習 1. 正八角形の1辺を a とするとき，外接円の半径 R を求めよ。

ヒント $\overline{\mathrm{AB}}=a$，$n=8$ とおくと

$$a=2R\sin\frac{\pi}{8}$$

ところが $\sin^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

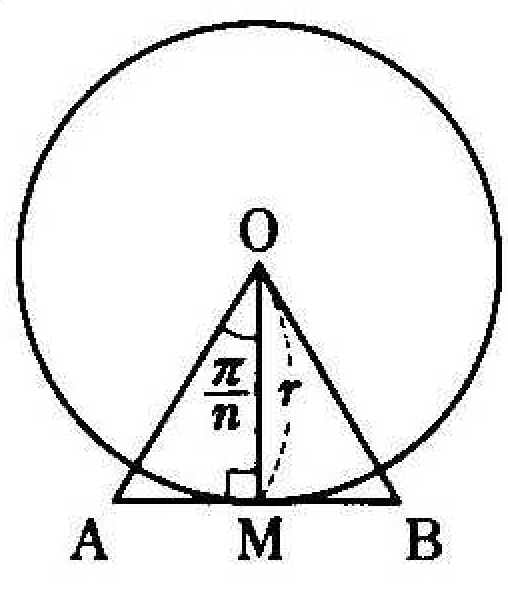
$$\therefore\quad a=2R\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\therefore\quad R=\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{a\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$=a\cdot\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$$

* * *

◆ 次は内接円の半径 r です。右の図で



$$\overline{\mathrm{OM}}\tan\frac{\pi}{n}=\overline{\mathrm{AM}}$$

ですから

$$\overline{\mathrm{AB}}=2r\tan\frac{\pi}{n}$$

練習 2. 正六角形の1辺を a とするとき，内接円の半径 r を求めよ。

ヒント $\overline{\mathrm{AB}}=a$，$n=6$ とおきますと

$$a=2r\cdot\tan\frac{\pi}{6}=2r\tan 30^\circ$$

$$=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

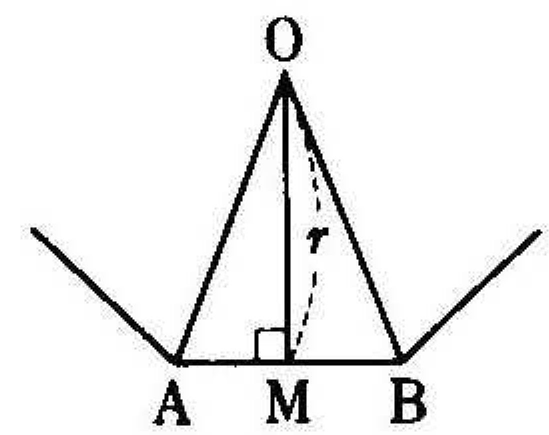
$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad \cdots\cdots 答$$

* * *

◆ 次は面積です。

下の図で

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{OM}}$$



$$=\frac{1}{2}a\cdot r$$

$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{a^2}{\tan\frac{\pi}{n}}$$

ゆえに正 n 角形の面積は1辺の長さを a としますと

$$\boldsymbol{S=\frac{n}{4}\cdot\frac{a^2}{\tan\frac{\pi}{n}}}$$

練習 3. 正十角形の面積を1辺 a の長さで表せ。

ヒント 上の公式を使いますと

$$S=\frac{5}{2}\cdot\frac{a^2}{\tan 18^\circ}$$

さて $\tan 18^\circ$ ですが：——

では，この機会に $\sin 18^\circ$，$\cos 18^\circ$，$\tan 18^\circ$ を求めておきましょう。

$\theta=18^\circ$ としますと

$\cos^3\theta - i\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\cdot i - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta$

$(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

$$5\theta=90^\circ$$
$$\therefore\quad 3\theta=90^\circ-2\theta$$
$$\therefore\quad \sin 3\theta=\sin(90^\circ-2\theta)=\cos 2\theta$$
$$\therefore\quad \underline{3\sin\theta-4\sin^3\theta}=1-2\sin^2\theta$$

$\sin\theta=x$ とおくと

$$4x^3-2x^2-3x+1=0$$
$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0$$

$x=\sin 18^\circ \neq 1$ ですから

$$4x^2+2x-1=0$$

の正の解を求めて

$$\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
$$\therefore\quad \cos^2 18^\circ=1-\sin^2 18^\circ$$
$$=1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$
$$\therefore\quad \cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$
$$\therefore\quad \tan 18^\circ=\frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

