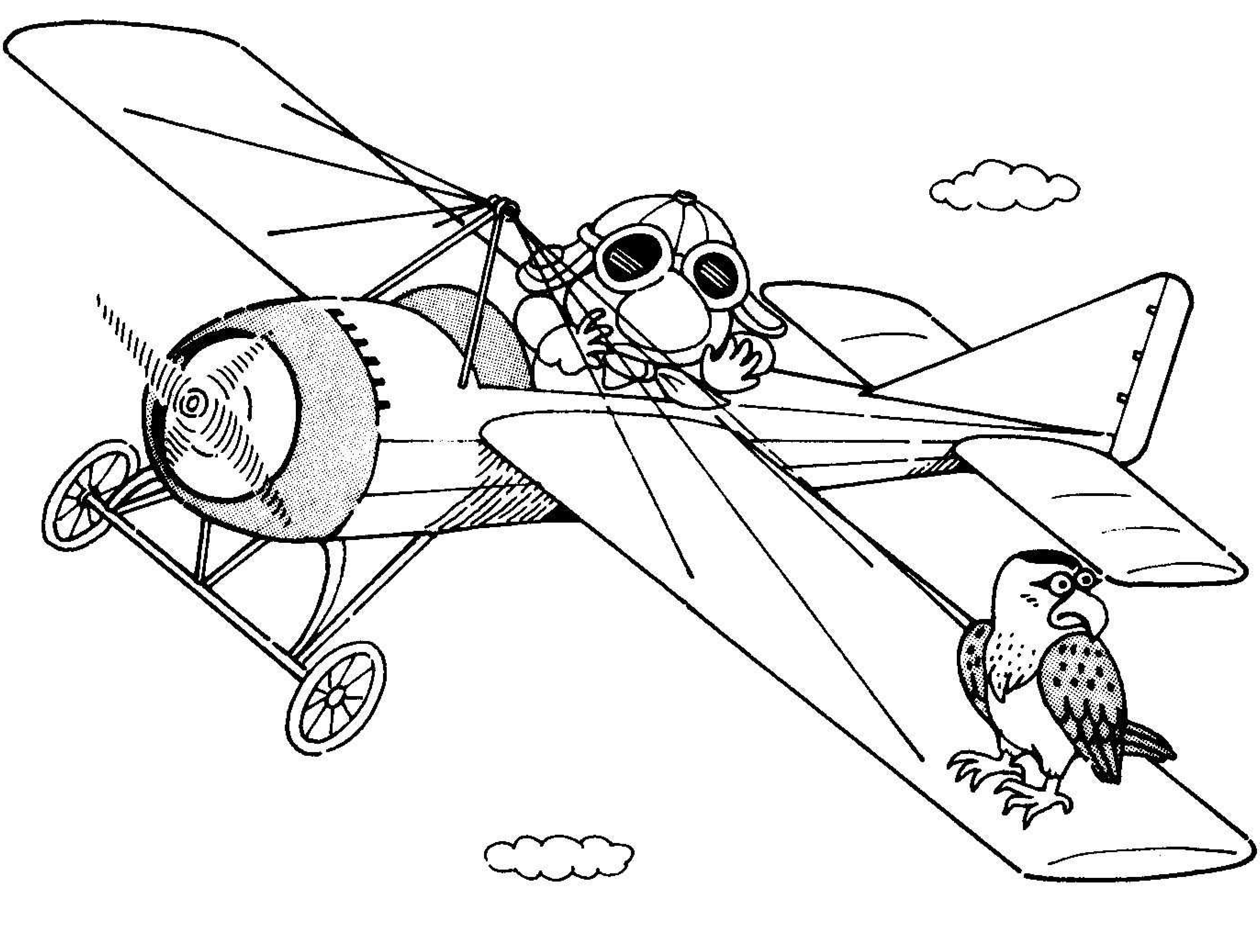
第4章

空間図形

§**1**. 空間ベクトル

§**2**. 空間座標とベクトルの成分

§**3**. 直線・平面・球の方程式



空間ベクトルとは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆方向と大きさがあるもの，これがベクトルである，という観点からすると，平面でも，空間でも，ベクトルにちがいはあるまい。

◆ 空間のベクトルといっても平面の場合と，べつに変わったことはありません。しかし，復習のつもりで，やってみますと：——

空間の1点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ から，点 B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ へ向いた方向をもつ線分 $\overrightarrow{AB}$ をベクトルといい，$(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分といいます。

つまり，

$\overrightarrow{AB}$ の成分は

終点Bの成分から始点(起点)Aの成分をひけばよい

のです。ところで，空間ベクトルについて，大切なことは，大きく分けて3つあります。

第1は定義に関すること，第2は和に関すること，第3は内積に関すること，です。このことも，平面の場合と，ちっとも，ちがいはありません。

*　*　*

◆ まず，第1，ベクトルには，2つあります。1つは，原点から引いたベクトル，これを **位置ベクトル** といいます。

終点を A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ としますと，$\overrightarrow{OA}$ の成分は $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ です。また，その長さを $|\overrightarrow{OA}|$ で表しますが，

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

です。点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ としますと，

$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b},\quad \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

であることはいうまでもありません。こうして，起点を特に指定されてないベクトル，(これを **自由ベクトル** といいます) は，位置ベクトルで表すことができます。

12/3

■練習 1. 点 A(1, 2, 3)，B(2, 3, 1)，C(3, 1, 2) が与えられている。ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ の成分を求めよ。

(解)

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ -2)$$
$$\overrightarrow{BC}=(1,\ -2,\ 1)$$
$$\overrightarrow{CA}=(-2,\ 1,\ 1)$$

*　*　*

◆ 第2に，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が

平行であるための条件は

$$\vec{a}=k\vec{b}$$

なる0でない定数 k が存在すること

です。この定理はきわめて重要ですが，使える人もきわめてまれです。ともあれ，いくつか例をやっておきましょう。

12/3

■練習 2. $\vec{a}$，$\vec{b}$ を相異なる2つの空間ベクトルとするとき，3点 $(\vec{a}+\vec{b})$，$(2\vec{a}-2\vec{b})$，$(4\vec{a}-8\vec{b})$ は同一直線上にあることを示せ。

(ヒント) 点 $\vec{a}$ といえば，特に断ってなくとも，位置ベクトル $\vec{a}$ の表す点ということです。

さて，

$$A(\vec{a}+\vec{b}),\ B(2\vec{a}-2\vec{b}),\ C(4\vec{a}-8\vec{b})$$

とすると

$$\overrightarrow{AB}=(2\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-3\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AC}=(4\vec{a}-8\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}-9\vec{b}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$$

ゆえに $\overrightarrow{AC}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$ となって，3点 A，B，C が1直線上にあることがわかります。

(注) 上の練習で，各点は，べつに平面上の点でもかまいません。つまり，平面でも，空間でも，まったく同じに扱えるわけです。こんなところに，ベクトルの有効性がよくあらわれています。

*　*　*

◆ 空間ベクトルの和についても，平面と変わることはありません。すなわち，

$$\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \ \vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

とするとき

$$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)}$$

となります。一般に

$$\boldsymbol{m\vec{a}+n\vec{b}}$$
$$\boldsymbol{=(ma_1+nb_1,\ ma_2+nb_2,\ ma_3+nb_3)}$$

となることも平面とまったく同じです。

■練習3. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 0,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 3,\ 0)$，$\vec{c}=(0,\ 2,\ -1)$ のとき，次のようなベクトル $\vec{x}$ を求めよ。

$$\frac{2\vec{x}-\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{3\vec{b}-\vec{x}+2\vec{a}}{3}$$

(解) 分母をはらうと

$$6\vec{x}-3\vec{a}+3\vec{c}=6\vec{b}-2\vec{x}+4\vec{a}$$
$$\therefore\ \ 8\vec{x}=7\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{c}$$
$$\therefore\ \ \vec{x}=\frac{1}{8}(7\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{c})$$
$$=\frac{1}{8}(1,\ 12,\ 17)$$

答 $\left(\frac{1}{8},\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{8}\right)$

次に，内分点，外分点を表す公式の使い方が大切です。すなわち

$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して，$\overline{AB}$ を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$，外分する点を $Q(\vec{q})$ とすると

$$\boldsymbol{\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n},\ \ \vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}}$$

で与えられます。では，次を：——

■練習4. 2点 $A(1,\ 2,\ 3)$，$B(2,\ 1,\ 1)$ がある。$\overline{AB}$ を $t:(1-t)$ に内分する点を求めよ。$(0<t<1)$

(ヒント) 求める点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x=\frac{t\cdot2+(1-t)\cdot1}{t+(1-t)}=t+1$$
$$y=\frac{t\cdot1+(1-t)\cdot2}{t+(1-t)}=-t+2$$
$$z=\frac{t\cdot1+(1-t)\cdot3}{t+(1-t)}=-2t+3$$

よって，求める点は $(t+1,\ -t+2,\ -2t+3)$ ということがわかります。

＊　＊　＊

◆ ベクトルの**内積**は，平面の場合とまったく変ることなし。ところで，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積というのは $\vec{a}\cdot\vec{b}$ あるいは $(\vec{a},\ \vec{b})$ で表します。その定義には2つあります。もちろん，同じものなのですが，表現がちがうわけです。1つは $\vec{a}$，$\vec{b}$ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表し，そのなす角を θ としますと

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

です。もう1つは

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

として

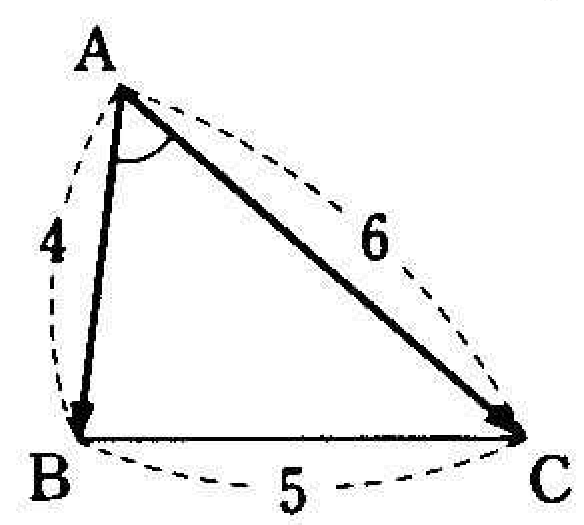
$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

で定義するのです。では，これを：——

■練習5. $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 3)$ とするとき，内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ。

(解) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,\ 2)\cdot(2,\ 3)$
$=1\cdot2+2\cdot3=2+6=8$ ……答

■練習6. $\triangle ABC$ において $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$ のとき $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。



(ヒント) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$
$=4\cdot6\cos A$

ところが，余弦定理から

$$\cos A=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{27}{2\cdot4\cdot6}$$

$$\therefore\ \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot6\times\frac{27}{2\cdot4\cdot6}=\frac{27}{2}$$ ……答

＊　＊　＊

◆ 内積について大切なことは2つ。1つはベクトルの長さです。それは

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

ということ。もう1つは，

$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるための条件は $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ということ。それについては（☞ p.58）。

空間ベクトルの内積

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルの便利な点は平面でも空間でもほとんどおなじように扱えるということです。内積とて例外ではありません。

◆ 平面の場合とおなじく，空間でも内積は次のように定義します。

$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角をθとすれば

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

で，また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$b(b_1,\ b_2,\ b_3)$とするとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

で与えられます。では，これを：──

練習 1. 1辺の長さaの四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$を求めよ。

(解) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos BAC$

$$=a\cdot a\cos 60^\circ$$

$$=\frac{a^2}{2}$$

答 $\dfrac{a^2}{2}$

練習 2. $\vec{a}=(1,\ 2,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 2)$の内積を求めよ。

(解) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ 2,\ 2)\cdot(-2,\ 1,\ 2)$

$$=(-2)+2+4=4$$

答 4

練習 3. 空間に3点 A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(5, 4, 2) がある。$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$を求めよ。

(解) $\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ -2)$

$$\overrightarrow{AC}=(4,\ 2,\ -1)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4+2+2=8$$

答 8

＊　＊　＊

◆ ベクトルの内積について大切なことは，3つあります。第1は内積の定義を直接用いる分野，第2はベクトルの直交条件，第3はベクトルの長さに関することです。次に，それぞれの練習をやってみることにしましょう。では，これです。

練習 4. ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$を$\vec{a}=(1,\ \sqrt{2},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 0,\ 1)$とするとき$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角$\theta$を求めよ。

(ヒント) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$

また

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+\sqrt{2}\cdot0+1\cdot1=2$$

$$\therefore\ 2\sqrt{2}\cos\theta=2$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\text{答}$$

練習 5. 空間に3点 A(1, −2, 1), B(2, 1, 3), C(3, −1, 2) を頂点とする三角形がある。$\angle BAC=\theta$とするとき$\sin\theta$を求めよ。

(ヒント) $\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 1)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$

$$=\frac{2+3+2}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{7}{2\sqrt{21}}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{49}{4\cdot21}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{6}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ $\vec{a}$と$\vec{b}$が垂直な場合には，なす角が90°ですから，内積が0になります。そこで，これを：──

練習 6. 次の2つのベクトルに垂直な単位ベクトルを求めよ。

$$\vec{a}=(1,\ -1,\ 1),\ \vec{b}=(-1,\ 0,\ 3)$$

(ヒント) 求めるベクトルを $\vec{e}(l,\ m,\ n)$ とすれば

$$\vec{a}\cdot\vec{e}=l-m+n=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$\vec{b}\cdot\vec{e}=-l\quad +3n=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$l^2+m^2+n^2=1 \quad \cdots\cdots③$$

これを解けばよいでしょう。

②より　　　$l=3n$

これを①に代入して

$$m=4n$$

これらを③に代入して

$$9n^2+16n^2+n^2=1$$
$$\therefore\quad n=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}$$
$$\therefore\quad l=\pm\frac{3}{\sqrt{26}},\ m=\pm\frac{4}{\sqrt{26}}\quad \text{（複号同順）}$$

よって求めるベクトルは

$$\pm\left(\frac{3}{\sqrt{26}},\ \frac{4}{\sqrt{26}},\ \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

である。

(注) 次のように解いた方が少し楽です。

①, ②より l, m, n の比を求めると

$$\frac{l}{3}=\frac{m}{4}=\frac{n}{1}=t \qquad \begin{array}{ccccccc} -1 & & 1 & & 1 & & -1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 3 & & -1 & & 0 \end{array}$$

とおいて　　　$-3\quad -4\quad -1$

$l=3t,\ m=4t,\ n=t$　　　$3\quad 4\quad 1$

これを③に代入して t を求めると

$$t=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}$$
$$\therefore\quad \vec{e}=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(3,\ 4,\ 1)\quad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ $\vec{a}$ と $\vec{a}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$$

ですから，長さは

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

で与えられます。そこで：——

12/4

練習 7. $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ を証明せよ。

(解) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

(注) ここでは $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ を使っています。だから，そこの部分をもっと丁寧に書くなら次のようになります。

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\ &=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} \\ &=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\ &=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\ &=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

＊　＊　＊

◆ 空間ベクトルの内積の応用については，それぞれの項目をみて下さい。ここには，2つの例だけあげておくとしましょう。

12/4

練習 8. 空間の $\vec{0}$（零ベクトル）でない2つのベクトルを $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{b}=(x+y,\ y+z,\ z+x)$ とするとき，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は直交しないことを示せ。

（京都産業大）

(ヒント) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積が0でないことをいえばいいでしょう。さて：——

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b}&=(x,\ y,\ z)\cdot(x+y,\ y+z,\ z+x) \\ &=x(x+y)+y(y+z)+z(z+x) \\ &=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \\ &=\frac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\} \end{aligned}$$

これが0となるのは

$$x+y=0,\ y+z=0,\ z+x=0$$

のとき，したがって $x=y=z=0$ のときにかぎる。これは仮定により成り立たない。

ゆえに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交することはないのです。

12/4

練習 9. 3つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(\alpha,\ -\alpha,\ 0)$, $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直で，$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ である。α, x, y, z を求めよ。（福岡女子大）

(ヒント)　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\alpha x-\alpha y=0$

$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ より $\alpha+x=1,\ -\alpha+y=2,\ z=1$

これを解くと

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2},\ z=1\cdots\cdots\text{答}$$

① (空間の)位置ベクトルと自由ベクトル

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈位置ベクトルと自由ベクトルの関係は平面と空間で変わる点はないのです。しかし，その有効さとなると空間では絶大なんです。

◆ 原点から引いたベクトルを **位置ベクトル** といい，その終点の座標を位置ベクトルの成分というのです。それに対して，ベクトルの始点を固定しないベクトルが **自由ベクトル** です。そして，

点Aの座標を $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，点Bの座標を $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると $\overrightarrow{AB}$ の成分は $(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

に等しいのです。だから

点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ としますと

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

で与えられます。このことは平面の場合と変わることはありません。では，具体的な問題にいきましょう。

12/5 **■練習 1.** 空間の3点 A$(-1,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ 3,\ -1)$，C$(2,\ 2,\ 1)$ があるとき，ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の成分を求めよ。　(立教大)

(解) $\overrightarrow{AB}=(1-(-1),\ 3-2,\ -1-1)$
$=(2,\ 1,\ -2)$
$\overrightarrow{AC}=(2+1,\ 2-2,\ 1-1)=(3,\ 0,\ 0)$

■練習 2. 空間の点 P$(-1,\ 4,\ -7)$ と点 Q$(3,\ 5,\ 1)$ があるときベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を成分で表せ。またその長さを求めよ。(法政大)

(解) $\overrightarrow{PQ}=(3+1,\ 5-4,\ 1+7)=(4,\ 1,\ 8)$

したがって

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{4^2+1^2+8^2}=\sqrt{81}=9$$

答　$(4,\ 1,\ 8)$，9

こんどはちょっとめんどうですよ。

12/5 **■練習 3.** 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ -1)$ と実数 t に対して，$\vec{a}+t\vec{b}$ の長さが最小であるときの t の値を求めよ。　(鹿児島大)

(ヒント) $\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)+t(-1,\ 1,\ -1)$
$=(1-t,\ -2+t,\ 3-t)$

$\therefore\ |\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1-t)^2+(-2+t)^2+(3-t)^2$
$=1-2t+t^2+4-4t+t^2+9-6t+t^2$
$=3t^2-12t+14=3(t-2)^2+2$

ゆえに $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=2$ のとき，最小値 $\sqrt{2}$ をとることがわかったのです。

*　*　*

◆ 位置ベクトルについて大切なことが2つあります。第1は内分点，外分点を求めることです。つまり

2点を A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とするとき $\overline{AB}$ を $m:n$ に内分する点P，外分する点Qの位置ベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ は

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n},\quad \vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

で与えられる。では，次をやってみませんか。

12/5 **■練習 4.** 空間に2点 A$(1,\ 2,\ -1)$，B$(-1,\ 3,\ 0)$ があるとき，線分 AB を AQ : QB$=2:1$ に外分する点Qの座標を求めよ。　(宮崎医大)

(ヒント) 座標は位置ベクトルの成分と同じですから，まったく同じに扱えるわけです。

Q$(x,\ y,\ z)$ とすると

$$x=\frac{2\cdot(-1)-1\cdot1}{2-1}=-3$$

$$y=\frac{2\cdot3-1\cdot2}{2-1}=4$$

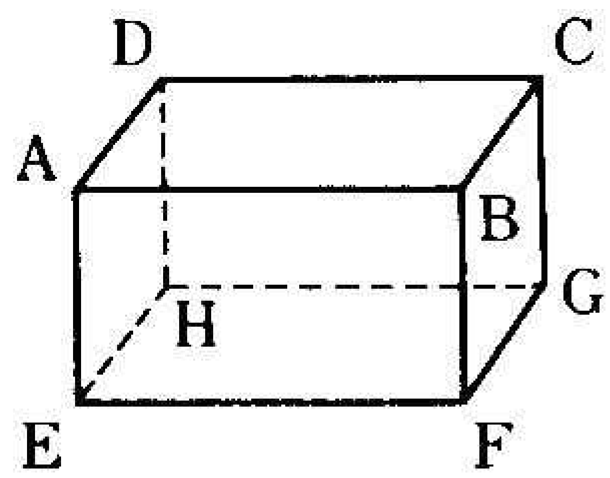
$$z=\frac{2\cdot0-1\cdot(-1)}{2-1}=1$$

よって点Qの座標は $(-3,\ 4,\ 1)$ です。

答　$(-3,\ 4,\ 1)$

◆ 次に，ややめんどうな問題を：——

練習 5. 図のような直方体について，ベクトルの内積に関する次の等式を証明せよ。



$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}$$

（広島大）

（ヒント） どこかに原点，つまり，位置ベクトルの起点を選ぶのが第1段階です。どこでもいいが，Aを採用しましょう。そして

$$\overrightarrow{AE}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$$

としますと，

$$\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{c}$$
$$\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=-(\vec{a}+\vec{b})$$
$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=\vec{c}-\vec{a}$$
$$\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{FC}=\vec{a}-\vec{c}$$
$$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

となります。そこで

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$
$$-(\vec{a}-\vec{c})(\vec{b}+\vec{c})$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

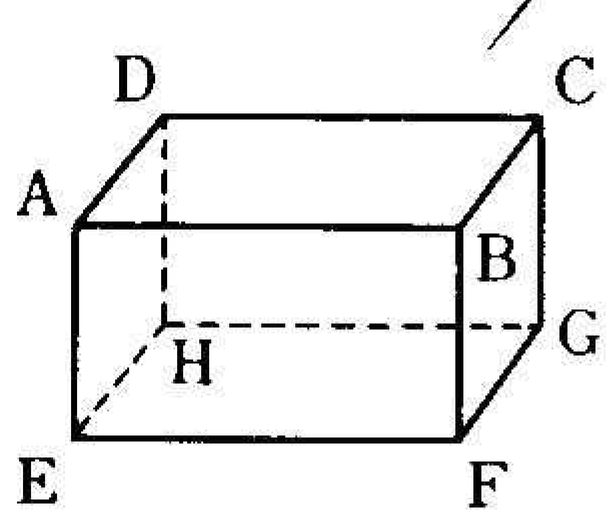
また，

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

Q. E. D.

（注） この解で，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ はいずれも直交していますから，2つの内積はすべて0です。また，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ などであることをお忘れなく。

練習 6. 図のような直方体 ABCDEFGH において $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とし，線分 AG と平面 CFH との交点を P とするとき，内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ を求めよ。ただし，$\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=\overline{AE}=1$ とする。



（信州大）

（解） $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

である。ところが，△CHF の重心Kは

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AF})=\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$$

で与えられるから，Kは AG 上にある。すなわち，点PとKは一致する。

$$\therefore\ \ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$$
$$=\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})\cdot\left\{\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})-\vec{b}\right\}$$
$$=\frac{2}{9}\{(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})\cdot(-\vec{b}+2\vec{d}+2\vec{e})\}$$
$$=\frac{2}{9}(-4+2\cdot1+2\cdot1)=0$$

答　0

*　　*　　*

◆ 次は自由ベクトルの問題です。

練習 7. 空間におけるベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が共に零ベクトルでないとき，ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値を求めよ。ただし，t は実数とする。　（静岡薬大）

（ヒント） $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{a})+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+(\vec{b}\cdot\vec{b})t^2$$
$$=(\vec{b}\cdot\vec{b})t^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+(\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{b}\neq0$

ゆえに，次のように変形されます。

$$=(\vec{b}\cdot\vec{b})\left\{t^2+2\cdot\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}t\right\}+(\vec{a}\cdot\vec{a})$$
$$=(\vec{b}\cdot\vec{b})\left\{t+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}\right\}^2+(\vec{a}\cdot\vec{a})-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}$$

したがって，$t=-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}$ のとき最小値をとります。そして，その最小値は

$$\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{b}|}$$

（注） 上の結果の根号内を次のように計算する人がよくあります。いったい，どこがちがっているのでしょうか。

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$
$$=(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

これでは0に等しくなってしまう?!

◎ベクトルの平行条件

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平行条件は数Ⅰでやったこと。ただ，ここでは，空間に相手を選ぶとしよう。それに内積との関係もありますし，ね。

◆ 2つのベクトル

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行であるための条件は

$$\vec{a}=k\vec{b}\quad(k\neq 0)$$

なるスカラー k が存在すること

です。ところで，この条件を使える人は少ないもの。バカにしないでやることです。

■練習 1. ベクトル

12/6

$$\vec{a}=(1,\ a,\ 3),\ \vec{b}=(2,\ 0,\ b)$$

が平行であるように a，b の値を定めよ。

（ヒント） $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ なるための条件は

$$\vec{a}=k\vec{b}$$

なるスカラー k のあることです。つまり

$$(1,\ a,\ 3)=k(2,\ 0,\ b)$$

$$\therefore\quad 1=2k,\ a=0\cdot k,\ 3=bk$$

$$\therefore\quad a=0,\ b=6 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

12/6

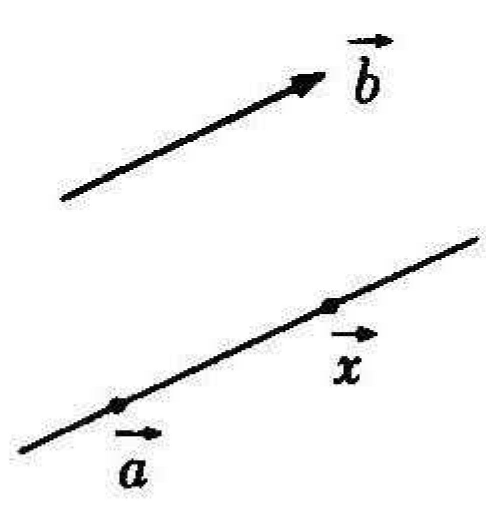
■練習 2. 点 $\vec{a}$ を通り，ベクトル $\vec{b}$ に平行な直線のベクトル方程式を求めよ。

（解） 求める直線上の任意の点を $\vec{x}$ とすれば，$\vec{x}-\vec{a}$ は $\vec{b}$ に平行であることから

$$\vec{x}-\vec{a}=k\vec{b}$$

$$\therefore\quad \vec{x}=\vec{a}+k\vec{b}$$

これが求めるものである。



*　*　*

◆ ベクトルの平行条件の最大の応用のひとつは3点が1直線上にあることの扱いでしょう。つまり，3点 A，B，C が1直線上にあれば，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行です。つまり，

3点 A，B，C が1直線上にあれば

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$$

が成り立ちます。では，具体例を：——

12/6

■練習 3. $\vec{a}$，$\vec{b}$ を任意の位置ベクトルとするとき，3つのベクトル

$$\vec{a}+2\vec{b},\ 2\vec{a}-\vec{b},\ 4\vec{a}-7\vec{b}$$

の表す3点は同一直線上にあることを示せ。

（解） A$(\vec{a}+2\vec{b})$，B$(2\vec{a}-\vec{b})$，C$(4\vec{a}-7\vec{b})$ とすると

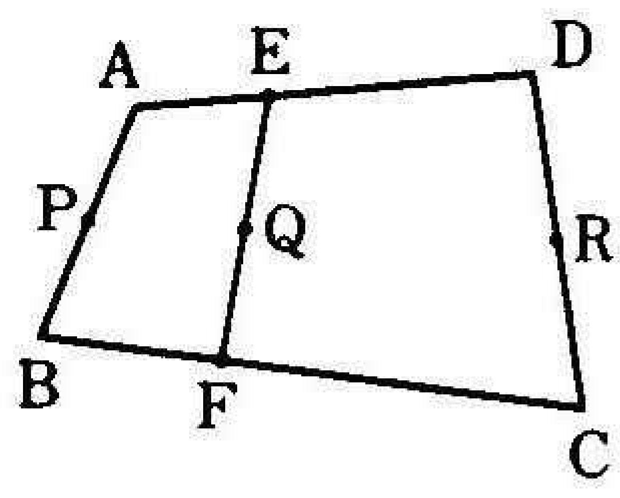
$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-3\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=3(\vec{a}-3\vec{b})$$

$$\therefore\quad 3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$$

したがって，3点 A，B，C は同一直線上にある。　Q. E. D.

■練習 4. 空間に4点 A，B，C，D があるとき，AD，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ E，F とし，AB，EF，DC の中点をそれぞれ P，Q，R とするとき，3点 P，Q，R は同一直線上にあることを証明せよ。

12/7



（ヒント） A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ としますと，点 E，F の位置ベクトルは

$$\mathrm{E}\left(\frac{2\vec{a}+\vec{d}}{3}\right),\quad \mathrm{F}\left(\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$$

ゆえに P，Q，R の位置ベクトルは

$$\mathrm{P}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{6}\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PQ}=\cdots\cdots=\frac{-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{6}$$

$$\overrightarrow{PR}=\cdots\cdots=\frac{-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}$$

よって，……　Q. E. D.

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。まず，これです。

練習5. α，β，γ は実数で，$\alpha>0$ とする。ベクトル

$\vec{a}=(6,\ \alpha)$，$\vec{b}=(\beta,\ -4)$，$\vec{c}=(8,\ \gamma)$

が，次の3つの条件を満たしている。

(1) $\vec{a}$ の長さは10である。

(2) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直である。

(3) $\vec{b}-\vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行である。

このとき，α，β，γ の値を求めよ。

（千葉工大）

ヒント　$|\vec{a}|=10$ ですから

$$6^2+\alpha^2=10^2$$

$$\therefore\quad \alpha=8\quad (>0)\qquad\cdots\cdots①$$

オヤ，もう α は求まったではないか!!

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直ですから

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore\quad 8\beta-4\gamma=0$$

$$\therefore\quad \gamma=2\beta\qquad\cdots\cdots②$$

次に，$\vec{b}-\vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行ですから，

$$(\beta-8,\ -4-\gamma)=k(6,\ 8)$$

$$\therefore\quad \frac{\beta-8}{6}=\frac{-4-\gamma}{8}$$

つまり　$4\beta+3\gamma=20$　……③

②，③より

$$\beta=2,\ \gamma=4$$

答　$\alpha=8$，$\beta=2$，$\gamma=4$

練習6. 行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される平面上の1次変換を f，直線 $y=mx$ $(m\neq0)$ を l とし，f は次の2条件を満たすとする。

(ア) f は l の各点を動かさない。

(イ) f は点 P(1, 0) を，この点Pを通り l に平行な直線上に移す。

このとき，

(1) $ad-bc$ を求めよ。

(2) f により平面上の任意の点Qは，Qを通り l に平行な直線上の点に移ることを示せ。

（東京工大）

ヒント　条件(ア)から

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a+mb=1\qquad\cdots\cdots①$$

$$c+md=m\qquad\cdots\cdots②$$

が成立します。また，条件(イ)により

$$\begin{pmatrix} x \\ mx-m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=a,\ mx-m=c$$

$$\therefore\quad c=ma-m\qquad\cdots\cdots③$$

(1) ①，②，③は文字が4つ，式は3つ，そこで，b，c，d を a で表すのが定石。

$$b=\frac{1-a}{m},\ c=m(a-1),\ d=2-a$$

$$\therefore\quad ad-bc=a(2-a)-\frac{1-a}{m}\cdot m(a-1)=1$$

(2) Q$(x_1,\ y_1)$ としますと，f によるQの像Rは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{pmatrix}$$

で与えられますから，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=((a-1)x_1+by_1,\ cx_1+(d-1)y_1)$$

これが l に平行であること，つまり

$$\frac{(a-1)x_1+by_1}{cx_1+(d-1)y_1}=m$$

であることをいえばいいのです。……

＊　＊　＊

◆ 2つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が垂直である条件は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ですが，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ の条件は，定数 k を使って $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ というのはちょっと不都合な気がします。k を使わないで表すことはできないものでしょうか。

できます。それは，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のなす角が0または π であることを使うのです。つまり，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

において　$\cos\theta=\pm1$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

つまり，次と同値です。

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$$

◑ 3点が1直線上にあることの証明

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈ 3点が1直線上にあることを，かつては列座（れつざ）などといったものです。これはcollinear（line を共にする）の訳語。

◆ 3点が1直線上にあるための条件を求めたり，あるいは1直線上にあることを証明したい場合には，ベクトルの平行条件を使うのがもっとも便利です。すなわち

相異なる3点A，B，Cが1直線上にあるための条件は
$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\quad(k\text{は定数})$$
が成り立つことです。

12/0 では，次の練習1.からやってみませんか。

■練習1. 空間の3点 A(1, 2, 3)，B(2, 1, 4)，C(3, a, $5-a$) が1直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

(ヒント) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ なる k が存在するように a を定めればよいわけです。さて，それは
$$(1,\ -1,\ 1)=k(2,\ a-2,\ 2-a)$$
$$\therefore\ 1=2k,\ -1=(a-2)k,\ 1=(2-a)k$$
第1式より
$$k=\frac{1}{2}$$
したがって，第2，第3式より
$$-2=a-2\qquad\therefore\ a=0$$

答　$a=0$

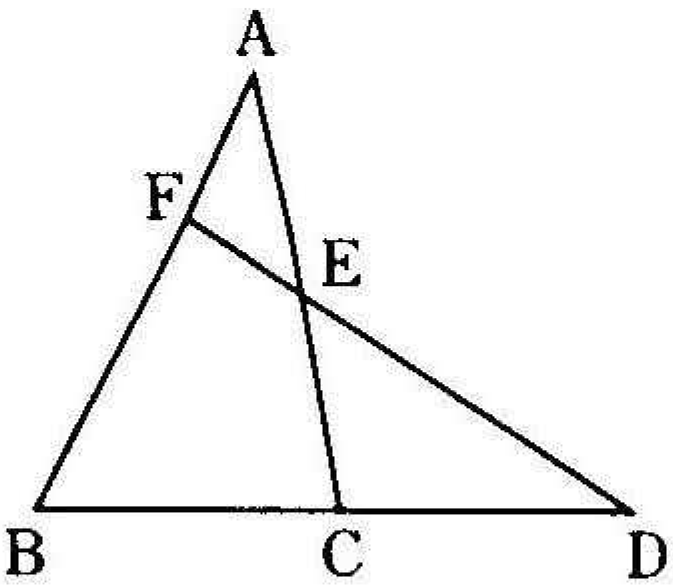
12/0 **■練習2.** 2点 A(1, 2, 4)，B(4, 1, 3) を通る直線の方程式を求めよ。

(解) この直線上の任意の点を P(x, y, z) とすると
$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\quad(t\text{はパラメーター})$$
$$\therefore\ (x-1,\ y-2,\ z-4)=t(3,\ -1,\ -1)$$
$$\therefore\ x-1=3t,\ y-2=-t,\ z-4=-t$$
$$\therefore\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{-1}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

*　*　*

◆ さて，次は，1直線上にある証明です。

12/0 **■練習3.** △ABCにおいて，ABを1：2に内分する点をF，BCの延長上にBC＝CDとなるように点Dをとり，ACの中点をEとすると，3点D，E，Fは1直線上にあることを示せ。



(ヒント) まず，位置ベクトルの起点を選ばなければなりませんが，どこにしますか。どこでもいいが，Bにしようか。

次にFの位置ベクトルを $2\vec{a}$ としようか。そうすると，Aは $3\vec{a}$ で便利だ。

次にCの位置ベクトルを $\vec{c}$ としよう。そうするとDは $2\vec{c}$ だ。

最後にEはACの中点だから，いうまでもなく $\dfrac{3\vec{a}+\vec{c}}{2}$ です。

さて，
$$\overrightarrow{FE}=\frac{3\vec{a}+\vec{c}}{2}-2\vec{a}=\frac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$$
$$\overrightarrow{FD}=2\vec{c}-2\vec{a}=2(\vec{c}-\vec{a})$$
$$\therefore\ \overrightarrow{FD}=4\overrightarrow{FE}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{FD}\,/\!/\,\overrightarrow{FE}$$
（ココマデイウ必要ハナイナア）

ゆえに，F，D，Eは1直線上にある。

よくわかった人はEをベクトルの起点にしてもう一度やってみませんか。それもできたら，点Cを起点にしてみる。こうして，腕をみがくのがコツです。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 同一平面上に △ABC と 1 点Oがあり，$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{OC}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$ が成立している。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}$ を用いて，次の各問に答えよ。

(1) $\mathrm{AB}\perp\mathrm{OC}$ を証明せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ なる点 P は △ABC の外心であることを証明せよ。

(3) △ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で表し，3 点 O, G, P は同一直線上にあることを示せ。

(佐賀大)

ヒント (1) $\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$ を変形して

$$\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2$$

ところが

$$\overline{\mathrm{OB}}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$

などが成り立つので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}&=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\\&\quad-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

$$\therefore\ 2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=0$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\qquad\therefore\ \mathrm{AB}\perp\mathrm{OC}$$

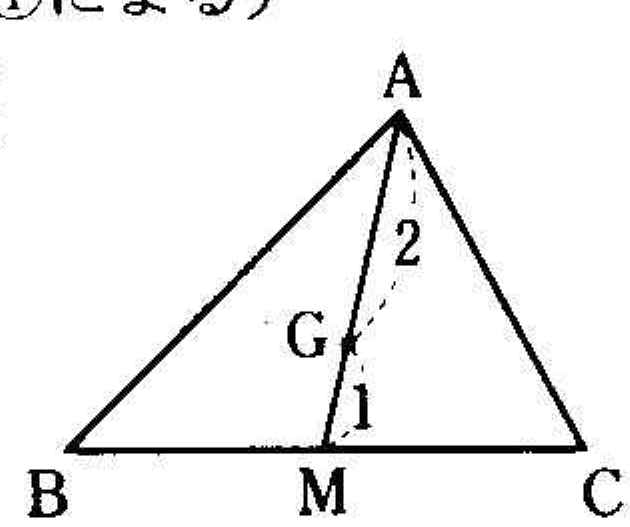
(2) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$ であることを示せばいいでしょう。$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ をいうには次の通り。

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{BP}}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}})\\&=\{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\}\\&\quad\cdot\{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\}\\&=\{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0\quad(①による)\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{a}+2\cdot\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}\right\}$$

$$=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

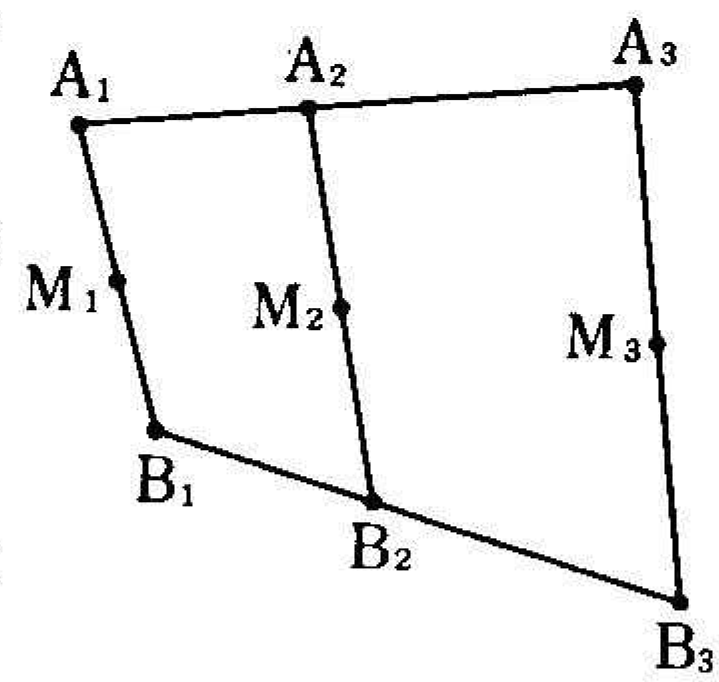


ゆえに O, G, P は同一直線上にあることがわかったのです。

*　　*　　*

◆ 次に単位ベクトルを活用する例を：——

練習 5. 空間のねじれ四辺形 $\mathrm{A_1B_1B_3A_3}$ において $\overline{\mathrm{A_1A_3}}=\overline{\mathrm{B_1B_3}}$ とする。$\overline{\mathrm{A_1A_3}}$, $\overline{\mathrm{B_1B_3}}$ を同じ比に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$ とし，$\overline{\mathrm{A_1B_1}}$, $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$, $\overline{\mathrm{A_3B_3}}$ の中点をそれぞれ $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{M_3}$ とするとき，3 点 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{M_3}$ は同一直線上にあることを示せ。



ヒント まずベクトルの起点を選ぶとしよう。どこでもいいが $\mathrm{M_2}$ がよさそうだ。つまり $\mathrm{M_2}(\boldsymbol{0})$

次に $\mathrm{A_2}$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とすると $\mathrm{B_2}$ は自動的にきまって $-\boldsymbol{a}$ ですね。つまり

$$\mathrm{A_2}(\boldsymbol{a}),\ \mathrm{B_2}(-\boldsymbol{a})$$

$\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$ とし，$\overline{\mathrm{A_1A_2}}=h$, $\overline{\mathrm{A_2A_3}}=k$ としますと

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=h\boldsymbol{e}_1,\ \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}=k\boldsymbol{e}_1$$

$$\therefore\ \mathrm{A_1}(\boldsymbol{a}-h\boldsymbol{e}_1),\ \mathrm{A_3}(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{e}_1)$$

同じように $\overrightarrow{\mathrm{B_2B_3}}$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ としますと

$$\overline{\mathrm{B_1B_2}}=h,\ \overline{\mathrm{B_2B_3}}=k$$

なんですから，上と同じようにして，

$$\mathrm{B_1}(-\boldsymbol{a}-h\boldsymbol{e}_2),\ \mathrm{B_3}(-\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{e}_2)$$

$$\therefore\ \mathrm{M_1}:\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{a}-h\boldsymbol{e}_1)+(-\boldsymbol{a}-h\boldsymbol{e}_2)\}$$

$$=-\frac{h}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$$

$$\mathrm{M_3}:\frac{k}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{M_2M_1}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{M_2M_3}}$$

つまり $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{M_3}$ は同一直線上にあることがわかります。

わかったら，$\mathrm{M_1}$ を起点にしてもう一度やってみませんか。

⑪ 単位ベクトルの利用法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆単位ベクトルは，特に空間図形を扱うときに役に立つのですが，案外と使えない人の多いもの。

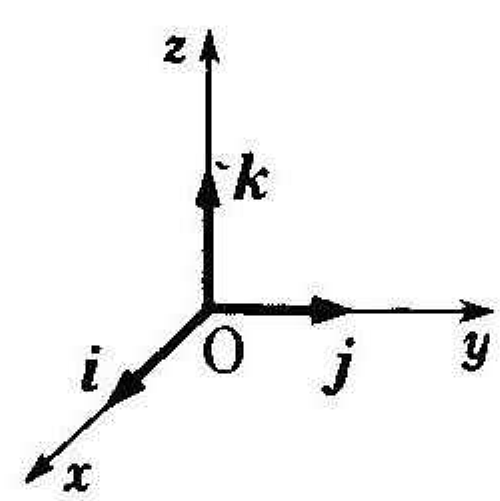
◆ 単位ベクトルとは

長さが1のベクトル

です。その使い方は大きく分けて2つあります。第1はベクトルを成分に分けて扱うとき，もう1つは，長さの関係してくる問題に活用することです。特に大切なのは後のほうですが，順を追っていきましょう。

*　*　*

◆ 空間で，座標軸に沿う単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とか $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ などで表します。では，これを：──



練習1. x, y, z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とするとき，次を計算せよ。

12/10

$$(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

（解） $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$

などより

$$与式=1+2-3=0$$

12/10

答 0

練習2. 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を位置ベクトル $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表すとき，$\boldsymbol{p}$ のベクトル方程式を作れ。

（ヒント） x, y 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ としますと，

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$$

両辺に $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ をそれぞれ掛けて内積を作りますと，

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y=1,\ \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=0$$

であることから

$$x=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_x,\ y=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_y$$

これを $y=x^2$ に代入して

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_y=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_x)^2$$

