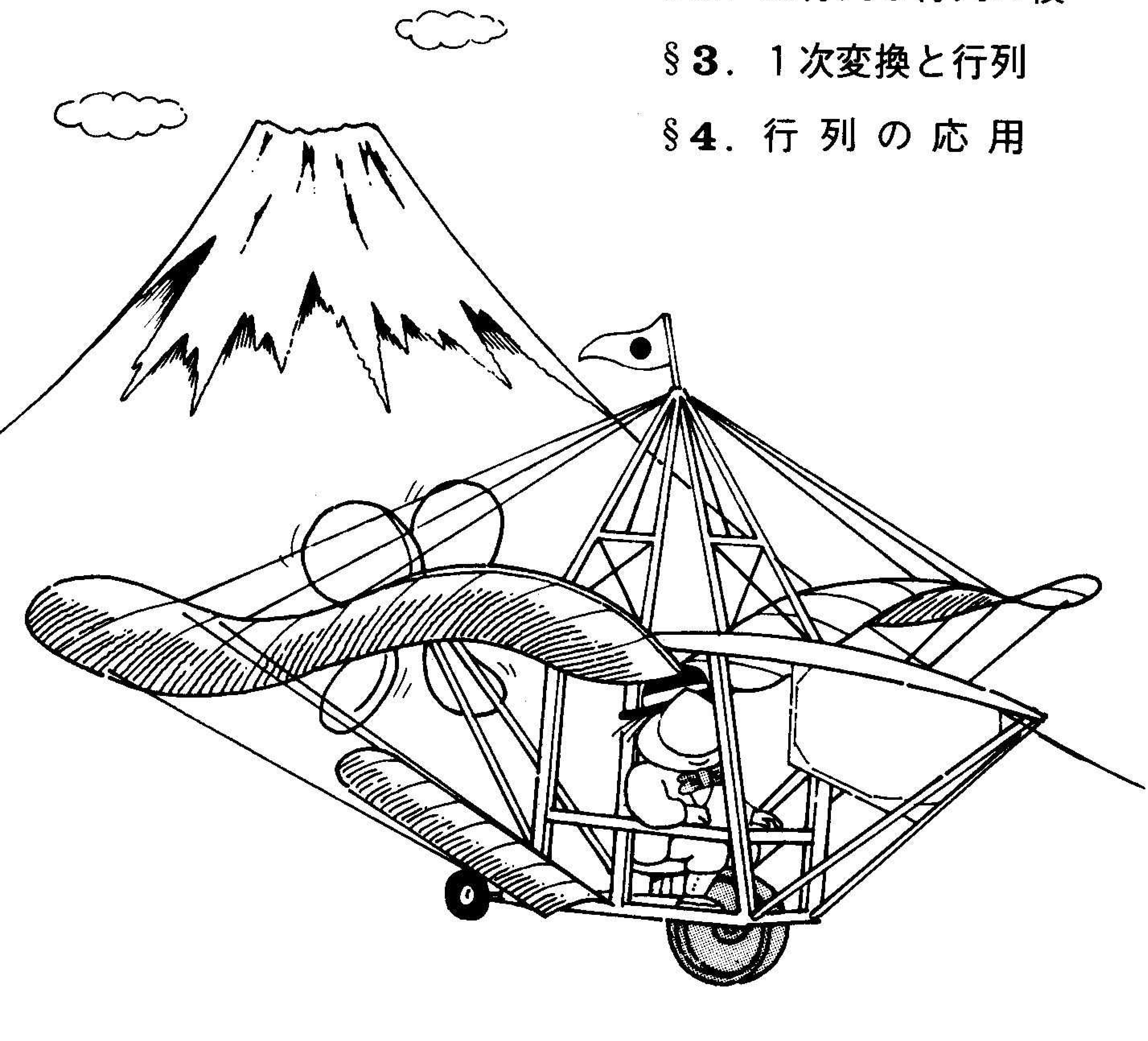
第3章

行　　　列



○行列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆行列を原語のままマトリックスともいいます。これほど，各分野に浸透しつつある数学用語も少ないでしょう。

◆ 数を長方形に並べたものを行列といいます。例えば

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

など。行列は上のように小かっこを書いて示すか，あるいは

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix},\quad D=[2\quad 3\quad 4]$$

のようにカギかっこで示しておくのです。大かっこ〔　〕ではありません。

横の数を **行**（ぎょう）といいます。行列Aにおいて第1行は 1 2 2 で，第2行は 4 0 −1 です。また，縦の数を **列**（れつ）といいます。行列Cについて第1列は $\begin{matrix}1\\3\end{matrix}$ で，第2列は $\begin{matrix}2\\5\end{matrix}$ というわけ。そして，各数を行列の **成分** とか **要素** とか **元** とかいいます。そして，Aは2行3列の行列といい，Bは3行2列の行列といいます。Cは2行2列の行列ですが，特に正方形に並んでいるときは **正方行列** といいます。2行2列の行列を2次の正方行列，3行3列の行列を3次の正方行列といいます。また，1行しかない行列

$$(1\quad 2\quad 3)\qquad [2\quad 1\quad 5\quad 0]$$

を特に **行ベクトル**，1列しかない行列

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\qquad \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

などを特に **列ベクトル** ということがあります。ベクトルは

$$(1,\ 2,\ 3)$$

というようにコンマが入っていますが，行列にはコンマがないことに注意してください。

* * *

◆ 数を並べて行列と名前をつけただけでは別に意味はありません。これに加法，減法，乗法などの演算を定義することによって，いろいろと重要な結果が得られ，それが物理学にも化学にも工学や心理学などにも利用されるようになって，今では欠くことのできない道具となったわけです。

まず等しいということから。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

について $A=B$ とは

$$a_{11}=b_{11},\quad a_{12}=b_{12},\quad \cdots\cdots$$

というように **対応する成分が等しい** ことと定義します。

■練習1.　$A=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & y\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & z\\ u & 3\end{pmatrix}$

について $A=B$ となるのはどんな場合か。

（解）　$x=2$，$y=3$，$z=1$，$u=1$　……答

次に **加法** とは：——

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

のとき，次のように定義します。

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$$

■練習2.　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ の和を求めよ。

$$A+B=\begin{pmatrix}1+2 & 2+0\\ 0+1 & 4+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

◆ **減法** も同じ。では，さっそくこれを。

練習 3. $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ のとき，$A-B$ を求めよ。

(解) $A-B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ … 答

練習 4. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&0&2\end{pmatrix}$ のとき $A-B=C$ となるように a, b, c, d, f を求めよ。

(解)
$$A-B=\begin{pmatrix}1-a&2-b&3-c\\4-d&5-e&6-f\end{pmatrix}$$
$$\therefore\ 1-a=2,\ 2-b=3,\ 3-c=1$$
$$4-d=4,\ 5-e=0,\ 6-f=2$$
$$\therefore\ \left.\begin{matrix}a=-1,& b=-1,& c=2\\ d=0,& e=5,& f=4\end{matrix}\right\}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

*　*　*

◆ 行列にある数を **掛ける** というのは，全部の成分にその数を掛けたものをいいます。

練習 5. $A=(1\ \ 2\ \ 3)$ のとき $3A$ を求めよ。

(解) $3A=(3\cdot1\ \ 3\cdot2\ \ 3\cdot3)=(3\ \ 6\ \ 9)$

練習 6. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$ のとき $2A+3B$ を求めよ。

(解)
$$2A+3B=2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\12&8\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

*　*　*

◆ 次は **積** ですが，これはやっかいです。まず，具体例から：——

練習 7. $A=(1\ \ 2)$, $B=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ のとき AB を求めよ。

(ヒント) $AB=(1\cdot3+2\cdot4)=(11)$

つまり 1 行 1 列の行列というわけ。これは，ベクトル (1, 2) と (3, 4) の内積を求めるのと同じ手順です。ただ **積は数でなく行列である** 点がちがうのです。

練習 8. $A=(1\ \ 2)$, $B=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ のとき BA を求めよ。

(ヒント)
$$BA=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}(1\ \ 2)$$
$$=\begin{pmatrix}3\cdot1&3\cdot2\\4\cdot1&4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\4&8\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

わかりましたか，わからなかったら，次の練習 9. をやってから練習 8. に戻ってください。

練習 9. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\\2&1\end{pmatrix}$ のとき AB を求めよ。

(ヒント)
$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\4&3\\2&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot4+3\cdot2&1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1\\2\cdot1+0\cdot4+1\cdot2&2\cdot2+0\cdot3+1\cdot1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}15&11\\4&5\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

こんなわけで，勝手な 2 つの行列では加減乗はできません。行列の除法はありませんがそれに当たるものは逆行列のところで理解できるでしょう。

*　*　*

◆ 最後に，特別な行列の名称をいくつかあげておきます。

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ を 2 次の **単位行列**，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ を 3 次の単位行列などといい，E か I（アイの大文字）で表します。$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ は **零行列** といい，O（オーの大文字）で表すのがふつうです。

①零行列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ $AB=O$ でも $A=O$ または $B=O$ とはならないものですから，ふつうの0（ゼロ）ほどの威力をもたないのは残念だ!!

◆ すべての成分が0である行列を **零行列**（れいぎょうれつ，ゼロぎょうれつ）といい O（オーの大文字）で表します。

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{や} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

は零行列です。いうまでもなく

$$A+O=O+A=A$$
$$AO=OA=O$$

などの関係があります。もちろん和や積が可能だとしてのことです。

また，行列Aの各成分の符号を変えたものを $-A$ で表しますと

$$(-A)+A=A+(-A)=O$$
$$A+(-B)=(-B)+A=A-B$$

などの関係が成り立つのです。では，具体的な問題で練習してみましょう。

4/5

練習 1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&1&6\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ のとき $A+B-O$ を計算せよ。

(解) $A+B-O$

$$=\begin{pmatrix}1+1+0&2+(-2)+0&3+0+0\\2+3+0&1+1+0&4+6+0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&3\\5&2&10\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

5/5

練習 2. 次の式は成り立つか。

$$O\cdot A=O\cdot B$$

ただし $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&5\end{pmatrix}$

(解) 成り立たない。なぜなら，左辺は $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，右辺は $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ で，いずれも零行列であるが，型が異なるから等しくない。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみましょう。

5/5

練習 3. $A=\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}$ で $A^2=O$ となることがあるか。

(ヒント)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+1&2a\\2a&a^2+1\end{pmatrix}$$

これが零行列Oに等しくなるためには

$$a^2+1=0 \text{ かつ } 2a=0$$

でなければならない。しかし，これは不成立。したがって $A^2=O$ となることはないことがわかります。

4/5

練習 4. $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$ に対して $AX=O$ となるような2次の正方行列Xを求めよ。

(ヒント) $X=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}$ とすると

$$AX=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\2a_1&2a_2\end{pmatrix}$$

これが零行列に等しいための条件は $a_1=0$，かつ $a_2=0$ です。そして，b_1，b_2 には関係がありません。

$$\therefore \quad X=\begin{pmatrix}0&0\\b_1&b_2\end{pmatrix}$$

ここに b_1，b_2 は任意の数です。

練習 5. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ を求めよ。

答 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

*　*　*

◆ では，次にやや総合的な問題にいきましょう。

5/5

練習 6. A, B, C は実数を要素とする2次の正方行列を表すものとする。行列 A, B に対して，演算∘を $A \circ B = A + B - AB$ と定義する。$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えよ。

(1) $O \circ A$ を簡単にせよ。

(2) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ の成り立つことを示せ。

(3) $A \circ B = C \circ A = O$ ならば $B = C$ であることを示せ。 （東北学院大）

ヒント

(1) $$O \circ A = O + A - OA$$
$$= O + A - O = A$$

(2) 結合法則の成立を証明せよ，というわけですね。

$$(A \circ B) \circ C = (A + B - AB) \circ C$$
$$= (A + B - AB) + C - (A + B - AB)C$$
$$= A + B - AB + C - AC - BC + ABC$$
$$= A + B + C - AB - AC - BC + ABC$$

（ココデ，ウッカリ
$$= A + B + C - AB - BC - \underset{\sim}{CA} + ABC$$
トシテハイケマセン）

$$A \circ (B \circ C) = A \circ (B + C - BC)$$
$$= A + (B + C - BC) - A(B + C - BC)$$
$$= A + B + C - BC - AB - AC + ABC$$
$$= A + B + C - AB - AC - BC + ABC$$
$$\therefore \quad (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

(3) (2)により
$$C \circ (A \circ B) = (C \circ A) \circ B$$
ところが
$$\text{左辺} = C \circ O = C + O - CO = C$$
$$\text{右辺} = O \circ B = O + B - OB = B$$
$$\therefore \quad B = C$$

Q.E.D.

* * *

◆ 行列では
$$AB = O$$
であるからといって $A = O$ または $B = O$ が成り立つとはいえません。

$A \neq O$ かつ $B \neq O$ でしかも $AB = O$ のとき A, B を零因子（れいいんし）といいます。だから，$A^2 + A - 2E = O$ なる A を求めよ，というときに
$$(A + 2E)(A - E) = O$$
とするのはいいが，これから
$$A = -2E \text{ あるいは } A = E$$
としてはいけません。

練習 7. $A^2 + A - 2E = O$ を満足する2次の正方行列 A を求めよ。

ヒント $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると
$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \quad a^2 + bc + a - 2 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$ab + bd + b = 0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$ac + cd + c = 0 \quad \cdots\cdots ③$$
$$bc + d^2 + d - 2 = 0 \quad \cdots\cdots ④$$
あとはこれを解くこと。②，③より
$$b(a + d + 1) = 0, \quad c(a + d + 1) = 0$$
そこで $a + d + 1 \neq 0$ のときと $a + d + 1 = 0$ のときに分けることになります。

$a + d + 1 \neq 0$ のときにはもちろん $b = 0$, $c = 0$, このとき①，②は
$$a^2 + a - 2 = 0, \quad d^2 + d - 2 = 0$$
となり $a = 1$, -2 ; $d = 1$, -2. この組合せ方は4通り，といったぐあい。

$a + d + 1 = 0$ のときは $d = -a - 1$ を④に代入してみると①とまったく同じになりますから，結局
$$a + d + 1 = 0, \quad a^2 + bc + a - 2 = 0$$
を解けばよいことになります。かくして
$$\therefore \quad d = -a - 1, \quad bc = -a^2 - a + 2$$
だけ。つまり，上の2式を満足するものなら何でもよい。あとは形を整えるだけ。

⑩ 単位行列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆単位とは1ということです。単位ベクトル，単位行列，単位元，虚数単位などです。単位というコトバの氾濫原因はここにある!!

◆ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ のように，対角成分がすべて1で，他の成分がすべて0であるような行列を **単位行列**（たんいぎょうれつ）といい，E や I（i の大文字）で表すのがふつうです。さて，単位行列はどんな性質があるのでしょうか？

練習 1. $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}$ とするとき

$$AE=EA=A$$

であることを示せ。

ヒント　$AE=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a_1\cdot1+a_2\cdot0&a_1\cdot0+a_2\cdot1\\b_1\cdot1+b_2\cdot0&b_1\cdot0+b_2\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}=A$$

同様にして

$$EA=A$$

したがって，証明された。

5/5

練習 2. A を2次の正方行列とするとき，

$$A^2+4A-5E=(A+5E)(A-E)$$

が成り立つことを示せ。

解　右辺 $=(A+5E)\cdot A-(A+5E)\cdot E$

$$=(A^2+5E\cdot A)-(A\cdot E+5E^2)$$

$$=A^2+5A-A-5E$$

$$=A^2+4A-5E$$

Q.E.D.