となりましょう。

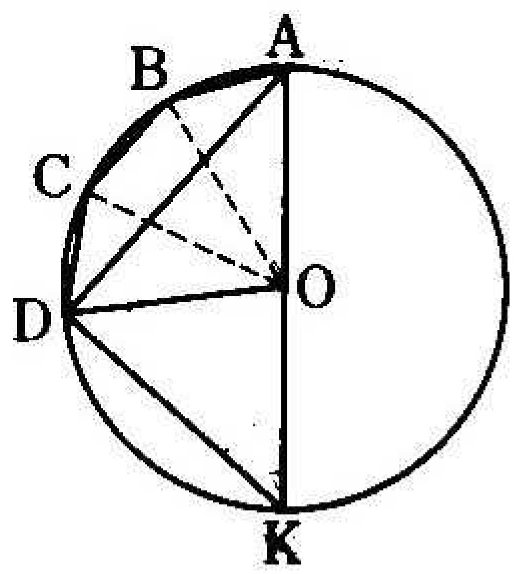
そこで，求める面積は

$$S=\frac{5}{2}\cdot a^2\cdot\frac{5}{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{25}{2}a^2\sqrt{\frac{1}{25-10\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{25}{2}a^2\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}}{125}}$$
$$=\frac{25}{2}a^2\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$$
$$=\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a^2$$

となります。

*　*　*

◆ 次に正 n 角形の対角線の長さにふれておきましょう。



例えば，右図に示してあるように，正 n 角形の弦 $\overline{\mathrm{AD}}$ の長さを求めたいとしましょう。このとき

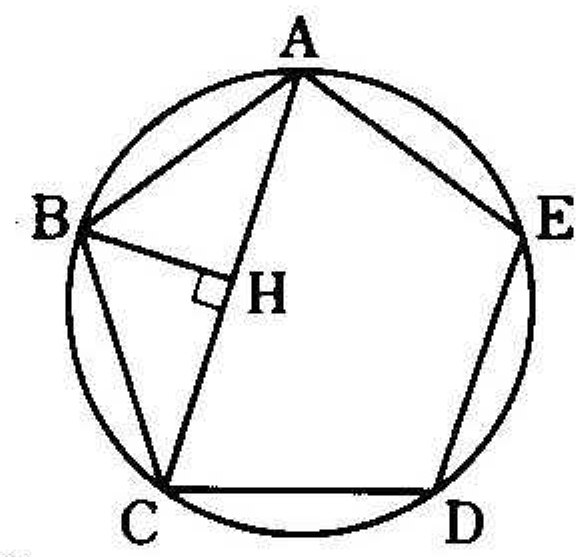
$$\angle\mathrm{AOD}=3\cdot\frac{2\pi}{n}$$

したがって

$$\angle\mathrm{AKD}=\frac{3\pi}{n}$$
$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AD}}=2R\sin\frac{3\pi}{n}$$

といったぐあい。ひとつ具体的な問題をやってみませんか。

練習 4. 正五角形の対角線の長さを，1 辺の長さ a で表せ。



ヒント　右の図で

$$\overline{\mathrm{AC}}=2R\sin\frac{2\pi}{5}$$

ところが R は a で表せるから求められるのです。

あるいは，直接求めることもできます。Bから ACに下した垂線の足をHとすると

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AH}}$$
$$=2\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cos\angle\mathrm{BAH}$$
$$=2a\cos 36^\circ$$

ところが

$$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$$

そこで左の方にある $\sin 18^\circ$ の値を借用して

$$=1-2\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AC}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

となりましょう。

*　*　*

◆ ともあれ，正三角形，正四角形（正方形），正五角形，正六角形，正八角形の扱い方はつかんでおいて下さい。

*　*　*

① 三角関数と図形

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆三角関数の直接的な応用は，いわずと知れたこと，図形である。ここでは，その中から典型的なものをとりあげてみよう。

◆ 三角形と三角関数を結びつけるのは正弦定理と余弦定理ですが，これはもちろん数Iの内容です。しかし，その取り扱い上，基解の必要になるものが多いのです。

まず，**正弦定理** は

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(R は外接円の半径)

です。次に，**余弦定理** は

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

ですが，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ について解くと

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

でした。

では，これをやってみませんか。

■練習 1. △ABC において

$$a\cos A=b\cos B$$

ならばどんな三角形か。 (富山大)

ヒント 角と辺が混在しているのはまずい。

辺だけにするか，角だけにする こと。

解 1.**(数Iによる方法)** 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\therefore\quad a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\therefore\quad a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$\therefore\quad c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$$

$$\therefore\quad (a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$$

$\therefore\quad a=b$ あるいは $\angle C=90°$

答 $\begin{cases} a=b \text{ の二等辺三角形，また} \\ \text{は } \angle C=90° \text{ の直角三角形} \end{cases}$