となります。

このようにすれば，x, y の関係式はすべて，位置ベクトルで表せるわけです。

*　*　*

◆ 次は，長さの関係してくる問題への応用です。

12/10

練習3. 空間の2直線 g_1, g_2 上にそれぞれ3点 A_1, B_1, C_1 ; A_2, B_2, C_2 をこの順に

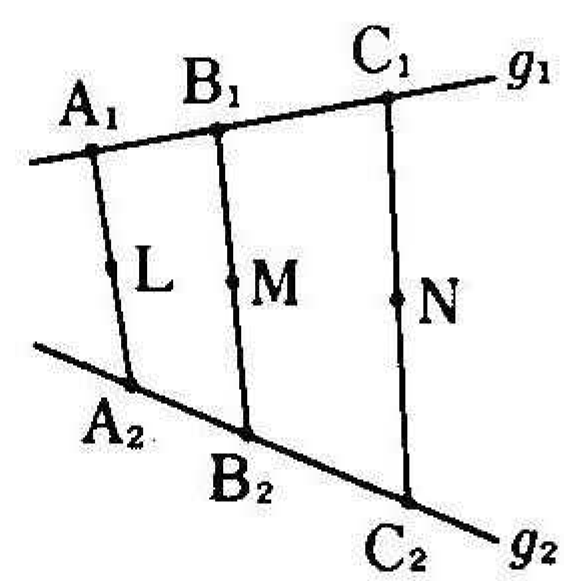
$$\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{A_2B_2},\ \mathrm{B_1C_1}=\mathrm{B_2C_2}$$

なるようにとると，$\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{B_1B_2}$, $\mathrm{C_1C_2}$ の中点は同一直線上にあることを示せ。

（京大）

（ヒント） $\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_1C_1}=\mathrm{B_2C_2}$

という条件で立往生ということが多いのですが，単位ベクトルを使えば簡単にできます。



$\mathrm{A_1A_2}$ の中点Lをベクトルの起点とし，$\overrightarrow{\mathrm{LA_1}}=\boldsymbol{a}$ としますと，$\overrightarrow{\mathrm{LA_2}}=-\boldsymbol{a}$ です。

いま g_1, g_2 にそい，$\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A_2C_2}}$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ とし，

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\overline{\mathrm{A_2B_2}}=l,\ \overline{\mathrm{B_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_2C_2}}=m$$

とすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=l\boldsymbol{e}_1,\ \overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}=(l+m)\boldsymbol{e}_1$$

ですから，点 B_1, C_1 の位置ベクトルは

$$\mathrm{B}_1(\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{e}_1),\ \mathrm{C}_1(\boldsymbol{a}+(l+m)\boldsymbol{e}_1)$$

同様に

$$\mathrm{B}_2(-\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{e}_2),\ \mathrm{C}_2(-\boldsymbol{a}+(l+m)\boldsymbol{e}_2)$$

ゆえに，$\mathrm{B_1B_2}$ の中点M，$\mathrm{C_1C_2}$ の中点Nは

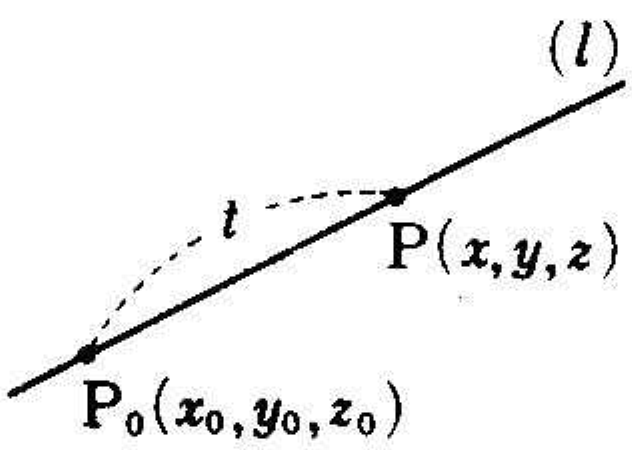
$$\mathrm{M}\left(\frac{l}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\right),\ \mathrm{N}\left(\frac{l+m}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\right)$$

与えられます。これは L(O), M, N が1線上にあることを示しています。

* * *

単位ベクトルと直線の方向余弦とは本質に同じもの です。だから，方向余弦を使とき，それは，その直線に平行な単位ベクルの成分を使っているのだということを忘ないことが大切です。

だから，直線 (l) の向余弦を l, m, n し，(l) 上の点 P_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から (l) の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ へ



有向線分の長さを t とすると

$$\boldsymbol{x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt}$$

与えられます。長さに関係した問題にはきめて有用です。

では，これをやってみませんか。

練習 4. 点Pを通る直線が単位球と交わる点を A, B とするとき $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ は一定であることを示せ。

P$(a,\ b,\ c)$ を通る直線 PAB の方向弦を l, m, n とし，PからA（またはB）の距離を t とすると，Aの座標は

$$(a+lt,\ b+mt,\ c+nt)$$

れが単位球上にあるから

$$(a+lt)^2+(b+mt)^2+(c+nt)^2=1$$

$$\therefore\quad (l^2+m^2+n^2)t^2+2(al+bm+cn)t +(a^2+b^2+c^2-1)=0$$

の2つの解が PA および PB を表すから

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=a^2+b^2+c^2-1=\text{一定}$$

$$(\because\quad l^2+m^2+n^2=1)$$

Q. E. D.

注 点Pが球外にあれば $a^2+b^2+c^2>1$, 球内こあれば $a^2+b^2+c^2<1$ ですから，$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ はそれぞれ正または負になります。これは PA・PB が有向線分で長さが正にも負にもなるからです。したがって，向きも無視するなら

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=|a^2+b^2+c^2-1|$$

となるわけです。

なお，わかったら，上の解を直接単位ベクトルを使って，もう一度やってみませんか。

練習 5. 1直線上の3つの定点 A, B, C が，それぞれ yz 平面，zx 平面，xy 平面上にあるように動くとき，この直線上の第4の定点Pの描く軌跡の方程式を求めよ。

ヒント この直線上で，

$$\mathrm{PA}=a,\ \mathrm{PB}=b,\ \mathrm{PC}=c$$

とおき，点Pの座標を $(X,\ Y,\ Z)$ としましょう。この直線の方向余弦（つまり，この直線にそう単位ベクトルの成分）を l, m, n としますと，A, B, C の座標はそれぞれ

$$\mathrm{A}(X+la,\ Y+ma,\ Z+na)$$
$$\mathrm{B}(X+lb,\ Y+mb,\ Z+nb)$$
$$\mathrm{C}(X+lc,\ Y+mc,\ Z+nc)$$

で与えられます。ところが，点 A, B, C はそれぞれ yz 平面，zx 平面，xy 平面上にあるのですから

$$X+la=0,\ Y+mb=0,\ Z+nc=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

なる関係があります。

また，

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad \cdots\cdots(**)$$

なる関係があります。上の4つの式から，l, m, n を消去して X, Y, Z の関係を求めればいいハズ。

さて，$(*)$ から

$$l=-\frac{X}{a},\ m=-\frac{Y}{b},\ n=-\frac{Z}{c}$$

が得られますから，$(**)$ に代入して

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

が得られます。

答 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

注 この軌跡はだ円面と呼ばれています。いわば，フットボールのまりのようなもの。

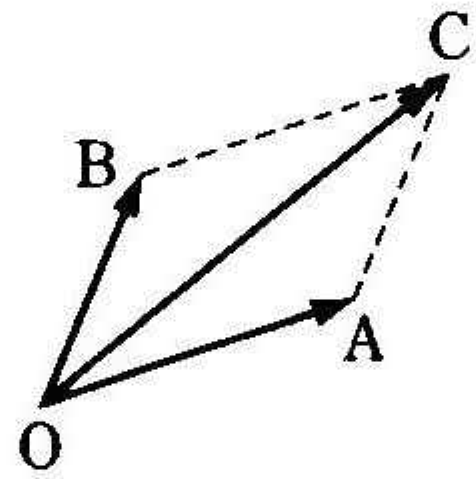
◐ ベクトルの和の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルの和の扱い方はまえにやってある通り。ここでは空間ベクトルの和がとりあげられるわけですが，べつに，事もなし。

◆ ベクトルの **和** とは，右の図に示すように平行四辺形を作って

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$



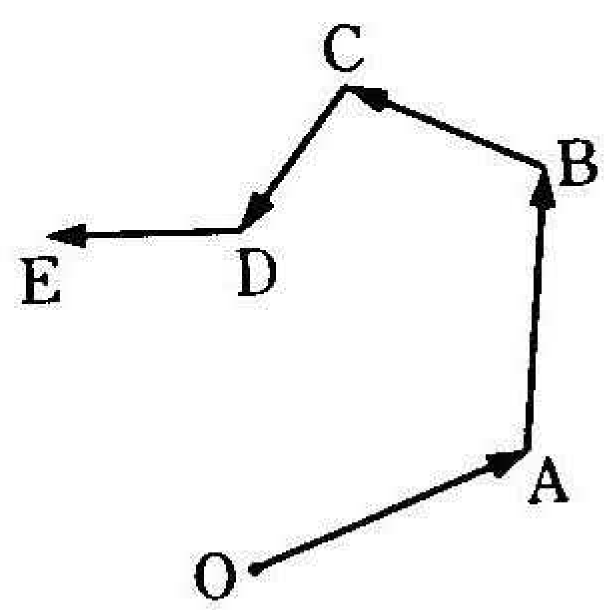
と定義します。成分で表すなら

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)$$
$$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

となります。

*　*　*

◆ さて，ベクトルの和について大切なことが3つあります。第1は図に示すように，ベクトルを次々に加えていくと，



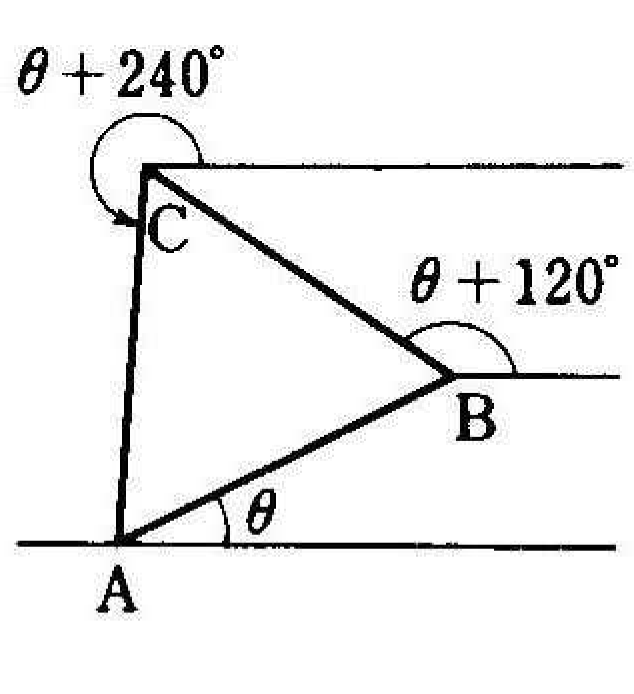
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{OE}$$

となること。つまり，はじめの点と最後の点を結べばいいのです。特に，もとの点に戻ってくると和は$\vec{0}$になります。したがって，その成分も0になります。では，これを：——

練習 1. 右の図においてABCは正三角形である。これを用いて

$$\cos\theta+\cos(\theta+120°)$$
$$+\cos(\theta+240°)=0$$

を証明せよ。



(ヒント)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

1辺の長さをlとすると，x成分をとって

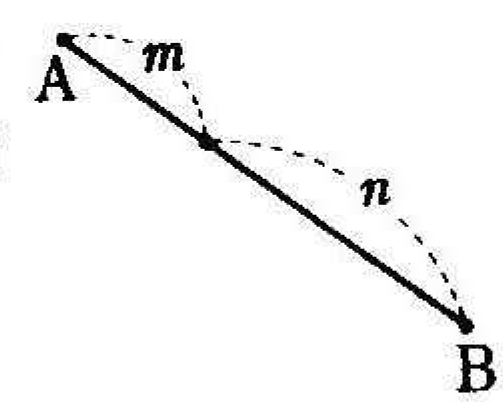
$$l\cos\theta+l\cos(\theta+120°)+l\cos(\theta+240°)=0$$

$$\therefore\quad \cos\theta+\cos(\theta+120°)+\cos(\theta+240°)=0$$

*　*　*

◆ 第2は **内分・外分** の公式です。

2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ があるとき，$\overline{AB}$ を $m:n$ に内分する点は



$$\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

で，$\overline{AB}$ を $m:n$ に外分する点は

$$\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

練習 2. 正四面体ABCDにおいて，AB，CDの中点をそれぞれM，NとするとMNはABに垂直であることを示せ。

(解)　Aを起点としB，C，Dの位置ベクトルを$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$とすると，M，Nの位置ベクトルはそれぞれ$\dfrac{\vec{b}}{2}$，$\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$である。ゆえに

$$\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})\cdot\vec{b}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{b})$$

ところが1辺の長さをlとすると

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=l\cdot l\cos 60°=\frac{1}{2}l^2$$
$$\vec{b}\cdot\vec{d}=l\cdot l\cos 60°=\frac{1}{2}l^2$$
$$\vec{b}\cdot\vec{b}=l^2$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0\qquad \therefore\quad MN\perp AB$$

*　*　*

◆ 第3は位置ベクトルと自由ベクトルの関係です。つまり2点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ としますと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

です。これは

到着点から出発点を引く

と覚えておくとよいでしょう。

12/14

■練習 3. 四面体 ABCD と1点Pの間に

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

なる関係があるとき，点Pの位置を求めよ。

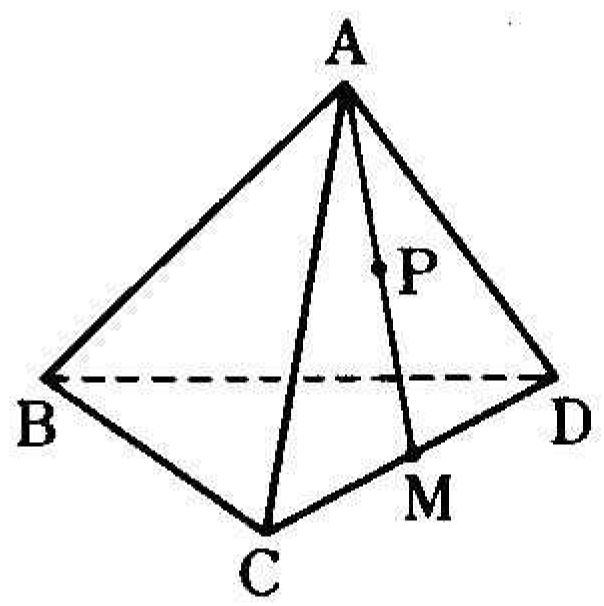
ヒント Pを起点とすると $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ は位置ベクトルで $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は自由ベクトル，混在しているのはまずい。そこで，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$\therefore\ 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PA}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}=\vec{0}$$



CD の中点をMとしますと

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\vec{0}$$

ゆえに，Pは AM の中点です。

答 $\left\{\begin{array}{l}\text{CD の中点を M とすれば AM}\\\text{の中点がPである。}\end{array}\right.$

* * *

◆ では，ややめんどうな問題を：——

1/17

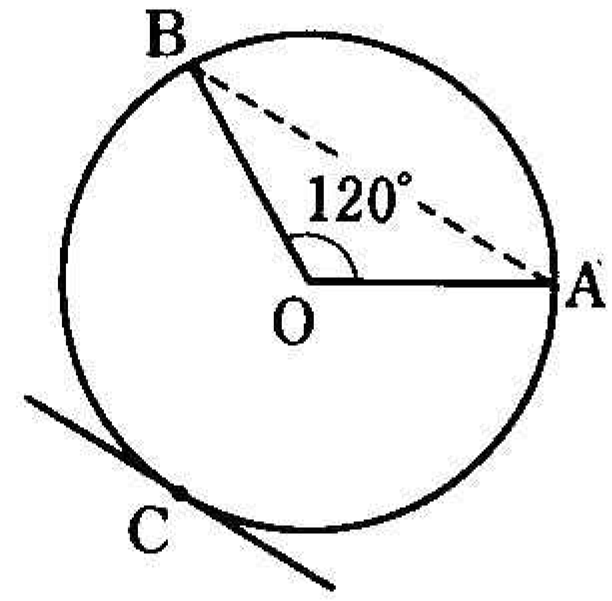
■練習 4. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$ で，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq 0$ とする。点 C はOを中心とし，A，B を通る円の周上を動く。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}$ とおくと，△ABC の面積が最大となるとき，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ であることを示せ。

（大阪工大）

ヒント 計算だけでもできますが，図形的に考えてみましょうか。まず

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$$

から△OAB は頂角Oが120°の二等辺三角形であることがわかります。そして，CはOを中心とし，A，B を通る円周上にあるのですから，△ABC の面積が最大になるのは，点が右の図の位置にきたとき，つまり△ABC が正三角形のときです。してみると



$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

は明らかです。

■練習 5. 集合 $A=\{\vec{v}(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqq z^2,\ z\geqq 0\}$ に属する任意の2つのベクトル $\vec{v}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{v}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ と任意の2つの負でない実数 a，b とに対して，$a\vec{v}_1+b\vec{v}_2\in A$ を証明せよ。 （東京水産大）

ヒント $x^2+y^2\leqq z^2$ という条件がみなれないものですから，まず，ギョッとすること請け合い。これは，$x^2+y^2=z^2$ が直円すいを表すことを知っていると，すぐ見当がつくのですが……（☞ p.270参照）。

しかし，そんなことを考えないで，形式的にやれば，それでもすむのです。つまり，だ。

$$x_1^2+y_1^2\leqq z_1^2 \qquad \cdots\cdots①$$

$$x_2^2+y_2^2\leqq z_2^2 \qquad \cdots\cdots②$$

である x_1，y_1，z_1；x_2，y_2，z_2 に対して

$$a\vec{v}_1+b\vec{v}_2$$
$$=a(x_1,\ y_1,\ z_1)+b(x_2,\ y_2,\ z_2)$$
$$=(ax_1+bx_2,\ ay_1+by_2,\ az_1+bz_2)\in A$$

をいいたいのですから

$$(ax_1+bx_2)^2+(ay_1+by_2)^2\leqq(az_1+bz_2)^2$$

を示せばいいわけ。

右辺から左辺を引いてみますと

$$a^2\{z_1^2-(x_1^2+y_1^2)\}+b^2\{z_2^2-(x_2^2+y_2^2)\}$$
$$+2ab\{z_1z_2-(x_1x_2+y_1y_2)\}$$

となりますね。第1，第2項は①，②から問題なく正または0，第3項が負にならないことをいえばいい。さて，それには

$$(z_1z_2)^2-(x_1x_2+y_1y_2)^2\geqq(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

を使えばいいでしょう。

○(四面体の)重心

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆四面体の重心というコトバはともかくとして，これに関連する問題は解けるようにしておかなければなりません。

◆ 四面体の重心というコトバを知らなければならぬというものではありませんが，重心に関係した問題は少なからず出題されているのですから，扱い方をよく理解しておくことが必要です。では，まずこれを：——

12/17

練習 1. 四面体 ABCD において，1 つの頂点と対面の重心との間を 3：1 に内分する点はすべて一致することを示せ。

ヒント 四面体の頂点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ としますと，△BCD の重心 G_1 の位置ベクトルは

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ですから，AG_1 を 3：1 に内分する点の位置ベクトルは

$$\frac{1}{4}\left\{3\times\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})+1\times\vec{a}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

となります。

同様にして，他の頂点から対面の重心を結ぶ線分についてもまったく同じですから，これで証明されたわけです。

この点を **四面体の重心** というのです。

12/17

練習 2. 四面体 ABCD の重心をGとすると，$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

解 四面体の頂点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とすると，重心Gの位置ベクトルは

$$\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

であるから，

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$$
$$=\left(\vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}\right)+\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}\right)$$
$$+\left(\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}\right)+\left(\vec{d}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}\right)$$
$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}\times 4$$
$$=\vec{0}$$

Q. E. D.

12/17

練習 3. 四面体 ABCD において，対辺の中点を結ぶ直線は重心を通ることを示せ。

ヒント 対辺というのは

AB と CD
AC と BD
AD と BC

です。ここでは，どれかひとつを証明すれば十分でしょう。

さて，A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ としますと，

AB の中点 M は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

CD の中点 N は $\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$

ですから，MN の中点は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ナルホド，これは重心だ。

Q. E. D.

注 重心を通ることを示せ，というのにすぐ線分MNの中点をとって，これが重心だ，というのには，抵抗を感じる人も多いでしょう。しかし，いわば，明々白々，それほど不自然でもありますまい!!

* * *

4

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 四面体 OABC において，辺 OA, OB, OC の長さは 1 とし，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とする。このとき

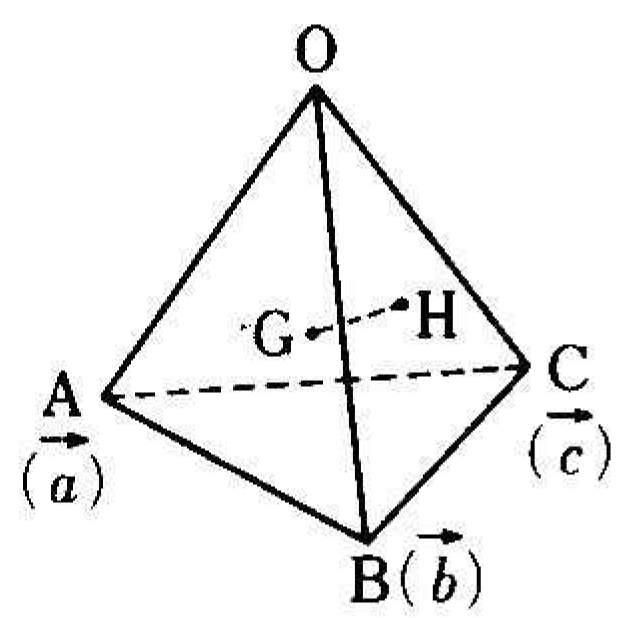
(1) 四面体の頂点を共有しない 2 辺の各各の中点を結ぶ線分の中点はすべて一致することを示せ。(この点を四面体 OABC の重心という)

(2) 四面体の重心Gから面 OBC に下した垂線とこの面との交点をHとする。$\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OH}=m\vec{b}+n\vec{c}$ を満たす実数 m, n およびベクトル $\overrightarrow{GH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。 (岩手大)

ヒント (1)はもはや，いうまでもないこと；重心Gの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

です。



(2) GH⊥ 平面 OBC となるための条件は GH が平面 OBC 上の(平行でない) 2 直線に垂直であることですから

$$GH\perp OB \quad かつ \quad GH\perp OC$$

となればいいでしょう。さて，

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}$$
$$=-\frac{1}{4}\vec{a}+\left(m-\frac{1}{4}\right)\vec{b}+\left(n-\frac{1}{4}\right)\vec{c}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$=\left\{-\frac{1}{4}\vec{a}+\left(m-\frac{1}{4}\right)\vec{b}+\left(n-\frac{1}{4}\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}$$
$$=-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(m-\frac{1}{4}\right)\vec{b}\cdot\vec{b}+\left(n-\frac{1}{4}\right)\vec{c}\cdot\vec{b}=0$$

ところが $\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$ なんですから

$$\vec{c}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \left(m-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore\ m+\frac{1}{2}n=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

同様にして $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ より

$$\frac{1}{2}m+n=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

これを解いて

$$m=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$n=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

これを代入すれば

$$\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}$$
$$+\left(\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

が得られます。

べつにめんどうというわけではありませんが，ゴタゴタして不愉快ですね。

*　*　*

◆ では，もう 1 つ：——

練習 5. 点Oを始点とする 3 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表す。△ABC, △OAB, △OBC, △OCA の重心をそれぞれ G, G_1, G_2, G_3 とするとき，四面体 $GG_1G_2G_3$ の体積は，もとの四面体 OABC の体積の何倍か。

(京都府大)

ヒント 四面体の重心を G^* とすると

$$\overrightarrow{OG^*}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4},\quad また\quad \overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OG^*}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$

他も同様な関係にあります。このことから四面体 $GG_1G_2G_3$ と OABC は G^* を相似の中心とし，相似の位置にあることがわかります。そして，相似比は 1 : 3, したがって，体積の比は

$$1^3:3^3=1:27$$

であることがわかります。　　答 27倍

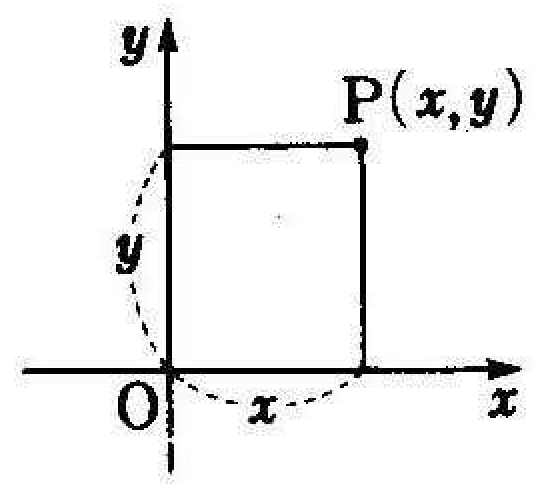
注 ムリに G^* を使うこともありませんが，このようにしていろいろな問題をいろいろな角度からみることができましょう。

◑ 空間座標とは何か

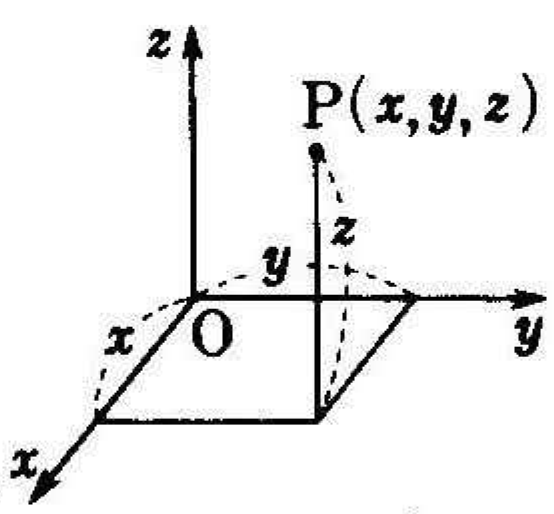
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆空間の点を数で表す方法もいろいろあって，目的によって，便利なものを使うのですが，高校では，いわゆる直角座標だけ。

◆ 平面上の点を数の組で表す代表的なものは，いわゆる **直角座標** でした。それは右の図に示すように，直交する x 軸，y 軸を基準として，平面上の点を，座標 P$(x,\ y)$ で表すものだったのです。



まったく同じように，空間に右に示すような3つの直交する直線をとり，これを x 軸，y 軸，z 軸とします。そして空間の点を P$(x,\ y,\ z)$ で表すのです。



x 軸と y 軸の定める平面を x-y 平面ということがあります。同じように，y-z 平面，z-x 平面をとります。そして，1 点 P から yz 平面に下した垂線の長さを x 座標，xz 平面に下した垂線の長さを y 座標，xy 平面に下した垂線の長さを z 座標といいます。これらは平面の場合と同じように，正または負の値をとるのです。では，具体的な問題をとりあげてみましょう。

*　*　*

練習 1. 点 P(2, 3, 5) の xy 平面に関する対称点を求めよ。

ヒント　xy 平面に関する対称点ですから，z 座標だけが符号を変えるのです。

答　(2, 3, -5)

練習 2. 点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ の原点に対する対称点を求めよ。

ヒント　平面の場合を考えてみれば一目瞭然というもの。答 は $(-x_0,\ -y_0,\ -z_0)$ です。

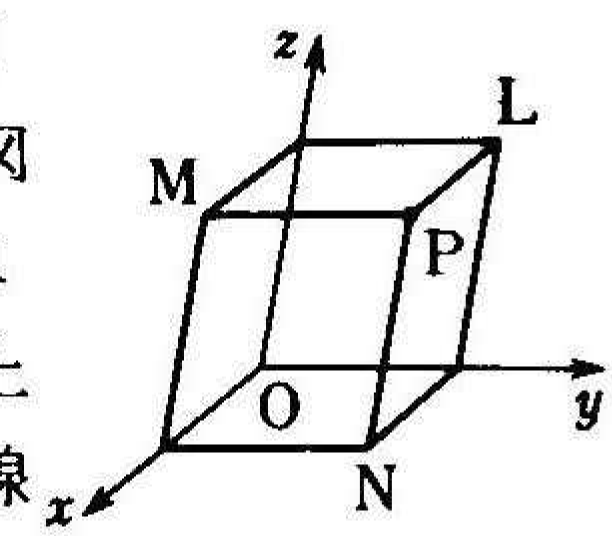
練習 3. 点 P$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ と x 軸との距離を求めよ。

答　$\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$

空間の点を座標 $x,\ y,\ z$ で表すことができると，次は，直線や，平面や球面などの方程式を求めることが問題となってきます。しかし，それらは後の課題として，ここでは，空間の点を表す別の座標を紹介しておくことにしましょう。

*　*　*

◆ 第1は，**斜交座標** です。すなわち，右の図に示すように，空間の1点Oを通り，同一平面上にない3つの有向直線 Ox，Oy，Oz をとりましょう。



そして，点 P を通り，Oxz 平面に平行な直線を引き Oyz 平面との交点をLとするとき，LP の長さ（符号を考える）を点Pの x 座標とします。y 座標，z 座標についても同じです。しかし，この斜交座標系は一般にめんどうですから使われることが少ないのです。でもある種の問題にはしごく便利でもあるのです。

練習 4. 斜交座標系において，y 軸と z 軸，z 軸と x 軸，x 軸と y 軸のなす角を，それぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，点 O(0, 0, 0) と点 P$(x,\ y,\ z)$ の距離は

$$\overline{\mathrm{OP}}=(x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

で与えられることを示せ。

ヒント　次図の △OPN に余弦定理を適用して

$\overline{OP}^2=\overline{ON}^2+\overline{NP}^2-2\overline{ON}\cdot\overline{NP}\cos\angle ONP$

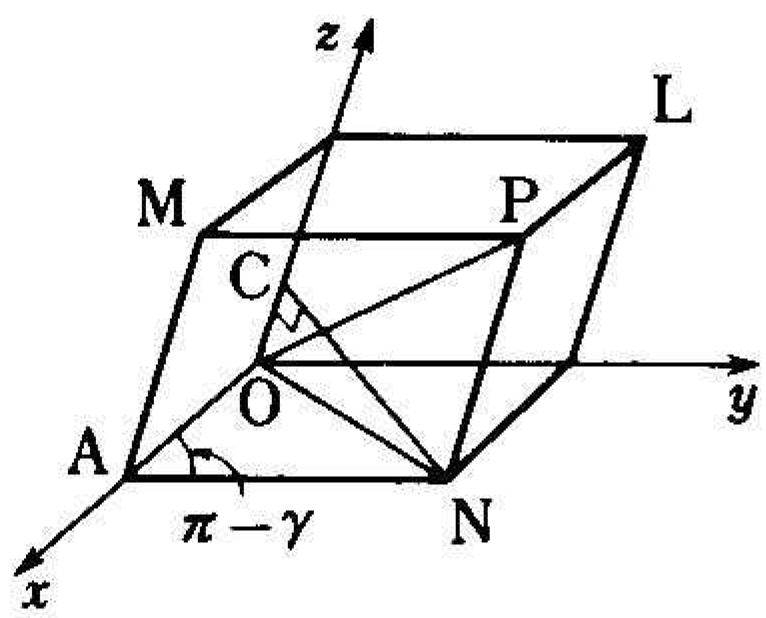
$=\overline{ON}^2+z^2-2\overline{ON}\cdot z\cos\angle ONP$ …①

次に，△OAN に余弦定理を適用して

$\overline{ON}^2=\overline{OA}^2+\overline{AN}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{AN}\cos\angle OAN$

$=x^2+y^2+2xy\cos\gamma$ ……②

となります。(ソロソロイヤニナッテキタデショウ。シカシ，ココガガマンノシドコロ!!)



ところが ON の z 軸への正射影を考えて

$\overline{ON}\cos\angle NOC=-\overline{ON}\cos\angle ONP$

∴　$x\cos\beta+y\cos\alpha=-ON\cos\angle ONP$ ……③

①，②，③より

$\overline{OP}^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma$

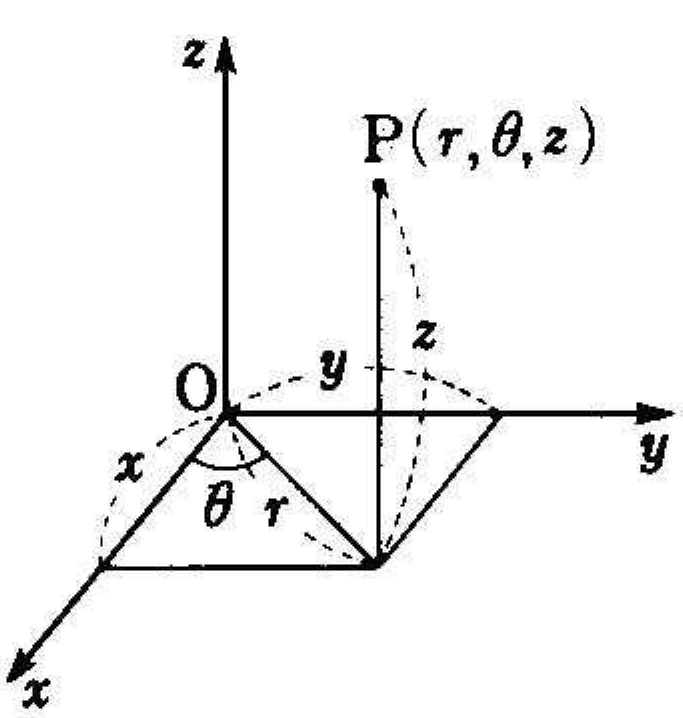
が得られます。

*　*　*

◆ 第2は **円柱座標** です。

空間の点Pを次のように表すこともできます。

右の図で，点Pを r と θ と z で表すのです。これを円柱座標（えんちゅうざひょう）といいます。



■練習 5. 円柱座標と直角座標の変換公式を求めよ。

ヒント　
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

であることはいうまでもないでしょう。

■練習 6. 円柱座標がそれぞれ

$P_1(r_1,\ \theta_1,\ z_1)$，$P_2(r_2,\ \theta_2,\ z_2)$

なる2点の距離を求めよ。

ヒント．直角座標では

$P_1(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1,\ z_1)$

$P_2(r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2,\ z_2)$

ですから，

$\overline{P_1P_2}^2=(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2$

$+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2+(z_1-z_2)^2$

$=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+(z_1-z_2)^2$

$=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(z_1-z_2)^2$

∴　$\overline{P_1P_2}$

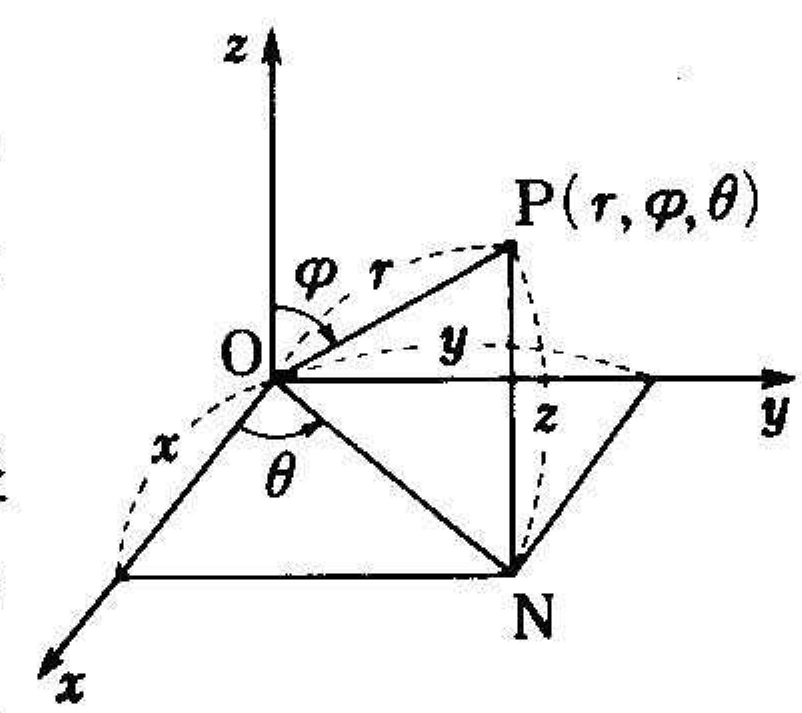
$=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(z_1-z_2)^2}$

*　*　*

◆ 第3は **球座標** です。

空間の点Pを，右の図の r と φ（ファイと読む）と θ で表すのです。

このrを動径（どうけい），φ を天頂角（てんちょうかく），θ を方位角（ほういかく）ということがあります。



■練習 7. 球座標と直角座標の関係を求めよ。

ヒント　$x=ON\cos\theta=r\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\cdot\cos\theta$

$=r\sin\varphi\cos\theta$

$y=ON\sin\theta=r\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\cdot\sin\theta$

$=r\sin\varphi\sin\theta$

$z=r\cos\varphi$

■練習 8. 球座標において，2点 $P_1(r_1,\ \varphi_1,\ \theta_1)$，$P_2(r_2,\ \varphi_2,\ \theta_2)$ 間の距離を求めよ。

ヒント　直角座標になおして計算し，結果は

$\overline{P_1P_2}$

$=[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos\varphi_1\cos\varphi_2\}]^{\frac{1}{2}}$

(空間の)座標とベクトルの成分

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆座標とベクトル成分との関係は，平面でも空間でも同じですが，ここでは空間に焦点をおいてやってみましょう。

◆ 空間の2点 A, B, の座標がそれぞれ

$A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$

であるとき，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ の成分は

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

$\overrightarrow{BA}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

で与えられます。つまり，

終点の座標から始点の座標を引く

のです。

特に，始点が原点 O(0, 0, 0) なら

$\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$

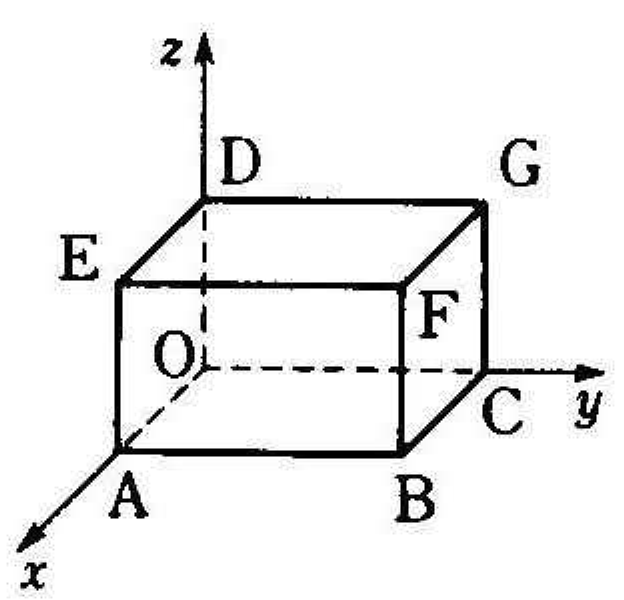
$\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

となります。つまり，点の座標と，その点に引いた位置ベクトルの成分とはまったく同じ形なのです。

では，具体的な問題にいきましょう。

c/5

■練習 1. 空間の直方体OABC-DEFG が図のようにあって，$\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OC}=b$, $\overrightarrow{OD}=c$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{EC}$ の成分を求めよ。



(ヒント) 点Fの座標は $(a,\ b,\ c)$ ですから $\overrightarrow{OF}=(a,\ b,\ c)$ でしょう。

また，$E(a,\ 0,\ c)$, $C(0,\ b,\ 0)$ ですから $\overrightarrow{EC}=(-a,\ b,\ -c)$ となります。

次のように考えてもいいでしょう。

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$=(a,\ 0,\ 0)+(0,\ b,\ 0)+(0,\ 0,\ c)$

$=(a,\ b,\ c)$

また，

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$

$=(0,\ b,\ 0)-(a,\ 0,\ 0)-(0,\ 0,\ c)$

$=(-a,\ b,\ -c)$

といったぐあい。

12/a

■練習 2. $\vec{a}=(1,\ 2,\ 0)$, $\vec{b}=(2,\ 0,\ 1)$, $\vec{c}=(0,\ 1,\ 2)$ のとき，ベクトル (3, 3, 3) を $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ の形に表せ。

(解) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

$=(x,\ 2x,\ 0)+(2y,\ 0,\ y)+(0,\ z,\ 2z)$

$=(x+2y,\ 2x+z,\ y+2z)=(3,\ 3,\ 3)$

$\therefore\quad x+2y=3$

$2x+z=3$

$y+2z=3$

$\therefore\quad x=y=z=1$

$\therefore\quad (3,\ 3,\ 3)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ……答

* * *

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

12/10

■練習 3. 4点 A(4, 2, 6), B(3, −3, 4) C(4, −1, 7), D(5, 4, 9) は同一平面上にあることを示せ。

(ヒント) 3点を通る平面の方程式を求め，第4の点がその上にあることを示せばもちろんいいのですが，ベクトルを使って，次のように簡単にやることができます。

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ -5,\ -2)$

$\overrightarrow{DC}=(-1,\ -5,\ -2)$

$\therefore\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

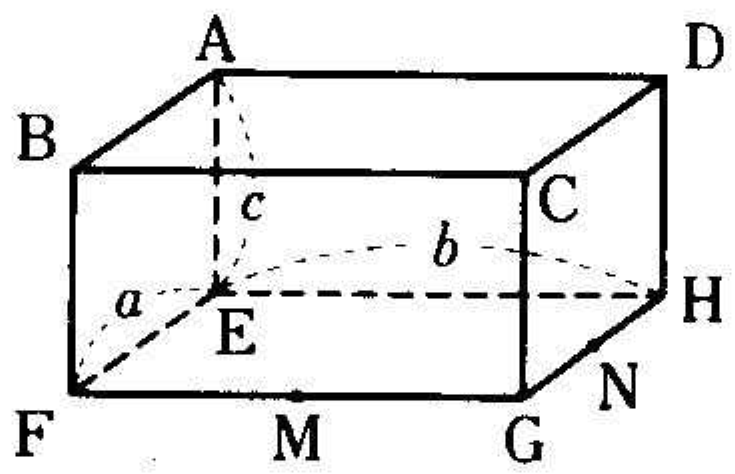
ゆえに四辺形 ABCD は平行四辺形をなすか，あるいは A, B, C, D は同一直線上にある！ いずれにしても，この4点は同一平面上にあることがわかります。

実は，A，B，C，D が同一直線上にないことは容易に証明できます。なぜなら

$$\overrightarrow{AD}=(1,\ 2,\ 3)\not\parallel\overrightarrow{AB}$$

ですから……。

練習 4. 直方体 ABCD-EFGH において，FG，GH の中点をそれぞれ M, N とすれば 4 点 B，M，N，D は同一平面上にあることを示せ。



ヒント　E を原点に，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EA}$ をそれぞれ x，y，z 軸の正の部分に重ねると

$F(a,\ 0,\ 0)$，$G(a,\ b,\ 0)$，$H(0,\ b,\ 0)$

$B(a,\ 0,\ c)$，$D(0,\ b,\ c)$

となります。したがって，

$$M\left(a,\ \frac{b}{2},\ 0\right),\ N\left(\frac{a}{2},\ b,\ 0\right)$$

ですから，

$$\overrightarrow{BD}=(-a,\ b,\ 0)$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ 0\right)$$

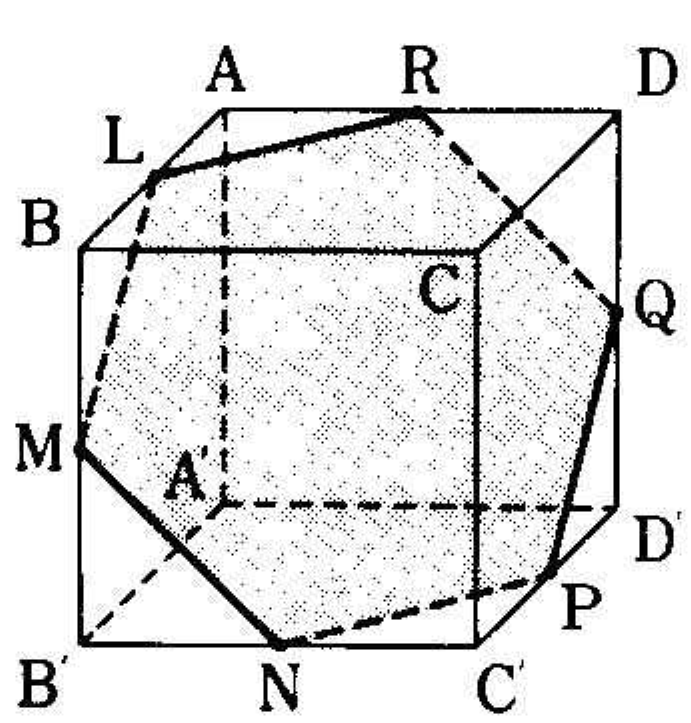
$$\therefore\ \overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{BD}\,/\!/\,\overrightarrow{MN}$$