4/5

練習 3. $A=\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}$ について $A^2=E$ が成り立つという。定数 a の値を求めよ。

解　$A^2=\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a^2+1&2a\\2a&a^2+1\end{pmatrix}$$

であるから $A^2=E$ が成り立つための条件は

$$a^2+1=1,\ 2a=0$$

である。これより

$$a=0 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆　単位行列の表す1次変換は何か？

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

としますと，いうまでもなく

$$x'=x,\ y'=y$$

です。つまり，この変換によって変わることがありません。元のままです。これを **恒等変換**（こうとうへんかん）といいます。

5/5

練習 4. 点Pを1次変換 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ によって点Qにうつし，さらに1次変換 $B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$ によって点Rにうつすと PとRは一致することを示せ。

ヒント　行列の積 BA がこの合成変換を表すわけですから，BA が恒等変換を表す単位行列 E になればいいでしょう。さて，

$$BA=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot2+(-5)\cdot1&3\cdot5+(-5)\cdot3\\(-1)\cdot2+2\cdot1&(-1)\cdot5+2\cdot3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$

なるほど，予定通りうまくいった。詳しくは（☞ p.134）を参照。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや，総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$ と書く。

実数 a, b に対し，$A=\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}$ とおく。いま $xI+yA$（x, y は実数）の形に表される行列全体からなる集合をRとし，RからOを除いた集合をGとする。

(1) Rに属する任意の2つの行列の積はRに属することを示せ。

(2) Gに属する任意の行列が逆行列をもつとき，点$(a,\ b)$はどのような範囲になるか，これを図示せよ。（東大）

ヒント (1) Rに属する任意の2つの行列を x_1I+y_1A および x_2I+y_2A とするとき

$$(x_1I+y_1A)(x_2I+y_2A)$$
$$=x_1x_2I+(x_1y_2+x_2y_1)A+y_1y_2A^2$$

ところが

$$A^2=\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a&ab\\b&a+b^2\end{pmatrix}$$
$$=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}$$
$$=aI+bA$$

ですから

$$(x_1I+y_1A)(x_2I+y_2A)$$
$$=(x_1x_2+ay_1y_2)I$$
$$+(x_1y_2+x_2y_1+by_1y_2)A$$

となり，確かにRに属していることがわかります。

(2) Gに属する任意の行列

$$xI+yA=\begin{pmatrix}x&ay\\y&x+by\end{pmatrix}$$

が逆行列をもつための条件は

$$x(x+by)-ay^2\neq 0$$

つまり

$$x^2+bxy-ay^2=0$$

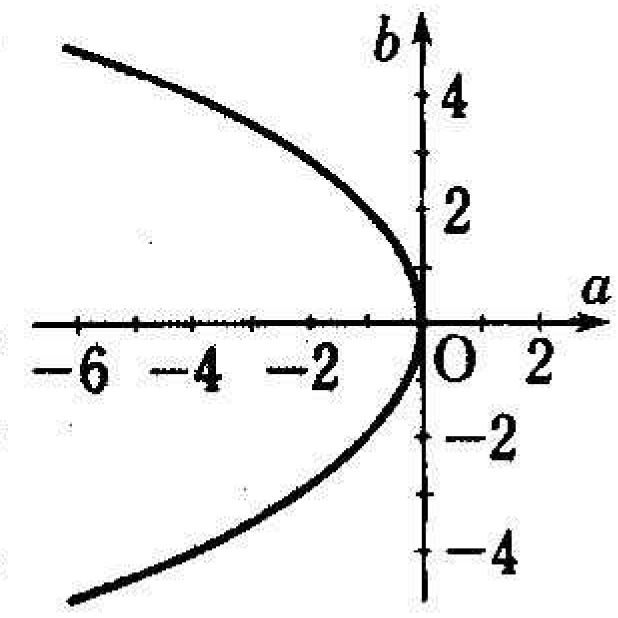
が $x=y=0$ でない限り成立しないということ，なんです。そのための条件は

$$\text{判別式}<0$$

であることです。ゆえに，求める条件は

$$b^2+4a<0$$

です。図示すると右の通り（境界を含みません）。では，もう少しやってみるか。



練習 6. $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$とするとき，$a$, b が正の数で $a+b<1$ ならば，行列 $I-A$ は逆行列をもつことを示せ。

（早大）

ヒント $I-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1-a&-b\\-b&1-a\end{pmatrix}$$

これが逆行列をもつための条件は

$$(1-a)^2-(-b)^2\neq 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことです。ところが

$$(1-a)^2-(-b)^2=(1-a-b)(1-a+b)$$
$$=(1-a-b)(1-a-b+2b)$$

ところが，

$a+b<1$ だから　$1-a-b>0$

$b>0$ だから　$1-a-b+2b>0$

というわけで(*)の左辺が0でないことがわかります。よって証明されたわけ。

解答としては，もう少しウマクやることもできますから，考えてみてください。

練習 7. 次の命題が正しければ証明し，正しくなければそれを示す例をあげよ。

≪任意の2次の正方行列Aについて，$A^2=A$ かつ $A\neq O$ ならば $A=E$ である。ここでEは単位行列を表す≫

（香川大）

ヒント 正しくありません。例えば

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

について調べてみてください。

⑪ 対称行列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対称式，点対称，線対称といったぐあいに，数学には対称というコトバがしばしば現れる。本質的なものがそこにある。

◆ 行と列の数が等しい行列を正方行列といいます。正方行列において左上から，右下への成分を **対角成分** といって，これについて，他の成分の値が対称的に等しいとき，これを **対称行列** といいます。

つまり，下のようなものです。

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & 4 & 0\\ -5 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

*　*　*

◆ では，ともかく，対称行列に関する問題を扱ってみませんか。

練習 1.　$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ とするとき $A=pI+qJ$ を満足する p, q を a, b で表せ。　（早大）

解　$pI+qJ$

$$=p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ q & p\end{pmatrix}$$

で，これが $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ に等しくなるのは $p=a$, $q=b$ のときである。

練習 2. 3次の正方行列において，第 i 行第 j 列の成分を a_{ij} で表すとき，$a_{ij}=a_{ji}$ ならば対称行列，$a_{ij}=-a_{ji}$ ならば交代行列という。任意の3次の正方行列は対称行列と交代行列の和で表されることを示せ。

ヒント ちょっと読むと，何のことかわからない。しかし，対称行列を知っている人にはなんのこともあるまい。まず2次の場合を考えてみましょう。

$\begin{pmatrix}1 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}$ の和で表せるか，どうか，だ。

$$\begin{pmatrix}1 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}$$

とおきますと

$$a+0=1,\ b+x=8$$
$$b-x=4,\ c+0=7$$
$$\therefore\ a=1,\ b=6,\ c=7,\ x=2$$

ナルホド，ウマクイッタ。

$$\begin{pmatrix}1 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

次は3次のものとして

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -4 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & x & y\\ -x & 0 & z\\ -y & -z & 0\end{pmatrix}$$

$$a+0=1,\ b+x=2,\ c+y=5$$
$$b-x=-4,\ d+0=3,\ e+z=1$$
$$c-y=3,\ e-z=4,\ f+0=6$$

こうしてみると一般的な規則がわかるでしょう。一般に次のようにすればよいでしょう。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

の **行と列とを交換したもの** を ${}^tA$ で表し，**転置行列**（てんちぎょうれつ）といいます。つまり

$${}^tA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

です。そして

$A_1=\dfrac{1}{2}(A+{}^tA)$ は 対称行列

$A_2=\dfrac{1}{2}(A-{}^tA)$ は 交代行列

で，そして次のようになるのです。

$$A=A_1+A_2$$

（注）なお，これについては，任意の関数が偶関数と奇関数の和で表せるという定理との相似性を思い出してください　（☞「数学Ｉ」 p.214 参照）。

＊　＊　＊

◆ では，対称行列の関係したやや総合的な問題をやってみませんか。

5/6

練習 3. 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} a-1 & x \\ ab & b-1 \end{pmatrix}$ が $AB=C$ を満足するとき，x の値を求めよ。　（室蘭工大）

（解）

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+ab & a^2+b^2 \\ a+b & ab+b \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a+b=ab=-1$$

$$\therefore\quad x=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=(-1)^2-2\cdot(-1)=3$$

答　3

5/6

練習 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1}=2^n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法で示せ。　（愛知教育大）

（ヒント）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k+1}=2^k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k+2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=2^k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=2^k\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=2^k\cdot 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=2^{k+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に注意すること。

＊　＊　＊

◆ 対称行列は不変直線を求める問題と関係して，よく出題されています。例えば，これです。

5/6

練習 5. 次の１次変換で不変なる直線を求めよ。

$$\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=x+2y \end{cases}$$

（法政大）

（ヒント）変換式を行列で表せば

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

両辺に左から $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ を乗じて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=\frac{2x'-y'}{3},\quad y=\frac{-x'+2y'}{3}$$

したがって，直線 $ax+by+c=0$ は

$$a\,\frac{2x'-y'}{3}+b\,\frac{-x'+2y'}{3}+c=0$$

すなわち

$$(2a-b)x'+(-a+2b)y'+3c=0$$

に変換されます。これが

$$ax+by+c=0$$

に一致するための条件は

$c\neq 0$ ならば

$$3a=2a-b,\quad 3b=-a+2b$$

が成り立つこと，つまり $b=-a$ が成り立つことです。よって，求める不変直線は

$$x-y=k\quad（k は 0 でない任意の数）$$

$c=0$ ならば２つが一致する条件は

$$\frac{2a-b}{a}=\frac{-a+2b}{b}$$

つまり　$a^2=b^2$　$\therefore\quad a=\pm b$

ゆえに　$y=\pm x$

ところが $y=x$ は $x-y=k$ において $k=0$ にした場合であるからまとめることができます。かくて，……

答　$y=-x$，$y=x+k$　（k：任意の数）

では，もう１つやってみませんか。

練習 6. 行列 $\begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ で表される１次変換 f によって，直線 $l：x+by+2=0$ 上の点はつねに同じ直線の上に移される。k と b を求めよ。ただし，$k>0$ とする。（一橋大）

答　$k=3$，$b=-1$

○交代行列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈交代行列はコウタイギョウレツとよみます。実は，こんなコトバなんかどうでもいいのです。しかし，具体的な問題は多いのだ。

◆ $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ とか $\begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ のように，対角成分が0で，他の2つは絶対値が等しく符号が反対であるとき，(2次の) **交代行列** といいます。

ちょっと注意しておきますが，対角成分というのは，左上から右下に向かう線上にある成分をいうのです。右上から左下への成分を対角成分とはいわないのです。

くどいが，もう一度，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{-a} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

の形の行列を交代行列といいます。では，具体的な練習にいきましょう。

*　*　*

5/7

練習 1. 行列 $\begin{pmatrix}0 & x-3\\ x+1 & 0\end{pmatrix}$ が交代行列になるように x の値を定めよ。

ヒント　$x+1=-(x-3)$

$\therefore\ x=1$ ……答

5/7

練習 2. $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$ のとき $A-E$ は正則行列であることを示せ。ただし，a は実数。

ヒント　$A-E=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -a & -1\end{pmatrix}$

で，$(-1)(-1)-a(-a)=a^2+1\neq0$

ゆえに，$A-E$ は正則行列である。

練習 3. 交代行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ について A^n を計算せよ。

ヒント　A^2, A^3, …… を計算し，その結果から A^n を推定し，さらに，その結果を証明すればいいでしょう。さて，

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2^2 & 0\\ 0 & -2^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-2^2 & 0\\ 0 & -2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2^3\\ 2^3 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0 & -2^3\\ 2^3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^4 & 0\\ 0 & 2^4\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}2^4 & 0\\ 0 & 2^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2^5\\ -2^5 & 0\end{pmatrix}$$

ここまでくれば，ほぼ見当はつきますね。

m を自然数として

$$A^{2m}=\begin{pmatrix}(-1)^m2^{2m} & 0\\ 0 & (-1)^m2^{2m}\end{pmatrix}$$

$$A^{2m-1}=\begin{pmatrix}0 & (-1)^{m+1}2^{2m-1}\\ (-1)^m2^{2m-1} & 0\end{pmatrix}$$

となりそうだ。これをキチンと答案にまとめることは，キミにやってもらうとしましょう。

*　*　*

◆ 交代行列とはどんなものか，ほぼわかったでしょう。では，次にこれです。

5/9

練習 4. $A=\begin{pmatrix}0 & \cot\dfrac{\theta}{2}\\ -\cot\dfrac{\theta}{2} & 0\end{pmatrix}$ のとき

$U=(A+E)(A-E)^{-1}$ を計算せよ。

解　$A-E=\begin{pmatrix}0 & \cot\dfrac{\theta}{2}\\ -\cot\dfrac{\theta}{2} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & \cot\dfrac{\theta}{2}\\ -\cot\dfrac{\theta}{2} & -1\end{pmatrix}$

$\therefore\quad (A-E)^{-1}$

$$=\frac{1}{1+\cot^2\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}-1 & -\cot\frac{\theta}{2}\\ \cot\frac{\theta}{2} & -1\end{pmatrix}$$

$$=\sin^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\cot\frac{\theta}{2}\\ \cot\frac{\theta}{2} & -1\end{pmatrix}$$

$\therefore\quad (A+E)(A-E)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & \cot\frac{\theta}{2}\\ -\cot\frac{\theta}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\cot\frac{\theta}{2}\\ \cot\frac{\theta}{2} & -1\end{pmatrix}$$

$$=\sin^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}-1+\cot^2\frac{\theta}{2} & -2\cot\frac{\theta}{2}\\ 2\cot\frac{\theta}{2} & -1+\cot^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

（注）上の計算の終わりのほうで，公式

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$
$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

を使いました。念のため。

ｘ/○

練習 5. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=J$ と書く。

行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ と実数 t に対し，

$$A(I-tJ)=I+tJ$$

という関係が成り立つとき，a，b，c，d を t の式で表せ。　　　　(東大)

（ヒント）I が単位行列，J は交代行列です。

さて，

$$I-tJ=\begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix}$$

$$I+tJ=\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$$

ところで，$I-tJ$ は $1\cdot 1-t(-t)=1+t^2\neq 0$ であるから，逆行列をもっています。

$\therefore\quad A=(I+tJ)(I-tJ)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1-t^2 & -2t\\ 2t & 1-t^2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}a=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad b=\frac{-2t}{1+t^2}\\ c=\frac{2t}{1+2t^2},\quad d=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ 交代行列に対して **対称行列** というのがあります。これは対角成分について対称になっているもの，つまり

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

といったぐあい。

もっと一般的に書けば

$$\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$$

といった形のもの。詳しくは（☞ p.88)。

さて，次の定理が成り立ちます。

ｘ/○

練習 6. 任意の 2 次の正方行列は，対称行列と交代行列の和として表すことができることを示せ。

（解）任意の行列 A の転置行列を A' と書くことにすると

$$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$$

と変形でき，

$\frac{1}{2}(A+A')$ は 対称行列，

$\frac{1}{2}(A-A')$ は 交代行列

であるから証明された。

（注）$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とすると　$A'=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(A+A')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2a & b+c\\ b+c & 2d\end{pmatrix}\ (対称行列)$$

$$\frac{1}{2}(A-A')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & b-c\\ c-b & 0\end{pmatrix}\ (交代行列)$$

です。では，ついでに

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

を対称行列と交代行列の和で表してみませんか。

任意の関数が偶関数と奇関数の和で表せる証明もこんなぐあいでしたね。（☞「数Ｉ」p. 214, 216参照)

○ 列ベクトルと行ベクトル

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◈列ベクトルはベクトルではなく行列です。行ベクトルもベクトルではなく行列なんです。おまちがいなく……

◆ 行列というのは数を長方形に並べたもので，これを（　）や［　］で囲って表したものでした。そして，横の数を第1行，第2行などといい，縦の数を左のほうから第1列，第2列というのでした。例えば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

で第1行は1と2と3で，第2行は4と5と6です。そして，第1列は1と4，第2列は2と5といったぐあい。さて，

1行しかない行列を **行（ぎょう）ベクトル**

1列しかない行列を **列（れつ）ベクトル**

といいます。

練習 1. $A=(1\ \ 2\ \ 3)$，$B=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ とするとき AB および BA を求めよ。

（解） $AB=(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$$=(1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6)$$

$$=(4+10+18)=(32)$$

$$BA=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ 3)=\begin{pmatrix}4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot3\\ 5\cdot1 & 5\cdot2 & 5\cdot3\\ 6\cdot1 & 6\cdot2 & 6\cdot3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 15\\ 6 & 12 & 18\end{pmatrix}$$

つまり AB は1行1列の行列，BA は3行3列の行列（こういうよりもそれぞれ1次の正方行列，3次の正方行列といったほうがいいかな）になります。

（注） 行ベクトルは1行の行列なんですから $A=(1\ \ 2\ \ 3)$ と書くべきで $A=(1,\ 2,\ 3)$ と書いてはいけないハズ。

ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ 3)$ とベクトル $\boldsymbol{b}=(4,\ 5,\ 6)$ の内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=32$$

で，これは大きさを表します。しかし，(32) は行列ですから大きさを表していないのです。にもかかわらず，この間には一方から他方への混用が行われ，それが混乱のもとにもなっているが，一方，便利な点でもあります。ちょうど，点の座標と，位置ベクトルの成分の混用と似ています。