解 2.**(基解による方法)** 正弦定理により

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B$$

ここに R は外接円の半径である。

$$\therefore\quad 2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B$$

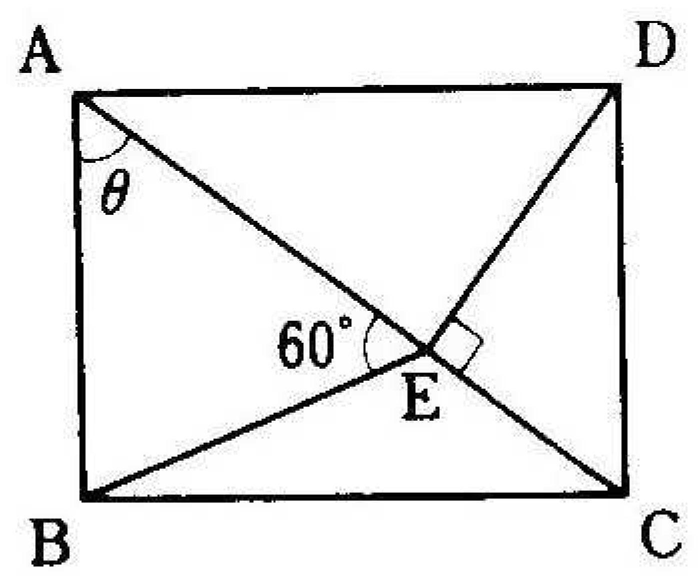
$$\therefore\quad \sin 2A=\sin 2B$$

$\therefore\quad 2A=2B$ あるいは $2A+2B=\pi$

$\therefore\quad \angle A=\angle B$ あるいは $\angle C=\dfrac{\pi}{2}$

答 $\begin{cases} a=b \text{ の二等辺三角形，また} \\ \text{は } \angle C=\dfrac{\pi}{2} \text{ の直角三角形} \end{cases}$

■練習 2. 長方形 ABCD において，Dより対角線 AC に下した垂線の足を E とすると $\angle AEB=60°$ であった。AB:AD を求めよ。 (早大)



ヒント △ABE に目をつけると $\angle AEB=60°$ と AB しかわかっていないから，正弦定理も余弦定理も使いようがありませんね。仕方がないから，$\angle BAC=\theta$ とおいてみると，角が全部きまってしまう。さては，正弦定理を使えばいいだろう，ということになりましょう。

解 $\angle BAC=\theta$ とおくと

$$\angle DAC=90°-\theta$$

$$\therefore\quad \overline{AE}=\overline{AD}\cos(90°-\theta)=\overline{AD}\sin\theta$$

さて，△ABE に正弦定理を適用して

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°}=\frac{\overline{AE}}{\sin(\theta+60°)}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AB}}\sin(\theta+60^\circ)=\mathrm{A\overline{D}}\sin\theta\sin 60^\circ$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\sin 60^\circ\sin\theta}{\sin(\theta+60^\circ)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta\cdot\cos 60^\circ+\cos\theta\cdot\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+\cot\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cot\theta}$$

ところが $\cot\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$ であるから

$$\sqrt{3}\left(\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}}\right)^2+\left(\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}}\right)-\sqrt{3}=0$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{-1+\sqrt{1+12}}{2\sqrt{3}}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{39}-\sqrt{3}}{6}$$

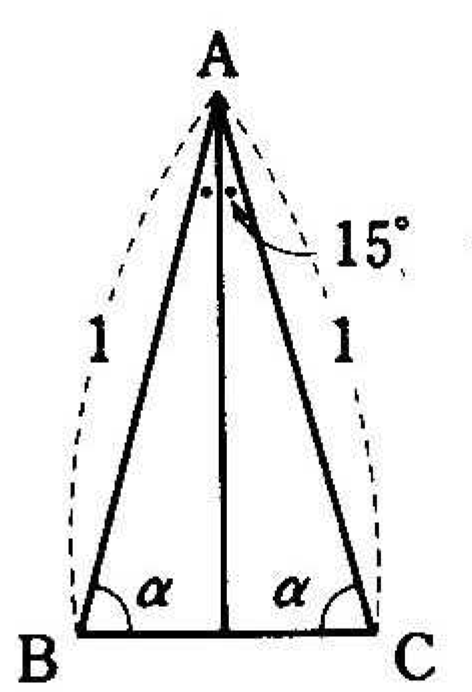
$\therefore\quad \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AD}}=(\sqrt{39}-\sqrt{3}):6$ …… 答