ゆえに 4 点 B，D，M，N は同一平面上にあることがわかります。

練習 5. 立方体 ABCD-A′B′C′D′ において，辺 AB，BB′，B′C′，C′D′，D′D，DA の中点をそれぞれ L，M，N，P，Q，R とするとき，六角形 LMNPQR は正六角形であることを示せ。　（東大）

ヒント　A′ を原点とし，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{A'D'}$，$\overrightarrow{A'A}$ をそれぞれ x，y，z 軸の方向としましょう。また，1 辺の長さを 2 としてもかまいませんね。



そうすると

$R(0,\ 1,\ 2)$，$L(1,\ 0,\ 2)$，$M(2,\ 0,\ 1)$

ですから

$\overrightarrow{LM}=(1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{LR}=(-1,\ 1,\ 0)$

$$\therefore\ \overline{LM}=\overline{LR}=\sqrt{2}$$

で，$\angle RLM=\theta$ とおきますと，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{LR}}{|\overrightarrow{LM}||\overrightarrow{LR}|}=\frac{-1+0+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta=120^\circ$$

といったぐあい。ほかも同じ。同一平面上にあることもすぐわかります。あとは，答案を要領よく書くことが大切です。

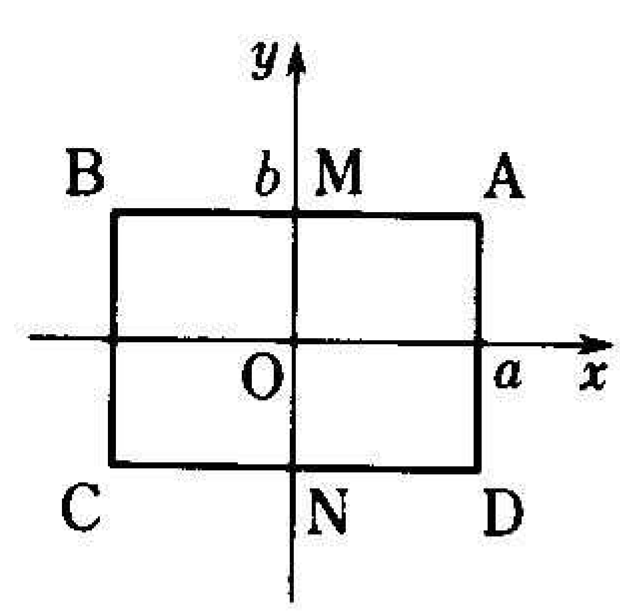
練習 6. 四辺形 ABCD が長方形のとき，空間の任意の点 P に対して

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

が成り立つことを示せ。

ヒント　$PA^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA}$ に注意のこと。また，ABCD を xy 平面上にとったほうがいいでしょう。

ABCD を xy 平面上にとり，$A(a,\ b,\ 0)$，$B(-a,\ b,\ 0)$ などとし，$P(x,\ y,\ z)$ とおいて，計算すればいいでしょう。あるいはベクトルだけを使って次のようにできます。



$$PA^2+PC^2-PB^2-PD^2$$

$$=(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PB})+(\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PD})$$

$$=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})$$

$$+(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD})$$

いま $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\text{上式}=2\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{DC}$$

$\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{BA}$ であるから

$$=2\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN})$$

$$=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{NM}=0\quad(\because\ \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{NM})$$

上の 2 つのやり方を混ぜて，座標とベクトルの関係を利用してもよいのです。

○方向余弦とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆方向余弦というコトバは直線についても使われるし，平面についても使われます。一方は平行なソレ，他方は垂直なアレ。

◆ 空間の有向直線に沿う単位ベクトルの成分を，その直線の **方向余弦** といいます。そして，ふつう，l，m，n とか λ，μ，ν で表します。なおギリシア文字の λ（ラムダ），μ（ミュウ），ν（ニュウ）は，それぞれ l，m，n に対応しています。

では，次の練習をやってみませんか。

■練習 1. 直線

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+4}{1}$$

の方向余弦を求めよ。

ヒント　この直線はベクトル $(2,\ 2,\ 1)$ に平行です。ところで，ベクトル $(2,\ 2,\ 1)$ に平行な単位ベクトルは $\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ で割って

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

です。ゆえに方向余弦は $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ です。

注　与えられた直線に向きが与えられれば方向余弦は $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ か $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ となるのですが，この場合には特に向きはきめられていないので，一方だけ採用したのです。

■練習 2. 2点 A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(4,\ 1,\ 2)$ を結ぶ直線の方向余弦を求めよ。

ヒント　直線ABはベクトル $(3,\ -1,\ -1)$ に平行です。ところで，

$$\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$$

ですから，求める方向余弦は

$$\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\ -\frac{1}{\sqrt{11}},\ -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

となります。

*　*　*

◆ 平面の方向余弦というのは，これに垂直な直線の方向余弦をいいます。

■練習 3. 平面 $x+2y+3z+1=0$ の方向余弦を求めよ。

ヒント　この平面はベクトル $(1,\ 2,\ 3)$ に垂直ですから，$\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ で割って，求める方向余弦は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

です。これも，垂直な直線に向きを考えれば $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ も方向余弦になりますが，これらを区別する必要はほとんどありません。

*　*　*

◆ 方向余弦というコトバは次のようなわけです。練習 4. をやってください。

■練習 4. 方向余弦 l，m，n の直線が x 軸，y 軸，z 軸となす角 α，β，γ を求めよ。

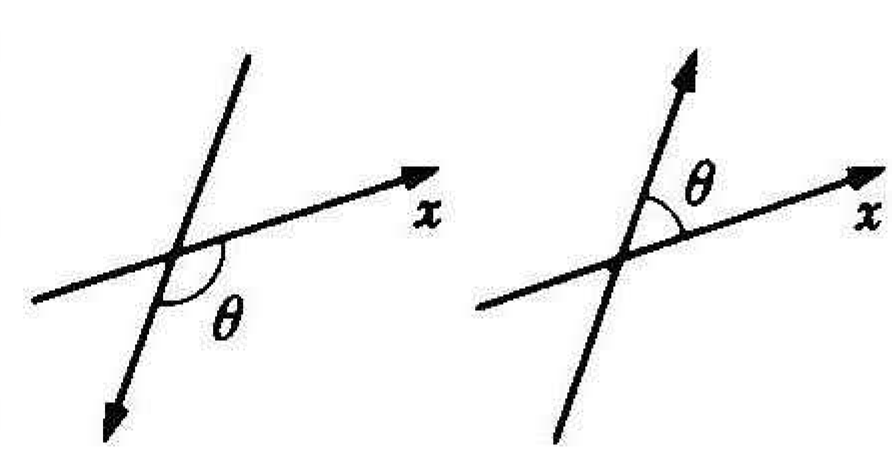
ヒント　x 軸方向の単位ベクトルは $(1,\ 0,\ 0)$ ですから，x 軸となす角はベクトル $(l,\ m,\ n)$ と $(1,\ 0,\ 0)$ のなす角と考えて

$$\cos\alpha=\frac{l\cdot 1+m\cdot 0+n\cdot 0}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=l$$

となります。

同様に m，n はこの直線が y 軸，z 軸となす角の余弦なのです。

注　直線の方向を区別すると，符号の変わることも右の図からわかるでしょう。



*　*　*

◆ では，やや総合的な問題にいきましょう。ちょっと手ごわいですよ。

12/25

●練習 5. 2つのベクトル $\vec{a}=(x,\ y)$，$\vec{b}=(u,\ v)$ の各成分の間に

$$(\lambda x)^2+(\mu y)^2=1,\ \left(\frac{\lambda u}{2}\right)^2+\left(\frac{\mu v}{2}\right)^2=1$$

$(\lambda,\ \mu>0)$ の関係がある。いま $\vec{c}=(\lambda^2 x,\ \mu^2 y)$ とする。

(1) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が直交するとき，$\vec{b}-\vec{a}=(X,\ Y)$ の軌跡の方程式を求めよ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{c}$ が x 軸となす角を，それぞれ θ_1，θ_2 とするとき

$$|\vec{a}|>|\vec{c}|,\ \frac{\pi}{2}>\theta_1>\theta_2>0$$

を満たす点$(\lambda,\ \mu)$の範囲を求めよ。

（九州芸工大）

ヒント (1) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が直交するなら

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=(u,\ v)\cdot(\lambda^2 x,\ \mu^2 y)=0$$

$$\therefore\ \lambda^2 ux+\mu^2 vy=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

そして $\vec{b}-\vec{a}=(X,\ Y)$ から

$$X=u-x \qquad \cdots\cdots ②$$

$$Y=v-y \qquad \cdots\cdots ③$$

①，②，③から X，Y の関係を求めればいいわけですね。もちろん与えられた関係式を使うわけ。その結果は

$$\lambda^2 X^2+\mu^2 Y^2=5$$

となります。

(2) $\tan\theta_1=\dfrac{y}{x}$，$\tan\theta_2=\dfrac{\mu^2 y}{\lambda^2 x}$

で，$\dfrac{\pi}{2}>\theta_1>\theta_2>0$ から

$$0<\frac{\mu^2 y}{\lambda^2 x}<\frac{y}{x}$$

また，$|\vec{a}|>|\vec{c}|$ から

$$x^2+y^2>\lambda^4 x^2+\mu^4 y^2$$

これらから，λ，μ の関係式が得られて，その結果は

$$0<\mu<\lambda\leqq 1$$

です。ただし，(1，0)，(1，1) を除きます。

それにしてもいやな問題だなあ。

12/26

●練習 6. 空間において原点Oを始点とする単位ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と x 軸の正の方向とのなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ であるとき，$\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OA}=(0,\ 1,\ 1)$ とのなす角 $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ はどんな範囲にあるか。　（金沢大）

ヒント $\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{OE}=(1,\ 0,\ 0)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OE}=|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OE}|\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ x=1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$|\overrightarrow{OP}|=1$ から

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$\therefore\ y^2+z^2=\frac{1}{4}$$

次に，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OA}|}=\frac{y+z}{\sqrt{2}}$$

そこで，$y^2+z^2=\dfrac{1}{4}$ なる条件のもとに，$y+z$ のとりうる範囲さえわかればいいのです。それには，例えば，$x+y=k$ とおいて y を消去して，判別式を使えばいいでしょう。（☞「数Ⅰ」p.242参照）

答 $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

＊　＊　＊

◆ 入試問題では方向余弦というコトバが生のまま出ることは少ないのですが，そのものがいろいろな形で出ていることは上の例からもわかるでしょう。そして，それが，方向余弦というコトバを通してまとめられる，というわけ。

なお，いろいろな公式は，方向余弦と方向比とでは，めんどうさがまったくちがってくるもの。こんなところにも，その重要性がひそんでいるのです。

① (空間の)点と点の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆図形中もっとも基本的なものは点でありましょう。点と点の関係こそ，まずとりあげられるのです。

◆ 空間の点を表す仕方には2通りあります。1つは座標を使うもの，1つは位置ベクトルを使うもの，です。とはいってもこの2つの方法はまったく無関係なわけではありません。というのも，点Aの座標が $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，点Bの座標は $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3})$$

で与えられるからです。したがって，

$$\overrightarrow{OA}=(a_1-0,\ a_2-0,\ a_3-0)=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$
$$\overrightarrow{OB}=(b_1-0,\ b_2-0,\ b_3-0)=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

となって，Oを位置ベクトルの起点とすると，座標と成分と一致してしまうことにもなります。ともあれ，具体的な問題にいきましょう。

*　*　*

◆ 点と点の関係といえば，まず問題となるのは，2点間の距離です。これは

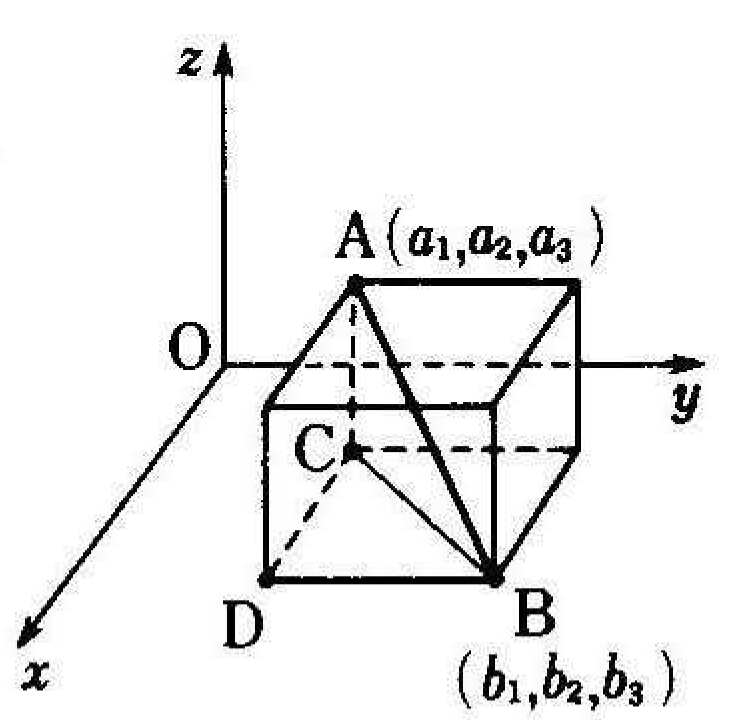
$$A(a_1,\ a_2,\ a_3),\ B(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

としますと

$$\overline{\mathbf{AB}}=\sqrt{(\boldsymbol{a_1-b_1})^2+(\boldsymbol{a_2-b_2})^2+(\boldsymbol{a_3-b_3})^2}$$

で与えられます。

証明は，右の図において



$$\begin{aligned}&\overline{AB}^2\\&=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2\\&=\overline{AC}^2+(\overline{CD}^2+\overline{DB}^2)\\&=\overline{CD}^2+\overline{DB}^2+\overline{AC}^2\\&=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2\end{aligned}$$

となるからです。

では，練習1. からやってみませんか。

練習1. 2点 A(5, 2, −3), B(5, −1, 1) の距離を求めよ。

(解) $AB=\sqrt{(5-5)^2+(2+1)^2+(-3-1)^2}$

$=\sqrt{25}=5$ ……答

12/25

練習2. 点 A(−1, 2, 3), B(1, 4, 1) から等距離にある点を x 軸上に求めよ。

(ヒント) x 軸上の点を P(x, 0, 0) とすると

$$\overline{PA}^2=(x+1)^2+(-2)^2+(-3)^2$$
$$=x^2+2x+14$$
$$\overline{PB}^2=(x-1)^2+(-4)^2+(-1)^2$$
$$=x^2-2x+18$$

ところが $\overline{PA}=\overline{PB}$ だというのですから，

$$x^2+2x+14=x^2-2x+18\qquad\therefore\quad x=1$$

だから，求める点は (1, 0, 0) です。

1/12

練習3. 3点 A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(3, 1, 2) を頂点とする三角形は正三角形であることを示せ。

(解) $\overline{AB}^2=(-1)^2+(-1)^2+2^2=6$

$\overline{BC}^2=(-1)^2+2^2+(-1)^2=6$

$\overline{CA}^2=2^2+(-1)^2+(-1)^2=6$

$\therefore\ \overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

ゆえに，△ABC は正三角形である。

*　*　*

◆ 2つの点が与えられたとき，これによってきまる第2のものは，その2点を結ぶ直線の方向です。

2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が与えられたとき，比

$$\boldsymbol{a_1-b_1 : a_2-b_2 : a_3-b_3}$$

を直線 AB の方向比（ほうこうひ）

といいます。では，これを：——

12/8

練習 4. A(2, −1, −3), B(4, 2, 3) のとき直線 AB の方向比を求めよ。

(解)　$2-4:-1-2:-3-3$

$=-2:-3:-6$

$=2:3:6$　　　答　$2:3:6$

(注)　直線における方向余弦について詳しいことは（☞ p.218）参照。

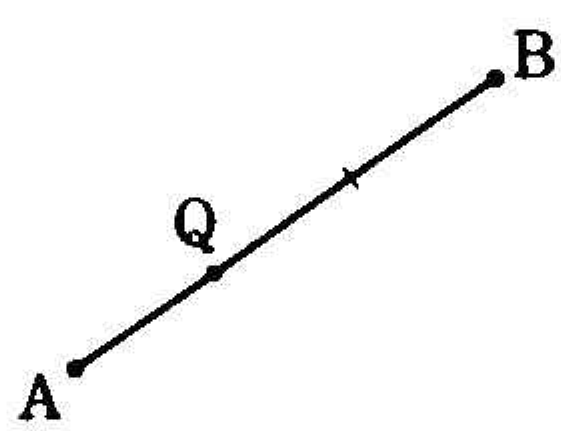
＊　＊　＊

◆　2 点 A, B が与えられたとき，これからきまるものに内分点，外分点があります。公式は平面の場合と同じことですから，特に注意することもありませんが，詳しくは，（☞ p.222）を参照してください。ここでは，練習を 1 つだけやっておきましょう。

12/24

練習 5. 空間に 2 点 A(1, 2, −1), B(7, 5, −4) がある。このとき，線分 AB を AQ : QB=1 : 2 に内分する点 Q の座標を求めよ。

(解)　$Q(x,\ y,\ z)$ とすると，



$$x=\frac{1\cdot7+2\cdot1}{1+2}=\frac{9}{3}=3$$

$$y=\frac{1\cdot5+2\cdot2}{1+2}=\frac{9}{3}=3$$

$$z=\frac{1\cdot(-4)+2\cdot(-1)}{1+2}=\frac{-6}{3}=-2$$

答　(3, 3, −2)

＊　＊　＊

◆　次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

12/23

練習 6. 2 点 A(1, 2, 3), B(4, 1, 2) から等距離にある点を直線 $x=y=z$ 上に求めよ。

(解)　求める点を $P(t,\ t,\ t)$ として，$AP=BP$ から t を求める。

答　$\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

練習 7. 4 点 $A(a,\ b,\ c)$, $B(b,\ c,\ a)$, $C(c,\ a,\ b)$, $D(p,\ p,\ p)$ が正四面体の頂点となるための条件を求めよ。ただし，$a,\ b,\ c$ はすべて異なる正の数であり，$p=\dfrac{2}{3}(a+b+c)$ とする。

(解)　$AB=BC=CA$

$=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

$DA=DB=DC=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

であるから，DABC が正四面体をなすために DA=AB であること，したがって，

$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0$

a について整理して解くと

$a=(b+c)\pm\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2}$

$=(b+c)\pm2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})^2$

すなわち

$\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$\sqrt{b}=\sqrt{c}+\sqrt{a}$，

$\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

のいずれかが成り立つことである。

練習 8. 空間に点の集合があって，いずれの 2 点の距離も 1 より小さいとき，これらすべての点を含む半径 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ の球があることを示せ。

(ヒント)　点の集合を A_1, A_2, ……とするときすべての点は A_1 を中心とし，半径 1 の球の内部にあるハズ。そこで，この球面上に 1 点 A_2 を選んで半径 1 の球を作ると，すべてはこの球の内部にあるハズ。さらに，この 2 球の交わり上に 1 点をとりこの点を中心とする半径 1 の球を作ると，すべての点はやはりこの中にあるハズ。こうして考えてみると，このすべての点は 1 辺の長さ 1 の正四面体の外接球の内部に入れられるらしい。

これはできる人がほとんどいない難問です。なお，平面の場合はお茶の水女大に出題されていますよ。

○内分点と外分点の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆内分点，外分点はまえにやったハズ。ここでは，空間ベクトルについて，やっておこうというのです。

◆ 内分点，外分点の扱い方はすでに，まえにやってあることなのです（☞ p.52参照）。ただ，その空間への応用とか，内積と関係するものをやるのが，ここの目的です。

空間の２点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の間を $m:n$ に **内分する点** は

$$\left(\frac{mb_1+na_1}{m+n},\ \frac{mb_2+na_2}{m+n},\ \frac{mb_3+na_3}{m+n}\right)$$

で，**外分する点** は

$$\left(\frac{mb_1-na_1}{m-n},\ \frac{mb_2-na_2}{m-n},\ \frac{mb_3-na_3}{m-n}\right)$$

です。また，ベクトルでも同じこと，

空間の２点 $\vec{a}$，$\vec{b}$ の間を $m:n$ に内分する点は

$$\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

です。

* * *

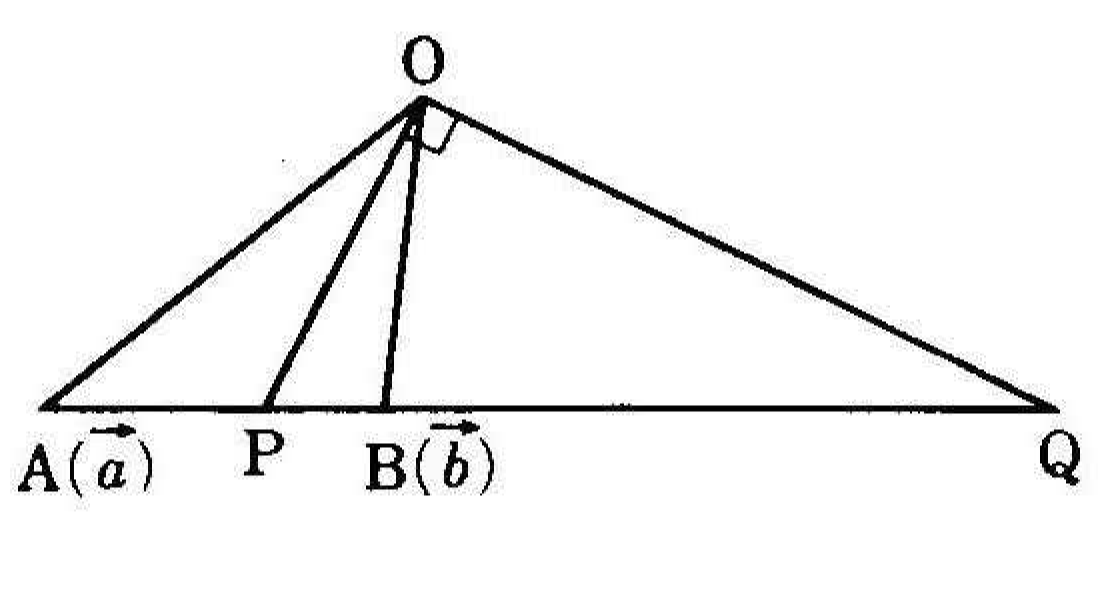
◆ では，さっそく具体的な練習にいきましょう。

11/26

練習 1. 三角形 OAB において，辺 AB を $m:n\ (m>n)$ に内分，外分する点をそれぞれ P，Q とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するときの，$m:n$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。（筑波大）

ヒント　公式から

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n},\quad \overrightarrow{OQ}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$



ですから，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ より

$$\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}\cdot\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}=0$$

$$\therefore\quad m^2|\vec{b}|^2-n^2|\vec{a}|^2=0$$

11/26

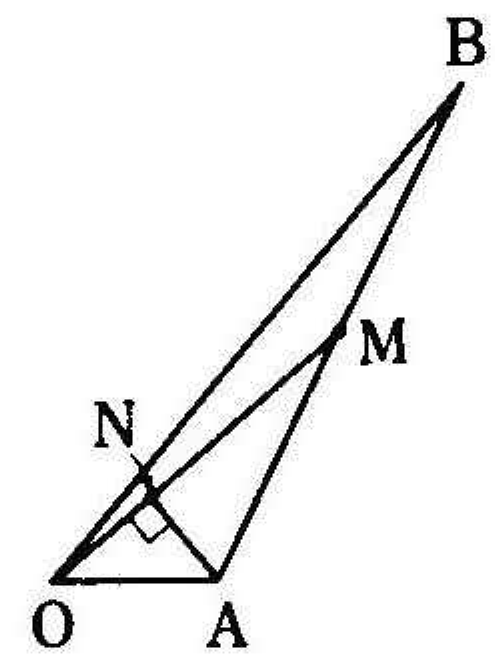
$$\therefore\quad m:n=|\vec{a}|:|\vec{b}|\quad (\because\ m,\ n>0)$$

練習 2. $OB=4OA$ を満たす三角形 OAB において，辺 AB の中点をMとし，線分 OM 上に点Nを

$ON:NM=1:2$

となるようにとる。

$ON\perp NA$ ならば，$\cos\angle AOB$ を求めよ。（新潟大）



解　Oを起点とし，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ とすると $M\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$ で，したがってNの位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{6}$ で与えられる。$ON\perp NA$ により

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AN}=0$$

$$\therefore\quad \frac{\vec{a}+\vec{b}}{6}\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{6}-\vec{a}\right)=0\quad\cdots\cdots(*)$$

さらに $\overline{OA}=l$ とすると $\overline{OB}=4l$ で，したがって (*) より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{|\vec{b}|^2-5|\vec{a}|^2}{4}=\frac{11l^2}{4}$$

$$\therefore\quad \cos\angle AOB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{11l^2}{4}}{l\cdot 4l}$$

$$=\frac{11}{16}\quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ m，n に内分する代わりに，

$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $t:(1-t)$ に内分すると
$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

となって，m，n の2つの代わりに，t が1つですみますし，それに分数にならない，という利点があります。入試問題にも，この形が多く出題されていますよ。さて：——

練習 3. $\vec{a}$，$\vec{b}$ を平面上の相異なるベクトルで，大きさは共に1であるとする。$\overrightarrow{v(t)}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ の大きさを最小にする t を t_0 とするとき，内積 $(\vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{v(t_0)})$ を求めよ。　　　(大阪市大)

ヒント　$\overrightarrow{v(t)}$ の大きさ，というのだから考える余地~~はありませんよ~~。

$$
\begin{aligned}
&|v(t)|^2\\
&=((t\vec{a}+(1-t)\vec{b}),(t\vec{a}+(1-t)\vec{b}))\\
&=2\{1-(\vec{a},\ \vec{b})\}t^2+2\{(\vec{a},\ \vec{b})-1\}t+1\\
&=2\{1-(\vec{a},\ \vec{b})\}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1+(\vec{a},\ \vec{b})}{2}
\end{aligned}
$$

ゆえに $\overrightarrow{v(t)}$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値をとることがわかります。

$$\therefore\quad t_0=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{v(t_0)}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\therefore\quad \left(\vec{b}-\vec{a},\ \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\right)=\frac{1}{2}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2)=0$$

答　0

*　*　*

◆ 次も本質的に同じです。では：——

練習 4. 平面上に3点 O，A，B が与えられているとき

(1)　t を $0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数とするとき，ベクトル $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の終点Pはどのような点となるか。

(2)　(1)において，t が $t>1$ を満たす実数ならばどうなるか。

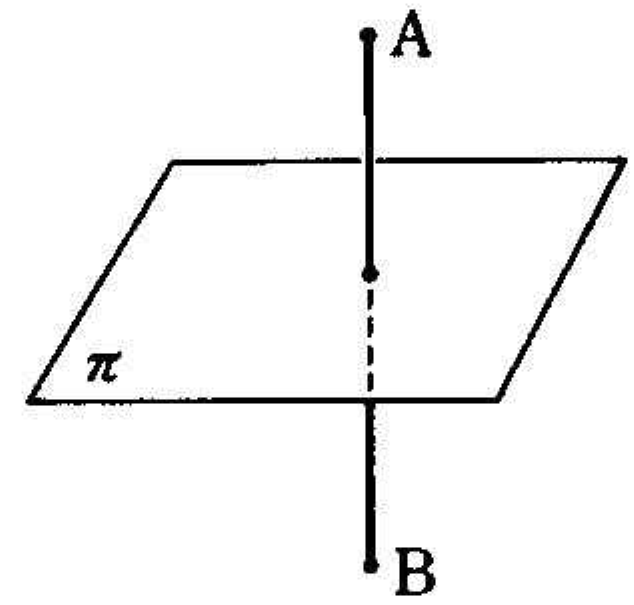
(3)　点 O，A，B の座標をそれぞれ $(0,\ 0)$，$(1,\ 4)$，$(3,\ 2)$ とする。t がすべての実数値をとって変化するとき，ベクトル $(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の大きさが最小になる t を求めなさい。またそのときのベクトルの大きさを求めなさい。　　　(南山大)

答　(1)　Pは線分 AB 上の点である。(ただし，両端を含む)　(2)　Pは線分 AB のBを越える延長上の点 (つまりPは AB の外分点で，PA＞PB)　(3)　$t=\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ をとる。

*　*　*

◆ では，空間を：——

練習 5. 点 $(-3,\ 4,\ 5)$ の平面 $3x+2y+z+1=0$ に関する対称点の座標を求めよ。　　　(芝浦工大)



ヒント　点 $A(-3,\ 4,\ 5)$ の平面 $\pi:3x+2y+z+1=0$ に関する対称点を $B(X,\ Y,\ Z)$ としますと，

≪$AB\perp\pi$ で，AB の中点は π 上に≫

あります。これから

$$\frac{X+3}{3}=\frac{Y-4}{2}=\frac{Z-5}{1}$$

$$3\left(\frac{X-3}{2}\right)+2\left(\frac{Y+4}{2}\right)+\left(\frac{Z+5}{2}\right)+1=0$$

これを解けばよいハズ。

答　$\left(-\dfrac{36}{7},\ \dfrac{18}{7},\ \dfrac{30}{7}\right)$

練習 6. 空間の直線

$$l:\frac{x+3}{6}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{k-1}$$

が，2点 $A(7,\ 5,\ -4)$，$B(-1,\ 3,\ 0)$ を通る直線 m と交わるように k の値を定めよ。また，その交点Rは線分 AB をどのような比に分けるか。　　　(宮崎医大)

ヒント　いろいろな方法がありましょう。1つの方法は，AB を $t:1-t$ に分ける点は

$(-t+7(1-t),\ 3t+5(1-t),\ -4(1-t))$

です。これが l 上にあるように t と k を定めればいいのです。では，代入して……

答　$k=4$，$4:1$

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

(空間の)三角形の扱い方

◆空間にあろうと，平面上にあろうと，大したちがいがあろうハズはない。しかし，ものによっては計算がゴタゴタしますよ。

◆ 空間の三角形に関する問題はいろいろあります。頂点の座標を与えてどんな三角形かというもの，頂点の座標を与えて面積を求めるもの，などです。

では，それらの主なものをものにしておこう，というのがこのセクションの目的です。まず，これからはじめましょう。

練習1. 3点 A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(3, 1, 2) を頂点とする三角形はどんな三角形か。

ヒント どんな三角形か，といえば，おそらく二等辺三角形か，直角三角形か，正三角形のいずれかであろう，と見当はつく。

ところで，

$$\overline{AB}^2=1^2+1^2+2^2=6$$
$$\overline{BC}^2=1^2+2^2+1^2=6$$
$$\overline{CA}^2=2^2+1^2+1^2=6$$
$$\therefore\quad AB=BC=CA$$

ゆえに，△ABC は正三角形であることがわかります。

練習2. 3点 A(0, 0, a), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0) が ∠A を直角とする直角三角形である。a の値を求めよ。

ヒント $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ が条件です。さて，それは，

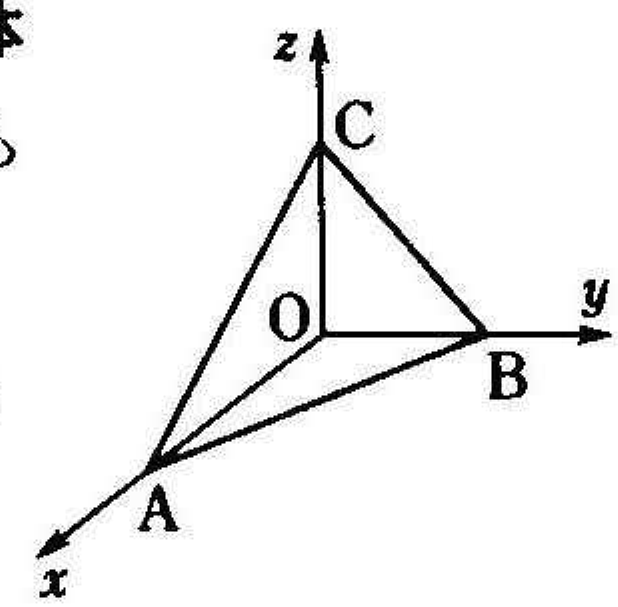
$$(1^2+a^2)+(1^2+a^2)=1^2+1^2$$
$$\therefore\quad a=0 \qquad\cdots\cdots\text{答}$$

* * *

◆ 次は，空間にある三角形の面積です。

練習3. 3点 A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) を頂点とする三角形の面積を求めよ。

ヒント この問題はいろいろな考え方がありましょう。第1は **四面体 OABC の体積** を使うものです。つまり：——



解 1. $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}ab$

であるから

四面体OABC

$$=\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot\overline{OC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot c$$
$$=\frac{1}{6}abc$$

次に，平面 ABC の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

つまり

$$bcx+cay+abz-abc=0$$

だから，Oからこれに下した垂線の長さは

$$\frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

である。したがって △ABC$=S$ とすると

$$\text{四面体 OABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\cdot S$$
$$\therefore\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\cdot S=\frac{1}{6}abc$$
$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\ \cdots\cdots\text{答}$$

第2は，三角形の面積の公式

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\angle A$$

を使うものです。では，やってみましょう。

解 2. $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$, $\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$

$\overline{CA}=\sqrt{c^2+a^2}$

であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)-(b^2+c^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\therefore\quad \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

……答

第3は **ベクトルの内積** を使うものです。つまり

(解) 3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{(-a,\ b,\ 0)\cdot(-a,\ 0,\ c)}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$

$$=\frac{a^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$$

あとは上と同じです。

*　*　*

◆ 次は，やや総合的な問題です。

練習 4. 平面 $3x+4y+5z=12$ と座標軸との交点として得られる3点によって決定される三角形の面積を求めよ。（福岡教育大）

(解) 与えられた平面と座標軸との交点は

$$(4,\ 0,\ 0),\ (0,\ 3,\ 0),\ \left(0,\ 0,\ \frac{12}{5}\right)$$

であるから，この平面と座標面とで作る四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4\times3}{2}\cdot\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$$

である。

また，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ からこの平面に下した垂線の長さは（☞ p.236）

$$\frac{|-12|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{12}{5\sqrt{2}}$$

ゆえに，求める面積を S とすると

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{5\sqrt{2}}\cdot S=\frac{24}{5}$$

$$\therefore\quad S=6\sqrt{2}$$

練習 5. 連立方程式 $a+b-c=\sqrt{2}$，$bc=\sqrt{2}a$，$a^2+b^2+c^2=4$ を満足する正の実数 a，b，c に対して，座標 $(x,\ y,\ z)$ が $(a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ b,\ 0)$，$(0,\ 0,\ c)$ である点をそれぞれ A，B，C とする。△ABC の面積 S を求めよ。（札幌医大）

(解)
$$a+b-c=\sqrt{2}\quad\cdots\cdots①$$
$$b^2+c^2=4-a^2\quad\cdots\cdots②$$
$$bc=\sqrt{2}a\quad\cdots\cdots③$$

から ②−③×2 を作ると

$$(b-c)^2=-a^2-2\sqrt{2}a+4$$

ところが，①から

$$b-c=\sqrt{2}-a$$

$$\therefore\quad (\sqrt{2}-a)^2=-a^2-2\sqrt{2}a+4$$

$$\therefore\quad a=1\quad(\because\quad a>0)$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{2}\qquad\therefore\quad c=1$$

ゆえに，3点の座標は

$$A(1,\ 0,\ 0),\ B(0,\ \sqrt{2},\ 0),\ C(0,\ 0,\ 1)$$

$$\therefore\quad \overline{AB}=\sqrt{3},\ \overline{BC}=\sqrt{3},\ \overline{CA}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{3+2-3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore\quad \sin A=\sqrt{1-\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

答 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

*　*　*

◆ 実は3辺の長さがきまれば三角形がきまってしまうのですから，3辺の長さが求められれば，平面であれ，空間であれ，ちがいはないハズ。とはいうものの，面積を求めるにヘロンの公式を使ったのでは，計算がめんどうになります。

◐ 正四面体の扱い方

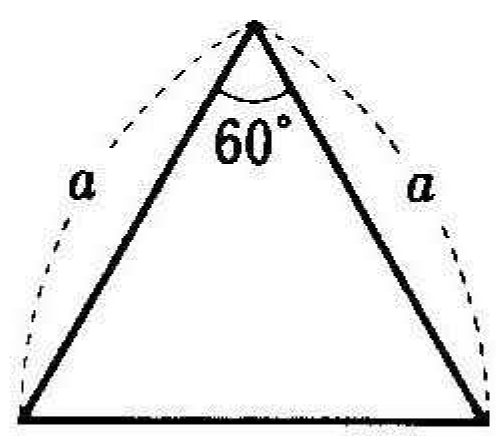
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆空間図形の扱い方に慣れるには，正四面体に関して徹底的にやるとよい。こうして，空間の概念をつかめば，あとはラクだ。

◆ 正四面体はいうまでもなく，頂点が４つあって，４つの面は合同な正三角形で，そして辺は６個あって，すべて等しいのです。ここでは正四面体についての重要な事項にアタックするのが目的です。まず，これを：——

練習 1. １辺の長さ a の正四面体の表面積を求めよ。

ヒント　１辺の長さ a の正三角形の面積は



$$\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

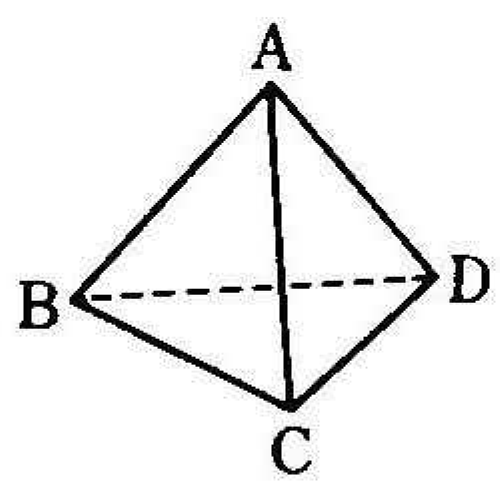
ですから，求める表面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 4=\sqrt{3}\,a^2 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

です。

練習 2. 正四面体 ABCD において $AB\perp CD$ であることを示せ。

ヒント　ベクトルでやってみましょう。位置ベクトルの起点を A とし，B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ としますと，１辺の長さ l として，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}&=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})\\&=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=l^2\cos 60^\circ-l^2\cos 60^\circ=0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$$

$$\therefore\ AB\perp CD$$

Q. E. D.

練習 3. 正四面体 ABCD の頂点Aから対面 BCD に下した垂線の足をHとすると，Hは △BCD の重心であることを示せ。

ヒント　△BCD の重心Gをとると AG が BG, CG に垂直であることを示せばいいでしょう。ではどうするか？

A をベクトルの起点とし，$B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ としますと

$$G\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}&=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}-\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{9}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-2\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\\&=\frac{1}{9}(-2\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{d}\cdot\vec{d}\\&\qquad-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}+2\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=\frac{1}{9}(-2l^2+l^2+l^2-l^2\cos 60^\circ-l^2\cos 60^\circ\\&\qquad+2l^2\cos 60^\circ)\\&=0\end{aligned}$$

$$\therefore\ AG\perp BG$$

ここに l はいうまでもなく，１辺の長さです。

同様に　　$AG\perp CG$

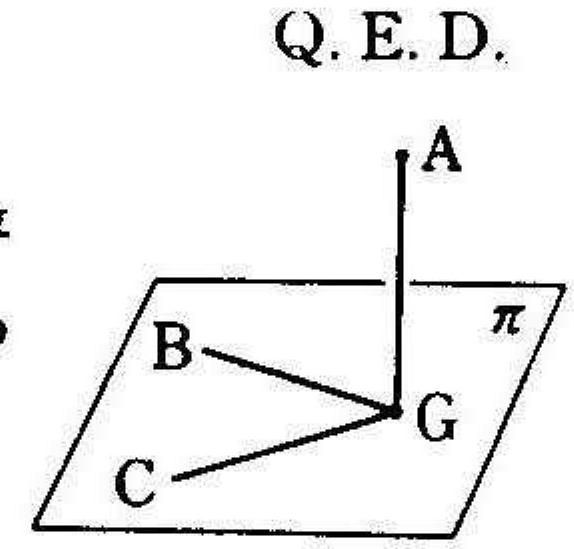
$$\therefore\ AG\perp 平面\ BCD$$

Q. E. D.

注　ここでは，

直線 AG が平面 π 上の平行でない２直線に垂直なら平面 π に垂直である

という定理を使いました。



*　　*　　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. ４点 $A(a,\ b,\ c)$, $B(b,\ c,\ a)$, $C(c,\ a,\ b)$, $O(0,\ 0,\ 0)$ を頂点とする四面体が正四面体となることがあるか。（ただし，$a>0$, $b>0$, $c>0$）

(解) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$

$$=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

で，BC，CA も同じであるから，三角形 ABC は正三角形である。

また，$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

ゆえに四面体 OABC が正四面体ならば

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^2+b^2+c^2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

$$\therefore\quad (a-b)^2-2c(a-b)+c^2-4bc=0$$

$$\therefore\quad (a-b-c)^2-(2\sqrt{bc})^2=0$$

$$\therefore\quad (a-b-c+2\sqrt{bc})(a-b-c-2\sqrt{bc})=0$$

$$\therefore\quad \{\sqrt{a}^2-(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\}\times\{\sqrt{a}^2-(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\}=0$$

$$\therefore\quad (\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=0$$

ゆえに $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ のうち2つの和が残りに等しいとき，正四面体をなす。

練習 5. 1辺の長さ a の正四面体の内接球の半径を求めよ。

(ヒント) 正四面体 ABCD の内接球の中心を I とし，半径を r とします。

正四面体 ABCD の体積

$$=4\cdot(\text{四面体 IBCD})$$

$$=4\cdot\frac{1}{3}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}ra^2$$

ところが1辺の長さ a の正四面体の体積は

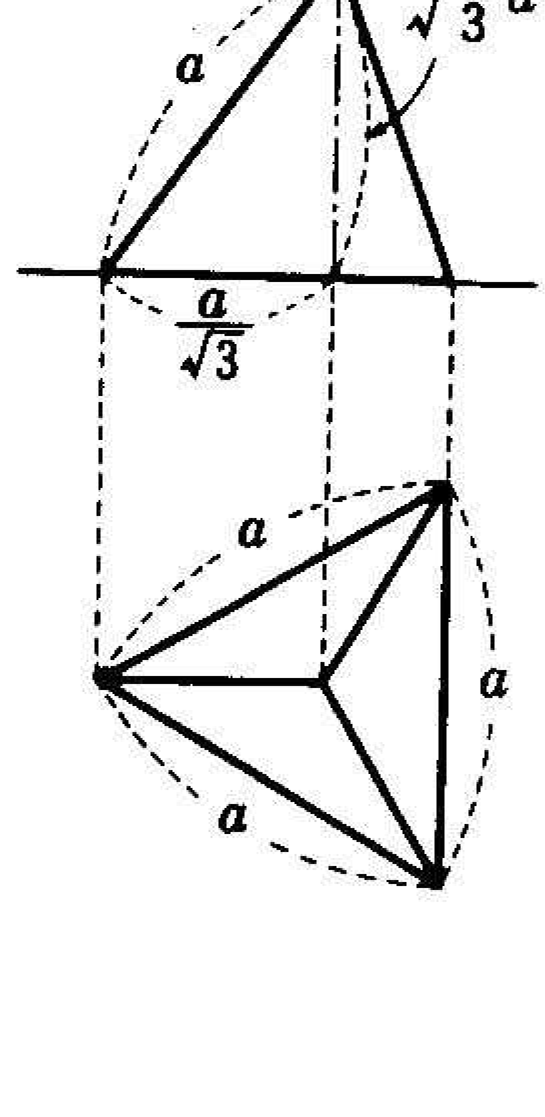
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

ですから

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{1}{\sqrt{3}}ra^2$$

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{6}}{12}a\ \cdots\cdots\ \text{答}$$



(注) 正四面体では，重心，外心，内心が一致することを使うなら，もっと簡単にできます。すなわち高さは $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ で，これを $3:1$ に分けると短いほうが内接円の半径になりますから