例えば，次をやってみませんか。

練習 2. 1次変換 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ によって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ はどんな点に移されるか。

（ヒント） 点 $(a,\ b)$ を列ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ で表して

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b\\ 4a+3b\end{pmatrix}$$

ゆえに，点

$$(a+2b,\ 4a+3b)$$

に移されることがわかります。

練習 3. 連立方程式

$$\begin{cases}3x+2y=8\\ 5x+y=11\end{cases}$$

を逆行列を使って解け。

（ヒント） 行列を使って表せば

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 11\end{pmatrix}$$

ここで

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}8\\ 11\end{pmatrix}$$

とおいてみますと，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

Aは正則です。つまり逆行列 A^{-1} がありますから，両辺の左から掛けてやると

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x})=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

ところが，行列の積では結合法則が成り立つのですから，

$$(A^{-1}A)\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\therefore\ E\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}1&-2\\-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\11\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}-14\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

答 $x=2,\ y=1$

ここで，大切なことは行列の積に結合法則が成り立つということ，なんです。

*　*　*

◆ ベクトルには大きさがあります。例えば，$|(2,\ 2)|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，しかし，**行ベクトルは行列ですから，$|(2\ \ 2)|$などというものはありません。(しかし，正方行列$A$に対して$|A|$は行列式を表しますが，それはもちろん$A$の大きさを表すのではありませんよ)**

このような混乱を起こさないよう注意が肝心です。列ベクトルをいくつか並べると行列になることも大切なことのひとつです。例えば，これです。

5/8

■練習 4. 1次変換Aによって，点(1, 2)は点(7, 8)に移され，点(5, 2)は点(11, 24)に移される。Aを求めよ。

ヒント $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ としますと

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b\\c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ a+2b=7 \qquad \cdots\cdots①$$

$$c+2d=8 \qquad \cdots\cdots②$$

また，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b\\5c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\24\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ 5a+2b=11 \qquad \cdots\cdots③$$

$$5c+2d=24 \qquad \cdots\cdots④$$

①，③から

$$a=1,\ b=3$$

②，④から　$c=4,\ d=2$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

ところで，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$$

および

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\24\end{pmatrix}$$

とを1つにまとめて

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&11\\8&24\end{pmatrix}$$

とすることができます。そこで $\begin{pmatrix}1&5\\2&2\end{pmatrix}^{-1}$ を両辺の右から掛けて

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&11\\8&24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\2&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}7&11\\8&24\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}2&-5\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8&-24\\-32&-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$$

となって，簡単にいきます。こんなところに列ベクトルや行ベクトルの使い方がひそんでいるといえます。次数が高くなるともっと便利になります。では，最後の最後にこれをやってみませんか。

■練習 5. 1次変換Aによって，点(1, 2, 3)は(8, 8, 9)に，点(4, 2, 0)は点(8, 14, 18)に移され，点(1, 3, 1)は点(8, 11, 8)に移されるという。Aを求めよ。

答 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&0\\4&1&1\end{pmatrix}$

① 逆行列とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈ギャク関数，ギャク数，ギャク写像，それにこのギャク行列，どうして，こうもギャクが問題になるのだろうね。

◆ まず定義を：——

AもBも正方行列で

$$AB=BA=E$$

のとき，AをBの逆行列，BをAの逆行列という。ここで，Eは単位行列。

ともかく，具体的に求めてみましょう。

ε/8

練習 1. 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(ヒント) 求める逆行列を $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とします と

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}a+2c=1\\ 3a+4c=0\end{cases} \quad \begin{cases}b+2d=0\\ 3b+4d=1\end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$a=-2,\ c=\frac{3}{2}$$

$$b=1,\ d=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，求める逆行列 B は

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

です。

なお，Aの逆行列をA^{-1}で表します。したがって

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

なる関係があります。

*　*　*

練習 2. 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。ただし，$ad\neq bc$ とする。

(解) 求める逆行列を

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}ap+br=1\\ cp+dr=0\end{cases} \quad \begin{cases}aq+bs=0\\ cq+ds=1\end{cases}$$

これを解いて

$$p=\frac{d}{ad-bc},\ r=\frac{-c}{ad-bc}$$

$$q=\frac{-b}{ad-bc},\ s=\frac{a}{ad-bc}$$

ゆえに

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

(注) 2次の正方行列の逆行列は上の公式からすぐ求められます。これは公式として暗記しておくべきです。

また，$ad=bc$ のときには，上の手順からすぐわかるように逆行列を求めることができません。このように，逆行列は必ず存在するわけではないのです。逆行列の存在する行列は **正則**（せいそく）であるといいます。

2次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

が正則であるための条件は $ad\neq bc$ であることはいうまでもないでしょう。

*　*　*

◆ 行列の逆行列についていくつかの重要な性質をあげておきましょう。

練習 3. $(A^{-1})^{-1}=A$ を証明せよ。

(ヒント) これはAの逆行列の逆行列はAだというのです。このことは定義によると

$$A^{-1}\cdot A=E$$

であることを意味し，当然のことです。

ち/8

■練習 4. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ を証明せよ。

(ヒント)　$(AB)^{-1}=X$ とおくと $(AB)X=E$ であるハズ。さては

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=E$$

が証明できればいいだろう。さて

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=\{(AB)B^{-1}\}A^{-1}$$
$$=\{A(BB^{-1})\}A^{-1}=(AE)A^{-1}=AA^{-1}=E$$

ナルホド，うまくいった。

*　　*　　*

◆　では，やや総合的な練習をすることにしましょう。まず，これです。

■練習 5. 逆行列を用いて次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+5y=4 \end{cases}$$

（松山商大）

(解)　行列を用いて表せば

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ の逆行列を両辺の左から乗じて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=3,\ y=-1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

ち/7

■練習 6. 行列 $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が，等式 $P^2-dP=P^{-1}$ を満たすとき P^3 を求めよ。ただし，$ad-bc=1$ とする。　（東北大）

(ヒント)　P^3 をまず作るために P を両辺の右から掛けてみたらどうだろう。

$$P^3-dP^2=P^{-1}P=E$$
$$\therefore\quad P^3=dP^2+E=d(dP+P^{-1})+E$$
$$=d^2P+dP^{-1}+E \qquad \cdots\cdots(*)$$

これで，どうやら P を求めないではすむまいとわかる。そこでもとの式に戻りますと，

$$\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}-d\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

から

$$a^2+bc-ad=d \qquad \cdots\cdots①$$
$$ab+bd-bd=-b \qquad \cdots\cdots②$$
$$ac+cd-cd=-c \qquad \cdots\cdots③$$
$$bc+d^2-d^2=a \qquad \cdots\cdots④$$

②より

$$b(a+1)=0 \qquad \cdots\cdots②'$$

③より

$$c(a+1)=0 \qquad \cdots\cdots③'$$

④より

$$bc=a \qquad \cdots\cdots④'$$

①より

$$a^2-1=d \quad (\because\ ad-bc=1) \quad \cdots\cdots①'$$

$a\neq-1$ なら ②′，③′ より $b=c=0$

したがって ④′ より $a=0$，ゆえに ①′ より $d=-1$．これは $ad-bc=1$ に反するから適さないことがわかります。

$$\therefore\quad a=-1$$
$$\therefore\quad d=0$$

これを (*) に代入して，一挙に解決してしまう。つまり

$$P^3=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\boxed{答}$　$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(注)　べつにめんどうはなかった。ムリに探せば①，②，③，④を解くハメになったとき，ああ，これはたいへんだな，とだれしも思うもの。そんなところです。

■練習 7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ のとき $AC=B$ のような行列 C を求めよ。

（東北学院大）

(ヒント)　$AC=B$

$$\therefore\quad C=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 11 & 14\end{pmatrix}$$

○逆行列の求め方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆逆行列の求め方は3つあります。第1は定義から直接に，第2は公式により，そして第3は掃出し法によって，です。

◆ 逆行列の求め方は大きく分けて4つあります。第1は定義にしたがって求めるもの，第2は逆行列を求める公式を使うもの，そして，第3は掃出し法（あるいは基本変形法も本質的には同じですが……）です。

そして第4はp.98で……

4/6

■練習 1. 定義にしたがって

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$$ の逆行列を求めよ。

（解） $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad ax+z=1 \qquad \cdots\cdots①$$

$$4x+az=0 \qquad \cdots\cdots②$$

①$\times a-$②：

$$(a^2-4)x=a$$

$a \fallingdotseq \pm 2$ のとき

$$x=\frac{a}{a^2-4}$$

ゆえに①より

$$z=\frac{-4}{a^2-4}$$

同様にして

$$y=\frac{-1}{a^2-4},\quad u=\frac{a}{a^2-4}$$

であるから，$a \fallingdotseq \pm 2$ のとき

$$A^{-1}=\frac{1}{a^2-4}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -4 & a \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

で，$a=\pm 2$ のときには逆行列は存在しない。

* * *

◆ 第2は公式を使うものです。2次の正方行列の逆行列は公式で簡単に求められます。

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ならば}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

（ただし，$ad-bc \fallingdotseq 0$）

です。さっそく使ってみませんか。

6/6

■練習 2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

（大阪産業大）

（解） $$A^{-1}=\frac{1}{3\cdot 5-2\cdot 7}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ 第3は **掃出し法** （はきだしほう）によるものです。ともあれ具体的な問題から考えてみましょう。

■練習 3. 次の逆行列を掃出し法で求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

（ヒント） $$2x+1\cdot y=1\cdot a+0\cdot b$$

$$3x+5y=0\cdot a+1\cdot b$$

を変形して

$$1\cdot x+0\cdot y=\frac{5}{7}a-\frac{1}{7}b$$

$$0\cdot x+1\cdot y=-\frac{3}{7}a+\frac{2}{7}b$$

が得られます。つまり

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/7 & -1/7 \\ -3/7 & 2/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となるわけ。そして右辺の左の因子が係数行列の逆行列です。

このことから，次のように掃出し法が使えるのです。

(ヒント)

説明		x	y	a	b
	①	2	1	1	0
	②	3	5	0	1
	①	2	1	1	0
②−①	②	1	4	−1	1
①−②×2	①	0	−7	3	−2
	②	1	4	−1	1
①÷(−7)	①	0	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
	②	1	4	−1	1
	①	0	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
②−①×4	②	1	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$
①と②を交換	①	1	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$
	②	0	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$

こうして逆行列が求められたわけです。次の練習をやってみませんか。

練習 4. 次の逆行列を掃出し法で求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

(解)

説明		x	y	a	b
	①	5	3	1	0
	②	1	4	0	1
	①	5	3	1	0
②−①	②	−4	1	−1	1
①−②×3	①	17	0	4	−3
	②	−4	1	−1	1
①÷17	①	1	0	$\frac{4}{17}$	$-\frac{3}{17}$
	②	−4	1	−1	1
	①	1	0	$\frac{4}{17}$	$-\frac{3}{17}$
②+①×4	②	0	1	$-\frac{1}{17}$	$\frac{5}{17}$

ゆえに，求める逆行列は

$$\frac{1}{17}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$ ……答

である。

* * *

◆ 3次の正方行列について逆行列を求めることは無理にやることもありませんが，同じことですから，やっておくほうがいいでしょう。では，次のものをやってみませんか。

練習 5. 行列 $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(解)

説明		x	y	z	a	b	c
	①	2	3	1	1	0	0
	②	−1	2	1	0	1	0
	③	−2	4	5	0	0	1
	①	2	3	1	1	0	0
②−①	②	−3	−1	0	−1	1	0
③−①×5	③	−12	−11	0	−5	0	1
①と③を交換	①	−12	−11	0	−5	0	1
	②	−3	−1	0	−1	1	0
	③	2	3	1	1	0	0
①−②×11	①	21	0	0	6	−11	1
	②	−3	−1	0	−1	1	0
	③	2	3	1	1	0	0
①÷21	①	1	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{11}{21}$	$\frac{1}{21}$
	②	−3	−1	0	−1	1	0
	③	2	3	1	1	0	0
	①	1	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{11}{21}$	$\frac{1}{21}$
②+①×3	②	0	−1	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$
	③	2	3	1	1	0	0
(途中省略)							
	①	1	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{11}{21}$	$\frac{1}{21}$
	②	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$
	③	0	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

掃出し法のよい点は行列の次数がふえても同じ操作でできることです。次数が高くなると，直接定義からではたいへんだし，公式もありますが，かなりめんどうなのです。

○逆行列の求め方(つづき)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆逆行列のもっとも大きな働きは，それが行列の除法に当たる役割をするからなんです。そこがわかれば，イヤガルこともあるまい。

◆ 行列Aが2次式

$$A^2+pA+qE=O$$

の形に与えられたときの逆行列を求める問題がスゴク多いのです。それをつかむのがここの目的です。ではともかく実例からいくとしましょう。

練習 1. $A^2=E$ のときAの逆行列を求めよ。

ヒント　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としますと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a^2+bc=1 \quad\cdots\cdots①$$

$$b(a+d)=0 \quad\cdots\cdots②$$

$$c(a+d)=0 \quad\cdots\cdots③$$

$$d^2+bc=1 \quad\cdots\cdots④$$

②，③より

(Ⅰ)　$a+d\neq 0$ のとき

$$b=0,\ c=0$$

したがって①，④より　$a=\pm1,\ d=\pm1$

a	1	1	-1	-1
d	1	-1	1	-1
適否	適	不適	不適	適

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ あるいは } A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=E \text{ あるいは } A^{-1}=-E$$

となります。

(Ⅱ)　次に　$a+d=0$ のときには②と③はいらない。そして，①，④は次のように書きかえられます。

$$ad-bc=-1$$

したがって，この場合にはaを与えればdはきまりますが，b，cは $bc=1-a^2(=1-d^2)$ を満足するものならなんでもいい。つまり無数にある。しかも，

$$ad-bc=|A|\neq 0$$

ですから正則であることがわかります。

そこで

$$A^2=E$$

の両辺に A^{-1} を乗じて

$$A=A^{-1}$$

となります。

結局，(Ⅰ)，(Ⅱ)をまとめて

$$A^{-1}=A$$

と表せるわけです。

答　$A^{-1}=A$

わかってしまえばいうまでもありません。

解　行列Aに対して

$$AB=BA=E$$

である行列BをAの逆行列という。ところが $A^2=E$ は

$$AA=E$$

とかける。したがって A の逆行列は A である。

答　$A^{-1}=A$

*　　*　　*

◆ では，もうひとつ。

練習 2. $A^2-A+E=O$ のとき，Aの逆行列をAとEで表せ。ただし，Aは正方行列で，成分は実数とする。

ヒント　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としますと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となります。そこで，両辺を比較して

$$a^2+bc-a+1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$b(a+d-1)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$c(a+d-1)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$
$$d^2+bc-d+1=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

（Ⅰ） $a+d \neq 1$ のとき②，③より

$$b=0,\ c=0$$

ゆえに①，④より

$$a^2-a+1=0,\ d^2-d+1=0$$

これは成分が実数である条件に反する。したがって $a+d \neq 1$ は成立しない。

（Ⅱ） $a+d=1$ のとき①，④を書きかえると

$$ad-bc=1$$

となりますから A は正則です。したがって，逆行列が存在します。A の逆行列 A^{-1} を

$$A^2-A+E=O$$

の両辺に乗じて

$$A-E+A^{-1}=O$$
$$\therefore\ A^{-1}=-A+E \qquad \cdots\cdots 答$$

こうして，具体的にわかったのですが，形式的には次のように扱うことができます。

（解） $$A^2-A+E=O$$
$$\therefore\ A(E-A)=E$$

また

$$(E-A)A=E$$
$$\therefore\ A(E-A)=(E-A)A=E$$

ゆえに

$$A^{-1}=E-A \qquad \cdots\cdots 答$$

* * *

◆ では，これではどうでしょう。

練習 3. $A^2=O$ のとき A の逆行列があるのか，あれば求めよ。ただし，A も O も2次の正方行列である。

（ヒント） $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としますと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore\ a^2+bc=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$b(a+d)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$c(a+d)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$
$$d^2+bc=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

（Ⅰ） $a+d \neq 0$ のとき②，③より

$$b=0,\ c=0$$

したがって①，④より

$$a=0,\ d=0$$

これは上の仮定に反する。

（Ⅱ） $a+d=0$ のとき①，④より

$$ad-bc=0$$
$$\therefore\ |A|=0$$

つまり A は正則ではない。逆行列は存在しないのです。

答 逆行列は存在せず

（注） このとき A はどんなものでしょうか。（Ⅰ）の方からは A は求められませんが，（Ⅱ）の方からは無数に求められます。つまり a を任意に与えたとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