（注） 上の解答はもう少し手際よくできるでしょう。答案練習と思ってやってみてください。60°の代わりに 45° というのも出題されているし，30° というのも出題されています。いろいろやってみませんか。

*　*　*

◆ 正弦定理，余弦定理から離れて，次の問題を扱ってみませんか。

練習 3. 鋭角三角形 ABC において，AB＝AC＝1 とする。$\angle B=\angle C=\alpha$ が $\sin 2\alpha=\cos 4\alpha$ を満たすとき，辺 BC の長さを求めよ。（大阪市大）



（解） $\sin 2\alpha=\cos 4\alpha$

$\therefore\quad \sin 2\alpha=1-2\sin^2 2\alpha$

$\therefore\quad 2\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha-1=0$

$\therefore\quad \sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad \alpha=15^\circ,\ 75^\circ$

$\therefore\quad \angle A=150^\circ,\ 30^\circ$

ところが △ABC は鋭角三角形というから

$\angle A=30^\circ\quad \therefore\quad \alpha=75^\circ$

$$\therefore\quad BC=2\cdot 1\cos 75^\circ=2\cos(30^\circ+45^\circ)$$

$$=2(\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ)$$

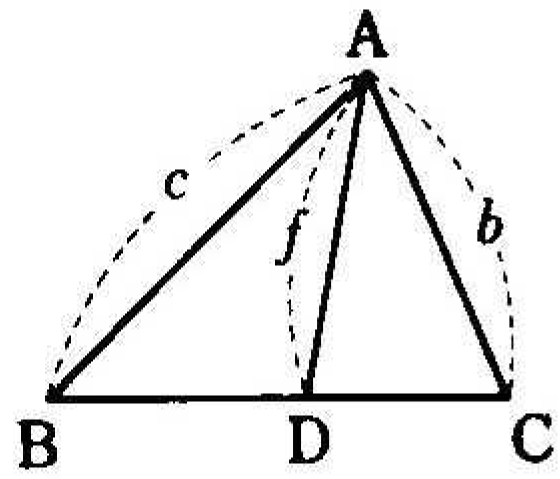
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$ …… 答

（注） もちろん，$\angle A=30^\circ$ に余弦定理を適用してもいい。

練習 4. 三角形 ABC の∠A，∠B，∠C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とする。∠A の 2 等分線の三角形 ABC 内の長さを a, b, c で表せ。（芝浦工大）

（ヒント） ∠A の 2 等分線が BC と交わる点を D とします。AD を a, b, c で表せ，というのが問題です。これは，一種の暗記もの。オボエテおくこと!!



（解） $AD=f$ とおくと

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}cf\sin\frac{A}{2}$$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}bf\sin\frac{A}{2}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}cf\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bf\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

ところが $\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ であるから

$$cf+bf=2bc\cos\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

ところが

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

$$\therefore\quad f=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\frac{\sqrt{bc(b^2+c^2-a^2+2bc)}}{b+c}$$ …… 答

（注） $a+b+c=2s$ とおいたとき，結果はどうなるかやってみてください。

(三角形の)半角の三角関数とその蛇足

◆三角形の角を辺で表すときにときとすると暴力が必要になります。そこでは，この半角がものをいう。

◆ △ABCにおいてA，B，Cの対辺を a，b，c とすると $2s=a+b+c$ として

面積 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

はよく知っていますね。この s を使うと，三角形の半角の三角関数を表すことができます。

■練習 1. △ABC において

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

を証明せよ。ただし，$2s=a+b+c$

(ヒント)
$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$$

ここで余弦定理を使って

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$
$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

ところが

$$a+b-c=2(s-c),\quad a-b+c=2(s-b)$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(s-b)(s-c)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Q.E.D.

■練習 2. △ABC において

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

を証明せよ。ただし，$2s=a+b+c$

(ヒント)
$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$
$$=\frac{4(s)(s-a)}{4bc}=\frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Q.E.D.

■練習 3. △ABC において

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

を証明せよ。ただし，$2s=a+b+c$

(ヒント)
$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Q.E.D.

* * *

◆ この公式はいろいろと役に立ちます。例えば：——

■練習 4. ヘロンの公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

を証明せよ。

(解)
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$=\frac{1}{2}bc\cdot2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$
$$=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

アア，ナントイウカンタンサ!! ふつうのやり方に比べるとテンチ・ショウジョウの差あり，と，いうべし。

* * *