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

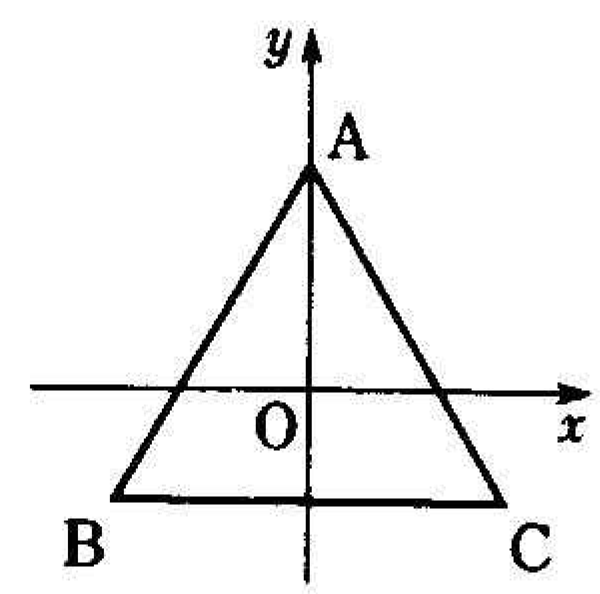
です。また，長いほうは外接球の半径で，

$$\frac{\sqrt{6}}{12}a\times3=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

となります。

練習 6. 座標を使って，正四面体の二面角を求めよ。

(ヒント) 二面角というのは，2つの面のなす角のこと，べつに問題はありませんが，正四面体の2つの面の方程式を求める必要があります。1つの面を x-y 平面に選んだらどうでしょう。すなわち，



$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$

$\mathrm{B}\left(-1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$

$\mathrm{C}\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ に選ぶと原点がちょうど重心になりますから，第4の頂点Dは z 軸上にあるハズ。そこで $\mathrm{D}(0,\ 0,\ a)$ としますと，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{0^2+\frac{4}{3}+a^2}=2\quad\therefore\quad a^2=\frac{8}{3}$$

そこで，$a>0$ とし，$\mathrm{D}\left(0,\ 0,\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ に選ぶことにしますと，平面 BCD の方程式を

$$px+qy+rz+s=0$$

とおいて，B，C，D を通る条件から

$$p=0,\ q=\sqrt{3}s,\ r=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s$$

が求まりますから，平面 BCD は

$$2\sqrt{6}y-\sqrt{3}z+2\sqrt{2}=0$$

これが xy 平面となす角を θ としますとそれはベクトル $(0,\ 2\sqrt{6},\ -\sqrt{3})$ とベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ のなす角に等しく

$$\cos\theta=\frac{0+0+(-\sqrt{3})}{\sqrt{27}\cdot1}=-\frac{1}{3}$$

答 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

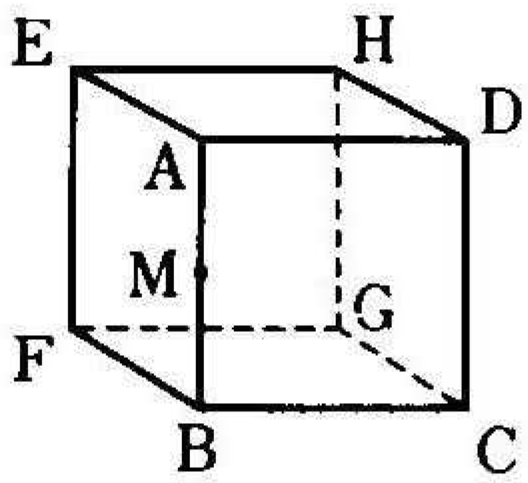
◎ 立方体の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

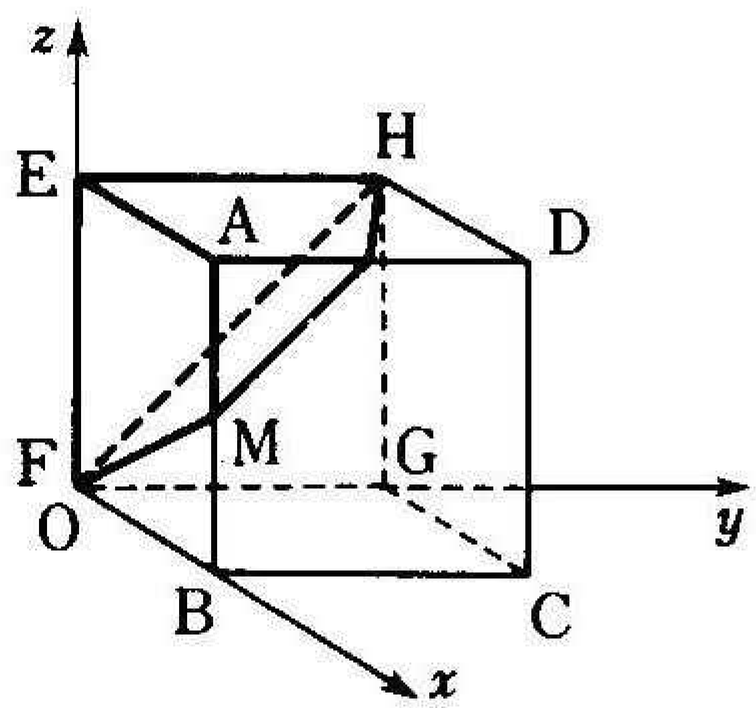
◈立方体は単純です。そのため，かえって難問を生む土台となることが多い。バカにしてはいけません。

◆ では，さっそくながら，具体的な問題に当たってみるとしましょう。

1/4 **■練習 1.** 図のような1辺 a の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AB の中点をMとする。3点M，F，H を通る平面によって分けられる立方体の2つの部分の体積を求めよ。（横浜市大）



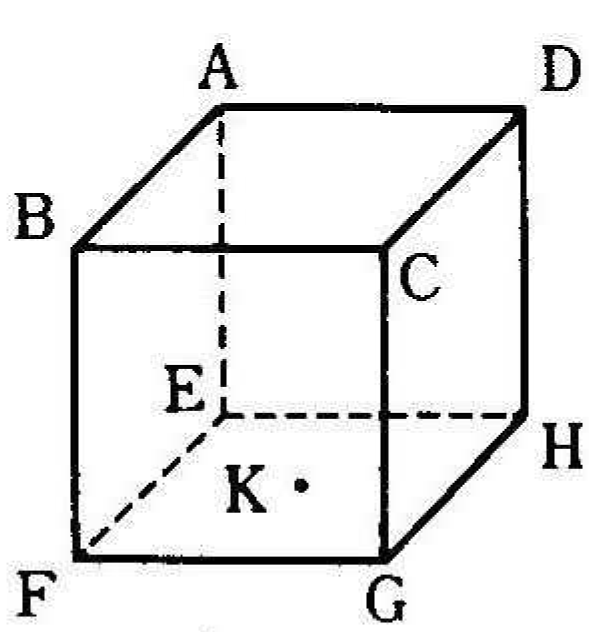
ヒント 右の図のような座標系をとってみますとF，つまり原点 O(0, 0, 0)，$M\left(a,\ 0,\ \dfrac{a}{2}\right)$ $H(0,\ a,\ a)$ の作る平面の方程式は



$$x+2y-2z=0$$

です。これが AD : $x=a$，$z=a$ と交わる点は $\left(a,\ \dfrac{a}{2},\ a\right)$ です。つまり $\overline{\mathrm{AD}}$ の中点で交わるわけ。これがわかればあとはどうにかなるハズ。　　答 $\dfrac{7}{24}a^3$，$\dfrac{17}{24}a^3$

1/4 **■練習 2.** 立方体 ABCD-EFGH の面 EFGH の中心をKとするとき，



(1) 直線 AB と直線 CE のなす角の余弦

(2) 直線 BD と直線 CE のなす角

(3) 直線 CE と平面 BDG のなす角

を求めよ。

(4) 直線 AK と平面の間 BDG にどんな関係があるか。（東北大）

ヒント EF，EH，EA をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸とし，1辺の長さを a としますと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ 0,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=(a,\ a,\ a)$$
$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|}$$
$$=\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+a^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

といったぐあい。

答 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(2) $\dfrac{\pi}{2}$　(3) $\dfrac{\pi}{2}$

(4) AK // 平面 BDG

注 立方体は幾何学的に考えたほうがウマクいくことも多いのですが，必ずできるとはいいがたいのが欠点。その点，ベクトルや空間座標は計算はめんどうになることが多いとはいうものの，必ずできるのがミソ，です。

では，もう1つやってみませんか。

1/6 **■練習 3.** 立方体 ABCD-EFGH において，線分 BC，DH，EF の中点をそれぞれ L，M，N とする。

(1) 直線 AG と直線 CH が垂直であることを証明せよ。

(2) 直線 AG と平面 LMN が垂直であることを証明せよ。（島根大）

ヒント (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおきますと，いうまでもなく

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\vec{c}-\vec{a}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\cdots\cdots=0\qquad\therefore\quad \mathrm{AG}\perp\mathrm{CH}$$

(2)は省略しますが，いろいろの方法が考えられます。ぜひやってくださいよ。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや，総合的なものをやってみませんか。

練習 4. 次の文中の$\boxed{}$にあてはまる答えを書け。

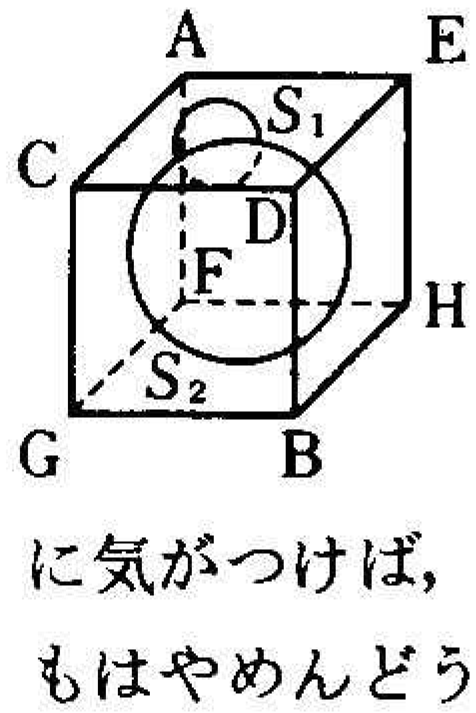
空間に 1 つの立方体がある。その 8 頂点のうち相異なる 4 頂点 A，B，C，D は次のような位置にある。AとBは同一面上になく，線分 CD は 1 つの辺になる。このとき，辺 CD 上の 1 点Pと 2 頂点 A，B を含む平面による立方体の切り口は，一般に$\boxed{}$である。特に，点Pが$\boxed{}$にあれば，切り口は長方形になり，また$\boxed{}$にあれば，ひし形になる。（阪大）

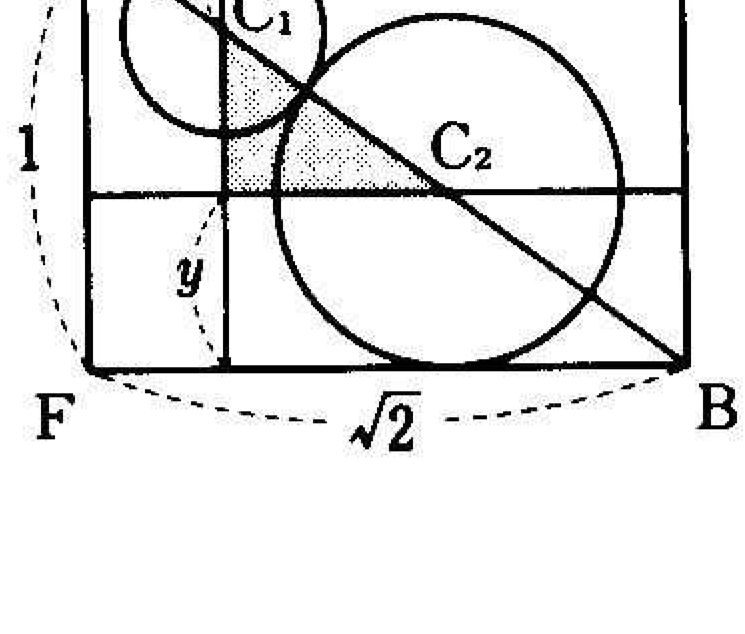
解　（順に）平行四辺形，CまたはD，辺 CD の中点

練習 5. 1 辺の長さ 1 の立方体において，1 つの頂点を A，A から最も遠い位置にある頂点をBとする。この立方体の中に 2 つの球 S_1，S_2 を，S_1 は頂点Aを通る立方体の 3 つの面に接し，S_2 は頂点 B を通る立方体の 3 つの面に接し，かつ，S_1 と S_2 は互いに接するように入れる。

S_1 と S_2 の体積の和が最小になるのは S_1，S_2 の半径がいくらのときか。（阪大）

ヒント　右の図に示すように，球 S_1，S_2 がおかれているとしましょう。これを平面 AFBD で切ってみますと下のようになるハズ。これに気がつけば，もはやめんどうはありません。





では，やってみましょう。

解　球 S_1，S_2 の半径をそれぞれ x，y とすると，題意から

$$\{1-(x+y)\}^2+\{\sqrt{2}-(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)\}^2=(x+y)^2$$

$$\therefore\quad x+y=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

ただし，

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2},\quad \frac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}$$

でなければならない。

また，S_1，S_2 の体積の和 V は

$$V=\frac{4}{3}\pi(x^3+y^3)$$
$$=\frac{4}{3}\pi(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}$$

で，$x+y=$一定 であるから，xy が最小値をとるとき V は最大値をとる。

ところが，相加・相乗平均の関係から

$$\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}$$

であるから，xy は $x=y$ のとき，最大値 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ をとる。したがって，V の最小値は $x=y=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ のときで，その値は

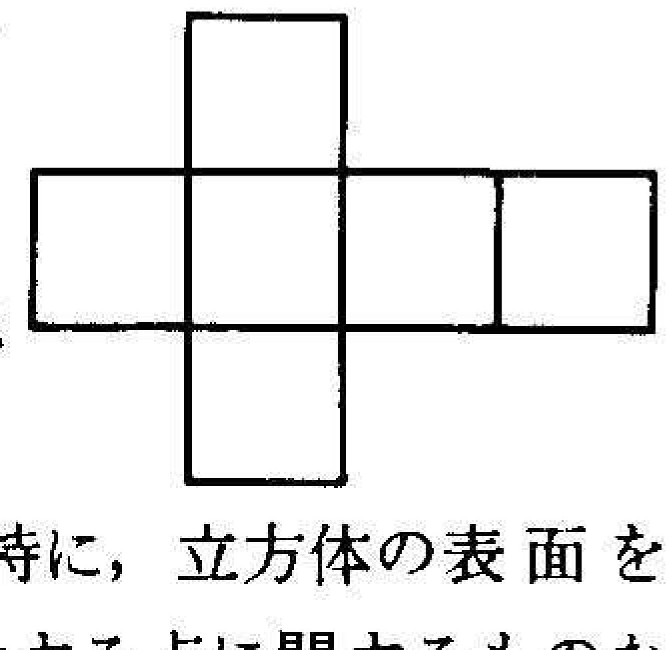
$$\frac{9-5\sqrt{3}}{4}\pi$$

となる。

答　いずれも $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

＊　＊　＊

◆ 立方体は簡単であるから，かえってめんどうなものにかかわることが多いものです。もちろん，それは立方体のもつめんどうさではありません。そのようなものについては，**ある面に沿う断面図**はスゴク有用なことが多いものです。また，



展開図 も有用です。特に，立方体の表面をある条件のもとに運動する点に関するものなどでは，そうです。

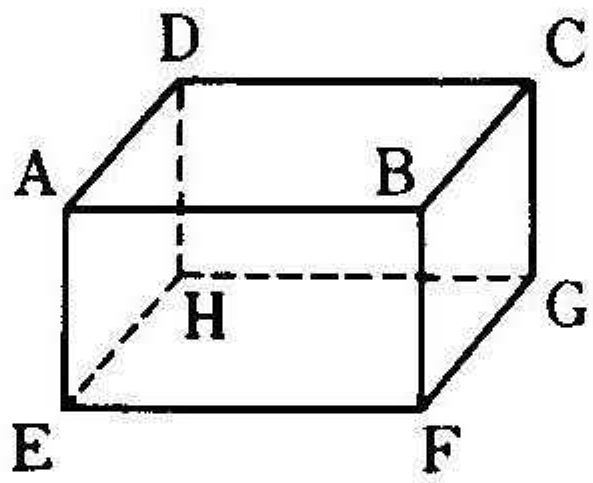
直方体の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆空間図形になれるためには，まず立方体を，さて，その次は直方体の扱い方，というのが順序，というものだ。

◆ このセクションでは直方体についてのいろいろな練習をやってみませんか。

練習 1. 図のような直方体について，ベクトルの内積に関する次の等式を証明せよ。



$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}$$
（広島大）

ヒント　位置ベクトルを使うのがいいでしょう。その起点としてはAをとることにしようか。そして

$$\overrightarrow{AE}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$$

としようか。そうすると，各点の位置ベクトルは次の通りです。

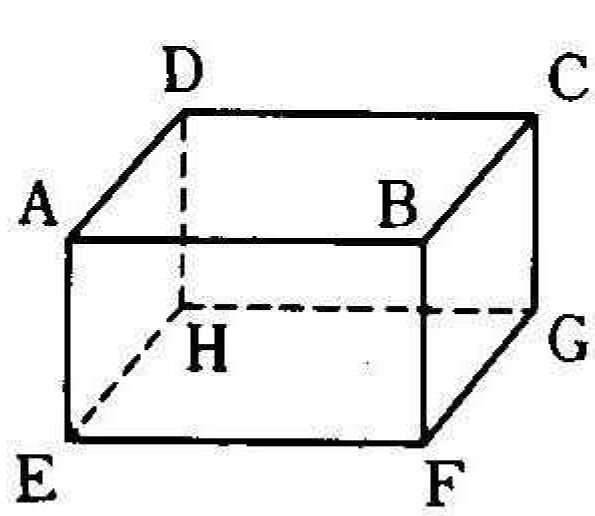
$$\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=\vec{c}-\vec{a}\ \text{など}$$

そこで

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})+(-\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$
$$+(\vec{a}-\vec{c})\cdot(-\vec{b}-\vec{c})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$$
$$(\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0)$$
$$=\overline{AE}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{AF}^2+\overline{FG}^2$$
$$=\overline{AG}^2=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}$$

Q. E. D.

練習 2. 図のような直方体ABCDEFGHにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とし，線分 AG と平面 CFH との交点をPとするとき，次の問に答えよ。



(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。

(2) AB＝2，AD＝AE＝1のとき，内積 $(\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{BP})$ を求めよ。　（信州大）

ヒント　(1)の $\overrightarrow{AP}$ さえ求まれば，あとは坦々たるもの。さて，1つの方法は座標を使うものでしょう。Aを原点にとり $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ をそれぞれ x 軸，y 軸にとって，

A(0, 0, 0)，B(b, 0, 0)，D(0, d, 0)，E(0, 0, $-e$) とすると　C(b, d, 0)，F(b, 0, $-e$)，H(0, d, $-e$) ですから，

$$\text{平面 CFH}:\frac{x}{b}+\frac{y}{d}-\frac{z}{e}-2=0 \quad \cdots\cdots①$$

となります。次に AG の方程式は

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{d}=\frac{z}{-e} \quad \cdots\cdots②$$

ですから，①，②を解いてPの座標は

$$\left(\frac{2}{3}b,\ \frac{2}{3}d,\ -\frac{2}{3}e\right)$$

となります。してみると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}(b,\ d,\ -e)$$
$$=\frac{2}{3}\{(b, 0, 0)+(0, d, 0)+(0, 0, -e)\}$$
$$=\frac{2}{3}(\vec{b},\ \vec{d},\ \vec{e})$$

となります。したがって

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

注　$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ であること，△CFH の重心が $\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であることに気がつけばぐっと楽にできるのですが，……

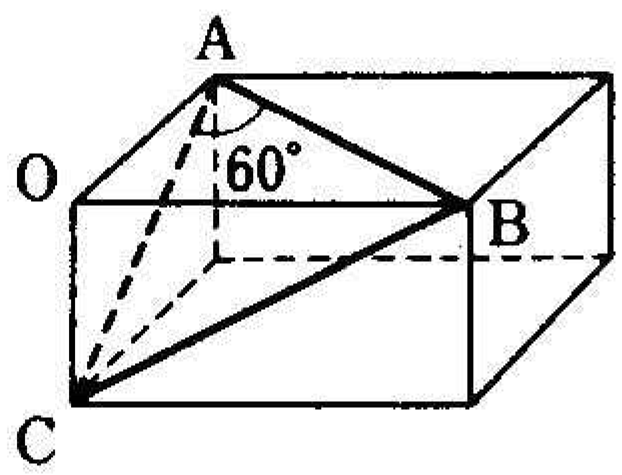
*　*　*

◆ では，やや総合的な練習をしてみませんか。

練習 3. 直方体の1つの頂点Oに集まる辺を OA, OB, OC とする。AB=3, AC=2, ∠BAC=60° であるとき，OA^2, OB^2, OC^2 を求めよ。また，点Oから三角形 ABC の平面までの距離を求めよ。

（東大）

ヒント　$OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ とおきますと



$a^2+b^2=9$ ……①

$a^2+c^2=4$ ……②

です。また，∠BAC=60° ですから余弦定理によって

$$BC^2=3^2+2^2-2\times3\times2\cos60°=7$$

$$\therefore\ b^2+c^2=7 \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③より

$$a^2=3,\ b^2=6,\ c^2=1$$

$$\therefore\ 四面体OABC=\frac{1}{3}\cdot\frac{OA\cdot OB}{2}\cdot OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

点Oから △ABC の平面までの距離を h としますと，

$$四面体\ OABC=\frac{h}{3}\times\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}h$$

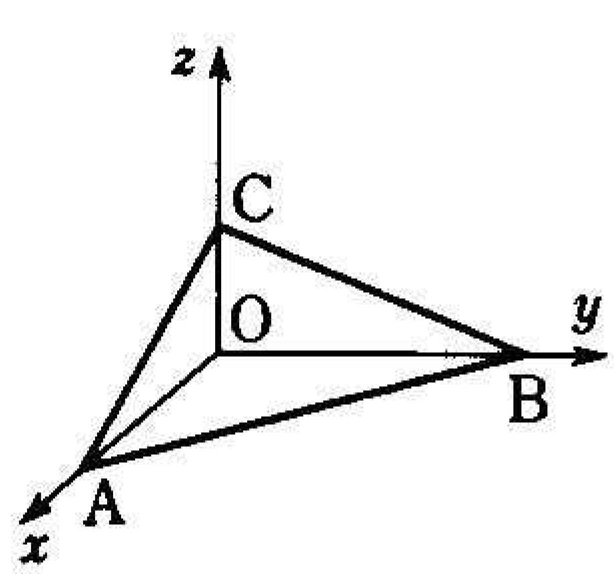
ですから

$$\frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ h=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

答　3, 6, 1 ; $\frac{\sqrt{6}}{3}$

別解として：——

空間座標で右のような座標面をとりますと



$A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$,

$B(0,\ \sqrt{6},\ 0)$,

$C(0,\ 0,\ 1)$

ですから，平面 ABC の方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{6}}+z=1$$

$$\sqrt{2}x+y+\sqrt{6}z-\sqrt{6}=0$$

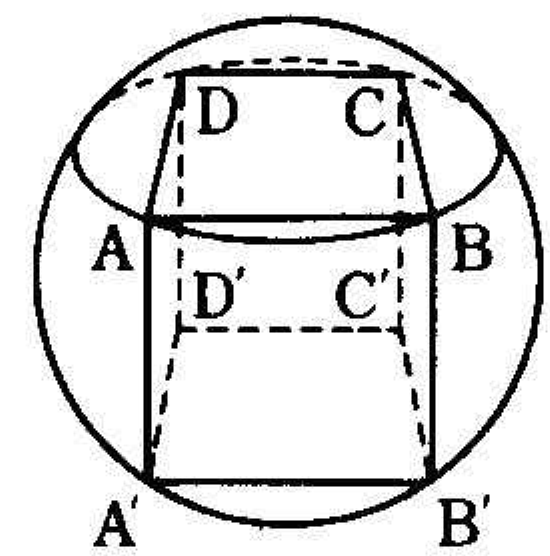
ですから，Oから下した垂線の長さは公式（☞ p.246）によって

$$\frac{|-\sqrt{6}|}{\sqrt{2+1+6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

練習 4. 円に内接する平行四辺形は長方形である。球に内接する平行六面体は直方体であるか。

（阪大）

ヒント　球に内接する平行六面体 ABCD-A′B′C′D′ において，平面 ABCD と球面との交わりは円ですから，平行四辺形 ABCD はこの円に内接します。



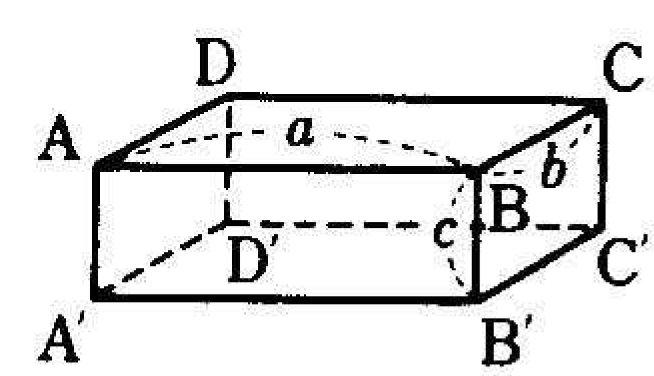
したがって，四辺形 ABCDは長方形です。他の面についても同じですから，この平行六面体は直方体になるでしょう。

注　このような問題では直方体の定義をハッキリさせて，その上で，その条件を満足することをいわなければなりません。キチンと答案を書いてみてください。

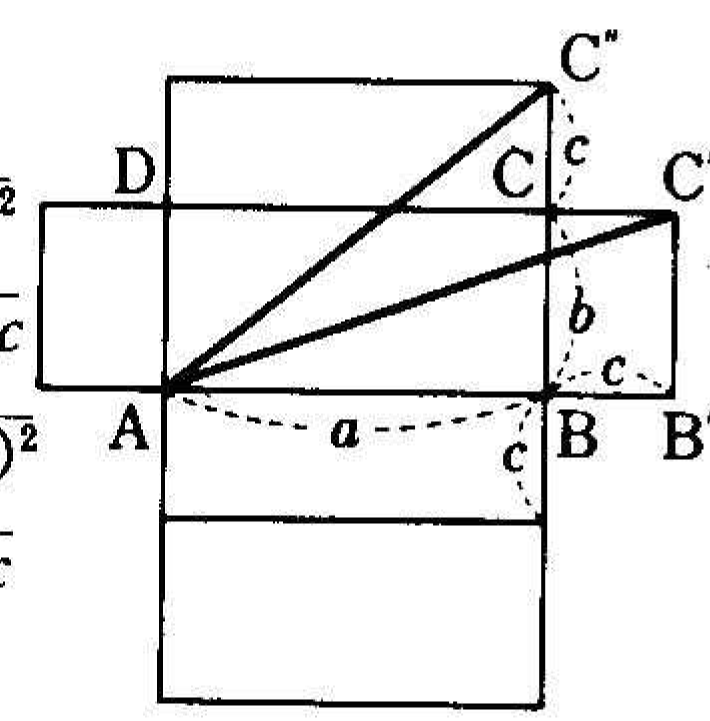
練習 5. 3辺の長さが a, b, c である直方体の対角線の一端から面上を通って他端へ行く最短路の長さを求めよ。ただし，$a>b>c$ とする。

（一橋大）

ヒント　ABCD の面を中心として展開図を作ってみるとわかりいいでしょう。



結局求める通路は



$AC'=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$

$AC''=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$

次に ABB′A′ 面を中心として展開図をかいて考えて AC‴ を求めて，3つのうち最短のものが答です。

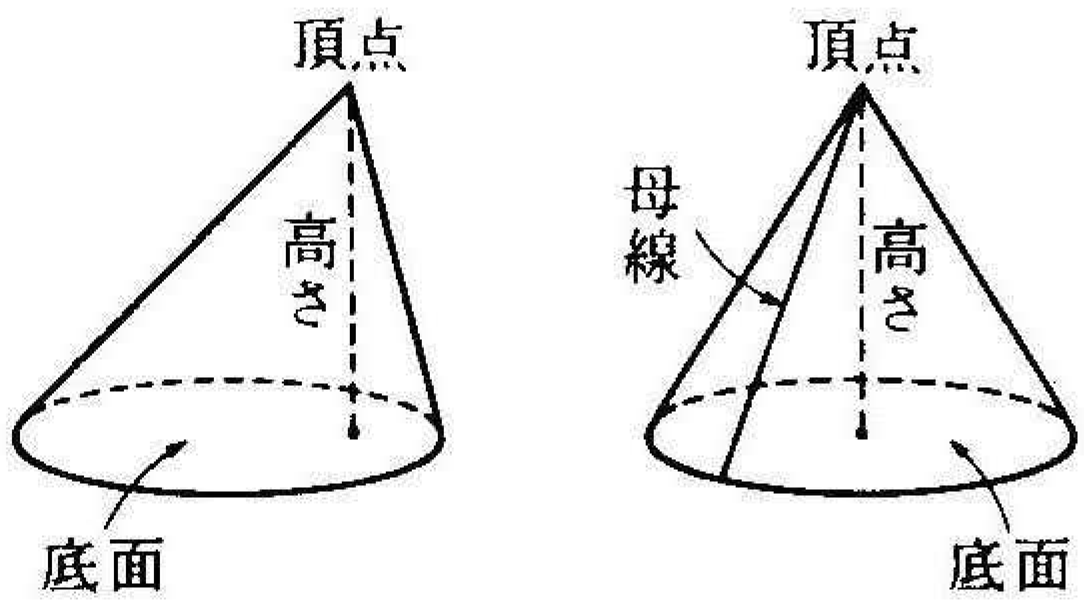
答　$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$

◑円すいの扱い方

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◈円すいを平面で截った切り口は２次曲線になります。このことはギリシア時代から知られていたのです。人類文化のおそろしさ!!

◆ 平面上にある円周上のすべての点と，この平面上にない１点とを結ぶ直線からなる面を **円すい** といいます。そして，その点から，その平面に下した垂線の足が円の中心であるとき，**直円すい** といい，そうでないとき **斜円すい** というのです。



ところで，斜円すいでも直円すいでも，

円すいの体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

で与えられます。ここに S は底面の面積，h はその高さです。

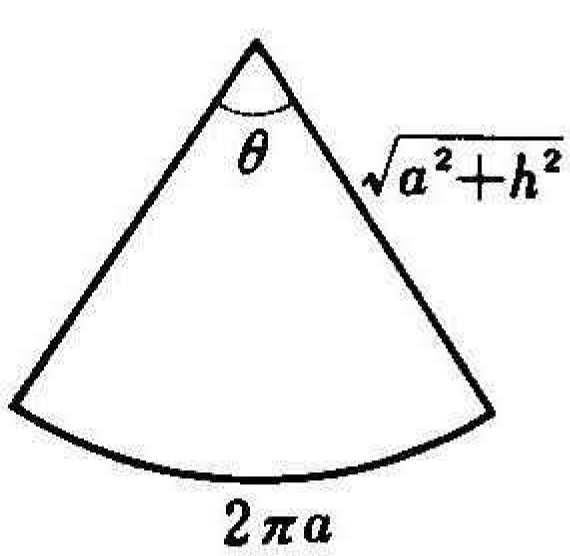
では，具体的な問題にいきましょう。

1/18
■練習 1. 底面の半径 a，高さ h の円すいの体積 V を求めよ。

(解) $V=\frac{1}{3}(\pi a^2)h=\frac{\pi}{3}a^2h$ ……[答]

1/18
■練習 2. 底面の半径 a，高さ h の直円すいの側面積 S を求めよ。

(解) 底面の周は $2\pi a$ で，母線の長さは $\sqrt{a^2+h^2}$ であるから，側面を展開して得られる扇形の中心角を θ とすると，求める面積 S は



$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+h^2})^2\theta=\frac{1}{2}(a^2+h^2)\theta$$

ところが

$$\sqrt{a^2+h^2}\theta=2\pi a$$

であるから

$$\theta=\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}(a^2+h^2)\cdot\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+h^2}}$$
$$=\pi a\sqrt{a^2+h^2}$$

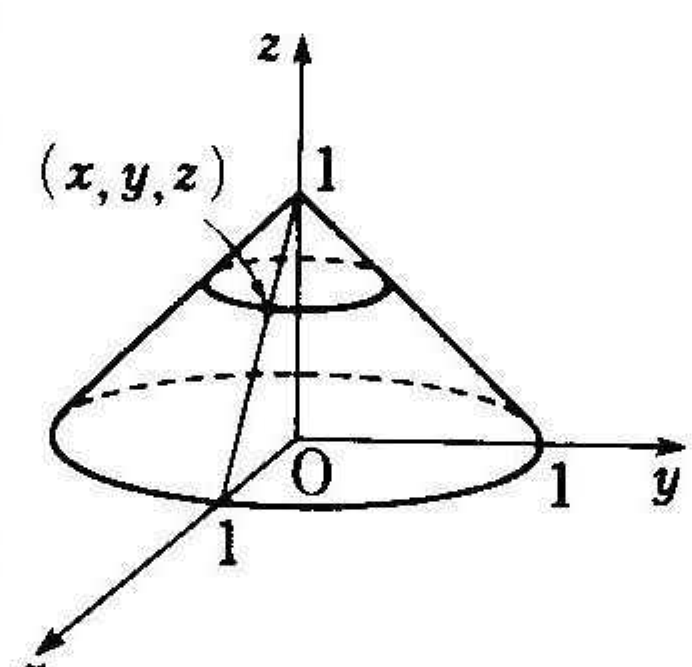
(注) $h=0$ としてみると $S=\pi a^2$，考えてみると，$h=0$ というのは半径 a の円にほかならないから，このことは，上の結果が正しいことを間接的に示しているといえます。

＊　＊　＊

◆ では，やや，総合的な問題をやってみましょう。

1/18
■練習 3. 空間で，頂点が A(0, 0, 1) で，底面が $x^2+y^2=1$，$z=0$ であるような直円すいの方程式を求めよ。

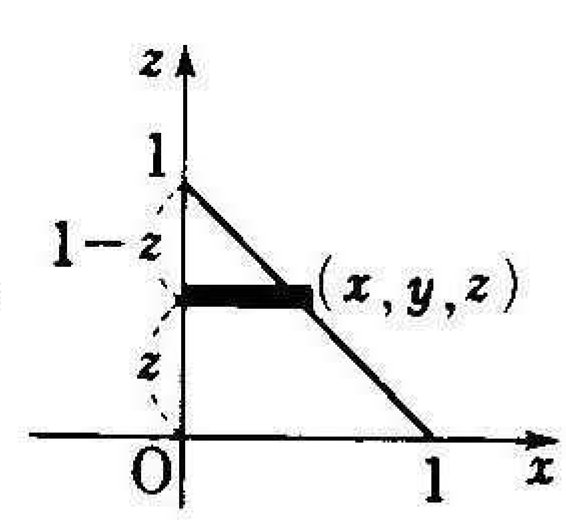
(ヒント) この直円すいの１点を $P(x, y, z)$ とすると，P を通り z 軸に垂直な平面との交わりは円で，その半径は $1-z$ に等しいわけですから



$$x^2+y^2=(1-z)^2$$

なる関係があります。

これが求める直円すいの方程式です。



[答] $x^2+y^2=(1-z)^2$

＊　＊　＊

◆ では，次にはややめんどうな問題に手をつけてみませんか。

練習 4. Oを原点とする座標平面上に2点 A(0, a), B(b, 0) がある。ただし，$a>0$, $b>0$ とする。線分 OB 上の点Pから線分 AB に下した垂線の足をQとする。三角形 APQ を線分 AB のまわりに回転してできる直円すいの体積をVとする。点Pが線分 OB 上を動くとき，Vの最大値を求めよ。（名古屋工大）

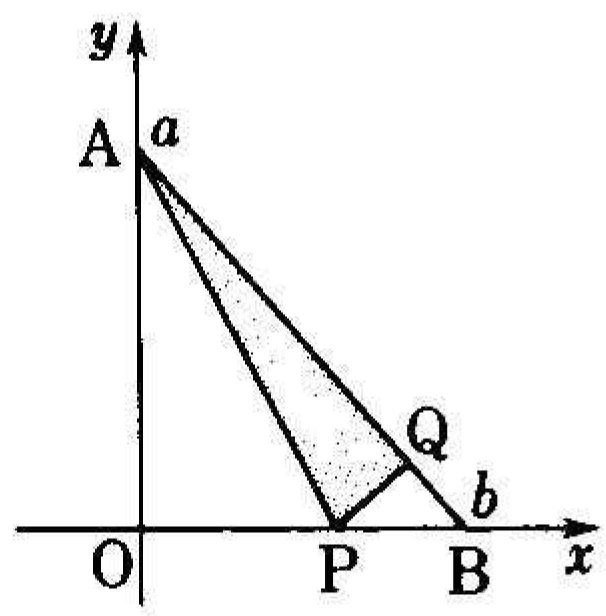
ヒント まず直線 AB の方程式は

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$$

あるいは

$$ax+by-ab=0$$

で与えられます。点Pはx軸上にありますから，その座標を$(X,\ 0)$としますと $0\leqq X\leqq b$ です。垂線の長さの公式により



$$\therefore\quad \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{|a\cdot X+b\cdot 0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a(b-X)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となります。（$\because\ 0\leqq X\leqq b$）

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2$$

$$=(a^2+X^2)-\frac{a^2(b-X)^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(bX+a^2)^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AQ}}=\frac{bX+a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ゆえに

$$V=\frac{1}{3}\pi\left\{\frac{a(b-X)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}^2\cdot\frac{bX+a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{\pi}{3}\frac{a^2(b-X)^2(bX+a^2)}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}$$

ゆえにVの最大値をとるのは

$$f(X)=(b-X)^2(bX+a^2)\quad(0\leqq X<b)$$

が最大値をとるときであることがわかります。ところが微分の公式により

$$f'(X)$$

$$=(b-X)^2\cdot b+2(b-X)(-1)(bX+a^2)$$

$$=-3b(b-X)\left(X-\frac{b^2-2a^2}{3b}\right)$$

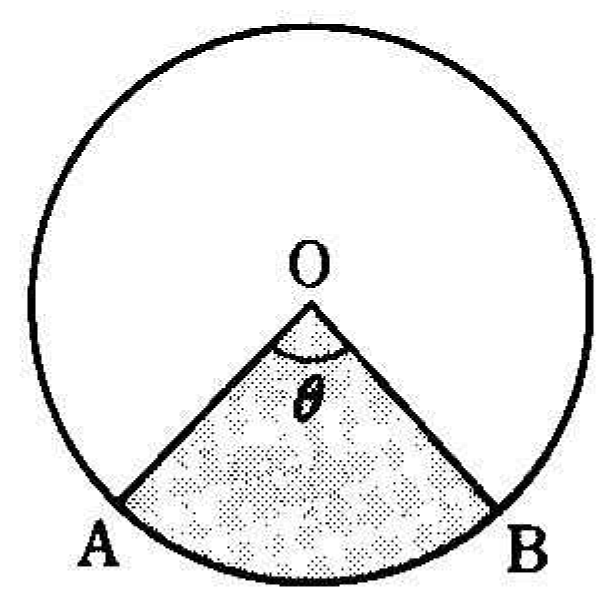
したがって　$b\leqq\sqrt{2}\,a$ ならば　$f'(X)\leqq 0$ つまり $f(X)$ は単調減少するのですから $X=0$ で最大値をとるハズ。そして，それは

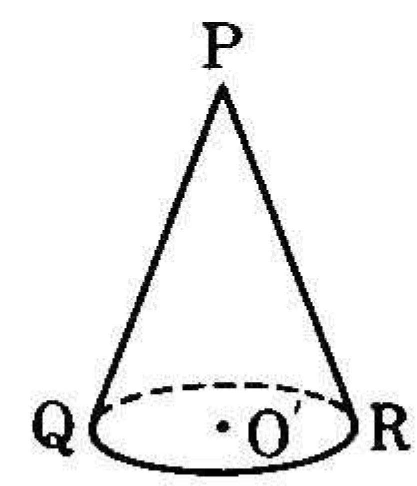
$$\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^4b^2}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}$$

です。

また $b>\sqrt{2}\,a$ ならば $X=\dfrac{b^2-2a^2}{3b}$ で最大値をとり，その値は $\dfrac{4\pi a^2(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{81b^2}$ となります。

練習 5. 右上図において，半径Rの円Oより，中心角θ ($0<\theta<2\pi$) の扇形 OAB を切りとり，OA と OB をすきまなくはり合わせて右下図のような直円すい(頂点P，底円O′)を作る。次に，底円の中心線の1つ QO′R と PQ, PR で作る△PQR を，QR を軸として1回転させて回転体を作る。





(1) 円すいの側面積が底円の面積の2倍となるとき，θの値を求めよ。

(2) 回転体の体積をθの関数で表し，かつ，体積が最大値をとるときのθの値を求めよ。（共立薬大）

ヒント (1) 円すいの側面積は扇形 OAB の面積に等しいのですから $\dfrac{1}{2}\theta R^2$，これは底面積 $\pi\left(\dfrac{\theta R}{2\pi}\right)^2$ の2倍に等しい，というのですから

$$\frac{1}{2}\theta R^2=2\pi\left(\frac{\theta R}{2\pi}\right)^2\qquad\therefore\quad\theta=\pi$$

(2)は答だけにしておこう。それは

$$V=\frac{R^3\theta}{12\pi^2}(4\pi^2-\theta^2)$$

$$\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

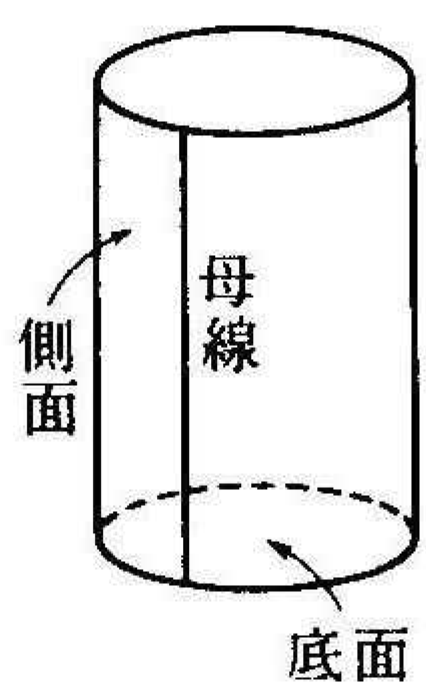
なんです。

円柱の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈われわれの周囲には円柱が多い。ギリシアの建物はもちろん法隆寺もだ。これはどういうわけなのか!!　ここでアレキサンダーは笑う。

◆ **円柱** とは何か，と聞かれて答えられる人は少ないでしょう。しかし，円柱のなんたるかも知らない人は絶無に近いのです。それは，ちょうど，人間とは何か，と聞かれて，答えられないのに似ています。さて，