ただし $bc=-a^2$

となります。あるいは，b，c を任意として

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

としてもよいのです。ただし，複号同順で，$bc<0$ でなければなりません。

* * *

練習 4. A が2次の正方行列で

$$A^2-A=O$$

のとき A の逆行列を求めよ。

（ヒント） 上とおなじようにやると

（Ⅰ） $a+d \neq 1$ のとき $b=0$，$c=0$ で

$$A=E \text{ あるいは } A=O$$

左の方は逆行列をもつが右の方は逆行列をもたないのです。

（Ⅱ） $a+d=1$ のとき $|A|=0$ となりますので逆行列はもちません。

つまり，この場合には $A^2-A=O$ を満足する A は無数にあって，逆行列をもつものもあり，もたないものもあることがわかったのです。

⑩ 逆行列の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈逆行列の使い方はやさしそうで，案外難しいのです。とりあえず，典型的なものをマスターすること。

◆ 逆行列の使い方はいろいろありますが，第一はなんといっても連立1次方程式の解法です。例えば，これです。

練習 1. $a\fallingdotseq\pm1$ のとき連立方程式

$$ax+y=1,\quad x+ay=2$$

を解け。

(解) 行列を使って表せば

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の逆行列を，両辺に左から掛けて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=\frac{a-2}{a^2-1}$$

$$y=\frac{2a-1}{a^2-1}$$

答　$x=\dfrac{a-2}{a^2-1},\quad y=\dfrac{2a-1}{a^2-1}$

*　　*　　*

◆ 本質的には上と同じですが，次をやってみませんか。

練習 2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$AC=B$ のような行列 C を求めよ。

（大阪産業大）

(ヒント)　$AC=B$

から C を求めたいわけですが，A で割るわけにはいかない。割ることはできないが，それに当たるのは A の逆行列 A^{-1} を左から掛けることなんです。つまり

$$A^{-1}AC=A^{-1}B$$

$$\therefore\quad C=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & -13 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる。この λ_1, λ_2 の値を求めよ。

（鹿児島大）

(ヒント) これは逆行列の使い方というほどのものでもない。ただていねいに計算すればいいでしょう。

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \lambda_1=3,\ \lambda_2=2\quad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 4. 2つの行列　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の間に $P^{-1}AP=B$（P は逆行列が存在する行列）の関係があるとき，α, β の値を求めよ。

（福岡大）

(ヒント)　$P=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ とおいて $P^{-1}AP$ を計算したのではゴタゴタする。そこで

$$P^{-1}AP=B$$

の両辺に左から P を乗ずると

$$AP=PB$$

となります。こうして，両辺を計算すればいいでしょう。

さて：——

$$AP=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+z & 2y+u\\ 3x+4z & 3y+4u\end{pmatrix}$$

$$PB=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x & \beta y\\ \alpha z & \beta u\end{pmatrix}$$

したがって

$$2x+z=\alpha x,\quad 2y+u=\beta y$$

$$3x+4z=\alpha z,\quad 3y+4u=\beta u$$

$$\therefore\quad (2-\alpha)x+z=0 \quad\cdots\cdots①$$

$$3x+(4-\alpha)z=0 \quad\cdots\cdots②$$

$$(2-\beta)y+u=0 \quad\cdots\cdots③$$

$$3y+(4-\beta)u=0 \quad\cdots\cdots④$$

①×$(4-\alpha)$－②：　$(\alpha^2-6\alpha+5)x=0$

$x=0$ とすると①より $z=0$，したがって P は逆行列をもたないことになって題意に反することがわかります。　$\therefore\ x\neq 0$

$$\therefore\quad \alpha^2-6\alpha+5=0$$

$$\therefore\quad \alpha=1 \quad \text{あるいは} \quad \alpha=5$$

同様にして③，④から

$$\beta=1 \quad \text{あるいは} \quad \beta=5$$

そこで4つの場合が考えられます。

$\alpha=\beta=1$ のとき①，②，③，④から

$$x+z=0,\quad y+u=0$$

このとき

$$xu-yz=xu-(-u)(-x)=0$$

となり P は逆行列をもたないから適さない。

$\alpha=\beta=5$ のときも同様にして適さないことがわかります。

$\alpha=1$，$\beta=5$ のときには①，②，③，④から

$$x+z=0,\quad 3y-u=0$$

$$\therefore\quad xu-yz=xu-\frac{u}{3}\cdot(-x)=\frac{4}{3}xu\neq 0$$

ですから，P は逆行列をもつから適します。

$\alpha=5$，$\beta=1$ のときも同様です。

答　$\alpha=1$，$\beta=5$；$\alpha=5$，$\beta=1$

注　これは思いのほか，めんどうでしたね。しかし，そのめんどうさは行列にあるのではなく，連立1次方程式なんですから，このことから行列がめんどうだ，などと思ってはいけません。

＊　＊　＊

◆　では，次にはちょっと変わった扱い方を練習してみましょう。

5/15

練習 5. 行列の集合 $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, a\text{は実数}\right\}$ について，A，$B\in G$ とするとき，次の2つの条件を満たす 2×2 行列 X，Y を求めよ。

$$AX-BY=E,\quad BX+AY=O$$

（名古屋市大）

解　$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ は

$$1\times 1-a\times 0=1\neq 0$$

であることから逆行列をもつ。

ゆえに，与えられた等式の両辺にそれぞれ B^{-1} および A^{-1} を左から掛けると

$$B^{-1}AX-Y=B^{-1} \quad\cdots\cdots①$$

$$A^{-1}BX+Y=O \quad\cdots\cdots②$$

辺々相加えて

$$(B^{-1}A+A^{-1}B)X=B^{-1}$$

ところが

$$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とすると

$$B^{-1}A+A^{-1}B$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & a-b\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & b-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2E$$

$$\therefore\quad 2EX=B^{-1}$$

$$\therefore\quad X=\frac{1}{2}B^{-1}$$

ゆえに，②より

$$Y=-A^{-1}B\cdot\frac{1}{2}B^{-1}=-\frac{1}{2}A^{-1}$$

答　$X=\dfrac{1}{2}B^{-1}$，$Y=-\dfrac{1}{2}A^{-1}$

＊　＊　＊

◆　逆行列のさらに進んだ使い方については，それぞれの項を参照してください。（☞ p.186，p.109など）

正則でない行列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆正則でない行列はとかくめんどうになるのです。というのも，不定がフテイな働きをするからです。

◆ ちょっと，おさらいを：——

2次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が逆行列をもつのは $ad-bc\neq 0$ のときで，逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられるのでした。逆行列をもつ行列を**正則行列** といいます。ここでは，正則でない行列についていろいろな問題をやってみることにしましょう。

■**練習 1.** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ が正則でないように，定数 a の値を定めよ。

ヒント　$1\cdot 1-a\cdot a=0$ より

$$a^2=1 \qquad \therefore \quad a=\pm 1 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

5/16

■**練習 2.** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ が正則でないならば A^2 も正則でないことを示せ。

ヒント　Aが正則でありませんから

$$1\cdot 1-a\cdot b=0 \qquad \therefore \quad ab=1$$

そして

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+ab & 2a \\ 2b & 1+ab \end{pmatrix}$$

ですから

$$(1+ab)^2-(2a)(2b)$$
$$=1+2ab+(ab)^2-4ab=(1-ab)^2=0$$

ナルホド，A^2 は正則ではないことがわかりました。

＊　＊　＊

◆ 次には正則でない行列と方程式について考えてみましょう。

5/16

■**練習 3.** 次の連立方程式を解け。

$$x+2y=3,\ 2x+4y=6$$

ヒント　行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(*)$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ は正則でないから逆行列をもたない。ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とやるわけにいかない。さあ，どうしようか。実は (*) は

$$(1 \quad 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3$$

と同じことはすぐわかります。つまり不定です。$y=k$ とおくと

$$x=3-2k$$

ですから，結果は

$$x=3-2k,\ y=k\ (k\text{は任意}) \cdots\cdots \text{答}$$

■**練習 4.** 連立方程式

5/16

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=5 \end{cases}$$

を解け。

ヒント　行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(**)$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ は正則ではありませんから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とやるわけにはいきません。(**) から

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

が出て，明らかに不成立。つまり不能です。

＊　＊　＊

◆ 次は1次変換との関係です。では，これをやってみませんか。

練習 5. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ によって，平面上の点はどこに移されるか。

ヒント　$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ですから，x-y 平面上の点はすべて原点に移されるのです。

練習 6. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ によって平面上の点はどこに移されるか。

ヒント　$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

としますと

$$1x+2y=x' \quad \cdots\cdots ①$$

$$2x+4y=y' \quad \cdots\cdots ②$$

$$\therefore\quad y'=2x'$$

つまり，全平面上の点が直線 $y=2x$ に移されるのです。ではどのように，か？

直線 $x+2y=1$ 上の点はすべて点 $(1,\ 2)$ に移されるし，直線 $x+2y=2$ 上の点はすべて点 $(2,\ 4)$ に，というぐあい。一般に，直線 $x+2y=k$ 上の点はすべて点 $(k,\ 2k)$ に移されるのです。

*　*　*

◆ 以上で，正則でない行列の大切なことは終わりました。次にはややめんどうな問題を扱ってみるとしましょう。

練習 7. $a,\ b,\ c$，を実数とし $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ とする。

(1) $A^2=A$ であるとき，$a,\ c$ を用いないで A を表せ。

(2) E を単位行列とする。$A^2=A$ であるとき，$A-tE$ が逆行列をもたないような t の値を定めよ。　（北大）

解　(1) $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ について，$A^2=A$ であるから，

$$\begin{pmatrix}a^2+b^2&(a+c)b\\(a+c)b&b^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$$

であるから

$$a^2+b^2=a \quad \cdots\cdots ①$$

$$b^2+c^2=c \quad \cdots\cdots ②$$

$$(a+c)b=b \quad \cdots\cdots ③$$

③より

$$b(a+c-1)=0$$

$$\therefore\quad b=0 \quad \text{あるいは} \quad a+c=1$$

$b=0$ ならば①，②より

$$a^2=a \quad \text{かつ} \quad c^2=c$$

$$\therefore\quad a=0,\ 1,\qquad c=0,\ 1$$

したがって，$a+c\neq 1$ のものは

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ④$$

次に，$a+c=1$ のときは③は成り立ち，①，②より

$$a^2-a+b^2=0$$

$$\therefore\quad a=\frac{1\pm\sqrt{1-4b^2}}{2}\quad \left(-\frac{1}{2}\leqq b\leqq\frac{1}{2}\right)$$

また，

$$c=\frac{1\mp\sqrt{1-4b^2}}{2}$$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}\dfrac{1\pm\sqrt{1-4b^2}}{2}&b\\b&\dfrac{1\mp\sqrt{1-4b^2}}{2}\end{pmatrix} \quad \cdots ⑤$$

ただし，複号同順である。

(2) ④の2つの行列について，行列 $A-tE$ はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}-t&0\\0&-t\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1-t&0\\0&1-t\end{pmatrix}$$

で，これが逆行列をもたないための条件はそれぞれ $t=0,\ t=1$ となることである。

また，⑤については，$A-tE$ が逆行列をもたない条件は，

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2}-t\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-4b^2}}{2}-t\right)-b^2=0$$

$$\therefore\quad t=0,\ 1$$

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

○行列の和とは何か

◈行列の和の意味と計算の仕方をマスターするのがネライ。べつにめんどうはないから敬遠してはいけません。

◆　２つの行列は同じ型のとき，つまり，行も列も同じ数だけあるときのみ加えることができます。そして，それは，**対応する要素の和を作る** のです。つまり

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&4\\5&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&7\\9&6&9\end{pmatrix}$$

といったぐあい。しかし

$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&1&2\end{pmatrix}$ の和は考えない，

ということです。では，さっそくやってみませんか。

5/12

■練習 1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$ のとき $A+B$ を求めよ。

(解)　$A+B=\begin{pmatrix}5&3\\5&7\end{pmatrix}$　……答

5/17

■練習 2. 2次の正方行列について，和の交換法則が成り立つことを示せ。

(解)　$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}$

とすると

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2\\a_3+b_3&a_4+b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1&b_2+a_2\\b_3+a_3&b_4+a_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}=B+A$$

$$\therefore\quad A+B=B+A$$

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆　差についてもまったく同じことが成立します。では，念のため練習３．を：——

■練習 3. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&2&2\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ のとき $2A+3B-C$ を求めよ。

(解)　$2A+3B+C$

$$=2\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&1&2\\4&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&6\\6&2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&3&6\\12&6&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&7&11\\18&7&10\end{pmatrix}$$　……答

8/1.9

■練習 4.　$A=\begin{pmatrix}1\\x\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}y\\3\\4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5\\2\\z\end{pmatrix}$

で　$A-B+C=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ となるように x, y, z を求めよ。

(解)　$A-B+C=\begin{pmatrix}6-y\\x-1\\z-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

であるから

$x=1$,　$y=6$,　$z=2$　……答

＊　＊　＊

◆　行列の和については，いうまでもなく結合法則が成り立ちます。すなわち，

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

交換法則も結合法則も成り立つのですから，和や差については，ふつうの代数計算がそのまま成り立ちます。したがって，いちいち成分に分けないでも扱えるわけです。例えば，これをやってみませんか。

3/9

■**練習5.** $A=\begin{pmatrix}0 & 20\\ 10 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 40\end{pmatrix}$

で
$$2X+3Y=A$$
$$4X+\ \ Y=B$$
のとき，X，Y を求めよ。

（解）
$$2X+3Y=A \qquad \cdots\cdots①$$
$$4X+\ \ Y=B \qquad \cdots\cdots②$$

②×3−①： $10X=3B-A$

$\therefore\ X=\dfrac{1}{10}(3B-A)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 11\end{pmatrix}$

①×2−②： $5Y=2A-B$

$\therefore\ Y=\dfrac{1}{5}(2A-B)=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

答 $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 11\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

* * *

◆ では，ややめんどうな練習にいきましょう。3/10

■**練習6.** a，x，y は次式のすべてを満足する。a，x，y を求めよ。
$$\begin{pmatrix}2 & a\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$x^2+y^2=25,\ x>0$$
（東京理大）

（解）
$$2x+ay=5x$$
$$3x+y=5y$$
より
$$3x-ay=0$$
$$3x-4y=0$$
$x>0$ であるから
$$ay=4y\neq 0$$
$$\therefore\ a=4$$
また
$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=k\ (>0)$$
とおくと
$$x=4k,\ y=3k$$
これを $x^2+y^2=25$ に代入して
$$25k^2=25,\ k^2=1,\ k=1$$
$$\therefore\ x=4,\ y=3$$

答 $a=4$, $x=4$, $y=3$

■**練習7.** t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき
$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}$$
を満たす点 $(x,\ y)$ が描く曲線を C とする。直線 $y=x+2$ の上の点と C の上の点との最小値を求めよ。（早大）

（解）
$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\cos t-\sin t)\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\cos t+\sin t)\end{cases}$$
なる点から $y=x+2$ すなわち $x-y+2=0$ に至る距離の最小値は垂線の長さである。これを k とすると

$k=$
$$\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(2\cos t-\sin t)-\frac{1}{\sqrt{2}}(2\cos t+\sin t)+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left|-2\sin t+2\sqrt{2}\right|$$
$$=\left|\sqrt{2}-\sin t\right|$$
$$=\sqrt{2}-\sin t$$
ゆえに求める最小値は $t=\dfrac{\pi}{2}$ のときで，その値は $\sqrt{2}-1$ である。

3/17

■**練習8.** $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が存在するとき，a を求めよ。（東北学院大）

（解）
$$-2x+y=0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$-4x+(3-a)y=0 \qquad \cdots\cdots②$$
①×2−②：
$$(a-1)y=0$$
$y=0$ ならば①より $x=0$ となって適しないから $y\neq 0$
$$\therefore\ a=1$$
このとき①，②は
$$x=k,\ y=2k\ （k \text{は任意},\ k\neq 0）$$
によって満足される。

答 $a=1$

(行列の積の)交換ができる条件

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆行列の積のもっとも大きい特徴は，積について，交換ができない，つまり《可換》でないことです。しかし，特別な場合もある。