円柱の底面の半径をR，高さをhとすると，体積Vおよび側面積Sは

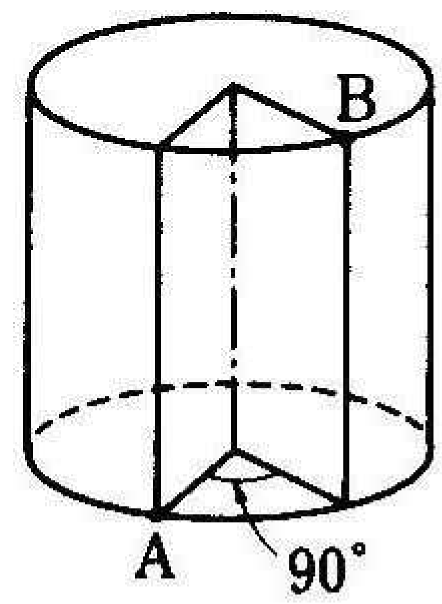
$$V=\pi R^2h$$
$$S=2\pi Rh$$

となります。

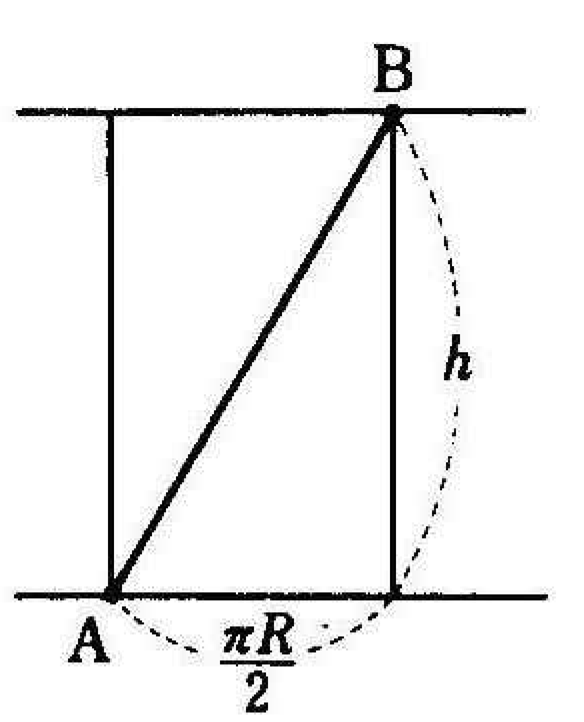
*　*　*

◆ では具体的な問題をやってみませんか。

練習 1. 右のような，高さh，底面の半径Rの円柱がある。円柱の表面を通って，点Aから点Bに至る最短距離を求めよ。



ヒント　側面を切り開いて展開すると右のようになります。したがって，求める最短距離は

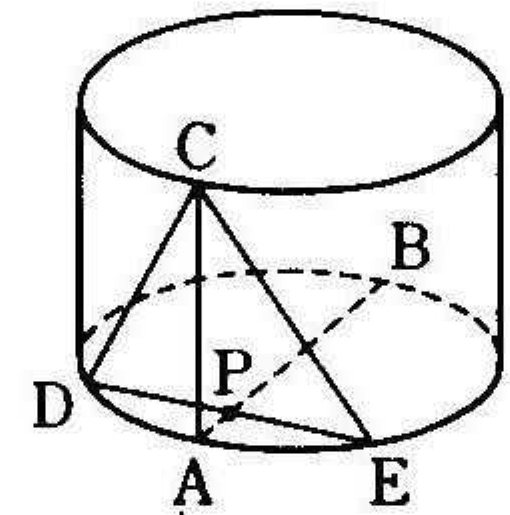


$$\sqrt{\left(\frac{\pi R}{2}\right)^2+h^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2R^2+4h^2}$$

です。

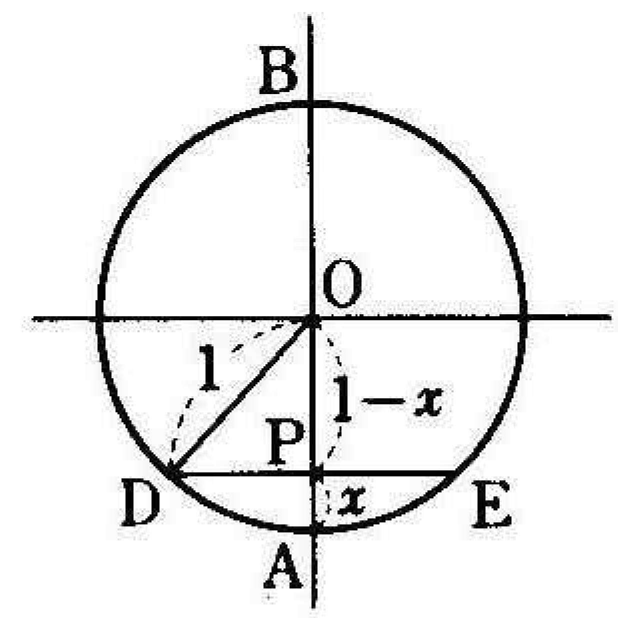
練習 2. 底面が半径1の円で高さが1の直円柱がある。底面の1つの直径をABとし，Aを通る母線（その長さが側面上にある高さに等しい線分）の他の端をCとする。いまAB上に点Pをとり，Pを通ってABに直交する底円の弦をDEとするとき，△CDEの面積をAPの長さxで表せ。　（岐阜大）

解　$\overline{DE}=2\overline{PD}$
$=2\sqrt{1^2-(1-x)^2}$
$=2\sqrt{2x-x^2}$



次に，

$\overline{CP}=\sqrt{1^2+x^2}$
$=\sqrt{1+x^2}$



∴　△CDE

$=\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{CP}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2x-x^2}$
$\quad\times\sqrt{1+x^2}$

$=\sqrt{-x^4+2x^3-x^2+2x}$

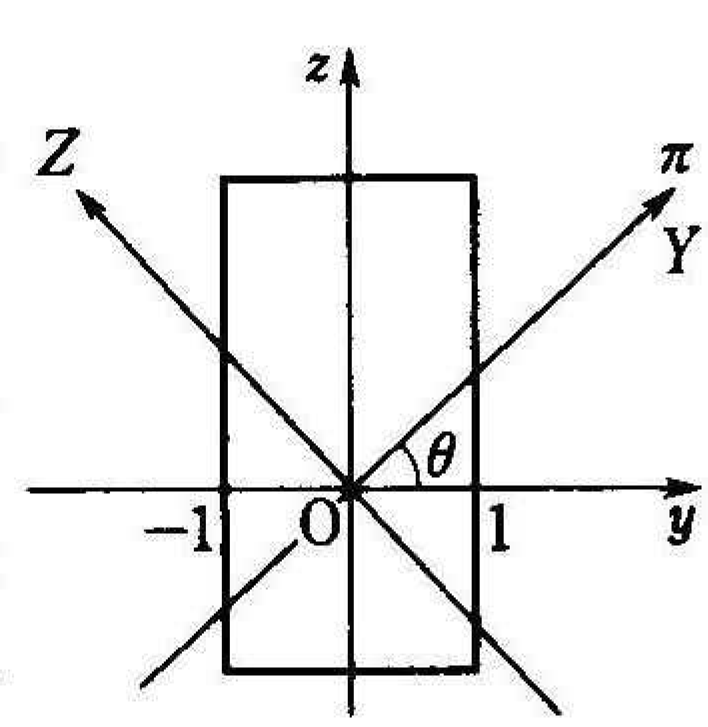
……答

*　*　*

◆ 円柱の大切な性質の1つは平面で切った切り口は一般にだ円になるということです。

練習 3. 直円柱を，軸と鋭角をなす平面で切った切り口の曲線はだ円であることを示せ。

ヒント　底面の半径1の直円柱を，x軸を含み，xy平面とθ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$の角をなす平面$\pi$で切った場合を考えてみましょう。円柱の方程式は



$$x^2+y^2=1 \quad (-\infty<z<\infty) \quad \cdots\cdots①$$

です。πを新しいXY平面とするように座標系をx軸のまわりに回転しますと変換公式は

$$\left.\begin{array}{l} x=X,\ \ y=Y\cos\theta-Z\sin\theta \\ z=Y\sin\theta+Z\cos\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots②$$

ですから，①，②から x，y を消去して

$$X^2+(Y\cos\theta-Z\sin\theta)^2=1$$

これが新しい座標面に関する方程式です。したがって平面による切り口は $Z=0$ とおいて得られ，それは

$$X^2+(\cos\theta)^2Y^2=1$$

となり，確かにだ円であることがわかります。

（注） 特に $\theta=0°$ とおいてみますと

$$X^2+Y^2=1$$

これはいうまでもなく，直円柱の軸に垂直な平面による切り口です。また $\theta=90°$ とおいてみますと

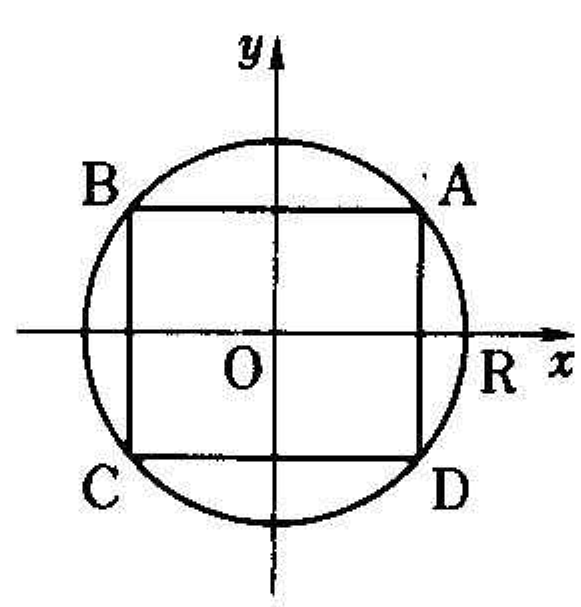
$$X^2=1 \qquad \therefore\ X=\pm1$$

つまり，軸を含む平面で切ると，切り口は平行な2直線になることがわかります。アタリマエ!!

*　　*　　*

◆ では，次に円柱と他の立体の関係する問題を2，3やってみましょう。

練習 4. 半径Rの球に内接する直円柱の体積の最大値を求めよ。



（ヒント） 原点を中心とし，半径Rの球に内接する円柱の軸がy軸と一致するように，xy 平面による切口を示したのが右の図です。A$(x,\ y)$ としますと，円柱の体積Vは

$$V=\pi x^2\cdot(2y)=2\pi x^2y \quad \cdots\cdots①$$

で与えられます，ところが

$$x^2+y^2=R^2 \qquad \cdots\cdots②$$

結局条件②の下で①の最大値を求めればいいことになりました。基礎解析を使えば微分法を使ってやることもできますが，ここでは数Iでやってみましょうか。相加・相乗平均の定理により

$$\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+y^2}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2}y^2} \quad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\ \frac{x^2+y^2}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{x^4y^2}{4}}$$

$$\therefore\ \frac{R^2}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{x^4y^2}{4}}$$

両辺を3乗して

$$\frac{R^6}{27} \geqq \frac{x^4y^2}{4}$$

$$\therefore\ x^4y^2 \leqq \frac{4}{27}R^6$$

$$\therefore\ x^2y \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}}R^3$$

$$\therefore\ V \leqq \frac{2\sqrt{3}}{9}R^3(2\pi)$$

$$\therefore\ V \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$$

ゆえに求める最大値は $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$ です。そして，それは$(*)$で

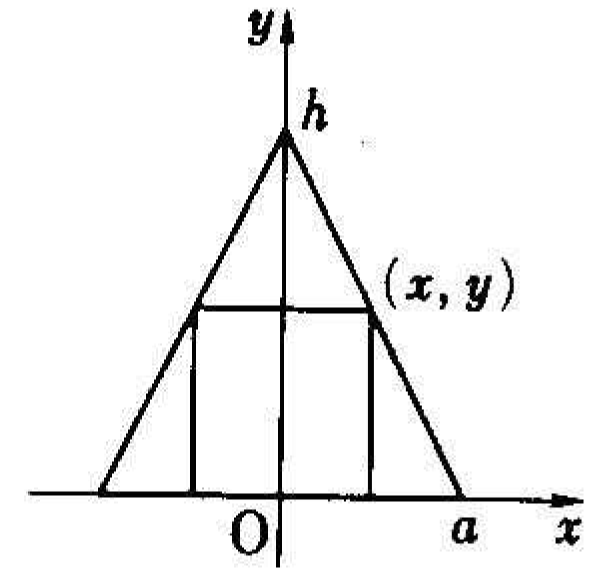
$$\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}=y^2=\frac{R^2}{3}$$

のとき，つまり

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}R,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{3}}R$$

のときであることがわかります。

練習 5. 底の半径a，高さhの直円すいに内接する円柱の体積の最大値を求めよ。



（ヒント） $\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$

という条件の下で

$$V=\pi x^2y$$

の最大値を求めればよい。だからひとつの方法は相加平均と相乗平均の関係を使うことです。つまり

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2a}+\frac{x}{2a}+\frac{y}{h}\right) \geqq \sqrt[3]{\left(\frac{x}{2a}\right)^2\frac{y}{h}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{h}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{x^2y}{4a^2h}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot1 \geqq \sqrt[3]{\frac{V}{4a^2h\pi}},\ \cdots\cdots\cdots$$

○ (空間の)直線の方程式の求め方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆空間の直線を，いろいろな条件を満足するようにきめることがここの課題です。ところでいろいろな条件とはそもそも何か。

◆ 空間にある直線と平面上にある直線とでは大きなちがいがあります。例えば，平面上で $ax+by+c=0$ は直線を表したのに，空間では $ax+by+cz+d=0$ は平面を表します。平面上で1点 $P(\alpha,\ \beta)$ から $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられたのに，空間では，

1点 $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ から，平面

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$$

へ下した垂線の長さは

$$\frac{|\boldsymbol{a\alpha+b\beta+c\gamma+d}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2+c^2}}}$$

である，といったぐあい。それなのに，

空間の直線の方程式を

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$$

とおいてしまう人のいかに多いことか!!

このことをよくつかんでおいてください。

* * *

◆ さて，ここでは，いろいろな条件を満足する直線の方程式の求めるのが目的です。

12/11

練習1. 2点 $A(1,\ 2,\ 3)$，$B(-2,\ 0,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(ヒント) 直線上の点 $P(x,\ y,\ z)$ をとると，

$$\overrightarrow{AP} /\!/ \overrightarrow{AB}$$

であることから

$$(x-1,\ y-2,\ z-3)=k(-3,\ -2,\ 1)$$

$$\therefore\quad x-1=-3k,\ y-2=-2k,\ z-3=k$$

$$\therefore\quad \frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

* * *

◆ 一般に

2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$

を通る直線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x-b_1}{a_1-b_1}=\frac{y-b_2}{a_2-b_2}=\frac{z-b_3}{a_3-b_3}}$$

です。この公式を使って直接求めてももちろんかまわない。練習2. を公式を使ってやってみませんか。

12/11

練習2. 2点 $(4,\ 1,\ 9)$，$(3,\ 2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(解) 空間の2点を通る直線の公式から

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-1}{9-1}$$

$$\therefore\quad x-3=-(y-2)=\frac{z-1}{8}\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

(注) 2点 $A(1,\ 4,\ 3)$，$B(2,\ 5,\ 3)$ を通る直線なら

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-5}{4-5}=\frac{z-3}{3-3}$$

つまり

$$-(x-2)=-(y-5)=\frac{z-3}{0}$$

が得られます。しかし，分母が0では困る!!

実は分母に0が出てきたら，これは分子も0，つまり $z-3=0$ と《約束》されているのです。したがって，上の方程式は

$$x-2=y-5\quad と\quad z-3=0$$

を，したがって，直線

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ z=3 \end{cases}$$

を（つまり，上の2平面の交線）を表しているのです。

12/11

練習3. 点 $A(4,\ 2,\ 1)$ を通りベクトル $(-2,\ 3,\ 4)$ に平行な直線を求めよ。

(解)
$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$$

3/い

練習 4. 点 (0, 0, 2) を通り，方向比 3 : 1 : −4 の直線を求めよ。

ヒント　方向比が 3 : 1 : −4 というのはベクトル (3 : 1 : −4) に平行というのと同じことですから

$$\frac{x-0}{3}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{-4}$$

つまり

$$\frac{x}{3}=y=\frac{z-2}{-4} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

11/い

練習 5. 原点を通り方向余弦 l, m, n の直線を求めよ。

$$\text{答}\quad \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

*　　*　　*

◆　2つの **平面の交わりは直線** です。そこで，こんな問題が出てきます。

11/い

練習 6. 2つの平面

$$2x+y-z=1,\quad x+2y-z=2$$

の交線を求めよ。

ヒント　要するに，この連立方程式を

$$\frac{x-\alpha}{\square}=\frac{y-\beta}{\square}=\frac{z-\gamma}{\square}$$

といった形に変形すればいいわけ。さて，それにはどうするか。これには次のようにいろいろなやり方があります。

解 1. $z=0$ とすると

$$2x+y=1,\quad x+2y=2$$

これを解いて

$$x=0,\quad y=1$$

ゆえに交線は点 (0, 1, 0) を通ることがわかります。あとは方向比を求めればいいでしょう。

原点 (0, 0, 0) を通って2つの平面に平行な平面は

$$2x+y-z=0 \quad と \quad x+2y-z=0$$

で，これから

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{3}$$

ゆえに，求める方程式は

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-0}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$$

となります。

解 2. $2x+y-z=1$, $x+2y-z=2$

$$\therefore\quad 2x+y=z+1,\quad x+2y=z+2$$

これを x, y について解くと

$$x=\frac{z}{3},\quad y=\frac{z+3}{3}$$

となります。これをさらに z について解いて

$$z=3x,\quad z=3y-3$$

$$\therefore\quad 3x=3y-3=z$$

$$\therefore\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$$

解 3. $2x+y-z=1$, $x+2y-z=2$

$z=0$ とおいて解くと

$$x=0,\quad y=1$$

$z=1$ とおいて解くと

$$x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{4}{3}$$

ゆえに，交線は2点

$$(0,\ 1,\ 0),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ 1\right)$$

を通る。ゆえに，その方程式は

$$\frac{x-0}{\frac{1}{3}-0}=\frac{y-1}{\frac{4}{3}-1}=\frac{z-0}{1-0}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$$

となります。

*　　*　　*

◆　これで直線を求める基本は終わりです。あとは，1点を通り与えられた平面に垂直なものを求めるとか，与えられた2直線に直交する直線を求めるとか，いろいろと応用的なものはありますが，それはそれぞれの項目でやることにしましょう。

ⓓ 直線と点の関係

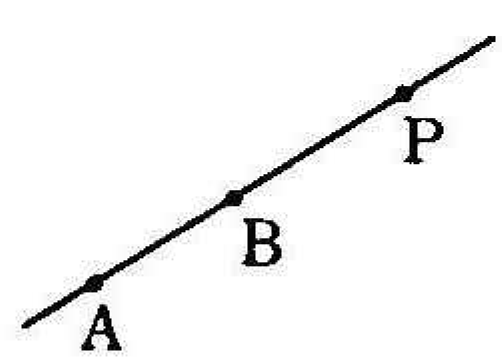
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆空間の2点は1つの直線を決定する。しかし，空間の2つの直線は1点を決定するとはいえない。これは，不公平ではあるまいか。

◆ 直線と点の関係といえば大きく分けて2つになります。1つは，2点が1直線をきめるとか，3点が1直線上にあるとか，いわば点が先に与えられているものです。そして第2は，2直線の交点を求めよとか，2直線がねじれの位置にあることを証明せよ，とかいったぐあい。何はともあれ，具体的な問題にいきましょう。

■練習1. 2点 A(1, 2, 3), B(4, 0, 1) を通る直線の方程式を求めよ。

(ヒント) 2点A，Bを通る直線上の任意の点を $P(x,\ y,\ z)$ としますと，3点A，B，Pが同一直線上にあるわけ。したがって，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AP}$ が平行なわけ。ところが，一般に



ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行であるための条件は

$$\vec{a}=k\vec{b}\quad (k\text{はスカラー})$$

だった。では：――

(解) 直線AB上の任意の点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{AB}=(3,\ -2,\ -2)$$
$$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2,\ z-3)$$

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AP}$ であることから

$$(x-1,\ y-2,\ z-3)=k(3,\ -2,\ -2)$$
$$\therefore\quad x-1=3k,\ y-2=-2k,\ z-3=-2k$$
$$\therefore\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-2}\quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

(注) $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AP}$ としないで $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BP}$ としたっていいわけ。そのときには

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-2}$$

となります。もちろん，どちらも同じものを表しています。

■練習2. 2点 A(3, 1, 2), B(1, 4, 8) を通る直線が xy 平面と交わる点Pを求めよ。

(ヒント) $P(x,\ y,\ 0)$ として3点A，B，Pが1直線上にある条件を使ってみたらどうだろう。

$$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BP}$$

より

$$(-2,\ 3,\ 6)=k(x-1,\ y-4,\ 0-8)$$

が成り立つ。

いや，待てよ。k を複雑なほうにつけるのはマチガイではないが，計算が複雑になってまずい！

$$(x-1,\ y-4,\ -8)=k(-2,\ 3,\ 6)$$

とすべきだ。これから

$$x-1=-2k,\ y-4=3k,\ -8=6k$$

第3式から

$$k=-\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad x=1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3},\ y=4-4=0$$

なるほど，交点は $\left(\frac{11}{3},\ 0,\ 0\right)$ だったのだ。つまり，x 軸と交わっているのだな。

*　*　*

◆ 次は直線が主導権(？)をもつときだ。

■練習3. 2直線

$$l:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{4}$$
$$m:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{3}$$

は交わるか。

(ヒント)　それぞれ $=t$, $=s$ とおいて

$$(3t+1,\ 2t-1,\ 4t)$$
$$(2s+2,\ 4s+1,\ 3s+3)$$

これが一致する条件は

$$3t+1=2s+2,\ 2t-1=4s+1,\ 4t=3s+3$$

が成り立つことです。

ところが，第1，第2を連立させて解いて得られた $t=0$, $s=-\dfrac{1}{2}$ は第3式を満足しません。ナルホド，l, m は交点をもたないことがわかった。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。まず，これです。

11/11

練習 4. 座標の定められた空間において，直線 l は2点 $(1,\ 1,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 1)$ を通り，直線 m は2点 $(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 2)$ を通る。点 $(2,\ 0,\ 1)$ を通り，l, m の両方と交わる直線を n とする。l と n の交点および，m と n の交点を求めよ。（東大）

(解)　l の方程式は

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-0}{-1}=t \quad \cdots\cdots(*)$$

で，m の方程式は

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}=s \quad \cdots\cdots(**)$$

であるから，l, n の交点を A, m, n の交点をBとすると

$$\mathrm{A}(-t+1,\ 1,\ -t)$$
$$\mathrm{B}(1,\ -2s+1,\ -s+1)$$

とおける。ゆえに AB の方程式は

$$\frac{x-(-t+1)}{-t}=\frac{y-1}{2s}=\frac{z-(-t)}{-t+s-1}$$

で，これが点 $(2,\ 0,\ 1)$ を通るから

$$\frac{t+1}{-t}=\frac{-1}{2s}=\frac{t+1}{-t+s-1}$$

これを解いて

$$t=-2,\ s=1$$

ゆえに

$$\mathrm{A}(3,\ 1,\ 2),\ \mathrm{B}(1,\ -1,\ 0)$$

答　$\begin{cases} l,\ n \text{ の交点 } (3,\ 1,\ 2) \\ m,\ n \text{ の交点 } (1,\ -1,\ 0) \end{cases}$

(注)　$(*)$ と $(**)$ のところで，分母に0があるが，これは，分子が0になるという「約束」のもとに使われているのです。したがって，$(*)$ は

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{z-0}{-1},\ y=1$$

と書けるわけ。同じようにして，$(**)$ は

$$x=1,\ \frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

を表しているのです。分数の分母が0になっていいと考えてはいけません。

11/17

練習 5. 空間の点 $(x,\ y,\ z)$ を点 $(x-y+z,\ x+y,\ z-x)$ にうつす1次変換によって，直線 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$ はどんな直線にうつされるか。（東京理大）

(ヒント)
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y+z \\ x+y \\ -x+z \end{pmatrix}$$

となる行列を求めなければなりません。べつにめんどうはあるまい。それは

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です。そこで，変換式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}(x'+y'-z')$$
$$y=\frac{1}{3}(-x'+2y'+z')$$
$$z=\frac{1}{3}(x'+y'+2z')$$

これを代入して直線の標準形になおすと

$$\frac{x+4}{5}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+4}{-1} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

⑪ 直線と直線の関係

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈空間の直線を学ぶには，直線と直線の関係をマスターするのがコツ。ところで，関係とは，そもそも何なのか。

◆ 2直線の関係は大きく分けて3つになります。第1は **交わる** とき，第2は **平行である** とき，第3は交わりもしない，平行でもない，つまり **捩れ（ねじれ）の位置にある** ときです。

また，2直線のなす角も問題になります。では，具体的な問題にいきましょう。

12/13

■練習 1. 2直線

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \qquad \cdots\cdots①$$

と

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{3} \qquad \cdots\cdots②$$

は交わることを示せ。

ヒント ①，②を連立方程式としてただ1組の解をもつことを示せばいいでしょう。

①の式を $=k$ とおくと

$$x=k,\ \ y=2k,\ \ z=3k$$

これを②に代入して

$$\frac{k-4}{3}=\frac{2k-4}{2}=\frac{3k-6}{3} \qquad \cdots\cdots③$$

左半分より

$$2(k-4)=3(2k-4) \qquad \therefore\ \ k=1$$

これは③の右半分をも満足する。

ゆえに①，②は点$(1,\ 2,\ 3)$で交わることがわかります。

■練習 2. 1点$(3,\ 1,\ 5)$を通り，直線

12/11

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$$

に平行な直線を求めよ。

ヒント 求める直線はベクトル$(3,\ 2,\ 1)$に平行で，しかも点$(3,\ 1,\ 5)$を通るのですから，

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{1} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

12/13

■練習 3. 2直線

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{6} \qquad \cdots\cdots②$$

はねじれの位置にあることを示せ。

ヒント ねじれの位置にあるとは，**交わりもしない，平行でもない，**ということです。

①と②は，それぞれベクトル$(1,\ 2,\ 3)$と$(2,\ 3,\ 6)$に平行ですから，お互いに平行でないことは確かです。

次は交わらないことをいえばいいでしょう。①の式$=k$とおいて

$$x=k+2,\ \ y=2k+3,\ \ z=3k+1$$

これを②に代入すると

$$\frac{k+2}{2}=\frac{2k+4}{3}=\frac{3k-3}{6}$$

となります。左半分，右半分からkを求めてみますとkの値は -2 と -11 が得られます。つまり ①，② を共に満足する x，y，z は存在しない，つまり①，②は共通点をもちません。

かくして証明されたのです。

* * *

◆ 2直線のなす角を求めるにはベクトルの内積を使えばいいでしょう。つまり

■練習 4. 次の2直線は垂直であることを示せ。

12/14

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{4} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

ヒント　①, ②はそれぞれベクトル(1, 3, 4), (1, −3, 2) に平行ですから，この2つのベクトルが垂直であることをいえばいいわけ。そして，そのためには内積が0に等しいことをいえばいいハズ。さて，

$$(1,\ 3,\ 4)\cdot(1,\ -3,\ 2)=1+(-9)+8=0$$

Q. E. D.

*　　*　　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみましょう。

7/14

■練習 5. 空間における直線

$$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

に，点P(2, 3, 4) から下した垂線の足をHとするとき，この直線上の点Q(1, 2, 3) とHとの間の距離を求めよ。　(島根大)

ヒント　$x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}=t$

とおくと

$$x=t+1,\ \ y=2t+2,\ \ z=3t+3$$

ですから,

$$H(t+1,\ 2t+2,\ 3t+3)$$

とおくことができます。そうすると

$$\overrightarrow{PH}=(t-1,\ 2t-1,\ 3t-1)$$

ですから，PHがこの直線に垂直であることから

$$\overrightarrow{PH}\cdot(1,\ 2,\ 3)=0$$

$$(t-1,\ 2t-1,\ 3t-1)\cdot(1,\ 2,\ 3)=0$$

$$\therefore\ \ 1(t-1)+2(2t-1)+3(3t-1)=0$$

$$\therefore\ \ t=\frac{3}{7}$$

ゆえにHは $\left(\dfrac{10}{7},\ \dfrac{20}{7},\ \dfrac{30}{7}\right)$ で与えられます。したがって

$$\overline{QH}=\sqrt{\left(\frac{10}{7}-1\right)^2+\left(\frac{20}{7}-2\right)^2+\left(\frac{30}{7}-3\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{126}}{7}=\frac{3\sqrt{14}}{7}$$

答　$\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$

■練習 6. 空間の2直線

17/14 ✓

$$l_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=z-2$$

$$l_2:x=\frac{y}{2}=-z+4$$

について次の問に答えよ。

(1) 2直線 l_1, l_2 はねじれの位置にあることを証明せよ。

(2) 直線 l_1, l_2 上にそれぞれ点A, Bをとり線分ABが l_1, l_2 の両方に垂直となるようにしたときの点A, Bの座標を求めよ。　(長崎大)

ヒント　(1) ねじれの位置にあることをいうには平行でなく，しかも，共通点をもたないということなのです。ところが，方向比が 2 : −2 : 1 と 1 : 2 : −1 (1 : 2 : 1 ではありませんよ) ですから，平行ではない。

次に，連立させて解いてみると解なし。つまり共通点はない。よって，……

(2)のほうは

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}=t$$

とおいて

$$A(2t+3,\ -2t-1,\ t+2)$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-1}=s$$

とおいて

$$B(s,\ 2s,\ -s+4)$$

と書け，このとき

$$\overrightarrow{AB}=(s-2t-3,\ 2s+2t+1,\ -s-t+2)$$

これが (2, −2, 1), (1, 2, −1) に垂直であることから

$$2(s-2t-3)-2(2s+2t+1)+1(-s-t+2)=0$$

かつ

$$1(s-2t-3)+2(2s+2t+1)-1(-s-t+2)=0$$

これから　$t=\cdots\cdots$, $s=\cdots\cdots$

したがって，……

答　A(1, 1, 1), B(1, 2, 3)

○平面の方程式の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平面の方程式は1次式であって，1次方程式は平面を表します。さては，1次式の中に平らというものが含まれているらしい。

◆ 平面の方程式は

$$ax+by+cz+d=0$$

で与えられます。そして，この平面は

ベクトル $(a,\ b,\ c)$ に垂直

です。ところで，平面の方程式を求める問題は大きく分けて3つになります。

*　*　*

◆ 第1は，与えられた3点を通る平面を求めるもの，例えばこれです。

11/17

練習1. 3点 $(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ -2,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面の方程式を求めよ。

ヒント　求める平面の方程式を

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots①$$

としますと，題意から

$$a\cdot1+b\cdot0 \quad +c\cdot0+d=0$$
$$a\cdot0+b\cdot(-2)+c\cdot0+d=0$$
$$a\cdot0+b\cdot0 \quad +c\cdot4+d=0$$

が成り立ちます。ゆえに，

$$a=-d,\ b=\frac{d}{2},\ c=-\frac{d}{4}$$

これを①に代入してみると

$$-dx+\frac{d}{2}y-\frac{d}{4}z+d=0$$

$$\therefore\quad x-\frac{y}{2}+\frac{z}{4}-1=0$$

分母をはらったほうがいいかな？

$$4x-2y+z-4=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 第2は，1点と1直線を通る平面を求めるものです。次をやってみませんか。

練習2. 1点 $(1,\ 2,\ 3)$ と1直線

11/17

$$l:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$$

の定める平面の方程式を求めよ。

ヒント　求める平面の方程式を

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots①$$

としますと，点Aを通ることから

$$a+2b+3c+d=0 \qquad \cdots\cdots②$$

となります。次に直線 l を含む条件ですが，これにはいろいろのやり方がありましょう。ここでは，**パラメーター表示** を利用してみようか。つまり，

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}=t$$

とおくと，

$$x=2t+2,\ y=3t-1,\ z=4t$$

t が何であっても①を満足しなければなりません。だから，t のすべての値に対して

$$a(2t+2)+b(3t-1)+c(4t)+d=0$$

つまり

$$(2a+3b+4c)t+(2a-b+d)=0$$

が成り立たなければなりません。そのための条件は

$$2a+3b+4c=0 \qquad \cdots\cdots③$$

かつ

$$2a-b+d=0 \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つことです。かくて，②，③，④から $a,\ b,\ c,\ d$ の比がきまるのです。

②，③，④ を $a,\ b,\ c$ について解いてみますと，

$$a=\frac{3}{4}d,\ b=\frac{5}{2}d,\ c=-\frac{9}{4}d$$

となります。これを①に代入して，変形しますと

$$3x+10y-9z+4=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

となります。

なお，このような計算の際に，②，③，④を解くときマゴマゴしてはいけません。

*　*　*

◆ 第3は相交わる2直線の定める平面を求めることです。例えば，これです。

練習 3. 2直線

$$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{5},\ \frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$$

の定める平面の方程式を求めよ。

ヒント いろいろなやり方がありますが，ここではパラメーター表示を使うことにしましょうか。

求める平面の方程式を

$$ax+by+cz+d=0 \quad \cdots\cdots①$$

としますと，直線

$$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{5}=t$$

つまり

$$x=2t,\ y=t,\ z=5t$$

これが①を満足することから

$$2at+bt+5ct+d=0$$

つまり

$$t(2a+b+5c)+d=0$$

これが t についての恒等式であることから

$$2a+b+5c=0 \quad かつ \quad d=0 \quad \cdots\cdots②$$

まったく同様にして

$$3a+2b+4c=0 \quad かつ \quad d=0 \cdots\cdots③$$

②，③より

$$\frac{a}{6}=\frac{b}{-7}=\frac{c}{-1}$$

ゆえに，求める方程式は

$$6x-7y-z=0 \quad \cdots\cdots 答$$

です。

*　*　*

◆ 以上で大切なことは終わりです。次には総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 空間に2点 O(0, 0, 0), A$(a,\ b,\ c)$ $(abc\neq 0)$ がある。線分 OA を 2：1 に内分する点を通り，直線 OA に垂直な平面の方程式を求めよ。（芝浦工大）

ヒント $\overrightarrow{OA}=(a,\ b,\ c)$ ですから，OA に垂直な平面は

$$ax+by+cz+d=0$$

の形になるハズ。また，OA を 2：1 に内分する点は $\left(\frac{2a}{3},\ \frac{2b}{3},\ \frac{2c}{3}\right)$ ですから，求める方程式は

$$a\left(x-\frac{2a}{3}\right)+b\left(y-\frac{2b}{3}\right)+c\left(z-\frac{2c}{3}\right)=0$$

$$\therefore \quad 3ax+3by+3cz-2(a^2+b^2+c^2)=0$$

…… 答

練習 5. 2つの球面

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+2=0 \quad \cdots①$$
$$x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-10=0 \quad \cdots②$$

の交線を含む平面の方程式を求めよ。

ヒント 平面上で2つの円

$$f(x,\ y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$g(x,\ y)=x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

が2点で交わるとき，その共通弦の方程式は

$$f(x,\ y)-g(x,\ y)=0$$

つまり

$$(a-A)x+(b-B)y+(c-C)=0$$

でした。まったく同じで，2つの球①，②が交わるとき，その交線を含む平面は ①の左辺−②の左辺=0 とおいて

$$-4x+4y-2z+12=0$$

つまり

$$2x-2y+z-6=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

で与えられます。

注 2つの球が交わる条件については（☞ p. 260）を参照してください。

また，上の定理の証明は円の場合と同じで，交線上の点を $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ としますと，

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0+2y_0-6z_0+2=0$$
$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+2x_0-2y_0-4z_0-10=0$$

ですから，当然

$$-4x_0+4y_0-2z_0+12=0$$

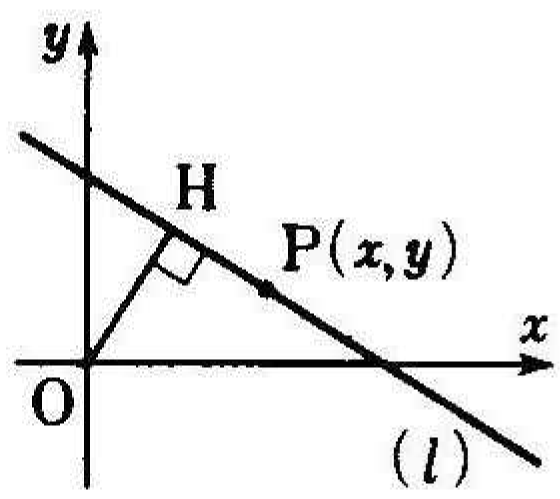
を満足し，このことは，交線上の点が平面 (*) 上にあることを示しているのです。

ヘッセの標準形

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ヘッセの標準形には直線の場合と，平面の場合と2つあります。その形がまったく同じであることは，きわめて示唆的だ。

◆ 直線 (l) に原点から引いた垂線の足をHとし，$\overrightarrow{OH}$ に平行な単位ベクトルを $(l,\ m)$ としますと



$$\overrightarrow{OH}=(Ll,\ Lm)$$

で与えられます。ここに $L=\overline{OH}$ です。

また，(l) 上の任意の点を $P(x,\ y)$ としますと

$$\overrightarrow{HP}=(x-Ll,\ y-Lm)$$

で与えられますから，$OH\perp HP$ を内積で表して

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HP}=0$$

$$(Ll,\ Lm)\cdot(x-Ll,\ y-Lm)=0$$

$$\therefore\quad lx+my=L$$

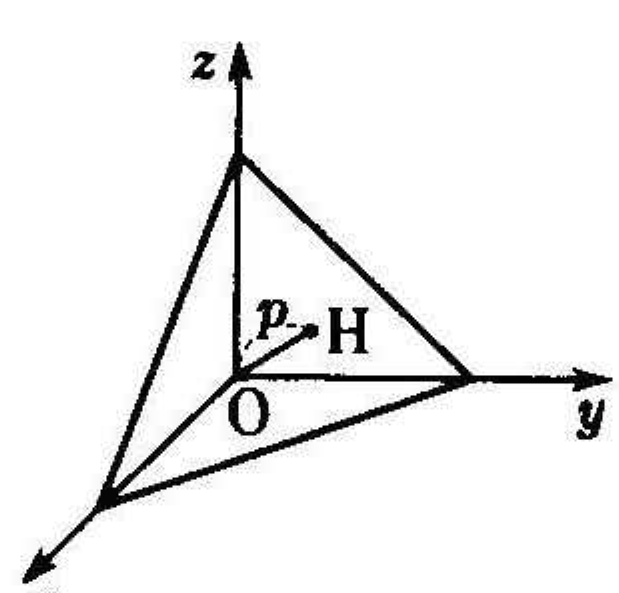
あるいは $\angle HOx=\theta$ としますと

$$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=p \qquad \cdots\cdots①$$

と書けます。ここに $p=L$ です。わざわざ書きかえるほどのこともありませんが，ふつうこの形では p を使うことが多いので，こうしたのですが，①のことを **直線の方程式**（**ヘッセの標準形**）といいます。

*　*　*

◆ 平面 π に，原点から下した垂線の足をHとし，$\overline{OH}=p$ としましょう。また $\overrightarrow{OH}$ に平行な単位ベクトルの成分を $(l,\ m,\ n)$ としましょう。いいかえると $\overrightarrow{OH}$ 方向の **方向余弦** を l, m, n $(l^2+m^2+n^2=1)$ とするわけです。そうすると



$$\overrightarrow{OH}=(pl,\ pm,\ pn)$$

いま平面 π 上に任意の点 $P(x,\ y,\ z)$ をとりますと

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HP}=0$$

$$\therefore\quad (pl,\ pm,\ pn)\cdot(x-pl,\ y-pm,\ z-pn)=0$$

これを書きかえて

$$lx+my+nz=p \qquad \cdots\cdots②$$

となります。この方程式を，**平面の方程式**（**ヘッセの標準形**）というのです。

*　*　*

◆ では，具体的な例にいきましょう。

練習1. $3x+4y=10$ に原点から下した垂線の長さを求めよ。

12/18

ヒント　　$3x+4y=10$

を①の形に書きかえればいいのです。

両辺を $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ で割りますと

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=2$$

$$\therefore\quad \cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=2$$

ここに θ は第1象限の角で $\tan\theta=\frac{4}{3}$ です。

そして，求める長さは2です。

注　垂線の長さを求めるだけなら，こんなことはムダで，公式（☞「数Ⅰ」p.274）を使ってすぐ出るのです。つまり

$$\frac{|3\cdot0+4\cdot0-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

11/18 です。

練習2. 平面 $2x+2y+z=15$ をヘッセの標準形になおせ。

ヒント　$\sqrt{2^2+2^2+1}=3$ で両辺を割って

$$\frac{2}{3}=l,\ \frac{2}{3}=m,\ \frac{1}{3}=n$$

とおけばよい!!

いや，ムリに l，m，n などとおくこともありませんよ。

$$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=5$$

でいいのです。分母をはらってはいけない。モトノモクアミ!!