◆ 行列の積については交換法則が成り立たないのですが，特別な場合は交換できます。例えば，単位行列をE，零行列をOとすると

$$\boldsymbol{AE=EA=A}$$
$$\boldsymbol{AO=OA=O}$$

が成り立ちます。それ以外にどんな場合があるか，それがこの問題点です。

では，次の練習をやってみませんか。

6/12

練習 1. $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

について，$AB=BA$ となるように定数 a を定めよ。

(解) $AB=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1+4a & 2+3a\\ a+4 & 2a+3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+2a & a+2\\ 4+3a & 4a+3\end{pmatrix}$$

したがって $AB=BA$ が成り立つためには

$$1+4a=1+2a,\ 2+3a=a+2$$
$$a+4=4+3a,\ 2a+3=4a+3$$

が成り立つこと。したがって

$$a=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

5/18

練習 2. すべての2次の正方行列Xに対し$AX=XA$ なる行列Aはどんな形の行列であるか。　(法政大)

(ヒント) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}$

とおくと，

$$AX=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bu\\ cx+dz & cy+du\end{pmatrix}$$

また，

$$XA=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ax+cy & bx+dy\\ az+cu & bz+du\end{pmatrix}$$

$AX=XA$ ということから，

$$ax+bz=ax+cy \qquad \cdots\cdots①$$
$$ay+bu=bx+dy \qquad \cdots\cdots②$$
$$cx+dz=az+cu \qquad \cdots\cdots③$$
$$cy+du=bz+du \qquad \cdots\cdots④$$

これから

$$bz=cy \qquad \cdots\cdots①'$$
$$(a-d)y=b(x-u) \qquad \cdots\cdots②'$$
$$(a-d)z=c(x-u) \qquad \cdots\cdots③'$$
$$bz=cy \qquad \cdots\cdots④'$$

これが x，y，z，u のすべての値に対して成り立つから

$$a-d=0,\ b=0,\ c=0$$
$$\therefore\quad a=d,\ b=c=0$$
$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ここに a は任意の数です。

*　*　*

◆ このような問題はとかく敬遠されます。しかし，実は，行列がめんどうなのではありませんよ。不定の1次方程式が出てきて，その扱いに悩むことが多いのです。しかし，それは，しょせん，数Iの範囲なんです。

練習 3. 行列の各成分を実数とするとき，

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ と乗法について交換可能な行

列，すなわち，$AX=XA$ を満たす 2×2 行列Xを，すべて求めよ。　(秋田大)

(解)　$X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると $AX=XA$ という条件から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} p & q \\ 2r & 2s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & 2q \\ r & 2s \end{pmatrix}$$

両辺を比べて

$$p=p,\ q=2q,\ 2r=r,\ 2s=2s$$

$\therefore$ $q=0,\ r=0$；$p,\ s$ は任意

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

8/18

練習 4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $AX=XA$ となる行列Xは $aE+bA$ の形で表されることを証明せよ。ただし，$a,\ b$ は実数，E は単位行列である。　(慶大)

(ヒント)　ともあれ，$AX=XA$ となる行列を求めてみましょう。

$X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおいてみますと $AX=XA$ から

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} 4p & 4q \\ 5p+r & 5q+s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4p+5q & q \\ 4r+5s & s \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ 4p=4p+5q,\ 4q=q$$
$$5p+r=4r+5s,\ 5q+s=s$$

これから

$$q=0,\ p=s+\frac{3}{5}r$$

つまり

$$X=\begin{pmatrix} s+\frac{3}{5}r & 0 \\ r & s \end{pmatrix}$$

と書けます。ここに $s,\ r$ は任意の実数です。そこで，これは $aE+bA$ なる形に書けることをいえばよい，ということになったわけ。

さて，

$$aE+bA=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ですから，$X=aE+bA$ となるものなら

$$a+4b=s+\frac{3}{5}r$$
$$5b=r,\ a+b=s$$
$$\therefore\ a=s-\frac{r}{5},\ b=\frac{r}{5}$$

なるほど，

$$X=\left(s-\frac{r}{5}\right)E+\frac{r}{5}A$$

が得られる。つまり，証明されたわけです。

*　*　*

4/12

練習 5. AとBが共に2次の対称行列であるとき，AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB=BA$ となることである。これを証明せよ。

(ヒント)　$A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ のような行列を対称行列といいます (詳しくは☞ p.88)。

Aの転置行列 (行と列を交換した行列) を A' と書くと，A が対称行列であるための条件は $A=A'$ であることです。

そこで $A,\ B$ が対称行列であることから

$$A=A',\ B=B'\qquad\cdots\cdots①$$

さて，AB が対称行列なら

$$(AB)'=AB\qquad\cdots\cdots②$$

また，転置行列の性質と①から

$$(AB)'=B'A'=BA\qquad\cdots\cdots③$$

①，②より

$$AB=BA$$

つまり，これが必要条件であることがわかりました。

次に，$AB=BA$ なら

$$(AB)'=B'A'=BA=AB$$
$$\therefore\ (AB)'=(AB)$$

ゆえに AB は対称行列です。つまり十分条件であることが証明されたのです。

Q. E. D.

◑ 正方行列のべき乗の計算法

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆正方行列の２乗，３乗，…… の計算はいろいろ重要な働きをするものです。ここでは，その計算法だけやってみよう，というのです。

◆ 正方行列Aが与えられたときにしばしばA^nを計算する必要が起こってきます。

そして，それには大きく分けて３つの方法があります。それをモノにするのが，ここの目的です。

さて，第１は，**逐次代入**（ちくじだいにゅう）の方法で，結果を推定し，さらに，それを数学的帰納法で証明するものです。次をやってみませんか。

練習 1. $A=\begin{pmatrix}7&0\\0&2\end{pmatrix}$ のとき A^n を計算せよ。

(ヒント) $A=\begin{pmatrix}7&0\\0&2\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad A^2=AA=\begin{pmatrix}7&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7^2&0\\0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}7&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7^2&0\\0&2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7^3&0\\0&2^3\end{pmatrix}$$

どうやら $A^n=\begin{pmatrix}7^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}$ となりそうだ。

(解) $A^n=\begin{pmatrix}7^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}$

である。これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のときは明らかに成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき成り立つとすると

$$A^k=\begin{pmatrix}7^k&0\\0&2^k\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{pmatrix}7&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7^k&0\\0&2^k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7^{k+1}&0\\0&2^{k+1}\end{pmatrix}$$

よって $n=k$ のとき成り立つとすると，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)，(ii)より証明された。

練習 2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ のとき A^n を求めよ。

(ヒント) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

どうやら $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ となりそうだ。あとは前問のように，数学的帰納法を用いて自分でやってみてください。

*　*　*

◆ 第２は **数列を使う** 方法です。

練習 3. $A=\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}$ のとき A^n を計算せよ。

(ヒント) これはいわゆる対称行列，つまり対角線について対称になっています。そして，行列の積の操作から考えて

$$A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\b_n&a_n\end{pmatrix}$$

の形になることは明らかです。そこで

$$A^{n+1}=A\cdot A^n$$

から

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}&b_{n+1}\\b_{n+1}&a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n&b_n\\b_n&a_n\end{pmatrix}$$

とおくことができます。

かくて $a_1=3$，$b_1=4$ かつ

$$a_{n+1}=3a_n+4b_n \qquad \cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=4a_n+3b_n \qquad \cdots\cdots②$$

となります。

①＋② より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=7(a_n+b_n)$$

$$\therefore\quad a_n+b_n=(a_1+b_1)7^{n-1}=7^n \qquad \cdots\cdots③$$

①−②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=(-1)(a_n-b_n)$$

$$\therefore\quad a_n-b_n=(a_1-b_1)(-1)^{n-1}$$

$$=(-1)^n \qquad \cdots\cdots④$$

(③＋④)÷2　および (③−④)÷2 を作って

$$a_n=\frac{7^n+(-1)^n}{2},\quad b_n=\frac{7^n-(-1)^n}{2}$$

ゆえに

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7^n+(-1)^n & 7^n-(-1)^n\\ 7^n-(-1)^n & 7^n+(-1)^n\end{pmatrix}$$

(注) Aが対称行列でないときは少し複雑になりますが，まったく同じことです。二重数列の項（☞基解p.168）を参照してください。

*　*　*

◆ 第3は **固有値を使う** 方法です。これは2つのことからなっています。

いま，Aという行列に対して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

となるような行列Pがあったとしましょう。

両辺をn乗すると

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^n$$

となります。ところが

$$(P^{-1}AP)^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)$$
$$=P^{-1}APP^{-1}AP=P^{-1}A^2P$$
$$(P^{-1}AP)^3=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^2$$
$$=P^{-1}APP^{-1}A^2P=P^{-1}A^3P$$

といったぐあい。一般に

$$\boldsymbol{(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP}$$

となり，また

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$$

そこで，両辺にPを左から，P^{-1}を右から掛けてやると

$$A^n=P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

となるわけです。

6/4

練習 4.　(1)　$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ であるとき

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

となる。この λ_1, λ_2 を求めよ。

(2)　$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP$ であることに注意して，A^k を計算せよ。ただし，A, P は(1)の行列であり，kは自然数である。

（鹿児島大）

(解)　(1)　$P^{-1}AP$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \lambda_1=3,\ \lambda_2=2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(2)

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad (P^{-1}AP)^k=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^k$$

$$\therefore\quad P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^k=P\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3^k & 2^{k+1}\\ -3^k & -2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3^k+2^{k+1} & -2\cdot3^k+2^{k+1}\\ 3^k-2^k & 2\cdot3^k-2^k\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 以上で A^n を計算する方法を3つあげましたが，第4は p.110 を参照。

なお，第3の方法で，P, P^{-1} を求めることが残っていますが，これについては，固有値の項（☞p.168, 170）を参照してください。あるいは $P^{-1}AP=B$ を $AP=PB$ と変形して展開して求める（☞p.96）こともできます。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑ 正方行列のべき乗の計算法(つづき)

◆正方行列AについてA^nを計算することは応用上重要です。だからこそ，第4の方法をがんばろうではないか。

◆ 本論に入るまえに，数Iでやる次の問題を復習しておくとしましょう。

6/13

■練習 1. x^n を x^2-x-2 で割ってえられる余りを求めよ。

(ヒント) x^n を x^2-x-2 で割った商を $Q(x)$，余りを $Ax+B$ とおくと

$$x^n=(x^2-x-2)Q(x)+Ax+B$$

これは恒等式ですから $x=-1,\ 2$ を代入して

$$(-1)^n=-A+B \qquad \cdots\cdots①$$
$$2^n=2A+B \qquad \cdots\cdots②$$

①，②を解いて

$$A=\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}$$

$$B=\frac{1}{3}\{2^n+2(-1)^n\}$$

ゆえに求める余りは

$$\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}x+\frac{1}{3}\{2^n+2(-1)^n\}$$

です。

次は基礎解析でやるべきものですが：——

6/13

■練習 2. x^n を $(x-1)^2$ で割ってえられる余りを求めよ。

(ヒント) $x^n=(x-1)^2Q(x)+(Ax+B)$ …①

とおきますと，両辺をxで微分して

$$nx^{n-1}=(x-1)^2Q'(x)+2(x-1)Q(x)+A \qquad \cdots\cdots②$$

①，②において $x=1$ とおきますと

$$1=A+B$$
$$n=A$$

これを解いて

$$A=n,\ B=1-n$$

ゆえに求める余りは

$$nx+(1-n)$$

です。

*　*　*

◆ さて，本論です。

6/13

◗練習 3. $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ のときA^nを求めよ。

(ヒント) ケーリー・ハミルトンの定理から

$$A^2-4A+3E=O$$

が成り立ちます。

ところで，ここで突然のことながら

≪x^n を x^2-4x+3 で割った商を$Q(x)$，余りを $Ax+B$ としますと

$$x^n=(x^2-4x+3)Q(x)+Ax+B$$

となります。ここに

$$A=\frac{3^n-1}{2},\ B=\frac{3-3^n}{2}$$≫

そこで，xのところにAを入れてもよいことから

$$A^n=(A^2-4A+3E)Q(A)+\frac{3^n-1}{2}A+\frac{3-3^n}{2}E$$

ところが $A^2-4A+3E=O$ なのですから

$$A^n=\frac{3^n-1}{2}A+\frac{3-3^n}{2}E$$

となります。ではもうひとつ。

6/13

◗練習 4. $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ のとき A^n をAとEで表せ。

(ヒント) 上とおなじにやればいいのですが，今度は解答の形式でやってみましょう。

(解) 行列Aについて

$$A^2-4A-5E=O$$

が成り立つ。

ところが x^n について次の恒等式が成り立つ。

すなわち，

$$x^n=(x^2-4x-5)Q(x)+px+q$$

ここに

$$p=\frac{5^n-(-1)^n}{6},\ q=\frac{5^n+5(-1)^n}{6}$$

である。ゆえに

$$A^n=(A^2-4A-5E)Q(A)+pA+qE$$

$$\therefore\quad A^n=\frac{5^n-(-1)^n}{6}A+\frac{5^n+5(-1)^n}{6}E$$

……答

(注) もちろん A^n を求めよ，というのであれば上の右辺を計算しなければなりません。そのとき A^n の各成分は次のとおりです。

$$1-1\ \text{成分}:\frac{5^n-(-1)^n}{6}\times1+\frac{5^n+5(-1)^n}{6}\times1$$
$$=\frac{5^n+2(-1)^n}{3}$$

$$1-2\ \text{成分}:\frac{5^n-(-1)^n}{6}\times2=\frac{5^n-(-1)^n}{3}$$

$$2-1\ \text{成分}:\frac{5^n-(-1)^n}{6}\times4=\frac{2\cdot5^n-2(-1)^n}{3}$$

$$2-2\ \text{成分}:\frac{5^n-(-1)^n}{6}\times3+\frac{5^n+5(-1)^n}{6}\times1$$
$$=\frac{2\cdot5^n+(-1)^n}{3}$$

$$\therefore\quad A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n\\ 2\cdot5^n-2(-1)^n & 2\cdot5^n+(-1)^n\end{pmatrix}$$

となります。

*　*　*

◆ では，次にこれをやってみませんか。

練習 5. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき A^n を求めよ。

(ヒント) これはむしろ逐次代入法でやった方がラクなのですが，ここでは，上の方式でやってみましょう。

$$A^2-2A+E=O$$

です。そこで x^n を $(x-1)^2$ で割った余りを求めて

練習2により

$$x^n=(x-1)^2Q(x)+nx+(1-n)$$

となるのでした。かくして

$$A^n=nA+(1-n)E$$
$$=n\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+(1-n)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となります。

*　*　*

◆ では最後にひとつ。

練習 6. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について $A^n=O$ である自然数 n があるならば $A^2=O$ であることを示せ。

(ヒント) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

ですから，

x^n を $x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ で割った余りを $px+q$ としますと

$$x^n=\{x^2-(a+d)x+(ad-bc)\}Q(x)+px+q$$

ところが $A^n=O$ というのですから，その n に対して x^n は $x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ で割り切れるハズ。

$$\therefore\quad a+d=0\ \text{かつ}\ ad-bc=0$$

$$\therefore\quad A^2=O$$

となりましょう。

このように，A^n の計算法は，A^n のいろいろな証明にも有効なことがわかります。

*　*　*

◆ ここでひとことご注意を：――

4つのやり方でやってみました。とくに最後のやり方は便利です。しかし，入試問題の場合には，コウヤレ，アアヤレ，とやり方を指示してあることが多いので，ひとつの方法で代用するわけにはいきません。どうしてもこの4つの方法をすべてやっておくより仕方がありません。念のため。

なお，ここで重要なことは，ほとんど数Iの範囲にあることを忘れてはいけないということです。このように代数幾何を数Iの中に解消すること，これこそが大切なのです。

⑩ 行列の多項式

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆$x=3+i$ のとき x^2 を求めよ。まったく同じ問題は行列の中にも出てきます。これが主眼点です。

◆ 例えば

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$$

のとき，$A^3+A^2+3A+5E$ を計算しますと，やはり2次の行列になります。このようなものを行列の多項式といいます。なおEは2次の単位行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ です。ともあれ，次の具体的な問題をやってみませんか。

練習 1.　$A=\begin{pmatrix}2&5\\8&5\end{pmatrix}$ のとき

$$A^2+pA+qE=0$$

となるような定数 p，q を求めよ。

ヒント　$A^2=\begin{pmatrix}2&5\\8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44&35\\56&65\end{pmatrix}$

ですから

$$A^2+pA+qE=\begin{pmatrix}44+2p+q & 35+5p\\ 56+8p & 65+5p+q\end{pmatrix}$$

したがって

$$\left.\begin{array}{l}44+2p+q=0\\35+5p=0\\56+8p=0\\65+5p+q=0\end{array}\right\}\quad\therefore\quad p=-7,\ q=-30$$

答　$p=-7$，$q=-30$

練習 2.　$A=\begin{pmatrix}2&5\\8&5\end{pmatrix}$ のとき $A^2-7A-30E=0$ であることを知って

$$2A^4-13A^3-63A^2-57A-110E$$

を計算せよ。

ヒント　多項式 $2x^4-13x^3-63x^2-57x-110$ を $x^2-7x-30$ で割ってみますと，次のようになります。

$$\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & 2 & 1 & 4 & & \\
\hline
1 & -7 & -30 & 2 & -13 & -63 & -57 & -110\\
 & & & 2 & -14 & -60 & & \\
\hline
 & & & & 1 & -3 & -57 & \\
 & & & & 1 & -7 & -30 & \\
\hline
 & & & & & 4 & -27 & -110\\
 & & & & & 4 & -28 & -120\\
\hline
 & & & & & & 1 & 10
\end{array}$$

$$\therefore\quad 2x^4-13x^3-63x^2-57x-110$$
$$=(x^2-7x-30)(2x^2+x+4)+(x+10)$$

したがって，行列の積や和の規則からわかるように

$$2A^4-13A^3-63A^2-57A-110E$$
$$=(A^2-7A-30E)(2A^2+A+4E)$$
$$+(A+10E)$$

となります。ところが

$$A^2-7A-30E=0$$

なんですから

$$=A+10E$$
$$=\begin{pmatrix}2&5\\8&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&5\\8&15\end{pmatrix}$$

が求める結果です。

注　数Iでよくやったように

《$x=1+\sqrt{2}i$ のとき　x^4+x^3+2x+1 の値を求めよ》

というとき，

$$x-1=\sqrt{2}i$$
$$\therefore\quad x^2-2x+1=-2$$
$$\therefore\quad x^2-2x+3=0$$

そこで x^4+x^3+2x+1 を x^2-2x+3 で割って商と余りを求め，

$$与式=(x^2-2x+3)(x^2+3x+3)+(-x-8)$$
$$=-x-8$$
$$=-(1+\sqrt{2}i)-8$$
$$=-9-\sqrt{2}i$$

としたのと同じ流儀です。

*　*　*

◆ 次は，ムリにやることもありませんが，固有値を使う方法をやってみましょう。そのためくどいが，もういちど，次の練習からやることにしましょう。

5/15

練習 3. $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ のとき

$$A^2+pA+qE=0$$

となるように定数 p, q を求めよ。

(解) $$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$$

であるから

$$5+2p+q=0$$
$$4+\ p\ \ \ \ =0$$

でなければならない。

これを解いて

$$p=-4,\ q=3$$ ……答

5/15

練習 4. $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

を満足する定数 λ の値を求めよ。ただし，$x=y=0$ ではないものとする。

(解) 成分に分けると

$$(2-\lambda)x+y=0$$
$$x+(2-\lambda)y=0$$

y を消去して

$$\{(2-\lambda)^2-1\}x=0$$

$x=0$ ならば $y=0$ となるから適しない。

$$\therefore\ (2-\lambda)^2=1$$
$$\therefore\ \lambda=1,\ 3$$

(注) $\lambda=1$, 3 を解とする 2 次方程式は

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

これは練習 3. の

$$A^2-4A+3E=0$$

と同じ形。そして，この関係はつねに成り立つのです。そこで次をやってみませんか。

練習 5. $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の固有方程式を $f(\lambda)=0$ とすると $f(A)=O$ であることを示せ。

(ヒント) $$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

より

$$(a-\lambda)x+by=0$$
$$cx+(d-\lambda)y=0$$

ゆえに，固有方程式は

$$(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=0$$
$$\therefore\ \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

そこで

$$f(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$$

とすると

$$f(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$

となります。

この右辺の (1, 1) 成分は

$$(a^2+bc)-(a+d)a+(ad-bc)\cdot 1=0$$

となります。他の成分も 0 になりますからやってみてください。

そこで，これです。

練習 6. $A=\begin{pmatrix}3&-2\\1&5\end{pmatrix}$ のとき

$$A^2+xA+yI=0$$

を満たす x, y を求めよ。ここに I は単位行列である。　(川崎医大)

(ヒント) 上の固有値を使うなら，次のようになります。

固有値を λ とすると

$$\begin{pmatrix}3&-2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

これから，固有方程式は

$$(3-\lambda)(5-\lambda)-1(-2)=0$$
$$\therefore\ \lambda^2-8\lambda+17=0$$
$$\therefore\ A^2-8A+17I=0$$

してみると

$$x=-8,\ y=17$$

というわけです。鶏を割(さ)くに牛刀を用いるの非難を免れないが，行列の次数が高くなると急に威力を発揮するのです。

(行列の)結合法則

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆結合法則などというキマリキッタ法則をなぜ，かくまで問題にするのであろう!! それは高校ではわからないでもいいノデス。

◆ 行列 A, B, C があって，AB, BC などの積ができるとき，**結合法則**

$$\boldsymbol{A(BC)=(AB)C}$$

が成り立つのです。ここでは結合法則に関係したいろいろな問題を扱ってみましょう。

(注) $A(BC)=(AB)C$ ですから，これを ABC と書いても混乱はおきません。

同じように，$ABCD$ と書いてあったら，これは

$$ABCD=(AB)(CD)=A(BC)D=\cdots\cdots$$

と書くことができるのです。

では，次をやってみませんか。

4/9

練習 1. P が正則で，P も A も 2 次の正方行列のとき

$$(PAP^{-1})^n=PA^nP^{-1}$$

なることを示せ。

(ヒント) $(PAP^{-1})^2=(PAP^{-1})(PAP^{-1})$

$=PA(P^{-1}P)AP^{-1}=PAEAP^{-1}$

$=PAAP^{-1}=PA^2P^{-1}$

また，

$(PAP^{-1})^3=(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})$

$=PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1}=PAAAP^{-1}$

$=PA^3P^{-1}$

といったぐあいにいきそうです。

一般の場合は次のように **数学的帰納法** でやればいいでしょう。

(解) $n=1$ のときには明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つとすると

$$(PAP^{-1})^k=PA^kP^{-1}$$

$\therefore\ (PAP^{-1})^{k+1}=(PAP^{-1})^k(PAP^{-1})$

$=(PA^kP^{-1})(PAP^{-1})=PA^kP^{-1}PAP^{-1}$

$=PA^kAP^{-1}=PA^{k+1}P^{-1}$

ゆえに $n=k$ のとき成り立つならば $n=k+1$ のときにも成り立つ。

よって，数学的帰納法によって一般に成り立つ。

練習 2. M を 2 次の正方行列全体の集合とし，$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とおき，集合 M_n を

$M_n=\{X\in M \mid XA^n=A^nX\}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

で定めるとき，$X,\ Y\in M_n$ ならば $XY\in M_n$ であることを証明せよ。 (電通大)

(解) $X\in M_n,\ Y\in M_n$

であるから

$$XA^n=A^nX \quad \cdots\cdots①$$

$$YA^n=A^nY \quad \cdots\cdots②$$

②の両辺に左から X を乗じて，①と結合法則をくり返し使うと

$X(YA^n)=X(A^nY)$

$\therefore\ (XY)A^n=(XA^n)Y=(A^nX)Y$

$=A^n(XY)$

$\therefore\ (XY)A^n=A^n(XY)$

$\therefore\ XY\in M_n$ Q. E. D.

練習 3. A が正則行列で，$AB=AC$ ならば $B=C$ であることを証明せよ。

(ヒント) A は正則行列だというのですから，逆行列 A^{-1} があります。これを

$$AB=AC$$

の両辺に左から乗ずると

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$$

結合法則を使って

$$(A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C$$

です。ところが，$A^{-1}A=E$ ですから

$B=C$ Q. E. D.

* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。まず，これです。

練習 4.　$A=\begin{pmatrix} a+b & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ （a，b は実数，$ab\neq0$，$a\neq b$）とする。

(1)　$A\vec{p}=a\vec{p}$，$A\vec{q}=b\vec{q}$ を満たす $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ を求めよ。

(2)　$\vec{p}$，$\vec{q}$ は同一直線上にはないことを示せ。

(3)　$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ。

(4)　$XA\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

（高知大）

ヒント　(1)には $A\vec{p}=a\vec{p}$，$A\vec{q}=b\vec{q}$ と同じ形の関係式が2つありますので，$A\vec{x}=a\vec{x}$ としていっしょに扱うことにしたらよさそうです。

解　(1)　$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，題意から

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$(a+b)x+ay=\lambda x \quad \cdots\cdots①$$

$$-bx=\lambda y \quad \cdots\cdots②$$

$b\neq0$ であるから，$y=0$ とすると $x=0$ となって，$\vec{x}\neq\vec{0}$ という条件に反する。ゆえに，$y\neq0$ である。

いま②より x を求め，①に代入して書きかえると，

$$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab=0$$

$$\therefore\quad (\lambda-a)(\lambda-b)=0$$

$$\therefore\quad \lambda=a,\ b$$

$\lambda=a$ のとき ①，② は

$$x=-k_1a,\ y=k_1b \quad (k_1\neq0)$$

で満足され，したがって

$$\vec{p}=\begin{pmatrix} -ak_1 \\ bk_1 \end{pmatrix} \qquad (k_1\neq0)$$

$\lambda=b$ のとき，同様にして

$$\vec{q}=\begin{pmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (k_2\neq0)$$

(2)　$a\neq b$ であるから $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ である。

（チョットゴ注意!!　$/\!/$ハ平行ヲ表スコトハ誰デモ知ッテイルガ，$\nparallel$ハ平行デナイコトヲ表スコトヲ知ラナイ人ガ多イ。コノ機会ニ覚エテオイテクダサイ，ヨ）

ゆえに，$\vec{p}$，$\vec{q}$ は同一直線上にない。

(3)　$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore\quad X=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -ak_1 & -k_2 \\ bk_1 & k_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{k_1k_2(b-a)}\begin{pmatrix} k_2 & k_2 \\ -bk_1 & -ak_1 \end{pmatrix}$$

(4)　$XA\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}=X\left\{A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\right\}$

ところが，

$$A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$=a\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -a^2k_1 & -bk_2 \\ abk_1 & bk_2 \end{pmatrix}$$

∴　与式

$$=\frac{1}{k_1k_2(b-a)}\begin{pmatrix} k_2 & k_2 \\ -bk_1 & -ak_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a^2k_1 & -bk_2 \\ abk_1 & bk_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{k_1k_2(b-a)}\begin{pmatrix} ak_1k_2(b-a) & 0 \\ 0 & bk_1k_2(b-a) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 結合法則の使い方には，べつにめんどうはありませんが，とかく，計算マチガイをおかしやすいのです。計算力の弱い人は，このような計算でしくじることが多いのです。

行列に結合法則が成り立つ，という事実は重要です。なぜなら1次変換に結合法則の成り立つことを保証しますし，あるいはまた，1次の有理関数の合成にも結合法則の成り立つことを保証してくれるからです。

○ (行列の) 分配法則

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆行列では積の交換法則が成立しませんが，分配法則と結合法則の成り立つことが大きな救いとなっている。

◆ 各積や和が可能として，

分配法則

$$\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$$

および

$$\boldsymbol{(B+C)A=BA+CA}$$

が成り立つことがわかっています。ここではこの分配法則に関係した問題を扱うことにしましょう。なお，α を数とするとき

$$\alpha(B+C)=\alpha B+\alpha C$$

が成り立つこともいうまでもありません。

では，次の練習1.をやってみませんか。

■練習 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ であるとき

$$A(B+C)=AB+AC$$

の成り立つことを示せ。

(解) 左辺$=A(B+C)$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

右辺$=AB+AC$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

であるから，このとき，確かに

$$A(B+C)=AB+AC$$

が成り立つ。　　Q. E. D.

■練習 2. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ は成り立つか。ただし，A，B とも2次の正方行列である。

(解)　$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

分配法則により

$$=(A+B)A+(A+B)B$$

再び分配法則を適用して

$$=A^2+BA+AB+B^2$$

ところが，一般に $AB\fallingdotseq BA$ であるから，

$$BA+AB\fallingdotseq 2AB$$

$$\therefore\ (A+B)^2\fallingdotseq A^2+2AB+B^2$$

で，一般に成立しない。

■練習 3. k を実数，E を単位行列とするとき　$(kE+B)^2=k^2E+2kB+B^2$　を示せ。

(解)　$(kE+B)^2=(kE+B)(kE+B)$

$$=(kE)(kE)+(kE)B+B(kE)+BB$$

$$=k^2E^2+kEB+kBE+B^2$$

$$=k^2E+kB+kB+B^2$$

$$=k^2E+2kB+B^2$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ では，やや，総合的な問題を練習してみませんか。

■練習 4. A，B，C を2次の正方行列とするとき，次の式を展開し，簡単にせよ。

$$(A+B+C)^2-(A-B+C)^2$$
$$+(A+B-C)^2-(A-B-C)^2$$

(京都医大)

(ヒント)　$(A+B+C)^2$

$$=A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA$$

などと早ガッテンしてはいけません。

$$(A+B+C)^2$$
$$=(A+B+C)(A+B+C)$$
$$=A^2+B^2+C^2+AB+BA+AC$$
$$+CA+BC+CB$$

などです。$AB\fallingdotseq BA$ ですから，……

これに注意してていねいに計算すればいいのです。しかし，次のようにやったほうが少し，ラクというもの。さて，

$$\begin{aligned}&(A+B+C)^2-(A-B+C)^2\\&=(A+B+C)(A+B+C)\\&\quad-(A-B+C)(A-B+C)\\&=(A^2+B^2+C^2+AB+BA+BC+CB\\&\quad+AC+CA)\\&\quad-(A^2+B^2+C^2-AB-BA-BC-CB\\&\quad+AC+CA)\\&=2(AB+BA+BC+CB)\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}&(A+B-C)^2-(A-B-C)^2\\&=2(AB+BA-BC-CB)\end{aligned}$$

$\therefore$ 与式$=4(AB+BA)$ ……答

■練習 5 次の等式の成り立つことを示せ。

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$$

また，$AB=BA$ が成り立つとき，右辺を簡単にせよ。

解

$$\begin{aligned}(A-B)^2&=(A-B)(A-B)\\&=(A-B)A-(A-B)B\\&=(A^2-BA)-(AB-B^2)\\&=A^2-BA-AB+B^2\\&=A^2-AB-BA+B^2\qquad\text{Q. E. D.}\end{aligned}$$

さて，$AB=BA$ が成り立つならば

$$\text{右辺}=A^2-2AB+B^2$$

となる。

*　*　*

◆ では，ここで，分配法則の成り立つことを証明しておきましょう。問題の形式でいうならば，次のようです。

■練習 6. 2次の正方行列 A，B，C について，$A(B+C)=AB+AC$ を証明せよ。

解　$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$

とすると

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}+c_{11}&b_{12}+c_{12}\\b_{21}+c_{21}&b_{22}+c_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21})&\times\\\times&\times\end{pmatrix}\end{aligned}$$

実は，この×，何か，わかりますか。場所がないので，省略しただけのこと。さて，

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=AB+AC\\&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&\times\\\times&\times\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}&\times\\\times&\times\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}&\times\\\times&\times\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21})&\times\\\times&\times\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに

$$A(B+C)=AB+AC$$

Q. E. D.

■練習 7. 2次の正方行列 A，B，C について $(B+C)A=BA+CA$ を証明せよ。

ヒント　$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$ とおいて，ていねいに計算してみるとできるハズ!!