＊　＊　＊

◆ では，やや，総合的な問題にいきましょう。

12/18

練習 3. 方向余弦が $\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$ である平面の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z=p$$

で与えられる。この平面の表面が鏡であるとき，λ，μ，ν なる方向余弦をもった光線がこの鏡に当たれば，その反射光線の方向余弦は

$$\frac{1}{3}(2\mu+2\nu-\lambda),\ \frac{1}{3}(2\nu+2\lambda-\mu),$$
$$\frac{1}{3}(2\lambda+2\mu-\nu)$$

で与えられることを示せ。

ヒント 入射光線と反射光線の向きだけが問題なのですから，投射点が原点であるとしてもかまいません，ね。

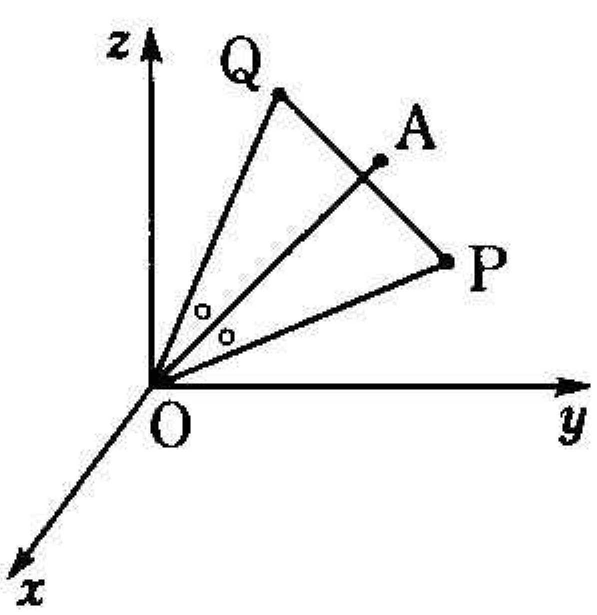
さて，原点を通って，与えられた平面に垂直な単位ベクトルを $\overrightarrow{OA}$ としますと

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

です。また，Oに入射する光線の上に単位ベクトル $\overrightarrow{OP}$ をとると

$$P(\lambda,\ \mu,\ \nu)$$

となります。反射光線上に単位ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ をとり，Qの座標を求めればよいハズ。



反射の法則によって，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{OA}$ に関して対称ですから，PQ の中点は OA 上になければなりません。だから，Q の座標を $(l,\ m,\ n)$ としますと，

$$\frac{\lambda+l}{2}:\frac{\mu+m}{2}:\frac{\nu+n}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \lambda+l=\mu+m=\nu+n$$

この値を k とおきますと

$$l=k-\lambda,\ m=k-\mu,\ n=k-\nu\ \cdots\cdots(*)$$

で，l，m，n が方向余弦であることから

$$(k-\lambda)^2+(k-\mu)^2+(k-\nu)^2=1$$

$$\therefore\ 3k^2-2(\lambda+\mu+\nu)k+(\lambda^2+\mu^2+\nu^2-1)=0$$

$$\therefore\ k\{3k-2(\lambda+\mu+\nu)\}=0$$

$k=0$ とすると $l=-\lambda$，$m=-\mu$，$n=-\nu$ となって不合理。ゆえに $k\neq0$，したがって

$$k=\frac{2(\lambda+\mu+\nu)}{3}$$

となります。これを (*) に代入しますと，反射光線の方向余弦が求まります。

12/18

練習 4. 空間において，3点 $A\left(\frac{1}{a},\ 0,\ 0\right)$，$B\left(0,\ \frac{1}{b},\ 0\right)$，$C\left(0,\ 0,\ \frac{1}{c}\right)$ を含む平面が，中心 $\left(\frac{1}{r},\ \frac{1}{r},\ \frac{1}{r}\right)$，半径 $\frac{1}{r}$ の球面に接している。ただし，a，b，c は正で，$a+b+c<r$ とする。このとき，

(1)　r を a，b，c で表せ。

(2)　$\triangle ABC$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ならば，$r\geqq3+\sqrt{3}$ であることを示せ。

（岐阜薬大）

ヒント (1)　平面の方程式を

$$ax+by+cz=1$$

とおくことができましょう。これに中心から下した垂線の長さが $\frac{1}{r}$ であることに着目する。　**答** $r=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

(2)　原点から $\triangle ABC$ に下した垂線の長さは $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，これに $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を掛けて3で割れば体積が出ますが，これは $\frac{1}{6}\times OA\times OB\times OC$ に等しい。これから $\sqrt{3}abc=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．あとは相加・相乗平均の関係を2回使うのだが，難問だ。

(1点から1平面への)垂線の長さの公式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆垂線の長さの公式ほど，妖しく，有用なものは少ないであろう。使うと使わないとでは天地の差がある。

◆ x-y 平面上で，点 $(\alpha,\ \beta)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられますが，空間では

点 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で与えられます。とりあえず，いくつか計算してみませんか。

12/18

■練習 1. 点 $(1,\ 2,\ 3)$ から平面 $2x+4y+z-1=0$ に下した垂線の長さを求めよ。

(解) 公式により

$$\frac{|2\cdot1+4\cdot2+1\cdot3-1|}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{21}}\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

(注) 分母を有理化すると

$$\frac{12}{\sqrt{21}}=\frac{12\sqrt{21}}{21}=\frac{4\sqrt{21}}{7}$$

となって少し格好がよくなる。このほうがよさそうだ。しかし，本質的なことではありません。

12/8

■練習 2. 平面 $x+y+z+a=0$ に原点から下した垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を求めよ。

(解) 公式により

$$\frac{|0+0+0+a|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ |a|=3$$

$$\therefore\ a=\pm3\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

12/8

■練習 3. 点 $C(2,\ 2,\ 2)$ を中心とし，平面 $x+2y+2z+10=0$ に接する球面の方程式を求めよ。

(ヒント) 点Cからこの平面に下した垂線の長さを半径にすればいいでしょう。さて，それは

$$\frac{|2+2\cdot2+2\cdot2+10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{20}{3}$$

ですから，求める方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\left(\frac{20}{3}\right)^2$$

です。

*　*　*

◆ ところで，この公式の証明をやっておきましょう。

14/18

■練習 4. 点 $A(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ から，平面 π : $ax+by+cz+d=0$ に下した垂線の長さを求めよ。

(ヒント) いろいろな方法が考えられましょう。もっとも素朴なやり方はAを通り π に垂直な直線は

$$l:\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}\qquad\cdots\cdots(*)$$

ですから，l と π の交点Bが求まります。そこでAとBの距離を計算すればよいハズ。

(*) を $=k$ とおくと

$$x=ak+\alpha,\ y=bk+\beta,\ z=ck+\gamma$$

これを π の方程式に代入して

$$a(ak+\alpha)+b(bk+\beta)+c(ck+\gamma)+d=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{-(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)}{a^2+b^2+c^2}$$

さて，

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\{(ak+\alpha)-\alpha\}^2+\{\qquad\}^2+\{\qquad\}^2\\&=(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2\\&=(a^2+b^2+c^2)k^2\\&=\frac{(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)^2}{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

かくて，予定通り

$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

となったのです。

*　　*　　*

◆ では，やや総合的な練習に進むとしましょう。まず，これです。

12/8

■練習 5　平面 $3x+4y+6z-12=0$ が x 軸，y 軸および z 軸と交わる点をそれぞれ A，B，C とする。△ABC の面積を求めよ。

（京都教育大）

（解）　A(4, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 2) であるから，四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot3}{2}\cdot2=4$$

また，平面 $3x+4y+6z-12=0$ に原点から下した垂線の長さ h は

$$h=\frac{|-12|}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}}=\frac{12}{\sqrt{61}}$$

ゆえに，求める面積を S とすると

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot\frac{12}{\sqrt{61}}=V=4$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{61}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

（注）　別解については（☞ p.224）。

12/9

■練習 6.　空間に 5 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 3)，M(1, 3, 0) がある。点Oより平面 AMC に下した垂線の足をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{h}$ とし，$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（九州工大）

（解）　平面 AMC の方程式を　　……①

$$px+qy+rz+s=0$$

とおくと

$$2p+s=0,\quad p+3q+s=0,\quad 3r+s=0$$

$$\therefore\quad p=-\frac{1}{2}s,\quad q=-\frac{1}{6}s,\quad r=-\frac{1}{3}s$$

これを①に代入して変形すれば

$$\pi:3x+y+2z-6=0$$

ゆえに $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$

また $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 π に垂直だから，ベクトル(3, 1, 2) に平行で，したがって単位ベクトルは $\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\ \dfrac{1}{\sqrt{14}},\ \dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$ である。

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{6}{\sqrt{14}}\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

$$=\left(\frac{18}{14},\ \frac{6}{14},\ \frac{12}{14}\right)=\left(\frac{9}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7}\right)$$

$$=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

9

■練習 7.　空間の 4 点 O(0, 0, 0)，A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3)，C(c_1, c_2, c_3) の作る四面体の体積を求めよ。

（ヒント）　まず △OAB の面積を求めてみましょう。（☞ p.225）

$$S=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

次に，平面 OAB の方程式を

$$px+qy+rz+s=0$$

としますと，もちろん　　$s=0$

また，　　$a_1p+a_2q+a_3r=0$

　　　　　$b_1p+b_2q+b_3r=0$

$$\therefore\quad \frac{p}{a_2b_3-a_3b_2}=\frac{q}{a_3b_1-a_1b_3}=\frac{r}{a_1b_2-a_2b_1}$$

ゆえに，平面 OAB の方程式は

$$(a_2b_3-a_3b_2)x+(a_3b_1-a_1b_3)y+(a_1b_2-a_2b_1)z=0$$

点Cから下した垂線の長さを h としますと

$$h=\frac{|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(\quad)c_2+(\quad)c_3|}{\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(\quad)^2+(\quad)^2}}$$

となりますから，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

で与えられます。

それにしても，イヤな計算だなあ。

○ 平面と点の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆3つの点は1つの平面をきめるが，逆に3つの平面は1つの点をきめる。おや，これは偶然かな，と，キミが思ったとき，……

◆ さっそく具体的な問題にとりかかるとしましょう。まず，これです。

■練習1. 3点 A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) を通る平面の方程式を求めよ。

（解） 求める平面の方程式を

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots①$$

とすると，点 A(1, 0, 0) を通ることから

$$a\cdot1+b\cdot0+c\cdot0+d=0$$

$$\therefore\quad a=-d$$

まったく同じようにして

$$b=-\frac{d}{2},\quad c=-\frac{d}{3}$$

$$\therefore\quad -dx-\frac{d}{2}y-\frac{d}{3}z+d=0$$

$$\therefore\quad 6x+3y+2z-6=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注） 一般に，平面が x, y, z 軸と交わる点の x, y, z 座標をそれぞれ x, y, z 切片（せっぺん）ということがあります。

x, y, z 切片がそれぞれ a, b, c の平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

です。これはムリに覚えるほどのこともないが，公式として使ってかまわない。

■練習2. 4点 A(a, b, c)，B(b, c, a)，C(c, a, b)，D(p, p, p) が同一平面上にあるための条件を求めよ。ただし，a, b, c はすべて異なるものとする。

（ヒント） 3点 A, B, C の定める平面の方程式を求め，その上に点Dがある条件を求めればいいでしょう。

平面 ABC の方程式を

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \qquad \cdots\cdots①$$

としますと，

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+\delta=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$b\alpha+c\beta+a\gamma+\delta=0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$c\alpha+a\beta+b\gamma+\delta=0 \qquad \cdots\cdots④$$

これから α, β, γ を δ で表して①に代入すればいいのですが，計算が少しめんどうです。そこで，ちょっとうまくやることを考えてみましょうか。

点 D(p, p, p) が①上にある条件は

$$p\alpha+p\beta+p\gamma+\delta=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

②〜⑤から α, β, γ, δ を消去すれば求める関係が得られるハズ。

さて，{②＋③＋④}÷3 を作ると

$$\frac{a+b+c}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

となります。また，⑤より

$$p(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

⑥，⑦より

$$\frac{a+b+c}{3}=p \qquad \cdots\cdots⑧$$

でなければなりません。

逆に⑧が成り立てば，点Dは △ABC の重心ですから，4点 A, B, C, D が同一平面上にあることは明らかです。

＊　＊　＊

◆ 次は平面から点へ，です。では，これを。

■練習3. 3つの平面

$$x+2y+3z=3 \qquad \cdots\cdots①$$

$$x+y+z=2 \qquad \cdots\cdots②$$

$$2x+y\qquad=3 \qquad \cdots\cdots③$$

の交点を求めよ。

（ヒント） 3元1次方程式として，x, y, z について解けばよい。　$\boxed{答}$ 点 (1, 1, 0)

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

■練習 4. 平面 $6x+3y+2z=6$ が空間座標の x 軸，y 軸，z 軸と交わる点をそれぞれ A，B，C とする。△ABC の面積を求めよ。（学習院大）

ヒント　A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) であるから

$$AB=\sqrt{5},\ BC=\sqrt{13},\ CA=\sqrt{10}$$

となります。これを使って △ABC の面積を求めるにはいろいろあります。ヘロンの公式を使ってもいいが，うまい方法とはいえない。それよりは

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A$$

を使うほうがいい。

△ABC の角Aについて余弦定理から

$$\cos A=\frac{\sqrt{5}^2+\sqrt{10}^2-\sqrt{13}^2}{2\sqrt{5}\sqrt{10}}$$

$$=\frac{5+10-13}{2\cdot5\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{50}}=\frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$=\frac{7}{2}$$ ……答

■練習 5. 平面 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ に関して原点と対称な点を求めよ。（東海大）

ヒント　求める点を P(X, Y, Z) としますと，OP がこの平面に垂直ですから

$$X:Y:Z=\frac{1}{6}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=1:3:2 \quad\cdots\cdots①$$

また OP の中点 $\left(\dfrac{X}{2},\ \dfrac{Y}{2},\ \dfrac{Z}{2}\right)$ がこの平面上にありますから

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{X}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{Y}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{Z}{2}=1 \quad\cdots\cdots②$$

①，②を連立させて解けばよいでしょう。

答　$\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{18}{7},\ \dfrac{12}{7}\right)$

■練習 6. 空間の3点

A(1, 2, 0)，B(2, 0, 1)，C(0, 1, 1) の定める平面 π に，原点Oから下した垂線の足Hの座標を求めよ。（慶大）

ヒント　π の方程式は $x+2y+3z=5$ となります。Oを通って π に垂直な直線の方程式は

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

ですから，あとは，この2つを連立させて解けばいいハズ。

答　$\left(\dfrac{5}{14},\ \dfrac{5}{7},\ \dfrac{15}{14}\right)$

■練習 7. 点 Q(−1, 1, 4) を通り，ベクトル $\vec{N}=(-1,\ 1,\ -1)$ に垂直な平面に点 P(1, 2, −3) から下した垂線の足の座標を求めよ。（早大）

ヒント　点Qを通り，ベクトル (−1, 1, −1) に垂直な平面は

$$(-1)\cdot(x+1)+1\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-4)=0$$

です。つまり，

$$x-y+z-2=0 \quad\cdots\cdots(*)$$

です。次に点 P(1, 2, −3) を通り，平面 (*) に垂直な直線は

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{1} \quad\cdots\cdots(**)$$

これと平面 (*) との交点を求めればよいでしょう。(**) を $=k$ とおいて

$$x=k+1,\ y=-k+2,\ z=k-3$$

これを (*) に代入して

$$(k+1)-(-k+2)+(k-3)-2=0$$

$$\therefore\quad k=2$$

ゆえに交点は　(3, 0, −1)　……答

■練習 8. 原点Oを通り，直線

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$$

を含む平面の方程式を求めよ。

（京都工繊大）

答　$5x+7y-z=0$

○ 平面と平面の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平面と平面の関係は，平面における直線と直線との関係に似ている。ナニナニ，どの平面がどうしたって？

◆　2つの平面の間には3つの関係があります。第1は1直線で交わるとき，第2は平行のとき，そして，第3は重なるとき，です。

平面　$ax+by+cz+d=0$
　　　$a'x+b'y+c'z+d'=0$

は

$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\dfrac{d}{d'}$ のとき 一致

$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\neq\dfrac{d}{d'}$ のとき 平行

$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ でないとき 交わる

のです。

では，さっそくながら次の練習1.をやってみませんか。

12/26

■**練習 1.** 2つの平面

$$x+2y+3z+2=0$$

$$(k+1)x+4ky+2(k+2)z+(k+3)=0$$

が一致するようにkの値を定めよ。

ヒント　一致するための条件は係数が比例することでしたね。つまり

$$\frac{k+1}{1}=\frac{4k}{2}=\frac{2(k+2)}{3}=\frac{k+3}{2}\quad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つようなkを求めればいいというわけ。ところで，左の2つから

$$k+1=2k\quad\therefore\quad k=1$$

となり，これは，確かに(*)を満足しています。つまり，求める値は1です。

12/26

■**練習 2.** 点 A(1, 2, 3) を通り，平面 $2x+y+3z+1=0$ に平行な平面の方程式を求めよ。

ヒント　求める平面を $2x+y+3z+k=0$ とおくことができます。これが，点(1, 2, 3)を通ればいい。さて，そのための条件は

$$2\cdot1+2+3\cdot3+k=0$$

$$\therefore\quad k=-13$$

ゆえに，求める方程式は

$$2x+y+3z-13=0$$

です。

注　~~なれれば~~，

$$2(x-1)+(y-2)+3(z-3)=0$$

とすぐ書いてもいい。~~理由はいわずもが~~なのことでしょう。

12/26

■**練習 3.** 2つの平面 $x+2y+3z-1=0$ と $2x+y-4z-2=0$ の交線の方程式を求めよ。

ヒント　直線

$$\begin{cases}x+2y+3z-1=0 & \cdots\cdots①\\ 2x+y-4z-2=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

といってもかまわないようなものの，問題の意味はやはり直線の標準の形

$$\frac{x-x_0}{○}=\frac{y-y_0}{○}=\frac{z-z_0}{○}$$

を導け，というわけです。さて，その方法は次のようにする。これは、一種の暗記もの。

①，②よりyを消去して

$$3x-11z-3=0$$

$$\therefore\quad \frac{3x-3}{11}=z$$

次に，①，②よりxを消去して

$$3y+10z=0$$

$$\therefore\quad \frac{3y}{-10}=z$$

$$\therefore\quad \frac{3x-3}{11}=\frac{3y}{-10}=z$$

ここでやめてはまずい。

$$\frac{x-1}{\frac{11}{3}}=\frac{y}{-\frac{10}{3}}=\frac{z}{1}$$

$$\therefore\quad \frac{x-1}{11}=\frac{y}{-10}=\frac{z}{3}$$

ここまでやるべきです。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみましょう。

12/26

■練習 4. 2平面 $\pi_1: x+2y-z=4$, $\pi_2: x-y+2z=4$ について，次の各問に答えよ。

(1) π_1, π_2 に垂直なベクトルをそれぞれ $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ とするとき，$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ を成分で表せ。

(2) 2平面 π_1, π_2 のなす角の大きさを，鋭角の範囲で求めよ。

(3) 2平面 π_1, π_2 の交線 l の方程式を $\dfrac{x-a}{\alpha}=\dfrac{y-b}{\beta}=\dfrac{z-c}{\gamma}$ の形で書け。

(4) 原点と(3)の直線 l とを通る平面の方程式を求めよ。　　　　(滋賀大)

(ヒント) (1) $\vec{n_1}=s(1,\ 2,\ -1)$, $s\neq 0$
$\vec{n_2}=t(1,\ -1,\ 2)$, $t\neq 0$

(2) $\dfrac{\pi}{3}$　(3) $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

(4)だけ略解をあげておきます。l を通る平面，つまり π_1, π_2 の交わりを通る平面は

$$\lambda(x+2y-z-4)+\mu(x-y+2z-4)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の形に書けます。ここに，λ, μ は定数です。上の平面 (*) が原点を通るための条件は $x=y=z=0$ を代入して

$$-4\lambda-4\mu=0 \qquad \therefore\ \lambda=-\mu$$

そこで $\lambda=1$, $\mu=-1$ にとると

$$3y-3z=0$$

つまり $y-z=0$ となります。

(注) ちょっと蛇足ながら：——

平面上で2つの直線 $ax+by+c=0$ と $a'x+b'y+c'=0$ の交点を通る直線は，λ, μ を定数として

$$\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$$

と書けるのでした。まったく同じ関係が2つの平面についても成り立つことに注意してください。

12/26

■練習 5. 空間の2点を P(1, 2, 3), Q(7, −1, 5) とするとき，次の問の A, B, C, D, E の値を求めよ。

(1) 直線PQに垂直で，点Pを通る平面の方程式は $Ax+By+Cz=D$ である。(ただし，A, B, C, D はすべて整数とし，Dの値が正で最小のときだけを正解とする)

(2) 3個の平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ と(1)で求めた平面とで囲まれる立体の体積はEである。　　　　(関西医大)

(解) (1) $\overrightarrow{PQ}=(6,\ -3,\ 2)$ であるから PQ に垂直で，点Pを通る平面は

$$6(x-1)+(-3)(y-2)+2(z-3)=0$$

$$\therefore\ 6x-3y+2z=6 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\therefore\ A=6,\ B=-3,\ C=2,\ D=6$$

(2) 平面①と x, y, z 軸との交点は

(1, 0, 0), (0, −2, 0), (0, 0, 3)

であるから，求める体積は

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot(-2)\cdot3\right)\right|=1$$

$$\therefore\ E=1$$

答 $A=6$, $B=-3$, $C=2$
$D=6$, $E=1$

12/26

■練習 6. 2平面 $x+2y+3z-4=0$, $2x+3y+4z-5=0$ の交わりの直線と点Q(−2, 1, 2) との最短距離（点Qと直線上の点との距離の最小値）を求めよ。(慶大)

(ヒント) $x+2y+3z-4=0$, $2x+3y+4z-5=0$ の交わりの直線は

$$x+2=\frac{y-3}{-2}=z$$

で，この上の点PとQの距離 $\overline{PQ}^2$ は z の2次式で与えられて，……　　答 $\sqrt{2}$

平面と直線の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平面と直線とは含まれるか，含まれないか，1点で交わるか，の3つの場合があります。ちょっと待てよ。このいい方まずいね。

◆ 平面と直線との関係は，と問われて即答できる人は少ないでしょう。3つの着眼点がありそうだ。第1は，平面と平面の交わりが直線だということ，第2は，直線が平面に含まれるとか，平行であるとか，第3は，相交わる2直線や平行2直線が定める平面を求めること，なんです。

では，順次やってみましょう。

* * *

◆ 平面と平面の交線を求めることからはじめましょう。これは，一種の暗記もの，手順をオボエテおくことが大切です。

■練習 1. 2平面

$$x+3y+4z+1=0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$2x+y+z-2=0 \qquad \cdots\cdots②$$

の交線の方程式を求めよ。

ヒント ①，②の交線を

$$\frac{x-a}{u}=\frac{y-b}{v}=\frac{z-c}{w}$$

といった形に書け，という問題なんです。さてどうするか？　①，②からxを消去すると

$$5y+7z+4=0 \qquad \cdots\cdots③$$

①，②からyを消去すると

$$5x-z-7=0 \qquad \cdots\cdots④$$

③，④より，x，yをzについて解いて

$$\frac{5x-7}{1}=\frac{5y+4}{-7}=\frac{z-0}{1}$$

$$\therefore\ \frac{x-\frac{7}{5}}{\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{4}{5}}{-\frac{7}{5}}=\frac{z-0}{1}$$

$$\therefore\ \frac{x-\frac{7}{5}}{1}=\frac{y+\frac{4}{5}}{-7}=\frac{z}{5} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

これが求めるものです。

(注) ここではx，yを消去してやりましたが，もちろん，y，zを消してもいい。そのときは分子はこれとちがってきますが，分母は同じです。

* * *

◆ 次は，直線が平面が含まれる条件です。ともあれ，具体的な問題をとりあげてみましょう。

■練習 2. 直線 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ が平面 $ax+by+cz+d=0$ に含まれるための条件を求めよ。

ヒント いろいろな考え方がありますが，ここでは 直線の式$=k$ とおいてみましょう。

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{3}=k$$

とおくと，

$$x=3k+1,\quad y=2k-2,\quad z=3k+2 \qquad \cdots\cdots①$$

これがkの値にかかわらず平面の方程式を満足するわけですね。すなわち①を平面の方程式に代入して

$$a(3k+1)+b(2k-2)+c(3k+2)+d=0$$
$$\therefore\ k(3a+2b+3c)+(a-2b+2c+d)=0$$

これがkについて恒等的に成り立つための条件は

$$3a+2b+3c=0 \text{ かつ } a-2b+2c+d=0$$

が成り立つことです。つまり，これが，求める条件です。

(注) この2つから例えばbを消去して

$$4a+5c+d=0$$

などとしてはいけません。なぜなら，もはや同値性が破れているから。

* * *

◆ では，やや総合的な問題を：——

練習 3. 直線 $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ と点 (4, 6, 6) の含む平面の方程式を求めよ。

(東京理大)

ヒント 直線 $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}=t$ とおくと

$$x=t+2,\ \ y=2t+3,\ \ z=3t+4$$

$t=-1$ とおいてみると (1, 1, 1)

$t=0$ とおいてみると (2, 3, 4)

となりますから，結局3点 (1, 1, 1), (2, 3, 4), (4, 6, 6) の定める平面を求めればいいでしょう。

答 $5x-4y+z-2=0$

練習 4. 2つの平面 $4x+3y+z-16=0$ と $x+2y+2z-3=0$ の交わりは直線

$$\frac{x-3}{\square}=\frac{y-\square}{\square}=\frac{z-\square}{5}$$

である。 (三重大)

ヒント 交線上に点$(3,\ \beta,\ \gamma)$があるとすると，

$$4\cdot 3+3\beta+\gamma-16=0$$
$$3+2\beta+2\gamma-3=0$$
$$\therefore\ \ \beta=2,\ \gamma=-2$$

次に，分母の□を埋めるのは，前のページのやり方でもいいし，あるいは，原点を通り2つの平面に平行な平面が

$$4x+3y+z=0$$
$$x+2y+2z=0$$

であることに注意して，これから

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{-7}=\frac{z}{5}$$

$$\therefore\ \ \frac{x-3}{\boxed{4}}=\frac{y-\boxed{2}}{\boxed{-7}}=\frac{z-\boxed{-2}}{5}$$

となります。

注 2つの平面の交線の方向比を求めるだけなら，上のように，**原点を通る平行平面を使う** のが便利です。

練習 5. 空間において相交わる2直線を l_1, l_2 とし，その方程式が次のようであるとき，l_1, l_2 を含む平面の方程式を求めよ。

$$l_1:\ \ x-2=\frac{y-1}{4}=-\frac{z+2}{2}$$

$$l_2:\ \ \frac{x+1}{3}=-y+2=\frac{z+4}{2}$$

(帯広畜産大)

ヒント いろいろな考え方がありましょう。1つの方法は， **3点で平面がきまる** ことに注意することです。

$$l:\ \ x-2=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{-2}=t$$

とおくと

$$x=t+2,\ \ y=4t+1,\ \ z=-2t-2$$

となりますから，点 A(2, 1, −2), B(1, −3, 0) は l_1 上にあります。同じく，点 C(−1, 2, −4) は l_2 上にあります。この3点の定める平面を求めてみたらどうだろう。

答 $6x-8y-13z=30$

練習 6. 座標の定められた空間において，直線 l は2点 (1, 1, 0), (2, 1, 1) を通り，直線 m は 2点 (1, 1, 1), (1, 3, 2) を通る。

(1) l を含み m に平行な平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ の形に表せ。

(2) 点 (2, 0, 1) を通り，l, m の両方に交わる直線を n とする。l と n の交点および，m と n の交点を求めよ。

(東大)

ヒント 4点を順に A, B, C, D とすると $\overrightarrow{AB}=(1,\ 0,\ 1)$, $\overrightarrow{CD}=(0,\ 2,\ 1)$

(1) l を含んで m に平行な平面に垂直なベクトルを $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ としますと，これは $\overrightarrow{AB}$ にも $\overrightarrow{CD}$ にも垂直なのですから

$$\alpha+\gamma=0,\ \ 2\beta+\gamma=0$$
$$\therefore\ \ \alpha:\beta:\gamma=2:1:(-2)$$

求める平面は

$$2(x-1)+1(y-1)+(-2)z=0$$

つまり $2x+y-2z-3=0$

(2) n, l の交点 (3, 1, 2)

n, m の交点 (1, −1, 0)

① 球の方程式とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆球も円も同じくマルイというコトバで表されるのはどういうわけだろう。そもそもマルイとは何か？

◆ 球というのは **定点から一定の距離にある点の集合** です。そして，その定点を球の **中心**，一定の距離を球の **半径** というのです。だから，中心が，$C(a,\ b,\ c)$，半径 r の球の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \cdots ①$$

で与えられます。あるいは，展開して

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0$$

となりますから，

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \quad \cdots ②$$

とも書けます。球の問題を扱うには①または②を使えばいいのですが，どちらを使うかによってめんどうにもなり，やさしくもなります。大体からいって，中心や半径が直接関係する問題には①を使い，そうでないときには，②を使えばいいでしょう。

では，具体的な問題にいきましょう。

*　*　*

\/\ **■練習 1.** 4点 $A(2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 4,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 6)$，$D(0,\ 0,\ 0)$ を通る球面の方程式を求めよ。

（解） 求める球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

とすると，4点 A，B，C，D を通ることから

$$4+2A+D=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$16+4B+D=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$36+6C+D=0 \quad \cdots\cdots ③$$
$$D=0 \quad \cdots\cdots ④$$

これを解いて

$$A=-2,\ B=-4,\ C=-6,\ D=0$$

ゆえに，求める方程式は

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

\/\ **■練習 2.** 方程式

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az-a=0$$

が球を表すための条件を求めよ。

（ヒント） オヤ，コレハ球面ノ方程式ダ，今サラ球ヲ表スタメノ条件トハイブカシ？ と思う人があるかもしれません。

それはちがいます。定義にある①の形に変形してみましょう。

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=3a^2+a$$

ゆえに半径を r としますと

$$3a^2+a=r^2>0$$
$$\therefore\ a(3a+1)>0$$
$$\therefore\ a>0 \text{ あるいは } a<-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

\/\ **■練習 3.** 2点 $A(-1,\ 0,\ 0)$，$B(3,\ 0,\ 0)$ からの距離の平方の和が10であるような点Pの軌跡を求めよ。

（解） 点Pの座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$PA^2+PB^2=10$$

より

$$\{(x+1)^2+y^2+z^2\}+\{(x-3)^2+y^2+z^2\}=10$$
$$\therefore\ 2x^2+2y^2+2z^2-4x=0$$
$$\therefore\ (x-1)^2+y^2+z^2=1$$

ゆえに求める軌跡は，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径1の球面である。

\/\ **■練習 4.** 2点 $A(2,\ 1,\ 1)$，$B(4,\ 3,\ 7)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

（ヒント） いろいろのやり方があるでしょう。しかし，もっとも簡単なのは，球面上の点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると

$$PA \perp PB$$

であることから $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ を使うこと。つまり，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$
$$=(x-2,\ y-1,\ z-1)\cdot(x-4,\ y-3,\ z-7)$$
$$=(x-2)(x-4)+(y-1)(y-3)+(z-1)(z-7)$$
$$=x^2+y^2+z^2-6x-4y-8z+18=0$$

より

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y-8z+18=0$$

が求めるものというわけ。

ところで，別解，いくつ考えられますか？

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

1/2

練習 5. 3つの座標面に接し，かつ，$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$ の部分にある球の方程式を求めよ。（小樽商大）

ヒント 半径が与えられていないから，きまらないわけです。このときは，与えるより仕方がありませんね。

解 半径を a とすると，中心は $(a,\ a,\ a)$ で，したがって求める方程式は

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2\quad(a>0)$$

注 もちろん，展開して

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$$

としてもかまわない。

1/2

練習 6. 式 $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2kz+14=0$ で表される球が yz 平面，zx 平面と交わり，かつ，初めの切り口の面積が後の切り口の面積の2倍ならば，k の値はいくらか。（南山大）

解 与えられた方程式を変形すると，

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-k)^2=k^2-1$$

ゆえに，これが球を表すためには $k^2-1>0$ したがって，$k>1$ あるいは $k<-1$ でなければならない。

次に，中心から yz 平面に下した垂線の長さは2であるから，交わるためには

$$2<\sqrt{k^2-1}$$

が必要で，したがって，　$5<k^2$

でなければならない。そして，切り口の面積は $\pi\{(k^2-1)-2^2\}=\pi(k^2-5)$ に等しい。

同じく zx 平面に下した垂線の長さは3であるから，交わるためには

$$3<\sqrt{k^2-1}$$

が必要で，したがって，$10<k^2$ でなければならない。そして，切り口の面積は

$$\pi\{(k^2-1)-3^2\}=\pi(k^2-10)$$

に等しい。よって，

$$\pi(k^2-5)=2\cdot\pi(k^2-10)$$
$$\therefore\quad k^2=15,\ k=\pm\sqrt{15}\quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

もう1つ，やってみませんか。

1/3

練習 7. 球がある。その xy 平面による切り口は，点 $(1,\ 2,\ 0)$ を中心として，半径が $2\sqrt{5}$ の円であり，また，xz 平面による切り口は，点 $(1,\ 0,\ 4)$ を中心とする円である。この球面の方程式を求めよ。（島根大）

ヒント 球の中心を $C(a,\ b,\ c)$，xy 平面，xz 平面による切り口の円の中心をそれぞれ O_1，O_2 とすると，$O_1(1,\ 2,\ 0)$，$O_2(1,\ 0,\ 4)$ で，したがって，$a=1$，$b=2$，$c=4$ であることがわかります。つまり，球の中心は $(1,\ 2,\ 4)$ です。

さて，球と x 軸との交点をAとしますと，$\triangle AO_1C$ において $\angle AO_1C=90°$，したがって，球の半径を r としますと

$$r^2=(2\sqrt{5})^2+4^2=36$$
$$\therefore\quad r=6$$

こうして，球の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=36$$

であることがわかったわけです。あるいは，展開して

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z-15=0$$

としてもかまいません。

球と直線の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆球と直線との関係は，円と直線との関係とはちがいます。というのも，球の中心から下した垂線の長さが対応しないから……

◆ 球と直線との関係は3つあります。

直線が球と2点で**交わる**場合，**接する**場合，**まったく外にある**場合です。まず，その条件からやってみることにしましょう。

1/3

練習 1. 直線

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{m}$$

が球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と交わるための条件を求めよ。

ヒント この2つを連立方程式と考え，

相異なる実数解をもつ条件

を求めればいいでしょう。さて，

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{m}=t$$

とおきますと

$$x=t+1,\ y=2t+3,\ z=mt+2$$

これを球の方程式に代入してみますと

$$(t+1)^2+(2t+3)^2+(mt+2)^2=1$$

t について整理して

$$\therefore\quad (5+m^2)t^2+2(2m+7)t+13=0$$

判別式を D としますと

$$\frac{D}{4}=(2m+7)^2-(5+m^2)\cdot 13>0$$

$$\therefore\quad 9m^2-28m+16<0$$

$$\therefore\quad \frac{14-2\sqrt{13}}{9}<m<\frac{14+2\sqrt{13}}{9}$$ ……答

1/3

練習 2. 直線 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-a}{2}$

が球面 $x^2+y^2+z^2=1$ に接するように定数 a の値を定めよ。

解 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-a}{2}=t$$

とおくと

$$x=t+1,\ y=2t+2,\ z=2t+a\ \cdots\cdots①$$

これが球とただ1点を共有するように a を定めればよい。

①を $x^2+y^2+z^2=1$ に代入して

$$(t+1)^2+(2t+2)^2+(2t+a)^2=1$$

$$\therefore\quad 9t^2+2(2a+5)t+(a^2+4)=0$$

これが重複解をもつことから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2a+5)^2-9(a^2+4)=0$$

$$\therefore\quad 5a^2-2a+11=0$$

$$\therefore\quad a=\frac{10\pm3\sqrt{5}}{5}$$ ……答

*　*　*

◆ では，ややめんどうな問題をやってみませんか。

1/3

練習 3. 直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ が，球 $x^2+y^2+z^2=4$ から切りとられる弦の長さを求めよ。

ヒント $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}=k$$

とおいてみると

$$x=2k+1,\ y=2k+3,\ z=k+2$$

となります。これを球の方程式

$$x^2+y^2+z^2=4$$

に代入すると k がきまる。したがって，x, y, z がきまる。こうして，弦の長さが求められます。

解 $x=2k+1,\ y=2k+3,\ z=k+2$

を球の方程式に代入して，書きかえると，

$$9k^2+20k+10=0\ \cdots\cdots①$$

この2つの解を k_1, k_2 とすると，弦の長さ l は

$$l^2=\{(2k_1+1)-(2k_2+1)\}^2$$
$$+\{(2k_1+3)-(2k_2+3)\}^2$$
$$+\{(k_1+2)-(k_2+2)\}^2$$
$$=9(k_1-k_2)^2$$

ところが①で，解と係数の関係から

$$k_1+k_2=-\frac{20}{9},\quad k_1k_2=\frac{10}{9}$$

であるから

$$l^2=9\{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2\}$$
$$=9\left(\frac{400}{81}-\frac{40}{9}\right)=\frac{40}{9}$$
$$\therefore\quad l=\frac{2\sqrt{10}}{3}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

（注） **方向余弦** を使うと，もう少し簡単になります。すなわち，直線の方程式は

$$\frac{x-1}{\frac{2}{3}}=\frac{y-3}{\frac{2}{3}}=\frac{z-2}{\frac{1}{3}}=k$$

となり，

$$x=\frac{2}{3}k+1,\quad y=\frac{2}{3}k+3,\quad z=\frac{1}{3}k+2$$

これを $x^2+y^2+z^2=4$ に代入して整理すると

$$3k^2+20k+30=0$$

この２つの解の差が弦の長さになります。それは

$$(k_1-k_2)^2=(k_1+k_2)^2-4k_1k_2$$
$$=\frac{400}{9}-\frac{4\cdot30}{3}=\frac{40}{9}$$
$$\therefore\quad |k_1-k_2|=\frac{2\sqrt{10}}{3}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

*　*　*

◆ では，次にはやや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4.　２点A(10, 2, 5)，B(−6, 10, 11) を直径の両端とする球面が z 軸から切りとる線分の長さを求めよ。　（東大）

（解） AB を直径とする球面上の点を P(x, y, z) とすると PA⊥PB であるから，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$$
$$=(x-10,\ y-2,\ z-5)\cdot(x+6,\ y-10,\ z-11)$$
$$=(x^2-4x-60)+(y^2-12y+20)+(z^2-16z+55)$$
$$=x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$$

ゆえに，z 軸との交点については

$$x=y=0$$

を代入して

$$z^2-16z+15=0$$
$$\therefore\quad z=1,\ 15$$

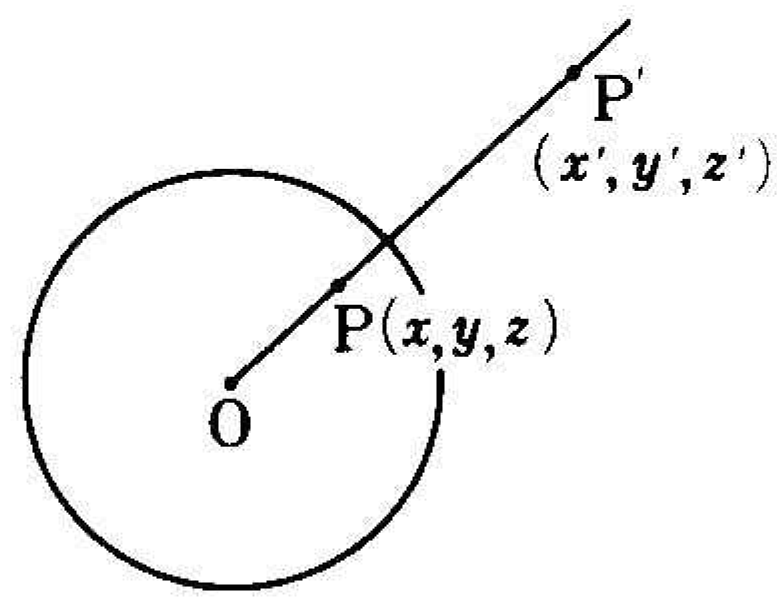
よって，求める長さは $15-1=14$ である。

$\boxed{答}$ 14

（注） 球の方程式は中心の座標と半径から求めてもよいが，上のやり方がいちばん簡単。

練習 5. 中心が原点O，半径が r の球が与えられている。空間の１点 P(x, y, z) に対して，半直線 OP 上の点 P′(x', y', z') を対応させ，$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OP'}}=r^2$ ならしめるとき，x', y', z' を x, y, z, r で表せ。

（ヒント） O，P，P′ が同一直線上にありますから



$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=k\quad(k>0)$$

とおくことができます。ここで，$k>0$ となるのは，Oについて，P，P′ が同じ側にあるからです。

次に，

$$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OP'}}=r^2$$
$$\therefore\quad\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=r^2$$

この式に

$$x'=kx,\quad y'=ky,\quad z'=kz$$

を代入して

$$k(x^2+y^2+z^2)=r^2$$
$$\therefore\quad k=\frac{r^2}{x^2+y^2+z^2}$$

したがって

$$x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2+z^2},\quad y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2+z^2},$$
$$z'=\frac{r^2z}{x^2+y^2+z^2}$$

（注） P と P′ は互いに他の **反転**（はんてん）といい，重要な変換です。

◑ 球と平面の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈球と平面の関係，それは円と直線の関係そっくりです。それはなぜか。残念ながら，高校の範囲ではありませんね。

◆ 球と平面の関係は3つに分かれます。

第1は交わるとき，第2は接するとき，そして，第3はまったく外にあるとき，です。そして，その吟味は，

球の中心から平面に下した垂線の長さが，半径より大きいか，等しいか，小さいか

によってきまるのです。では，これをやってみませんか。

その前に1つ：

点 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であることをお忘れなく。

\14 **練習 1.** 平面 $x+y+z+k=0$ が単位球に交わるように k の範囲を定めよ。

ヒント　単位球とは原点を中心とし，半径1の球ですよ。

ところで，球の中心 (0, 0, 0) から平面 $x+y+z+k=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{|0+0+0+k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{3}}$$

これが1より小さければよい。だから：——

$$\frac{|k|}{\sqrt{3}}<1$$

$$\therefore\quad |k|<\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

\14 **練習 2.** 平面 $ax+y+z+2=0$ が球：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ に接するように，定数 a の値を定めよ。

ヒント　球の中心 (1, 1, 1) から平面

$$ax+y+z+2=0$$

に下した垂線の長さは

$$\frac{|a+1+1+2|}{\sqrt{a^2+1+1}}$$

で，これが半径1に等しければよいのですから，

$$\frac{|a+4|}{\sqrt{a^2+2}}=1$$

$$\therefore\quad |a+4|=\sqrt{a^2+2}$$

両辺正だから2乗してかまわない。

$$a^2+8a+16=a^2+2$$

$$\therefore\quad 8a+14=0$$

$$a=-\frac{7}{4}$$

答　$-\dfrac{7}{4}$

これは意外と簡単だった。では，次の問題はどうですか。

\14 **練習 3.** 平面 $ax+y+z+a=0$ が単位球（原点を中心とし，半径が1の球）の外にあるための条件を求めよ。

解　球の中心 (0, 0, 0) から下した垂線の長さが半径1より大であることが必要かつ十分な条件である。

さて，点 (0, 0, 0) から

$$ax+y+z+a=0$$

に下した垂線の長さが半径1より大であれば

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+1^2+1^2}}>1$$

$$\therefore\quad |a|>\sqrt{a^2+2}$$

両辺を2乗しても同値であるから

$$a^2>a^2+2$$

これは不成立。

ゆえに，平面 $ax+y+z+a=0$ が単位球の外にあることはない。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみましょう。

練習 4. 平面 α は z 軸の正の部分と交わりベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 2)$ に垂直である。

球 $x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ を平面で切ってできる円の面積が 4π であるとき，α の方程式を求めよ。　（横浜市大）

ヒント　平面 α は $\vec{a}=(2,\ 1,\ 2)$ に垂直ですから

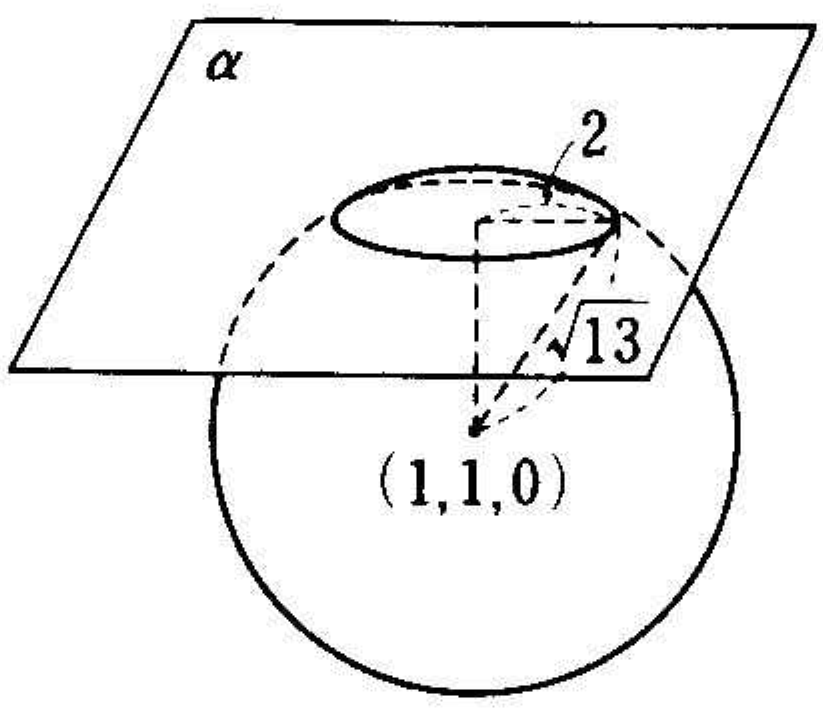
$$2x+1\cdot y+2z+c=0$$

とおくことができます。

いっぽう球の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=13$$

となりますから，中心は $(1,\ 1,\ 0)$，半径は $\sqrt{13}$ です。切り口の面積が 4π だというから切り口の内の半径は 2 でしょう。



してみると，点 $(1,\ 1,\ 0)$ から平面 α に下した垂線の長さは

$$\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=3$$

のハズ。

$$\therefore\quad \frac{|2\cdot1+1\cdot1+2\cdot0+c|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$$

$$\therefore\quad |c+3|=9$$

$$\therefore\quad c+3=\pm9$$

$$\therefore\quad c=6,\ -12$$

ところが，平面は z 軸を正の部分で切るということから　$c<0$

$$\therefore\quad c=-12$$

ゆえに，求める平面の方程式は

$$2x+y+2z-12=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

です。

練習 5. 辺の長さが a の正四面体に内接する球の半径を求めよ。　（九大）

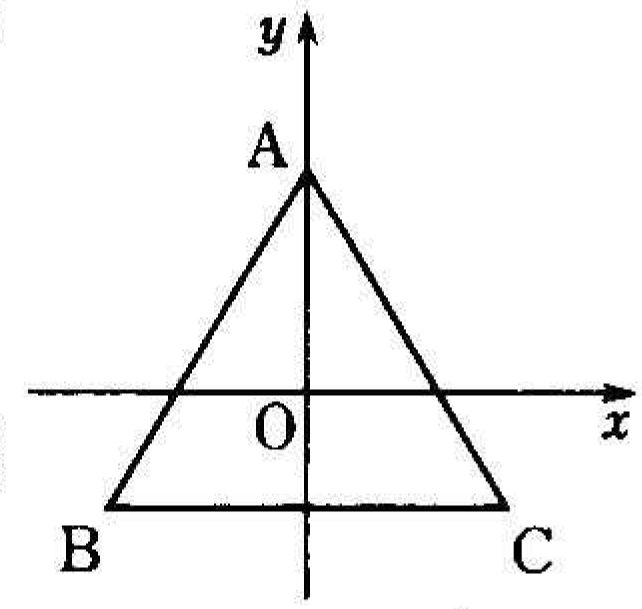
ヒント　いろいろな方法が考えられます。純幾何学的にやってもできますし，投影図を使ってもいい，空間座標を使ってもよいし，ベクトルも使えます。ここでは，空間座標で扱ってみましょう。

正四面体の底面を右のようにおくと

$$A\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ 0\right)$$

$$B\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a,\ 0\right)$$

$$C\left(\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a,\ 0\right)$$



となります。第 4 の頂点 D は z 軸上にありますから，その座標を $(0,\ 0,\ b)(b>0)$ とおくと

$$\overline{AD}^2=0^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+b^2=a^2$$

$$\therefore\quad b=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

です。したがって，平面 DBC の方程式は

$$\pi:\quad y-\frac{\sqrt{2}}{4}z+\frac{\sqrt{3}}{6}a=0$$

となります。さて，内接球の半径を r としますと，中心は $(0,\ 0,\ r)$ ですから，これから平面 π に下した垂線の長さが r であることより

$$\frac{\left|-\frac{\sqrt{2}}{4}r+\frac{\sqrt{3}}{6}a\right|}{\sqrt{0^2+1^2+\frac{2}{16}}}=r$$

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{6}}{12}a \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注）　正四面体の場合には，内接球の中心と外接球の中心と一致しますから，外接球の半径もすぐ求められます。すなわち，

$$b-r=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{12}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

でしょう。

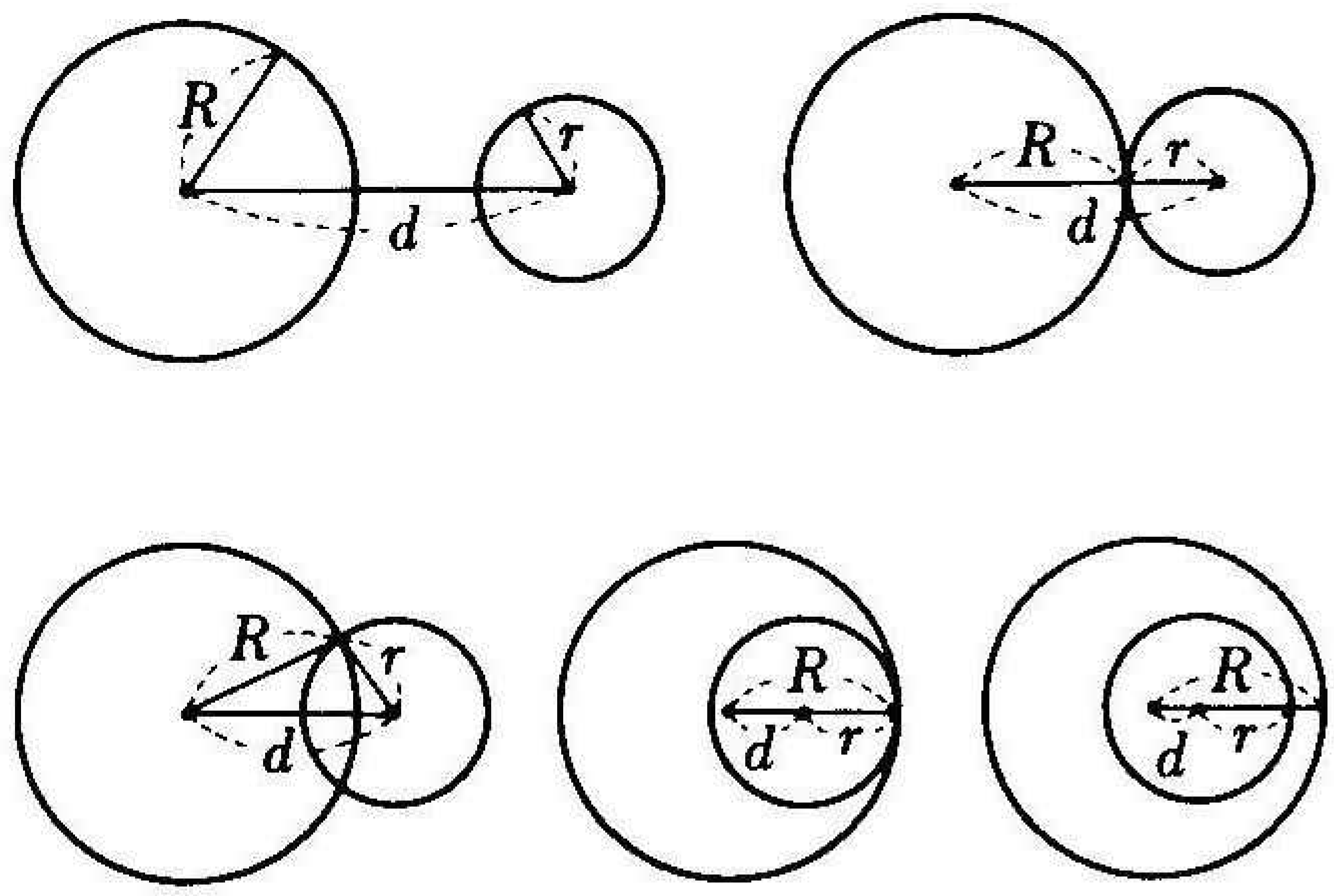
また，上の解から，正四面体の高さは $b=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ とわかっているのですから，体積などもすぐ求められるわけです。

球と球の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆球と球の関係は円と円の関係とほとんど同じです。というのも，中心を通る直線について2円を回転すると球になるからだ。

◆　2つの球の相互関係は5つあります。そして，円の場合と同じく，**半径** R，r と**中心距離** d によってきまります。すなわち，



まったく外にあるとき　$R+r<d$
外接しているとき　$R+r=d$
交わっているとき　$R\sim r<d<R+r$
内接しているとき　$R\sim r=d$
まったく内にあるとき　$d<R\sim r$

です。では，次をやってみませんか。

■練習 1. 2つの球

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$(x-a)^2+y^2+z^2=4$$

が外接するように，定数 a の値を定めよ。

ヒント　半径は1と2，中心距離は

$$\sqrt{(a-0)^2+0^2+0^2}=\sqrt{a^2}=|a|$$

$\sqrt{a^2}=a$ ではありませんよ!!