*　*　*

◆ 分配法則としては，次のものも成り立ちます。すなわち，

A，B を行列とし，k，l を定数とするとき，

$$(k+l)A=kA+lA$$
$$k(A+B)=kA+kB$$

です。証明はべつにめんどうなし。必ずやってみること。なお，証明するとき，左辺は左辺，右辺は右辺，別々に計算してみること。同時に代入してはいけません。

2次式の行列による表現

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆このセクションは大切というわけではありません。やらなければならぬこともない。さはさりながら……

◆ さっそくながら，具体的な問題からやってみましょう。

7/6

練習 1. $A=[x\quad y]$ とするとき AA' を計算せよ。ここに，A' は A の転置行列（行と列を入れかえた行列）である。

ヒント　$A=[x\quad y]$ ですから　$A'=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\therefore\quad AA'=[x\quad y]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x^2+y^2\cdots\cdots$$ 答

注　このように，2次式を行列を使って表すことができます。では，どんなものが表されるのか，どんなふうに表されるのか，どうして表せるのか，といったことが問題となってきます。例えば，これです。

7/6

練習 2. $x^2+2xy+y^2$ を行列を使って表せ。ただし，1通り書けばよい。

ヒント　$x^2+2xy+y^2=x^2+xy+xy+y^2$

$$=x(x+y)+y(x+y)$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}$$

これで表せました。しかし，次のようにも書けます。

$$x^2+2xy+y^2=x(x+2y)+y\cdot y$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix}$$

そこで，何か条件をつけないと1つにきまらないことがわかります。そこで，次のような問題になります。

7/6

練習 3. $x^2+5xy+4y^2$ を $\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}'$ の形に表せ。ここに $\boldsymbol{x}=(x\quad y)$ で，$\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ の転置行列，A は2次の正方行列である。

ヒント　$x^2+5xy+4y^2$

$$=x(x+3y)+(2x+4y)y$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}x+3y\\2x+4y\end{pmatrix}$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

これは，次のようにも書けます。

$$x^2+5xy+4y^2$$

$$=x(x+y)+(4x+4y)y$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}x+y\\4x+4y\end{pmatrix}$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

あるいはまた

$$x^2+5xy+4y^2$$

$$=x(x)+(5x+4y)y$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}x\\5x+4y\end{pmatrix}$$

$$=(x\quad y)\begin{pmatrix}1&0\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

*　*　*

◆ では，この行列はどんな特徴をもつのだろうか。そこで，次をやってみませんか。

練習 4. $x^2+3xy+2y^2$ を A を2次の正方行列として

7/6

$$(x\quad y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と表せるとき，Aはどんな行列か。

ヒント　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおくと

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=(ax+cy\quad bx+dy)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=(ax+cy)x+(bx+dy)y$$

$$=ax^2+(b+c)xy+dy^2$$

これから　$a=1,\ d=2,\ b+c=3$　となります。つまり，求める行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 3-b & 2 \end{pmatrix}\quad (b\text{ は任意})$$

ということになります。

*　*　*

◆ さて，$\boldsymbol{F(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2}$ を $x,\ y$ に関する **2 次形式** といいます。べつに，このコトバを覚えなければならないというわけではありませんよ。ところで

$F(x,\ y)$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ を用いて行列 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表すことができます。この行列Aを 2 次形式 $F(x,\ y)$ の行列といいます。では，これを：——

9/6

▶練習 5. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ のとき

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=ax^2+2hxy+by^2$$

となることを確かめよ。

（解）　${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=(x\quad y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$=(ax+hy\quad hx+by)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=(ax+hy)x+(hx+by)y$$

$$=ax^2+2hxy+by^2\qquad\text{Q. E. D.}$$

9/5

▶練習 6. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ のとき，

2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ において，変換 $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を施すと，この 2 次形式はどのように変換されるか。

（解）　${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t(B\boldsymbol{x}')A(B\boldsymbol{x}')$

しかるに，一般に

$${}^t(XY)={}^tY{}^tX$$

であるから

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=({}^t\boldsymbol{x}'{}^tB)A(B\boldsymbol{x}')$$

$$={}^t\boldsymbol{x}'({}^tBAB)\boldsymbol{x}'$$

となる。したがって，2 次形式の行列は ${}^tBAB$ に変わる。

▶練習 7. 2 次形式 $ax^2+2hxy+by^2$ に変換 $\boldsymbol{x}=L\boldsymbol{x}'$，$L=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を施して得られる 2 次形式を $a'x^2+2h'xy+b'y'$ とするとき，

$$a'+b'=a+b$$

なる関係のあることを示せ。

（ヒント）　これは，マトモに計算してできますが，ここでは行列を使ってやってみましょう。

$$F=ax^2+2hxy+by^2={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と書けます。ここに

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$$

です。したがって $\boldsymbol{x}=L\boldsymbol{x}'$ を施しますと，

$$F={}^t(L\boldsymbol{x}')A(L\boldsymbol{x}')$$

$$=({}^t\boldsymbol{x}'{}^tL)A(L\boldsymbol{x}')$$

$$={}^t\boldsymbol{x}'({}^tLAL)\boldsymbol{x}'$$

ところが

$${}^tLAL$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a\cos\theta+h\sin\theta & h\cos\theta+b\sin\theta \\ -a\sin\theta+h\cos\theta & -h\sin\theta+b\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a' & h' \\ h' & b' \end{pmatrix}$$

となるわけですから

$$a'=(a\cos\theta+h\sin\theta)\cos\theta$$

$$+(h\cos\theta+b\sin\theta)\sin\theta$$

$$=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$

$$b'=(-a\sin\theta+h\cos\theta)(-\sin\theta)$$

$$+(-h\sin\theta+b\cos\theta)\cos\theta$$

$$=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

$$\therefore\quad a'+b'=a+b$$

となります。

*　*　*

◆ このように，行列は 2 次形式を扱うにも有用なものであることがわかります。このセクションはそのほんの入口をやったのです。

アリの行列式とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆行列式と行列はコトバが似ているため，ときどき混乱を起こすのは困ったもの。英語でなら，*determinant* と *matrix!!*

◆ 行列式は行列とちがい，1つの値を表しています。すなわち，

2次の行列式では

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ですし，3次の行列式では

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - dbi - afh$$

なんです。この展開式のオボエ方はふつう次のようにします。

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

そして，このオボエ方をサリュス(Sarrus)の法則といいます。

では，具体的な計算にいきましょう。

練習 1. 次の2次の行列式の値を求めよ。

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

（解） $A = 1\times3 - 2\times(-4)$

$= 3 + 8 = 11$ …… 答

練習 2. 次の3次の行列式の値を求めよ。

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

（解） $A = 1\cdot3\cdot4 + 2\cdot0\cdot4 + 3\cdot(-1)\cdot(-5)$

$- 3\cdot3\cdot4 - 0\cdot(-5)\cdot1 - 4\cdot2\cdot(-1)$

$= 12 + 0 + 15 - 36 - 0 + 8$

$= -1$ 　　答 -1

練習 3. 次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$$

（解） $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = a(kb) - b(ka)$

$= kab - kab = 0$ 　Q. E. D.

練習 4. 次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

（解） 左辺

$= 1\cdot b\cdot c^2 + 1\cdot c\cdot a^2 + 1\cdot b^2\cdot a$

$- 1\cdot b\cdot a^2 - 1\cdot c\cdot b^2 - 1\cdot a\cdot c^2$

$= (c-b)a^2 - (c^2-b^2)a + bc(c-b)$

$= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\}$

$= (c-b)(a-b)(a-c)$

$= (b-c)(c-a)(a-b)$

Q. E. D.

練習 5. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ の値を求めよ。ここに，ω は1の虚数立方根である。

（解） ω は1の虚数立方根であるから，

$$\boldsymbol{\omega^3 = 1,\ 1 + \omega + \omega^2 = 0}$$

さて，

与式 $= 1\cdot\omega^2\cdot\omega + \omega\cdot1\cdot\omega^2 + \omega^2\cdot1\cdot\omega$

$- \omega^6 - \omega^3 - 1$

$= 3\omega^3 - (\omega^3)^2 - \omega^3 - 1$

$= 3 - 1 - 1 - 1 = 0$ …… 答

*　*　*

◆ では，行列式の応用を2，3やっておきましょう。

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **の逆行列は**

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられます。ところが $ad-bc$ は，実は $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ なんですね。そして，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のとき

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

なる記号を使うのがふつうです。そこで

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と書けるわけです。

では，次の練習をやってみましょう。

10

練習 6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

解
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 連立方程式の解の公式に **クラメル (Cramer) の公式** といわれるものがあります。それは，次のようなものです。

連立方程式

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

の解は次のようである。

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}$$

ここに　$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

である。

では，これを：——

7/9

練習 7. 連立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x+4y=9 \end{cases}$

を解け。

解
$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8-3=5$$
$$\Delta x=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=32-27=5$$
$$\Delta y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=18-8=10$$
$$\therefore\quad x=\frac{\Delta x}{\Delta}=1,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=2$$

答　$x=1,\ y=2$

練習 8. $\begin{cases} 3x-y-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$

を解け。

解　$\begin{cases} 3x-y=1 \\ x-2y=-3 \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6-(-1)=-5$$
$$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-2-3=-5$$
$$\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-9-1=-10$$
$$\therefore\quad x=1,\quad y=2 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 行列式は高校では扱わなくてもよいことになっていますので，ここでは行列式とはこんなものだ，というほんの入口を紹介しただけです。しかし，行列と混同しないようにしてください。

実は行列式というコトバはともかく，これをはじめて扱ったのは江戸時代の和算家関孝和でした。江戸時代の日本数学がなぜそのような大きな発展をとげたか，ということについてはまだ定説はありません。すぐれた数学史家小倉金之助博士は，町人数学者の絶え間ない競争のせいだとしているのだが。

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

① 合成関数の計算法

◆合成写像・合成関数といったぐあいに，合成というコトバは何となく難しさを連想させるが，それもさるものにて，……

◆ 何はともあれ，具体的に扱うとしようではありませんか。

$$f(x)=2x+1,\ g(x)=x+3$$

のとき

$$f(g(x))=2g(x)+1=2(x+3)+1$$
$$=2x+7$$
$$g(f(x))=f(x)+3=(2x+1)+3$$
$$=2x+4$$

といったぐあい。これを **合成関数** というのです。そして，

$f(g(x))$ を　$f\circ g(x)$

$g(f(x))$ を　$g\circ f(x)$

とも書きます。では：——

7/8

■練習 1. $f(x)=4x+3$, $g(x)=3-2x$ について，$f\circ g(x)$, $g\circ f(x)$ を求めよ。

ヒント　$f\circ g(x)=f(g(x))=4g(x)+3$
$$=4(3-2x)+3=-8x+15$$
$$g\circ f(x)=g(f(x))=3-2f(x)$$
$$=3-2(4x+3)=-8x-3$$

7/8

■練習 2. $f(x)=2x+3$, $g(x)=4x-5$ のとき，$f(h(x))=g(x)$ をみたす $h(x)$ を求めよ。　（佐賀大）

解　$f(h(x))=2h(x)+3$

だから，題意により

$$2h(x)+3=4x-5$$
$$\therefore\ h(x)=2(x-2)$$ …… 答

7/8

■練習 3. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $g(x)=1-x$ のとき $f(h(x))=g(x)$ となるならば $h(x)$ は何か。　（東大）

ヒント　$f(h(x))=\dfrac{h(x)}{h(x)-1}=1-x$

$$\therefore\ h(x)=(1-x)\{h(x)-1\}$$
$$\therefore\ xh(x)=x-1$$
$$\therefore\ h(x)=\frac{x-1}{x}$$ …… 答

7/8

■練習 4. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ のとき，

$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ。　（明治大）

ヒント　$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}$

$$=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$$ …… 答

■練習 5. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ のとき，

$f\{f(f(x))\}$ を求めよ。　（早大）

解　$f(f(x))=\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\dfrac{x+1}{x+2}$

$$\therefore\ f\{f(f(x))\}=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}+1}=\frac{x+2}{2x+3}$$

答　$\dfrac{x+2}{2x+3}$

*　*　*

◆ 合成関数を次々に計算する問題もよくとりあげられます。べつに難しくはないが一種の不安感が残る。つまり，どこまでやるのかわからないからです。では，これを：——

■練習 6. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=1-x$ とする。

この $f(x)$, $g(x)$ の双方に対して，x に $f(x)$, $g(x)$ を代入して合成関数を作る。その合成関数のそれぞれに対して x に再び $f(x)$, $g(x)$ を代入し，以下同様の代入を続けていくものとする。このとき現れる関数をすべて求めよ。　（立教大）

(解) (イ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=1-x$

(ロ) $f(f(x))=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$

$$g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}$$

$$f(g(x))=f(1-x)=\frac{1}{1-x}$$

$$g(g(x))=g(1-x)=x$$

(ハ) $f(f(f(x)))=f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$g(f(f(x)))=g(x)=1-x$$

$$f(f(g(x)))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=1-x$$

$$g(f(g(x)))=g\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

$$f(g(f(x)))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

$$g(g(f(x)))=g\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

$$f(g(g(x)))=f(x)=\frac{1}{x}$$

$$g(g(g(x)))=g(x)=1-x$$

結局，求められた関数は

$$\frac{1}{x},\ 1-x,\ x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x},\ \frac{x}{x-1}$$

…… 答

で，これ以外にはない。

* * *

◆ 2変数の関数についても同じことですが2，3やってみようではありませんか。

7/8

■練習 7. x, y, z は実数値をとる変数とし，$f(x,\ y)$ は x, y を含む式で，次の条件をみたすものとする。

(a) $f(x,\ y)\neq 0$

(b) $f(x,\ y)f(y,\ z)=f(x,\ z)$

(c) $f(x,\ 0)=x^2+1$

このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x,\ x)$ の値を求めよ。

(2) $f(y,\ x)$ を $f(x,\ y)$ で表せ。

(3) $f(x,\ y)$ の式を求めよ。

(東京医歯大)

(ヒント) (1) (b)で $y=x$, $z=x$ とおくと

$$f(x,\ x)f(x,\ x)=f(x,\ x)$$

(a)により

$$f(x,\ x)\neq 0$$

$$\therefore\ f(x,\ x)=1 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(2) (b)で $z=x$ とおくと

$$f(x,\ y)f(y,\ x)=f(x,\ x)$$

(1)により

$$f(x,\ x)=1$$

$$\therefore\ f(x,\ y)f(y,\ x)=1$$

$$\therefore\ f(y,\ x)=\frac{1}{f(x,\ y)} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(3) (b)で $z=0$ とおくと

$$f(x,\ y)f(y,\ 0)=f(x,\ 0)$$

ところが

$$f(x,\ 0)=x^2+1,\ f(y,\ 0)=y^2+1$$

であるから

$$f(x,\ y)(y^2+1)=x^2+1$$

$$\therefore\ f(x,\ y)=\frac{x^2+1}{y^2+1} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 8. x, y に関する1次式 $f(x,\ y)$ と2次式 $g(x,\ y)$ があって，次の等式が成り立つとき，$f(x,\ y)$ および $g(x,\ y)$ を求めよ。ただし，x, y, z は変数とする。

$$f(x,\ 1)=g(x,\ 0)=x$$

$$f(1,\ y)=g(0,\ y)=y$$

$$g\{f(x,\ y),\ z\}=f\{g(x,\ z),\ g(y,\ z)\}$$

(横浜市大)

(ヒント) $f(x,\ y)=px+qy+r$

$$g(x,\ y)=ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c$$

とおくと

$$f(x,\ 1)=px+q+r=x$$

$$\therefore\ p=1,\ q+r=0$$

次に，

$$g(x,\ 0)=ax^2+gx+c=x$$

$$\therefore\ a=0,\ g=1,\ c=0,\ \cdots\cdots$$

といったぐあい。

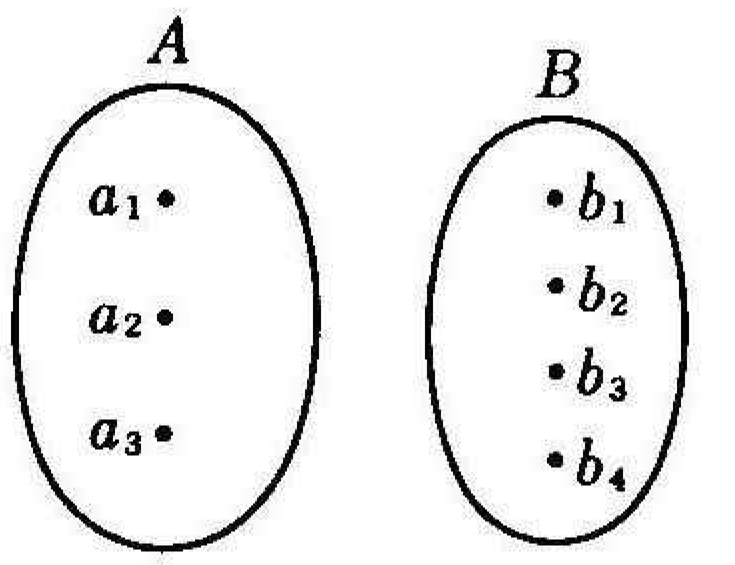
答 $\begin{cases} f(x,\ y)=x+y-1 \\ g(x,\ y)=x-xy+y \end{cases}$