そこで，外接の条件から

$$|a|=1+2=3$$

$$\therefore\quad a=\pm 3 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 2. 2つの球

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=1$$

が交わるように a の範囲を定めよ。

ヒント　半径は1と1，中心距離は

$$\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}\,|a|$$

ですから

$$1\sim 1<\sqrt{3}\,|a|<1+1$$

$$\therefore\quad 0<|a|<\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad -\frac{2\sqrt{3}}{3}<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}\quad (a\neq 0)\ \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

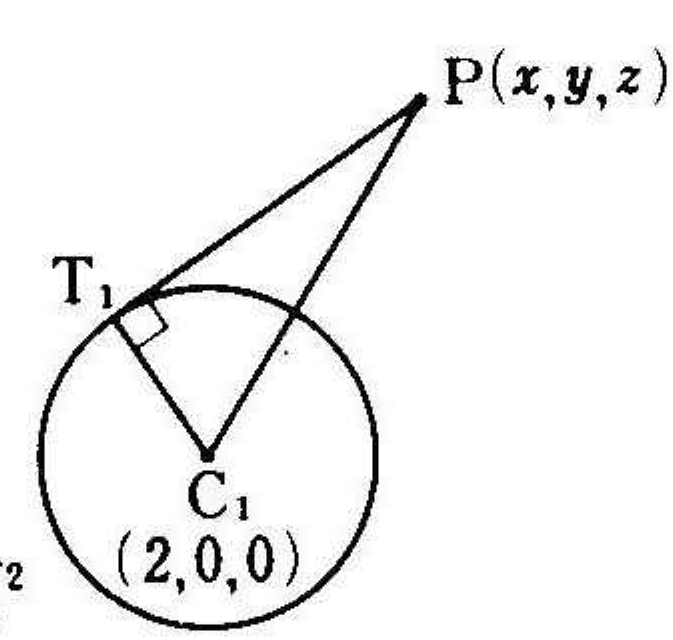
◆　2つの球に関係した応用問題をやってみませんか。

練習 3. 2つの球

$$S_1:(x-2)^2+y^2+z^2=1$$
$$S_2:(x+3)^2+y^2+z^2=4$$

に引いた接線の長さの等しい点Pの軌跡を求めよ。

ヒント　点 $P(x,\ y,\ z)$ から球 S_1 に引いた接線の接点を T_1 としますと，右の図から



$$\overline{PT_1}^2=\overline{PC_1}^2-\overline{C_1T_1}^2$$

となります。$\overline{C_1T}=1$ ですから

$$\overline{PT_1}^2=\{(x-2)^2+y^2+z^2\}-1$$

同じように球 S_2 に引いた接線の長さは

$$\overline{PT_2}^2=\{(x+3)^2+y^2+z^2\}-4$$

で与えられます。ところが

$$\overline{PT_1}^2=\overline{PT_2}^2$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2-1=(x+3)^2+y^2+z^2-4$$

ゆえに

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{5}$$

つまり，求める軌跡は x 軸に垂直な平面で

あることがわかります。

*　*　*

◆ 次には，ややめんどうな応用問題をやってみましょう。

1/6

練習 4. 空間において，x 座標，y 座標，z 座標がすべて正であるような点を中心とし，3つの座標平面に接する2つの球の半径をそれぞれ r_1，$r_2(r_1 \neq r_2)$ とする。この2つの球が交わるとき，交線上の1点Pと原点Oとの距離を r_1，r_2 で表せ。

（岡山大）

ヒント 半径 r_1 の球は，中心が $(r_1,\ r_1,\ r_1)$ ですから，その方程式は

$$(x-r_1)^2+(y-r_1)^2+(z-r_1)^2=r_1^2$$

で表されます。展開すると

$$x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)r_1+2r_1^2=0 \quad \cdots\cdots①$$

同じように，半径 r_2 の球は

$$x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)r_2+2r_2^2=0 \quad \cdots\cdots②$$

いま，2つの球の交線上の点 P の座標を $(X,\ Y,\ Z)$ としますとPは①の上にもあるし，②の上にもあるのですから

$$X^2+Y^2+Z^2-2(X+Y+Z)r_1+2r_1^2=0 \quad \cdots\cdots③$$

$$X^2+Y^2+Z^2-2(X+Y+Z)r_2+2r_2^2=0 \quad \cdots\cdots④$$

また　$\overline{\mathrm{OP}}^2=X^2+Y^2+Z^2$　……⑤

となります。したがって，③，④，⑤から $\overline{\mathrm{OP}}$ を求めればよいことになります。そこで ③$\times r_2-$④$\times r_1$ を作りますと

$$(r_2-r_1)(X^2+Y^2+Z^2)-2r_1r_2(r_2-r_1)=0$$

$r_1 \neq r_2$ ですから割ってもよい。

$$\therefore\quad X^2+Y^2+Z^2=2r_1r_2$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2r_1r_2} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

注 幾何学的にもできますが，少しめんどうです。おれは，と思う人はやってみませんか。z 軸と2球の中心線で定まる平面による切り口を考えてみるといいでしょう。

1/6

練習 5. 2つの球　$x^2+y^2+z^2+x=\dfrac{3}{4}$，$x^2+y^2+z^2-x=\dfrac{3}{4}$ の内部の共通部分の体積を求めよ。

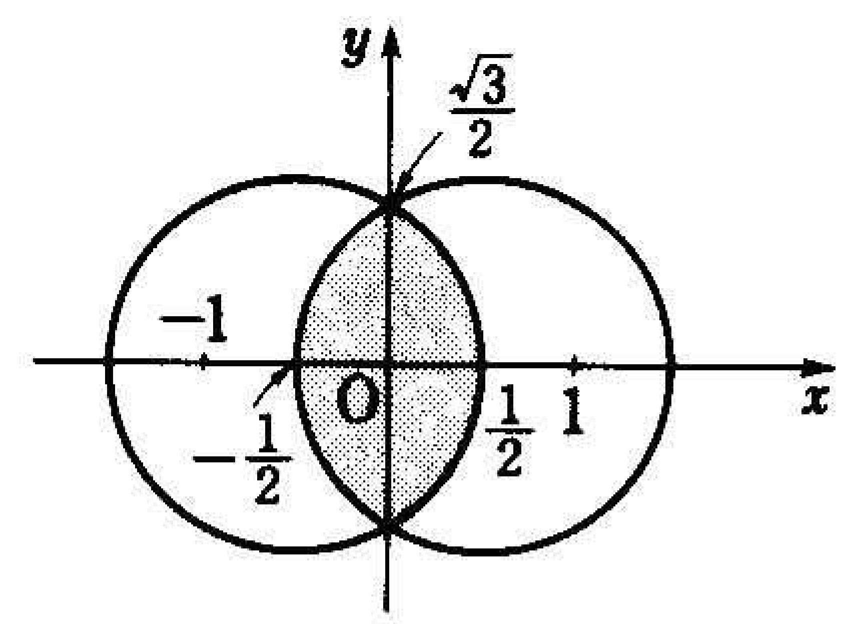
（学習院大）

ヒント 書きかえてみますと，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=1$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=1$$

ですから，求める部分は，右の図に示すような2つの円の共通部分を x 軸のまわりに回転して得られる部分の体積と同じです。



このことに気がつけば，もはやめんどうはありませんね。

求める体積を V とすると

$$V=2\int_0^{\frac{1}{2}}\pi y^2dx$$

ここに

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$$

$$\therefore\quad y^2=1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=-x^2-x+\frac{3}{4}$$

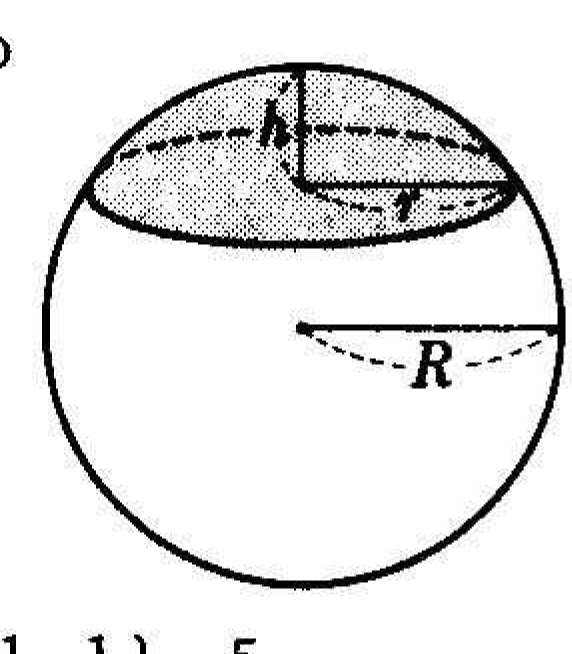
$$\therefore\quad V=2\pi\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5}{12}\pi \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

注 右のような球冠の体積を表す公式は

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

です。オボエル必要はありませんが，これを知っていれば，



$$V=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{24}\pi$$

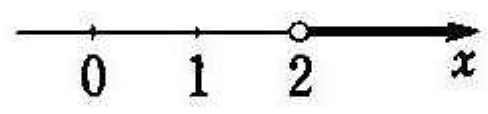
となり，この2倍の $\dfrac{5}{12}\pi$ が求めるものです。

○空間と領域

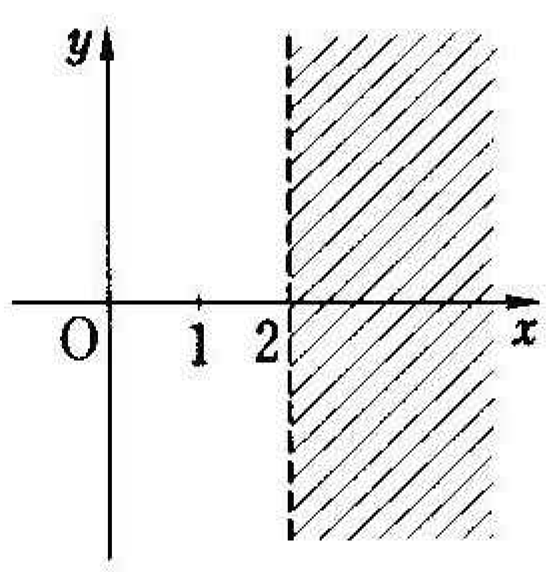
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆空間の領域とて，平面と異なることはないのです。しかし，なにぶん，直観的にみることができない，そこに難点があるのだ。

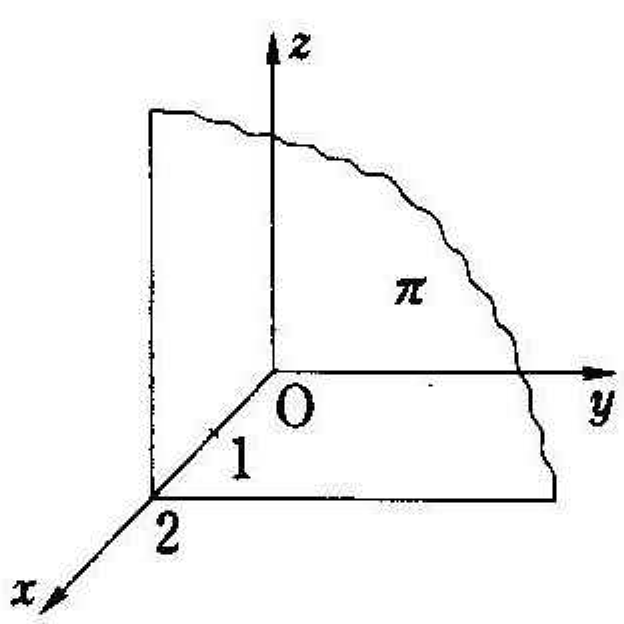
◆ 数直線上で $x>2$ を満足する**領域**といえば右の図のふとい実線で表されます。



また，xy 平面で $x>2$ を満足する領域は右の図のような斜線を引いた部分で，境界線は含みません。



そして，空間で $x>2$ を満足する領域は右のような平面 $\pi : x=2$ の手前の部分です。もちろん境界面上の点は含まないのです。これで，境界の扱い方にちがいのないことがわかるでしょう。では，いよいよ，本論にいきましょう。



練習 1. 次の領域を表す不等式をかけ。

(i) 数直線上で2点 A(0)，B(1) を両端する線分

(ii) xy 平面上で 4 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を頂点とする正方形の内部および周囲

(iii) 空間において8点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0,1,0)，D(0, 0, 1)，E(1,0,1)，F(1,1,1)，G(0, 1, 1) を頂点とする立方体の内部および表面

ヒント いうまでもなく：──

(i) $0 \leqq x \leqq 1$

(ii) $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$

(iii) $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1$

で与えられます。

*　*　*

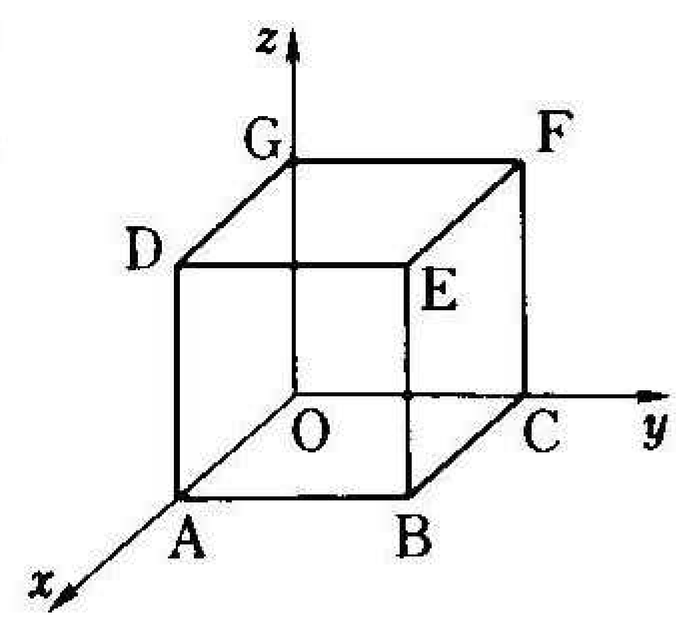
練習 2. a は3より小さい正の数とする。立方体

$\{(x, y, z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$

を平面 $x+y+z=a$ で切った切り口の面積を $f(a)$ とおく。$f(a)$ はどんな関数か。

（青山学院大）

ヒント 立方体を右の図のように OABC-GDEF としますと

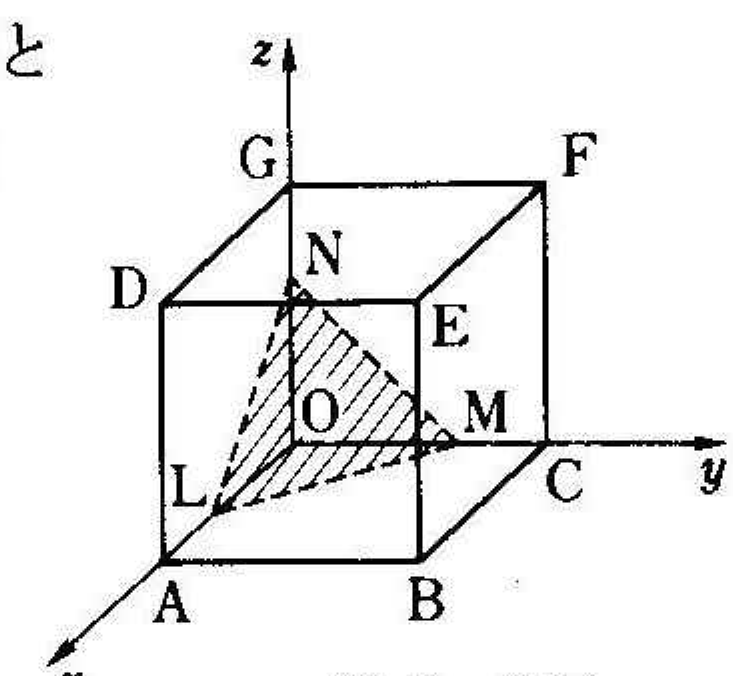


(i) $0<a \leqq 1$ のときには切り口は $L(a,\ 0,\ 0)$，$M(0,\ a,\ 0)$，$N(0,\ 0,\ a)$ を結ぶ正三角形で，この1辺は $\sqrt{2}a$ ですから

$$f(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

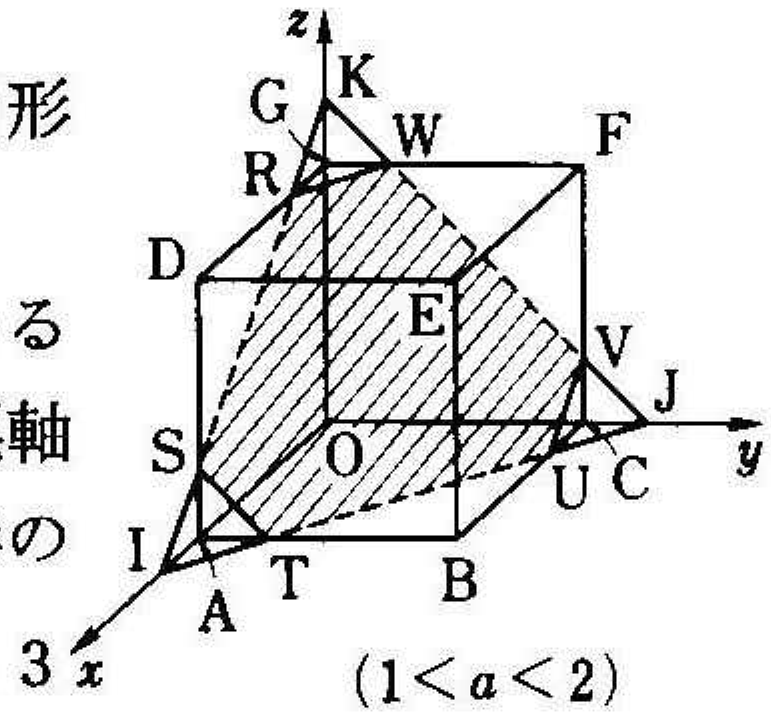
となります。

(ii) $1<a<2$ のときには，切り口は $R(a-1,\ 0,\ 1)$，$S(1,\ 0,\ a-1)$，$T(1,\ a-1,\ 0)$，$U(a-1,\ 1,\ 0)$，$V(0,\ 1,\ a-1)$，$W(0,\ a-1,\ 1)$，の6点を結ぶ六角形です。

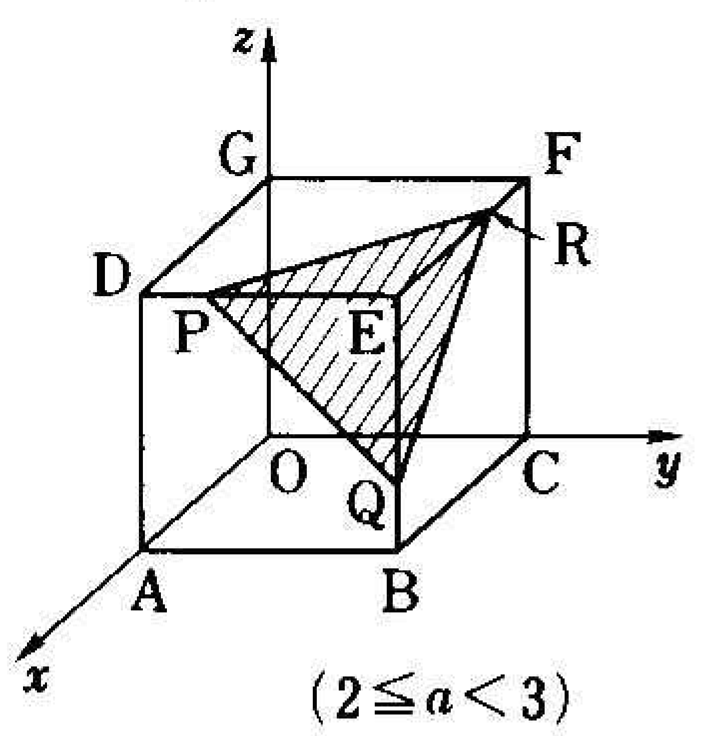


$(0<a \leqq 1)$

この面積を求めるには，平面が座標軸とつくる正三角形の面積 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$ から3



$(1<a<2)$



(2≦a<3)

つの小正三角形 △ITS, △JVU, △KRW の面積を引けばよいでしょう。

ところがこの小正三角形の１辺の長さは $\sqrt{2}(a-1)$ ですからその面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{2}(a-1)\}^2$ で，したがって

$$f(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{2}(a-1)\}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(-2a^2+6a-3)$$

となります。最後に，

(iii)　$2\leqq a<3$ のときには，切り口は $P(1,\ a-2,\ 1)$，$Q(1,\ 1,\ a-2)$，$R(a-2,\ 1,\ 1)$ を結ぶ正三角形で，この１辺は $\sqrt{2}(3-a)$ ですから

$$f(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{2}(3-a)\}^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-a)^2$$

となります。結局 $f(a)$ は次のようです。

$0<a\leqq1$ のとき $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$

$1<a<2$ のとき $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-2a^2+6a-3)$

$2\leqq a<3$ のとき $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-a)^2$

＊　＊　＊

◆　xy平面上で直線 $x+2y+4=0$ は平面を２つの部分に分け，原点側では，$x+2y+4>0$ です。これを**正領域**といい，原点の反対側では $x+2y+4<0$ です。この部分を**負領域**といいます。

まったくおなじことは空間でもあります。たとえば，平面 $x+2y+3z-6=0$ は空間を２つの部分に分けますが，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ のある側では $x+2y+3z-6<0$ で，これが負領域です。そして，原点のない側では正領域となります。では次を：――

9

1/5

練習 3.　平面 $x+y+z+a=0$ が２点 $A(1,\ 2,\ 3)$ と $B(2,\ 2,\ 0)$ の間を通るように a の範囲を定めよ。

ヒント　平面の場合とまったくおなじようにやればよいのです。

$$f(x,\ y,\ z)=x+y+z+a$$

とおくと $A(1,\ 2,\ 3)$ と $B(2,\ 2,\ 0)$ のうち，一方は $f(x,\ y,\ z)$ の正領域になって，他方は負領域にあるハズです。そこで

$$f(1,\ 2,\ 3)\cdot f(2,\ 2,\ 0)$$
$$=(a+6)\cdot(a+4)<0$$
$$\therefore\quad -6<a<-4\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

?

練習 4.　球 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+a=0$ が２点 $A(1,\ 1,\ 1)$，$B(2,\ 2,\ 2)$ を結ぶ線分と唯１点で交わるとき a の範囲を定めよ。

ヒント　$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+a$ とおきますと，$f(x,\ y,\ z)=0$ は２点 A，Bの間を唯１回通ればよい。そこで

$$f(1,\ 1,\ 1)\cdot f(2,\ 2,\ 2)$$
$$=(a-9)(a-12)<0$$
$$\therefore\quad 9<a<12\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

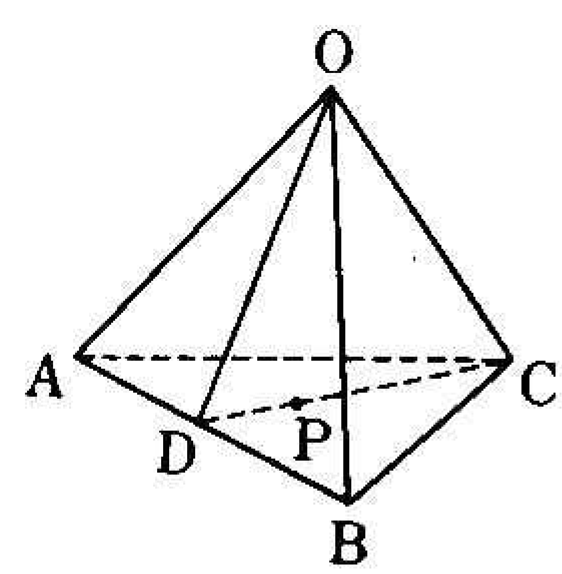
◆　平面上で領域をベクトルで扱うことも少なくありません。空間でもおなじです。では，次をやってみませんか。

1/2

練習 5.　4四面体 OABC と１点Pがあって

$$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$$
$$l>0,\ m>0,\ n>0,\ l+m+n=1$$

のとき，Pは △ABC の内部にあることを示せ。



ヒント　Pが △ABC の内部にあることを証明しようと考えないで，Pはどんな点であるか，求めてみよう，と考えるのがコツ。そして，内分の公式をくりかえし使うのです。

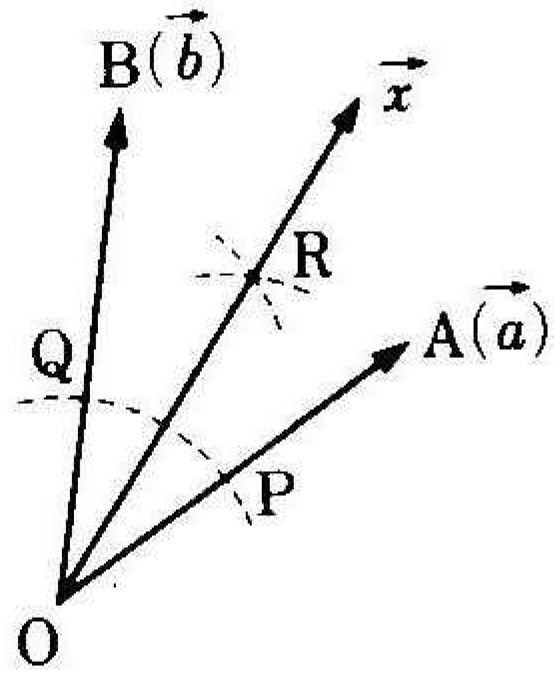
●角の2等分線の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆角の2等分線を求める仕方はいろいろありますよ。いくつ知ってますか？ ここではベクトルの応用だけなんだが……

◆ 角の2等分線といっても，ここで扱うのはベクトルについてのものです。ともあれ具体的な問題からはじめましょう。

練習 1. 右の図において $\angle$AOB の2等分線の方程式を求めよ。



ヒント 角の2等分線を作図するには，Oを中心とし半径 r の円をかき，OA，OB との交点をそれぞれP，Qとし，P，Qを中心とし半径 r の円をかき交点を R とすると，OR は2等分線になります。

この手順をそのままベクトル計算にあてはめてみましょう。$r=1$ として……

点Pの位置ベクトルは，$\vec{a}$ を $\vec{a}$ の長さ $|\vec{a}|$ で割ったものですから $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ で与えられます。

同じく，点Qは $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ です。したがってRは

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

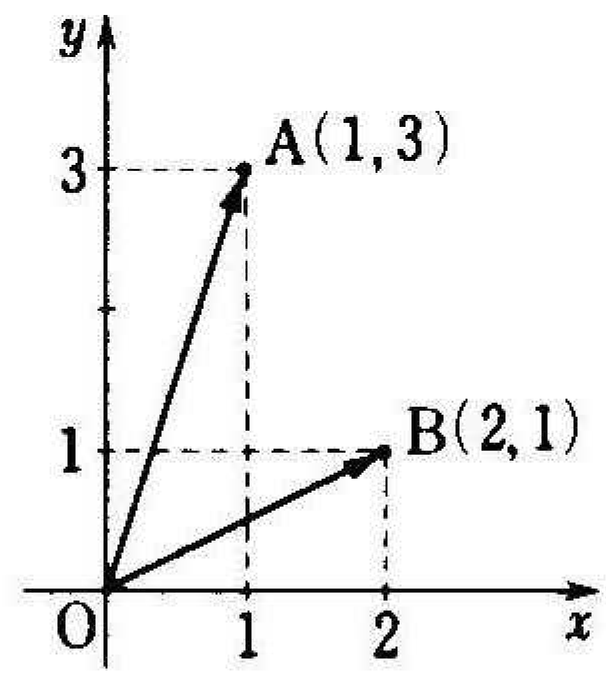
ということになります。これに負でない実数を掛けると $\angle$AOB の2等分線上のすべての点を表せるハズ。

$$\therefore\quad \vec{x}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\quad (t\geqq 0)\quad \cdots\cdots(*)$$

17

練習 2. 平面上に3点A(1, 3)，B(2, 1)，O(0, 0) がある。$\angle$AOB の2等分線の方程式を求めよ。

ヒント もちろん座標でもできます。すなわち，



OA : $y=3x$

OB : $y=\dfrac{1}{2}x$

です。$\angle$AOB の2等分線上の点 P(x, y) に下した垂線の長さが等しいことを式で表せばいいでしょう。

$$3x-y=0,\quad x-2y=0$$

と変形して，垂線の長さの公式を使って

$$\frac{|3x-y|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x-2y|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{5}\,|3x-y|=\sqrt{10}\,|x-2y|$$

$$\therefore\quad |3x-y|=\sqrt{2}\,|x-2y|$$

$$3x-y=\pm\sqrt{2}(x-2y)$$

オヤ，2つあるのはおかしいぞ。いや，一方が適さないのです。

＋をとると

$$y=\frac{\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-1}x\quad（傾きが負だから不適）$$

－をとると

$$y=\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}x$$

これが適す。もちろん，ここでやめないで

$$y=\frac{1+5\sqrt{2}}{7}x$$

までやっておくこと。

ところで，これをベクトルでやるのが目的です。

前問の結果 (*) を使ってみようか。

$$\vec{x}=t\left(\frac{(1,\ 3)}{\sqrt{10}}+\frac{(2,\ 1)}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\frac{t}{\sqrt{10}}\{(1,\ 3)+\sqrt{2}(2,\ 1)\}$$

$$\therefore \quad x=\frac{t}{\sqrt{10}}(1+2\sqrt{2})$$

$$y=\frac{t}{\sqrt{10}}(3+\sqrt{2})$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x}=\frac{3+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})}{-7}$$

$$=\frac{1+5\sqrt{2}}{7}$$

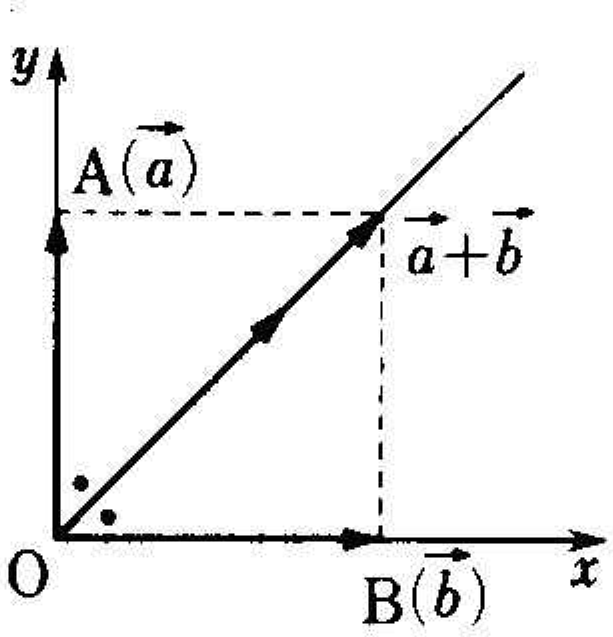
$$\therefore \quad y=\frac{1+5\sqrt{2}}{7}x \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

ナルホド，同じ結果だ。もちろん，(*) を覚えていられるわけはないから，同じ操作をくり返す必要があるわけだ。

＊　＊　＊

▶練習 3. 2点A，Bの点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は直交する単位ベクトルとする。∠AOB の2等分線上にある単位ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　（創価大）

（解）　ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ は ∠AOB の2等分線上にあるから，求めるベクトルは



$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})$$

である。

（注）　ちょっと，問題の意味が不確かです。∠AOB の2等分線上にある，というだけなら，$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})$ としたほうがよいかもしれない。しかし，あまり気にすることもあるまい。

▶練習 4. 空間に3点 A(3, −1, 2)，B(1, 2, 3)，C(4, 2, 0) があるとき，点 P(x, y, 0) と点Aを通る直線が ∠BAC の2等分線であるとき，x と y の値を求めよ。

（お茶の水女大）

（ヒント）　$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$

$\overline{AC}=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

ゆえに BC の中点 $M\left(\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{3}{2}\right)$ とAを通る直線が ∠BAC の2等分線ということになりましょう。さては，3点 A(3, −1, 2), $M\left(\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{3}{2}\right)$，P($x$, y, 0) が1直線上にある条件を求めればよいであろう，ということになります。したがって

$$\overrightarrow{AP} /\!/ \overrightarrow{AM}$$

より

$$(x-3,\ y+1,\ -2)=k\left(-\frac{1}{2},\ 3,\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad x-3=-\frac{k}{2},\ y+1=3k,\ -2=-\frac{k}{2}$$

$$\therefore \quad k=4$$

$$\therefore \quad x=1,\ y=11 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注）　上の解はベクトルを使ったとはいうもののヤヤ末梢的。本格的にやるなら練習2. のようにすることになります。計算練習と思ってやってみませんか。

▶練習 5. △ABC の ∠A の2等分線が BC と交わる点をDとすれば

$$BD : DC = AB : AC$$

であることをベクトルを使って証明せよ。

（ヒント）　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とし，BC を $|\vec{b}|:|\vec{c}|$ に内分する点を D* とすれば

$$\overrightarrow{AD^*}=\frac{|\vec{c}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$$

となります。このベクトル $\overrightarrow{AD^*}$ が ∠BAC を2等分することを示せば $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD^*}$，したがって D≡D*（DとD* が重なることを示す）ということになりましょう。さて，

$$\overrightarrow{AD^*}=\frac{|\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)$$

ところが，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ は $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 上の単位ベクトルですから，その和は ∠BAC の2等分線の上にあるハズ。よって証明された。

（注）　一般に $|\vec{c}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}$ が出てきたら $|\vec{b}||\vec{c}|$ でくくるのがコツ。お忘れなく。

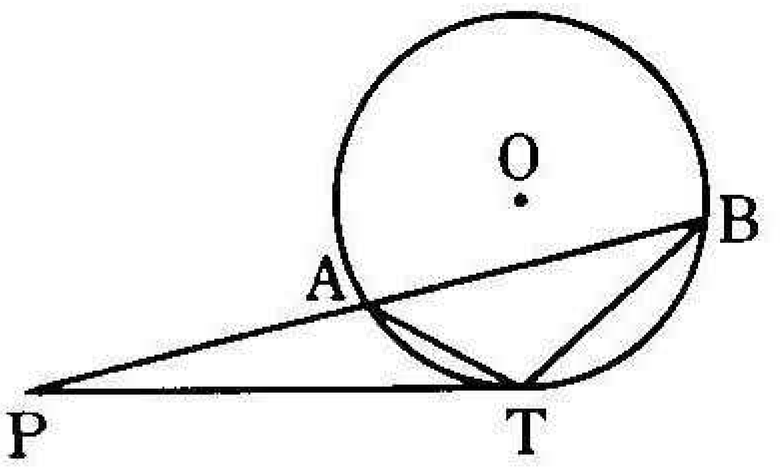
9

方べきの定理

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆方べきの定理は重要です。図形的に大事なんです。しかし，ここでは，主としてベクトルで扱ってみましょう。

◆ 右の図に示すように，点Pから円Oに，接線 PT と **割線**（かっせん）PAB を引きますと



$$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

なる関係があります。これを **方べきの定理** といいます。証明は簡単!!

$\triangle$PAT と $\triangle$PTB において

$$\angle \mathrm{APT}=\angle \mathrm{TPB}$$

$$\angle \mathrm{ATP}=\angle \mathrm{TBP}$$

$$\therefore\ \triangle \mathrm{PAT}\backsim\triangle \mathrm{PTB}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PT}}=\frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{PB}}$$

$$\therefore\ \mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\qquad \text{Q. E. D.}$$

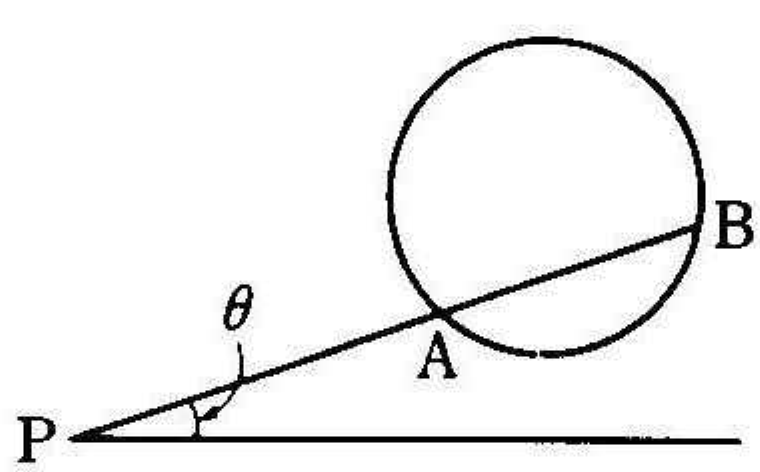
さて，この定理を座標を使って証明してみようか。

1/8

練習 1. 円の方程式を

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

とし，点 P $(x_0,\ y_0)$ を通る直線 PAB が円と交わる点を A，B とするとき，$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=$一定 であることを示せ。



（解） PAB が x 軸の正の方向となす角を θ とし，直線 PAB 上の点 Q に対して PQ$=t$ とすると，点Qの座標は

$$x=x_0+t\cos\theta,\quad y=y_0+t\sin\theta$$

です。ゆえに，円との交点については，

$$(x_0+t\cos\theta)^2+(y_0+t\sin\theta)^2$$

$$+A(x_0+t\cos\theta)+B(y_0+t\sin\theta)+C=0$$

$$\therefore\quad t^2+(2x_0\cos\theta+2y_0\sin\theta+A\cos\theta$$

$$+B\sin\theta)t+(x_0^2+y_0^2+Ax_0$$

$$+By_0+C)=0$$

この 2 つの解が $\overline{\mathrm{PA}}$，$\overline{\mathrm{PB}}$ であるから

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=|x_0^2+y_0^2+Ax_0+By_0+C|$$

$$=\text{一定}\qquad \text{Q. E. D.}$$

1/9

練習 2. 球の方程式を $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ とし，点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る直線 PAB が球と交わる点を A，B とするとき，$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=$一定 であることを示せ。

（ヒント） PAB の方向余弦，つまり，単位ベクトルの成分を l，m，n としますと，PAB 上の点Qは $(x_0+lt,\ y_0+mt,\ z_0+nt)$ で与えられます。ここに，$t=\overline{\mathrm{PQ}}$ です。

そこで，これを球の方程式に代入して

$$(x_0+lt)^2+(y_0+mt)^2+(z_0+nt)^2$$

$$+A(x_0+lt)+B(y_0+mt)$$

$$+C(z_0+nt)+D=0$$

$l^2+m^2+n^2=1$ を考慮して展開しますと

$$t^2+\{2(lx_0+my_0+nz_0)+Al+Bm$$

$$+Cn\}t+f(x_0,\ y_0,\ z_0)=0$$

となりましょう。そこで

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=f(x_0,\ y_0,\ z_0)=\text{一定}$$

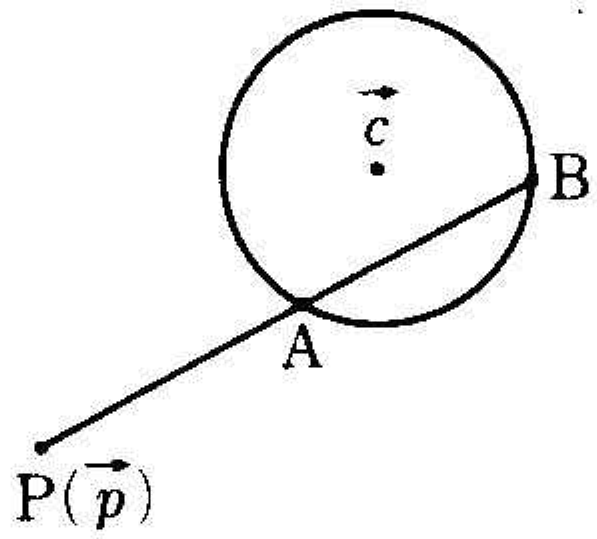
ナルホド，円の場合とまったく同じだったなあ。では，ベクトルではどうだろうか。

1/8

練習 3. 点 $\vec{c}$ を中心とし，半径Rの円に，同じ平面上にある点 P$(\vec{p})$ を通る割線を引き交点を A，B とするとき，$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ は

一定であることを示せ。

ヒント　直線 PAB に沿う単位ベクトルを $\vec{e}$ としますと，PAB 上の点Qは



$$\vec{p}+t\vec{e}$$

で表せます。ここに

$t=\overline{\mathrm{PQ}}$ です。したがって，点A，点Bでは

$$|(\vec{p}+t\vec{e})-\vec{c}|=R$$

$$\therefore\quad |\vec{e}t+(\vec{p}-\vec{c})|^2=R^2$$

$$\therefore\quad \{\vec{e}t+(\vec{p}-\vec{c})\}\cdot\{\vec{e}t+(\vec{p}-\vec{c})\}=R^2$$

$$\therefore\quad t^2+2\vec{e}\cdot(\vec{p}-\vec{c})t+(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})-R^2=0$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=|\vec{p}-\vec{c}|^2-R^2=\text{一定}$$

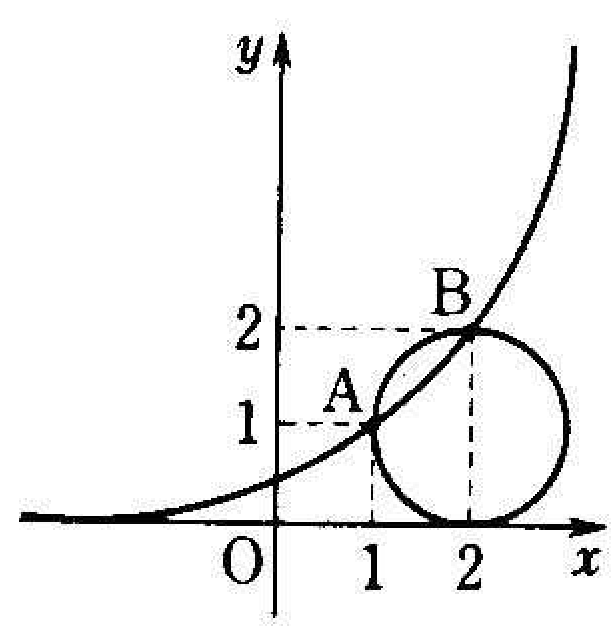
*　　*　　*

◆ では，方べきの定理の応用を 2，3 やってみませんか。

練習 4. 2 点 A(1, 1), B(2, 2) を通り，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

ヒント 1.　x 軸に接する円の方程式を

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$



としますと A，B を通ることから

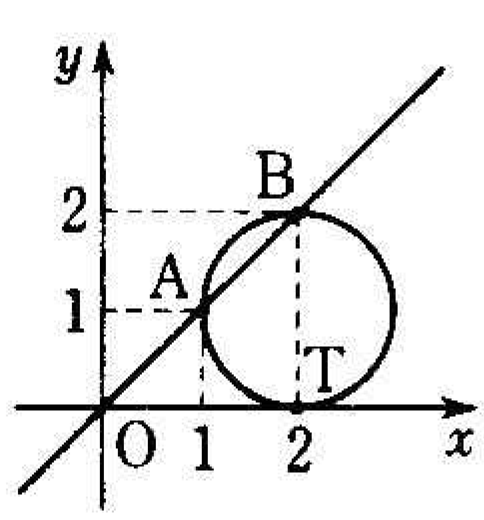
$$(1-a)^2+(1-b)^2=b^2 \quad \cdots\cdots①$$

$$(2-a)^2+(2-b)^2=b^2 \quad \cdots\cdots②$$

①−② より　$a=3-b$

これを①に代入して解けば

$$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases},\quad \begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$$



ゆえに，求める円は

$$x^2+y^2-4x-2y+4=0$$

および　$x^2+y^2+4x-10y+4=0$

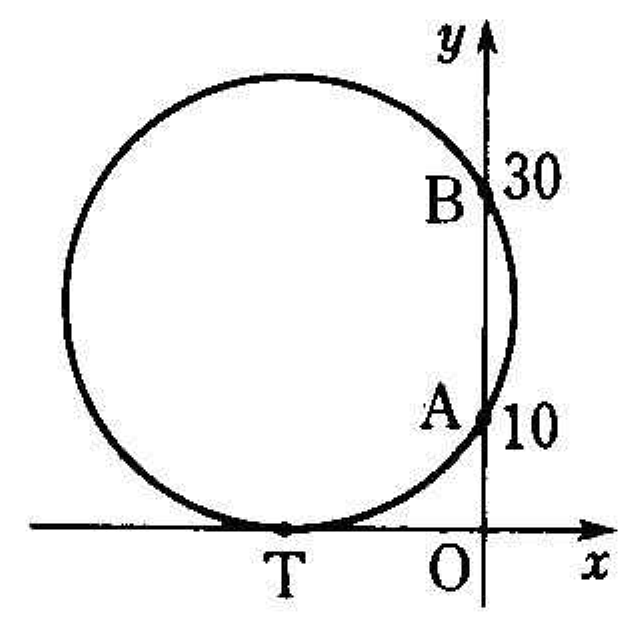
ヒント 2.（**方べきの定理を使ったもの**）直線 BA は原点を通るから，接点を T とすると，

$$\overline{\mathrm{OT}}^2=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=4$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{OT}}=2$$

ゆえに，接点Tの座標は $(\pm2,\ 0)$ で，したがって，求める円は 3 点 A，B，T を通ることから同じ結果が得られます。

練習 5. 地面に垂直な棒が立っていて，地面から10mないし30mの部分を赤く塗ってある。この部分を見込む角が最大となるのは，棒の地面に接する地点からどれだけの距離のところか。



ヒント　求める地点は右上の図のように，2 点 A，B を通り地面に接する点Tであることは明らかでしょう。

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{OT}}^2=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=10\cdot30=300$$

$$\therefore\quad \mathrm{OT}=10\sqrt{3}\,(\mathrm{m}) \qquad \cdots\cdots 答$$

*　　*　　*

◆ では，あと 1 つやってみましょう。

練習 6. 2 つの球に引いた接線の長さの等しい点の軌跡を求めよ。

ヒント　2 つの球の方程式を

$$f_1(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$f_2(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

としますと，点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ から引いた接線の長さの 2 乗は

$f_1(X,\ Y,\ Z)$ および $f_2(X,\ Y,\ Z)$

でしたね（☞ p.266）。したがって，求める軌跡は

$$f_1(X,\ Y,\ Z)=f_2(X,\ Y,\ Z)$$

で与えられます。すなわち，

$$(a_1-a_2)X+(b_1-b_2)Y+(c_1-c_2)Z+(d_1-d_2)=0$$

もちろん，2 つの球が交わっているときにはその球の内部や表面の点は除外すべきです。また，答としては $X,\ Y,\ Z$ を小文字になおします。

○2次曲面とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈2次曲線には，円や放物線やだ円などがあった。2次曲面には，球やだ円面や放物面などがある。

◆ 平面上で直角座標 x, y をとり，その2次方程式を作りますと，

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

が得られます。これのグラフをかくと，円，だ円，放物線，双曲線，平行な2直線，交わる2直線，重なる2直線などになります。

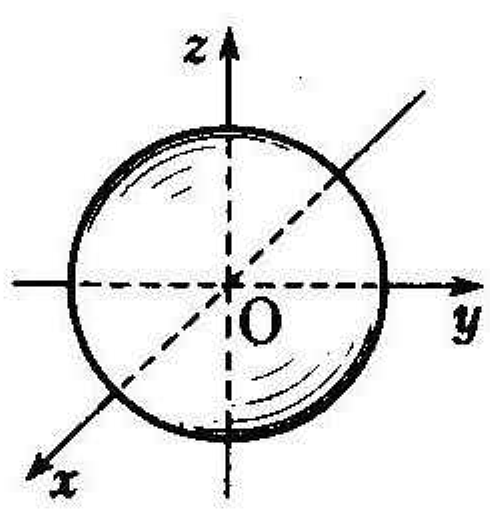
これに対し，空間で，直角座標をとり，その2次方程式を作りますと，

$$\boldsymbol{ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2lx+2my+2nz+d=0}$$

が得られます。そして，これは，**球**，**だ円面**，**双曲面**，**すい面**，**柱面**，**平行な2平面**，**相交わる2平面**，**重なる2平面**，などを表します。そして，これらを，総称して **2次曲面** というのです。では，次に，その具体的な例をあげることにしましょう。

*　*　*

◆ **球**：—— $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=R^2}$ $(R>0)$ は原点を中心とし，半径 R の球面を表します。詳しくは(☞ p.254)を参照してください。

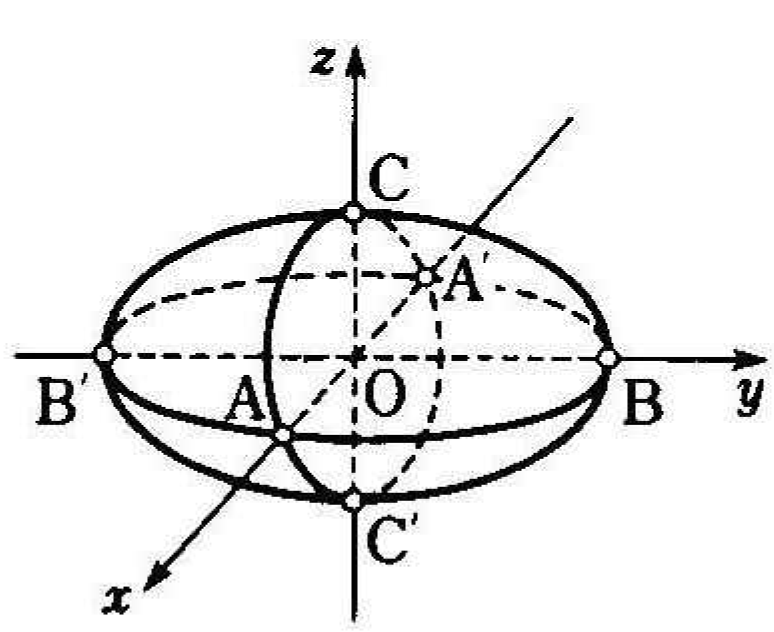


*　*　*

◆ **だ円面**：—— 2次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

の表す曲面は右の図に示すような曲面で，これをだ円面といいます。大体からいうと，フットボールの球の表面のようなもの，と思えばいいでしょう。



*　*　*

◆ **双曲面**：—— 2次方程式

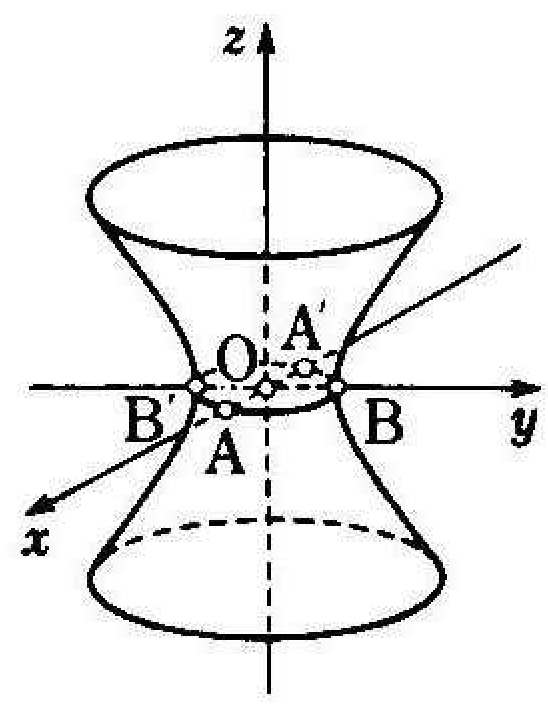
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

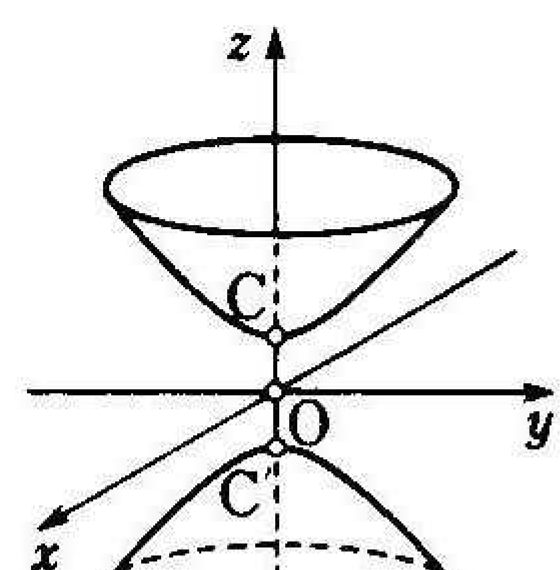
で表される曲面を一葉双曲面といいます。また2次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

の表す曲面を二葉双曲面というのです。つまり，右の図に示すように，それぞれ1つの面，あるいは2つの面からなっています。





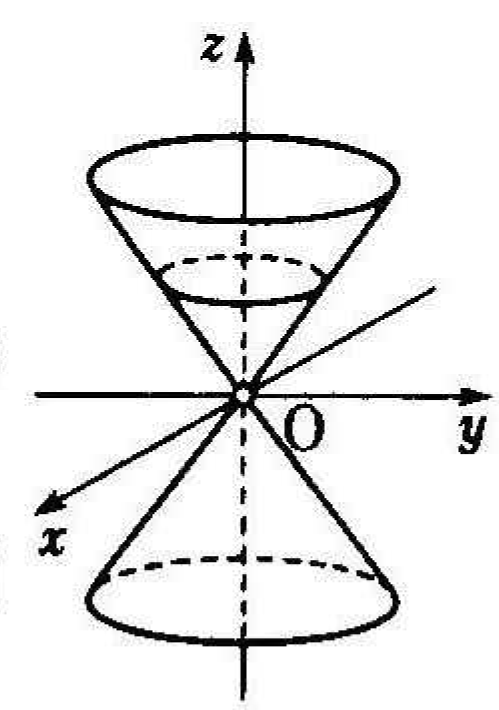
*　*　*

◆ **すい面**：——2次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

で表される曲面を（2次）すい面といいます。その面は右のようです。



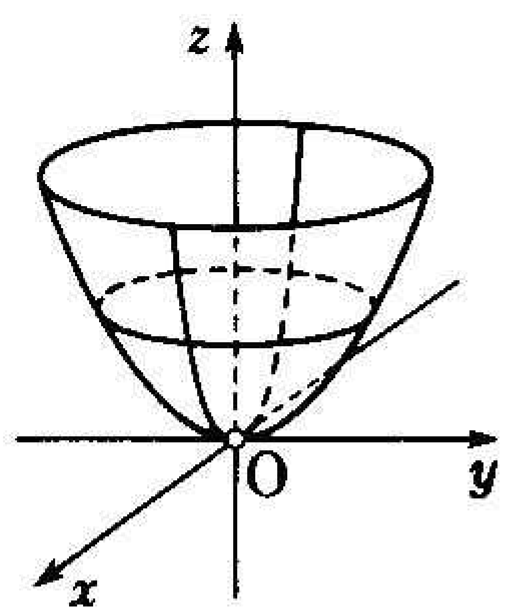
*　*　*

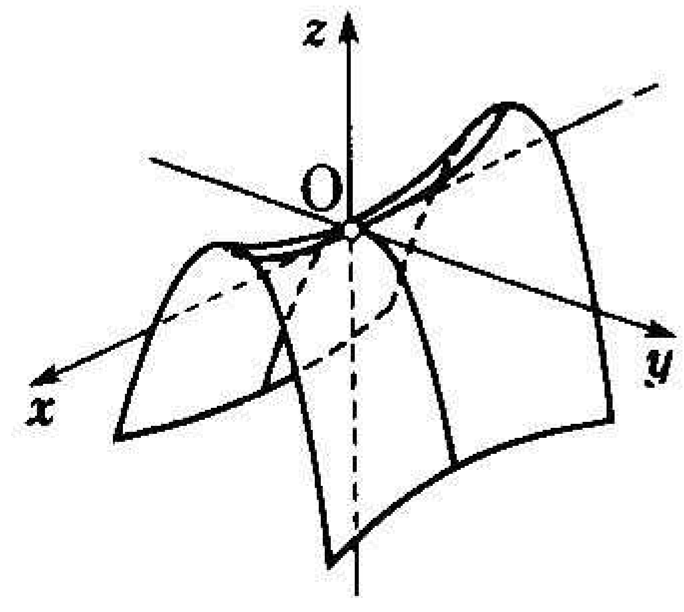
◆ **放物面**：—— 2次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz \quad (a>0,\ b>0,\ c\neq 0)$$

の表す面を，だ円的放物面といい，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz \quad (a>0,\ b>0,\ c\neq 0)$$





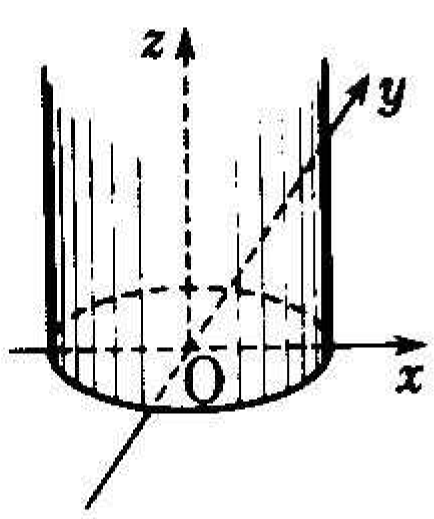
の表す面を双曲的放物面といいます。

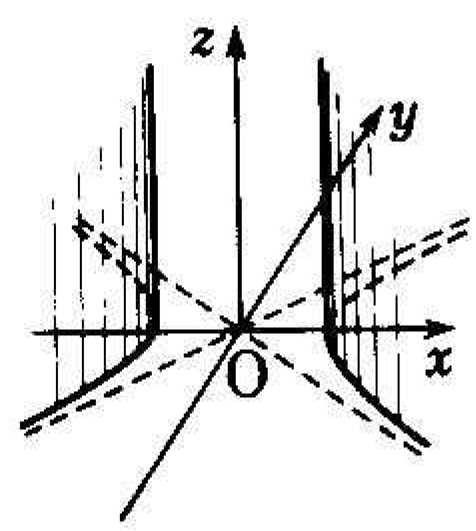
＊　＊　＊

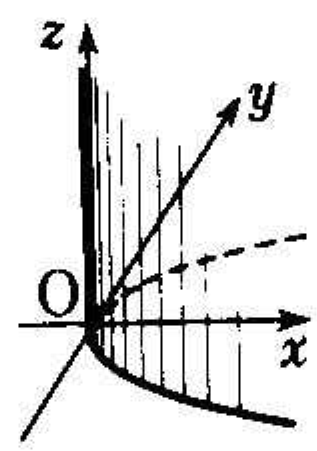
◆ **柱面**：── z を含まない 2 次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=2px$$

などの表す面を 2 次の柱面といいます。





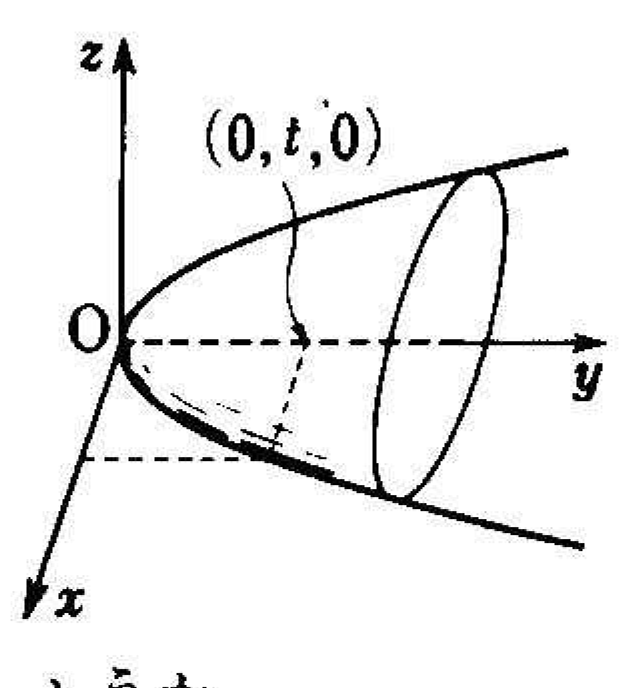


＊　＊　＊

◆ これら 2 次曲面の性質を調べることは立体解析幾何学と呼ばれる分野をなしていますが，高校の範囲ではありません。ここでは入試問題などで関連のあるものを 2, 3 やっておきましょう。(球については (☞ p.254))

練習 1. 空間に座標軸をとり，原点を O とする。O を 1 頂点とする正四面体 OABC があり，3 頂点 A, B, C は，xy 平面上の放物線 $y=kx^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面上にある。この正四面体の 1 辺の長さ l を k で表せ。ただし，$k>0$ とする。　　(阪大)

ヒント　ここに表れてくる曲面は放物面です。特に回転放物面といわれるものです。べつに放物面の方程式も必要としませんが，ここでは，ムリに使ってみましょうか。



曲面上の点を $P(x,\ y,\ z)$ としますと，平面 $y=t$ 上で P は点 $(0,\ t,\ 0)$ を中心とし，半径 $\sqrt{\dfrac{t}{k}}$ の円周上にあるわけですから

$$y=t,\quad x^2+z^2=\frac{t}{k}$$

$$\therefore\quad x^2+z^2=\frac{y}{k}\qquad\cdots\cdots(*)$$

これが，この放物面の方程式です。そこで，A, B, C の座標をそれぞれ $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とすると

$$l^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2=a_2{}^2+\frac{a_2}{k}\quad\cdots\cdots①$$

$$l^2=b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2=b_2{}^2+\frac{b_2}{k}\quad\cdots\cdots②$$

$$l^2=c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2=c_2{}^2+\frac{c_2}{k}\quad\cdots\cdots③$$

①－②より

$$(a_2{}^2-b_2{}^2)+\frac{1}{k}(a_2-b_2)=0$$

$$\therefore\quad (a_2-b_2)\left\{(a_2+b_2)+\frac{1}{k}\right\}=0\quad\cdots\cdots④$$

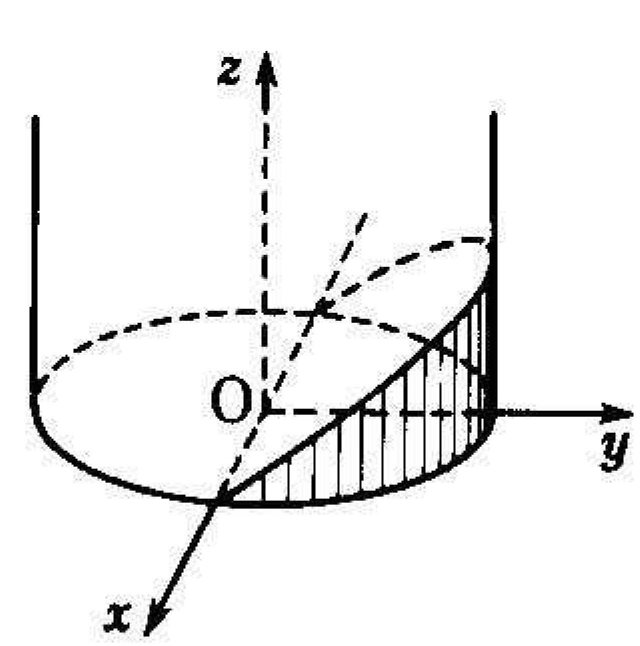
$k>0$ ですから $(*)$ によって $y>0$，つまり $a_2>0$, $b_2>0$ で，したがって④より $a_2=b_2$ となります。同様にして，$b_2=c_2$. こうして平面 ABC は y 軸に垂直であることがわかります。ここまでくれば，もうラクです。続きはやってみてください。　　答　$l=\dfrac{\sqrt{6}}{k}$

練習 2. 3 つの条件

$$x^2+y^2\leqq r^2,\quad \frac{y}{r}-\frac{z}{h}\geqq 0,\quad z\geqq 0$$

を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の全体からなる立体はどんな図形か。$r>0$, $h>0$.　　(早大)

ヒント　実は試験に出たのは，この体積を求める問題なんですが，$x^2+y^2\leqq r^2$ は柱面の内部，$\dfrac{y}{r}-\dfrac{z}{h}\geqq 0$ は x 軸を含む平面の下側，$z\geqq 0$ は xy 平面の上側で，右のようなクサビ状の部分であることがわかるでしょう。



◐空間図形のいろいろ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

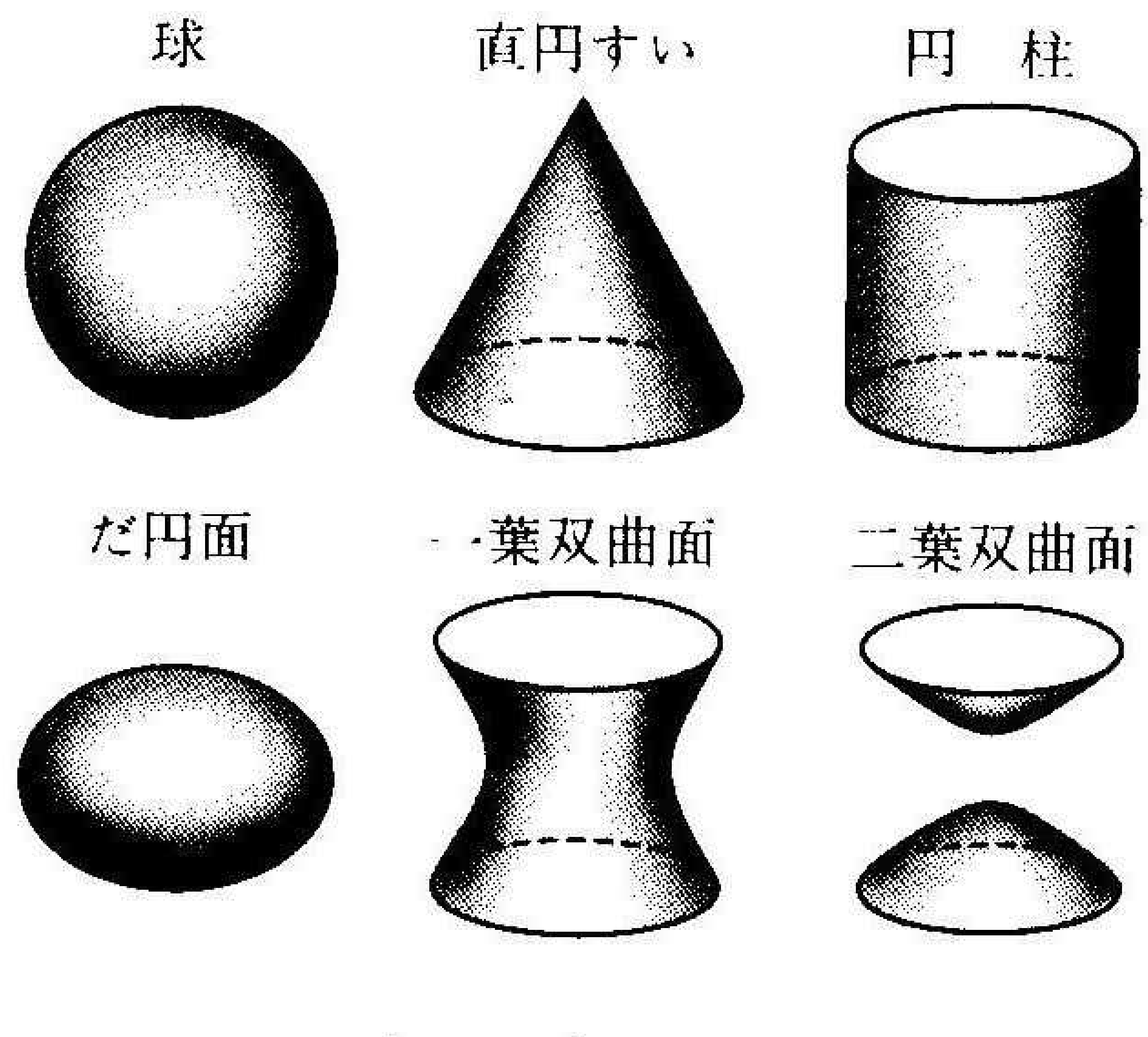
◈空間図形の中でよく知られているもの：点と直線と平面はいわずもがな。球面，だ円面，すい面，柱面などなど。

◆ 空間図形とひとくちにいうが，いろいろあります。キミ，知っている限り挙げよ，といわれて，いくついえますか。1分くらいは考えてから次を読んでください。

*　*　*

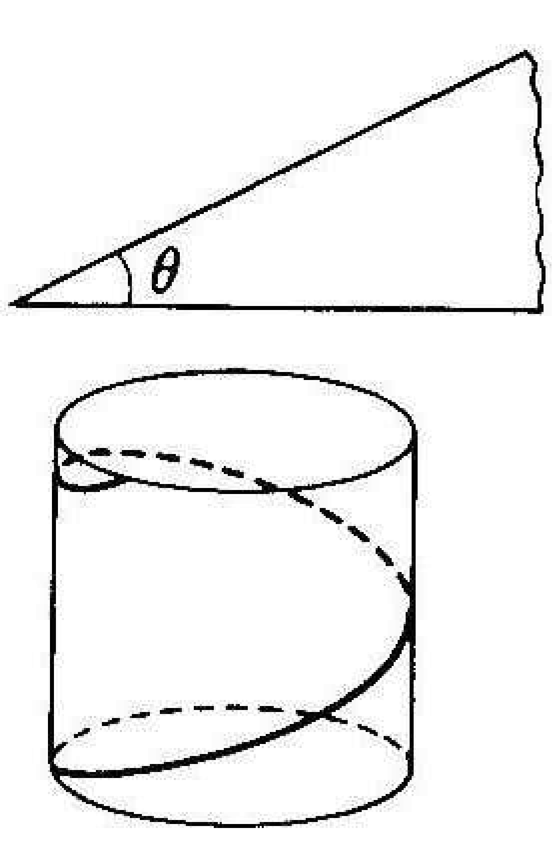
◆ 空間図形の中でもっとも簡単で基本的なものは点です。次は直線，次は平面，ここまでは誰も異論はないでしょう。

次は2次曲面といわれるものがあります。球面や，すい面や，柱面についてはだいたい想像がつくでしょう。そのほかに，だ円面，双曲面などもあります。



*　*　*

◆ 空間曲線にもいろいろなものがあります。例えば，右のような三角形の用紙を円柱のまわりに巻きつけて得られる曲線は典型的な1つの例です。これを **ら線**（弦巻き線）といいます。



ここでは，入試などで扱われた曲面や曲線の主なものについて簡単に紹介しておくことにしましょう。

*　*　*

■練習 1. 頂点 A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1)，O(0, 0) なる正方形を y 軸のまわりに回転して得られる空間図形は何か。

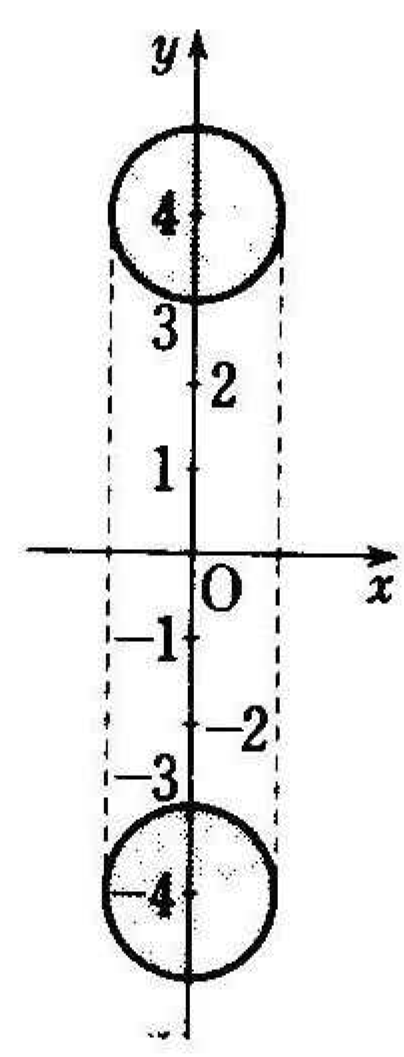
（ヒント） 底面が半径1の円で，高さが1である直円柱です。

■練習 2. 頂点 A(1, 0)，B(0, 1)，O(0, 0) なる三角形を y 軸のまわりに回転して得られる曲面は何か。

（ヒント） 底面が半径1の円で，高さが1の直円すいです。

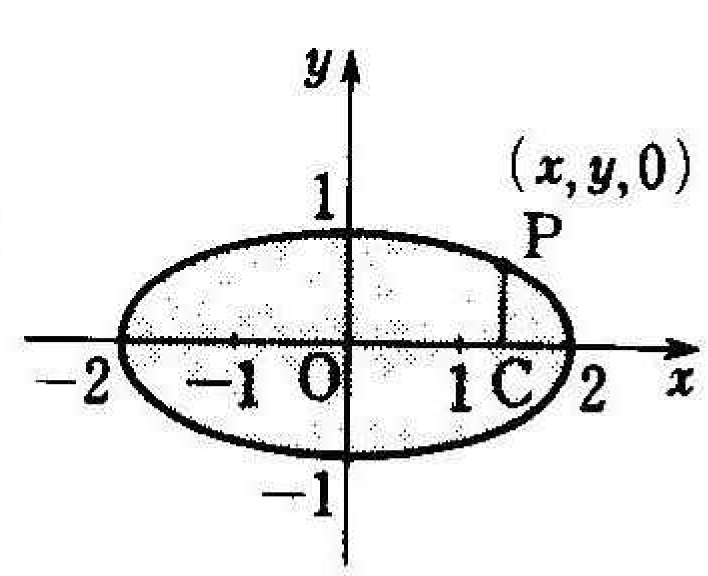
■練習 3. 中心 (0, 4)，半径1の円を x 軸のまわりに回転して得られる曲面は何か。

（ヒント） いわゆるドーナツのような面が得られるでしょう。これを，**円環面**（えんかんめん）といいます。英語では torus です。



■練習 4. だ円 $x^2+4y^2=4$ を x 軸のまわりに回転して得られる曲面上の点を (X, Y, Z) とするとき，X, Y, Z の間にどんな関係式が成り立つか。

（ヒント） だ円上の点 $P(x, y, 0)$ は点 $C(x, 0, 0)$ を中心とし半径 CP の円を描くから



$$X=x,\ Y^2+Z^2=y^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

なる関係があります。ところが x と y の間には

$$x^2+4y^2=4 \qquad \cdots\cdots(**)$$

なる関係があるのですから (*) と (**) とから x, y を消去して

$$X^2+4(Y^2+Z^2)=4$$

$$\therefore\ \frac{X^2}{4}+Y^2+Z^2=1$$

なる関係があります。

実は，これがこの曲面の方程式で，これを**回転だ円面** といいます。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な練習をしてみませんか。

練習 5. 2つの平面

$$x-hy+z-h=0$$
$$hx+y-hz-1=0$$

の交わりは曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上にあることを示せ。ただし，h は0でない定数である。

（解） 2つの平面の交線上の任意の点を $(X,\ Y,\ Z)$ とすると

$$X-hY+Z-h=0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$hX+Y-hZ-1=0 \qquad \cdots\cdots②$$

①より　$(Y+1)h=X+Z$　……③

$Y\neq-1$ ならば

$$h=\frac{X+Z}{Y+1}$$

これを②に代入して

$$\frac{X+Z}{Y+1}X+Y-\frac{X+Z}{Y+1}Z-1=0$$

分母をはらって変形すると

$$X^2+Y^2-Z^2-1=0 \quad (Y\neq-1)$$

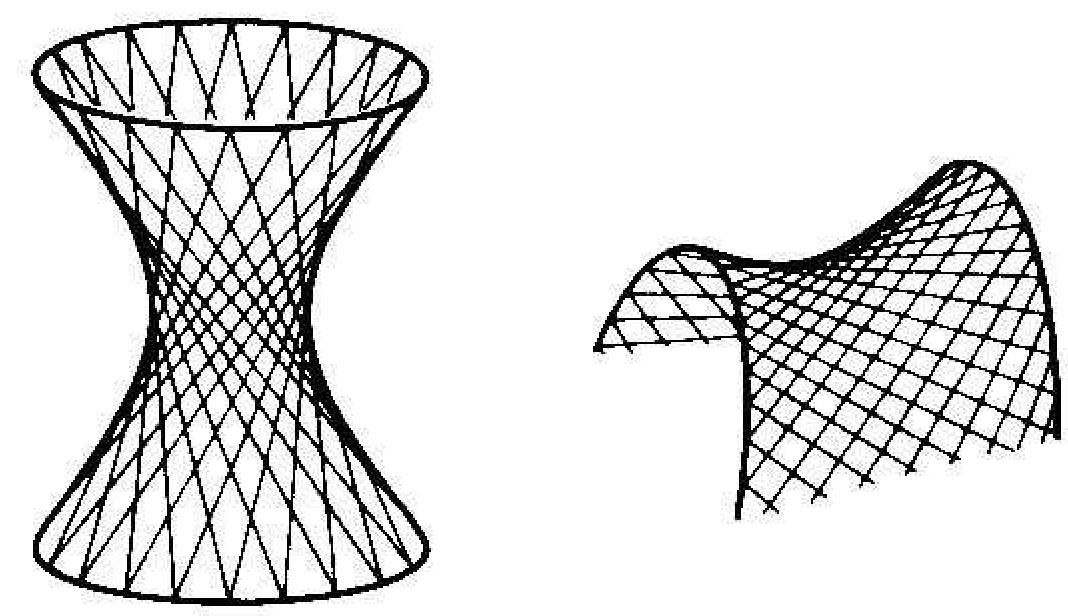
$Y=-1$ のときは①，②は

$$X+Z=0,\ h(X-Z)=2$$

で，$h\neq0$ であるから，X, Y, Z は存在し，$X^2+Y^2-Z^2-1=0$ を満足する。

ゆえに，h のすべての値に対して，与えられた2平面の交わりは曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上にある。

（注） 上の練習で，h をいろいろに変えると無数の直線ができるわけですが，これらがすべて，この曲面の上にあるのです。実は，もう1組の直線群がこの面の上にあって，いわば2つの直線群のおりなす曲面にみえます。このような曲面を線織面（せんしきめん）といいます。もちろん，オボエル必要はありません。下にその2つの例を図示しておきましょう。



*　*　*

◆ 入試問題では面積や体積を求める問題にいろいろな曲面が出てきて，そのイメージが浮かばないために手のつけようがない，などということになります。例えば，

≪点 $(t,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面に含まれ，点 $(t,\ 0)$ を通って，直線 $x=t$ に対する傾きが t である直線を l とする。$t\geqq0$ の範囲をかわるとき，l の描く曲面と，直線 $x+y=1$ を含み，xy 平面に垂直な平面と xy 平面とで囲まれた立体の体積を求めよ≫

などになるとピンとこないでしょう。しかし，実は，この種のものは，xy 平面に垂直な平面による切り口の面積だけがわかればいいのですから，曲面全体がわかる必要もないのです。では，もう1つ：——

≪z 軸を軸とする半径1の円柱の側面で，xy 平面より上（z 軸の正の方向）にあり，平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下（z 軸の負の方向）にある部分を D とする。D の面積を求めよ。(東大)≫

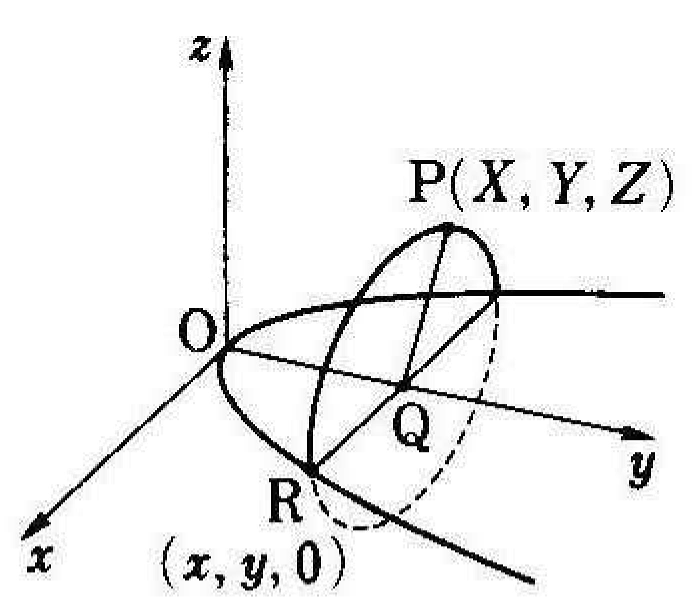
において，求める部分のイメージが浮びますか。(できなくていいですよ!!)

回転面の方程式と蛇足

◈回転面はいろいろな形で入試に出て来ます。その方程式の扱い方をつかんでおきたいもの，さあ，どうです。

◆ 例えば，$y=x^2$ $(z=0)$ という放物線を y 軸のまわりに回転しますといわゆる**回転放物面**になります。この曲面上の点の座標X, Y, Zの間にどんな関係が成り立つでしょうか。

右の図で点 P(X, Y, Z) は点 Q$(0, Y, 0)$ を中心とし，半径 $\overline{QR}=|x|$ の円周上にありますから



$$X^2+Z^2=|x|^2$$

ところが

$$|x|^2=x^2=y=Y$$

$$\therefore\quad X^2+Z^2=Y$$

という関係があります。ここでX, Y, Zをx, y, zに書きかえて，この回転放物面の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+z^2=y}$$

となるわけです。

ところでこんな問題があります。

練習 1. 空間に座標軸をとり，原点を O とする。Oを1頂点とする正四面体 OABC があり，3頂点A，B，Cは，xy 平面上の放物線 $y=kx^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面上にある。この正四面体の1辺の長さ l を k で表せ。（阪大）

ヒント この回転放物面の方程式は上とおなじようにして求めますと

$$x^2+z^2=\frac{1}{k}y \qquad \cdots\cdots(*)$$

で与えられます。

そこで　A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$

B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$

C$(c_1,\ c_2,\ c_3)$

としますと

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2=l^2$$

$$b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2=l^2$$

$$c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2=l^2$$

ところが (*) から

$a_1{}^2+a_3{}^2=\frac{1}{k}a_2$ などが成り立ちますから

$$a_2{}^2+\frac{1}{k}a_2=l^2 \qquad \cdots\cdots①$$

$$b_2{}^2+\frac{1}{k}b_2=l^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①－②から

$$(a_2-b_2)\left(a_2+b_2+\frac{1}{k}\right)=0$$

$$a_2>0,\ b_2>0,\ k>0$$

ですから

$$a_2=b_2$$

同様にして

$$a_2=b_2=c_2$$

かくして平面 ABC は y 軸に垂直でなければならないことがわかった。ここまでくればもはや問題はありません。

実は幾何学的に考えて，もっとカンタンにも導けるのですが，ここは，蛇足，ムリに回転体の方程式を使ってやったわけです。

なお，平面 ABC が y 軸と交わる点が三角形 ABC の重心であることを使って

$$l=\frac{\sqrt{6}}{k}$$

が導かれます。

ともあれ，回転体の方程式を導くこと，それを使うこと，これができるようになれば空間図形も卒業したというものです。

＊　＊　＊