○写像とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈AからBへの，とか，AからBの上への，とか，マギラワシイことばに幻惑されてはいけません。

◆　2つの集合AとBがあったとき，Aの元をBの元に対応させる操作を **写像** といいます。右図で，Aの元a_1, a_2, a_3はBの元b_1, b_2, b_3, b_4のどれかに対応することにします。

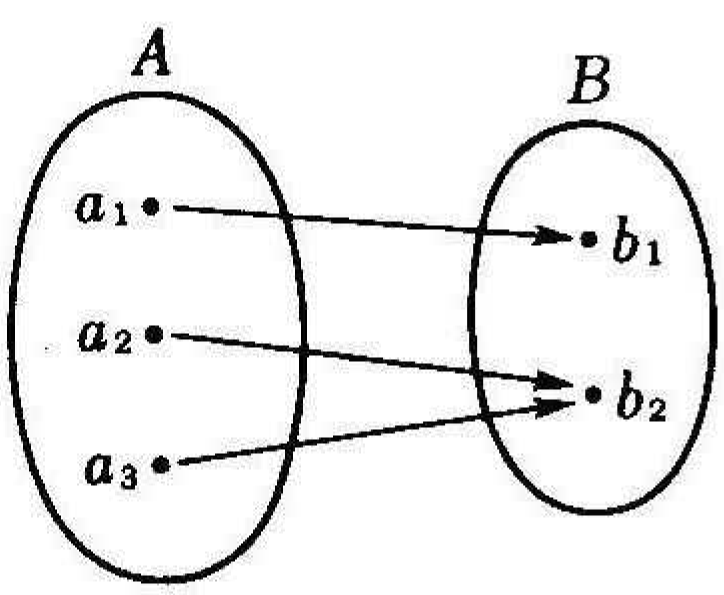


この際，a_1がb_1とb_2の2つに対応することは許されません。しかし，a_1, a_2, a_3が全部b_1に対応することはかまわないのです。

くどいが **a_1の相手は1つですが，b_1の相手はいくつあってもかまわない**。したがって，b_1, b_2, b_3, b_4の中には相手のないのもあるわけです。これが **AからBへの写像** です。

ところで，Bのほうにアマルものがない，つまりAの元で対応するものが必ずあるときAからBの **上への写像** というわけです。

そして，ある写像fによってa_1がb_1に対応するときa_1はb_1に **移される** といいます。写されると書いてもかまわない。そして



$$f : a_1 \longrightarrow b_1$$

とか

$$f(a_1)=b_1$$

とか

$$a_1 \xrightarrow{f} b_1$$

とか，書き表します。

■練習1. 集合$A=\{1, 2\}$から集合$B=\{a, b\}$への写像をすべて書け。例えば，$1 \longrightarrow a$, $2 \longrightarrow b$のように対応を示せ。

(解) $\begin{cases}1 \longrightarrow a \\ 2 \longrightarrow a\end{cases}$　$\begin{cases}1 \longrightarrow a \\ 2 \longrightarrow b\end{cases}$　$\begin{cases}1 \longrightarrow b \\ 2 \longrightarrow a\end{cases}$　$\begin{cases}1 \longrightarrow b \\ 2 \longrightarrow b\end{cases}$

■練習2. 集合$A=\{1, 2, 3, 4\}$から集合$B=\{a, b, c, d, e\}$への写像は何組あるか。

(ヒント)　1をa, b, c, d, eのいずれかに写す仕方が5通り，2をa, b, c, d, eのいずれかに写す仕方も5通り，…… あるから，全部で$5^4=625$（通り）あります。

*　*　*

◆　集合Aから集合Bへの写像で，Aの各元にBの元がただ1つずつ対応するとき，**1対1の写像** といいます。

■練習3. 集合$A=\{1, 2, 3\}$から集合$B=\{a, b, c\}$の上への写像において，1対1の写像は何組あるか。

(ヒント)　a, b, cをいろいろに並べかえて，それを順次1, 2, 3に対応させればよい。したがって${}_3P_3=3!=6$（通り）あります。全部書いてみてもいいでしょう。

■練習4. 集合$A=\{1, 2, 3\}$から$B=\{a, b, c, d\}$への1対1写像は何組あるか。

(ヒント)　Bからa, b, cを選んだときには6組あるし，a, b, dを選んだときも同じく6組あります。a, c, d；b, c, dについても同じ。だから，

$$6\times4=24\ (組)$$　……答

◆ 以上で，写像の大切なことは終わりましたが，次は，ややめんどうな問題を：——

13

練習 5. 集合 $A=\{1,\ 2\}$ から集合 $B=\{a,\ b\}$ への写像を f，集合 B から集合 $C=\{\alpha,\ \beta\}$ への写像を g とする。$g\circ f$ は何組あるか。（ただし，途中のちがう写像は，ちがうものとして扱うものとする）

ヒント　全部かいてみましょう。

（i）　1，2とも a に移されるとき，a から α か β へ移されるのですから2組あります。

（ii）　1，2とも b に移されるとき，b から α か β へ移されるのですから2組あります。

（iii）　1が a へ，2が b に移されるときは g は4組あります。

（iv）　1が b へ，2が a に移されるときは g は4組あります。

結局，　$2+2+4+4=12$（組）　……$\boxed{答}$

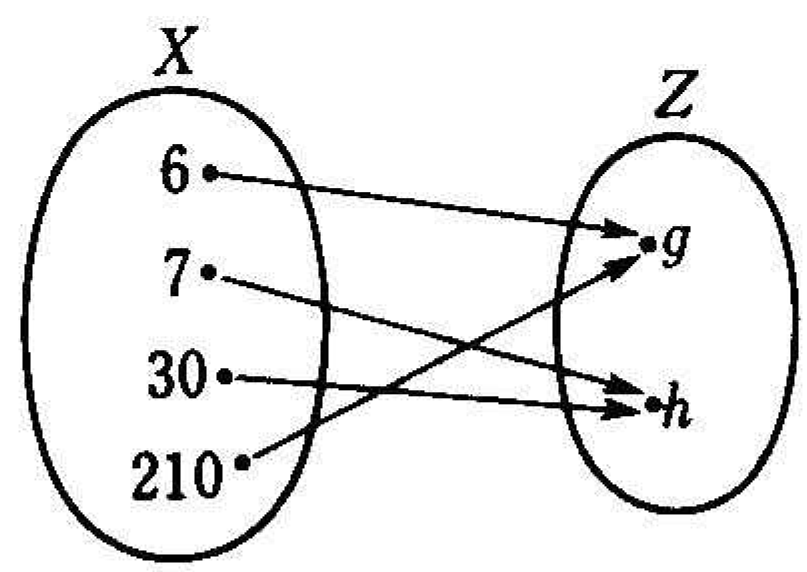
7/18

練習 6. 集合 $X=\{6,\ 7,\ 30,\ 210\}$，$Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$Z=\{g,\ h\}$ のとき，写像 $f: X\longrightarrow Y$ は X の要素を素因数に分解したときの因数の個数を表す Y の要素への対応を表し，写像 $g: Y\longrightarrow Z$ は Y の偶数，奇数の要素をそれぞれ Z の g，h に対応させる対応を表している。このとき合成写像 $g\circ f$ を求めよ。（ただし，素数を素因数に分解した個数は1とする）

ヒント　表を作ってまとめてみましょう。

X	6	7	30	210
Y	2	1	3	4
Z	g	h	h	g

そこで，$g\circ f$ は下のようになります。



◆ 写像 $f: X\longrightarrow Y$ が X から Y の上への1対1の写像であるとき，Y の元 y に対して X の元が1対1に対応します。この写像を **f の逆写像といって f^{-1} で表します**。そして，

$$f^{-1}: Y\longrightarrow X$$

と書きます。詳しくは（☞ p.128）。

7/18

練習 7. 集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ から A への写像 f，g が次のように与えられているとき，$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ が成り立つことを示せ。

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	1	2

x	1	2	3	4
$g(x)$	2	1	4	3

ヒント　表を作って左辺，右辺を別々に調べてみることにしましょう。まず $g\circ f(x)$ は

x	1	2	3	4
$(g\circ f)(x)$	4	3	2	1

したがって，$(g\circ f)^{-1}(x)$ は

x	1	2	3	4
$(g\circ f)^{-1}(x)$	4	3	2	1

次に，f^{-1} と g^{-1} は

x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$	3	4	1	2

x	1	2	3	4
$g^{-1}(x)$	2	1	4	3

したがって $f^{-1}\circ g^{-1}(x)$ は

x	1	2	3	4
$f^{-1}\circ g^{-1}(x)$	4	3	2	1

これを $g\circ f(x)$ と比べると確かに一致しています。

$$\therefore\quad (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\qquad \text{Q.E.D.}$$

*　*　*

◆ なお，f が A から B への写像のとき，A を f の **定義域** といい，A の元に対応する B の元の集合を **値域** といいます。これらの言葉には早くなれることが必要です。

○写像の合成とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈写像を続いて行うとき，それを，全体として，1つの写像として扱うことができる，思えば，これはまさに根源的だ!!

◆ 写像 $f: x \longrightarrow y$ において，x の集合を **定義域** といい，yの集合を **値域**(ちいき) といいます。そして，2つの集合

$$f: X \longrightarrow Y,\ g: Y \longrightarrow Z$$

があって，$x \in X$ である任意のxに対して，Zのただ1つの元 $g(f(x))$ が対応するときこの写像を2つの集合 f とgの **合成写像** といい，記号では$g \circ f$ で表すのです。あとのほうのgを左側に書くことにご注意!!

ところが，実は，このような説明というものはスゴク空虚なものなんだなあ。というのも，これを読んでわかる人はスデにわかっているんだし，マダわかっていない人は，読んでもわからないからです。ともあれ，次の具体的な練習にいこうではありませんか。

7/4・

■練習 1. $f: x \longrightarrow 4x+3$ について $f(5)$ を求めよ。

(ヒント) $f: x \longrightarrow 4x+3$ というのは $f(x)=4x+3$ と同じこと。してみると，

$$f(5)=4\cdot5+3=20+3=23$$

です。　　　答 23

7/15

■練習 2. $f: x \longrightarrow 3x+2,\ g: x \longrightarrow x^2+1$ のとき $(f \circ g)(3)$ を求めよ。

(ヒント) $f(x)=3x+2,\ g(x)=x^2+1$

のとき $f(g(x))$ において $x=3$ とおいたものを $f \circ g(3)$ で表すのですから，

$$f \circ g(x)=f(g(x))=3(x^2+1)+2=3x^2+5$$

$$\therefore\quad f \circ g(3)=3\cdot3^2+5=27+5=32$$

答 32

7.

■練習 3. $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$ のとき $f \circ f$ を求めよ。

(解) $f \circ f(x)=f(f(x))$

$$=\frac{f(x)-3}{f(x)-2}=\frac{\dfrac{x-3}{x-2}-3}{\dfrac{x-3}{x-2}-2}=\frac{(x-3)-3(x-2)}{(x-3)-2(x-2)}$$

$$=\frac{-2x+3}{-x+1}=\frac{2x-3}{x-1}$$

……答

*　　*　　*

◆ では，ややめんどうな問題を：——

■練習 4. $f(x)=ax+b,\ g(x)=px+q$

7/15 のとき $g \circ h=f$ となるような $h(x)$ を求めよ。ただし，$p \neq 0$.　　(東京女大)

(ヒント) $g \circ h=f$ を書きかえて

$$g(h(x))=f(x)$$

となりますから

$$p\{h(x)\}+q=ax+b$$

$$\therefore\quad h(x)=\frac{ax+(b-q)}{p}$$

$$=\frac{a}{p}x+\frac{b-q}{p}$$

……答

7/17

■練習 5 関数 $h: x \longrightarrow x^2+5x+4$ が与えられたとき，$g: x \longrightarrow x^2+3x$ に対して，$g \circ f=h$ となるような1次関数 f を求めよ。

(ヒント) $f: x \longrightarrow Ax+B$ とすると

$$g \circ f(x)=g(f(x))=(f(x))^2+3f(x)$$

$$=(Ax+B)^2+3(Ax+B)$$

$$=A^2x^2+(2AB+3A)x+(B^2+3B)$$

これが x^2+5x+4 に等しいのだから

$$A^2=1,\ 2AB+3A=5,\ B^2+3B=4$$

第1式より　$A=\pm1$

$A=1$ のとき，第2式より $B=1$

$A=-1$ のとき，第2式より $B=-4$

これらは第3式を満足することがわかります。　　答 $x+1,\ -x-4$

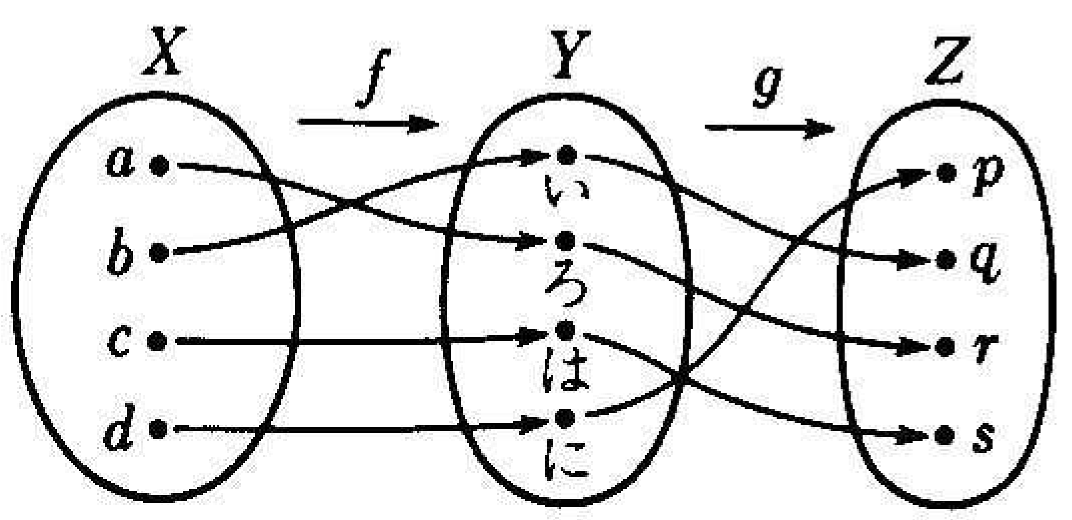
＊　＊　＊

◆ ここまできて，はじめにもどってもう一度読みなおすと，なるほど，そういうことだったのか，とわかるのです。ところで，集合 X と集合 Y があって，どの X の要素 x も Y の要素が1つずつ対応しているとき，X から Y への写像といい，

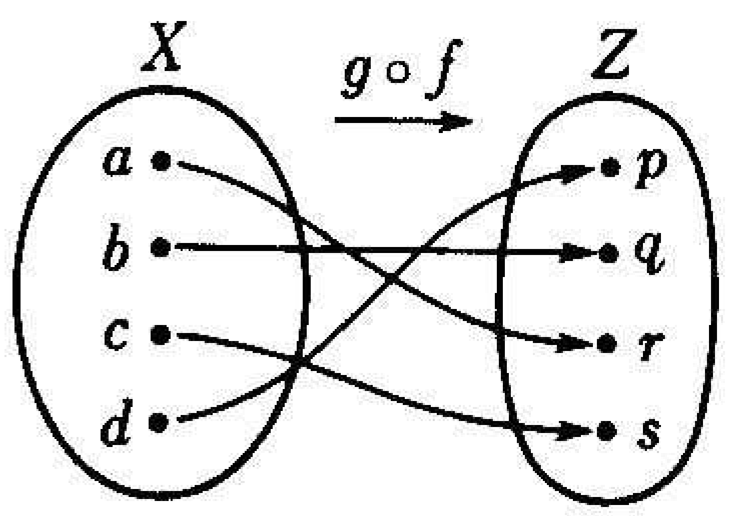
$$f : X \longrightarrow Y$$

といった記号で表すのです。そして，とくに集合が数の場合に関数といいます。上にあげた例はすべて関数だったのです。次には，いわば本来の写像をとりあげてみましょう。

練習6. 2つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ が下図のように与えられているとき，合成写像 $g\circ f$ を示せ。



ヒント f によって a はろに移され，g によって r に移されますから，合成写像によって a は r に移されます。



同じようにして調べて右のようになります。

練習7. xy 平面において，2つの変換 f, g が，次のように与えられている。

$f : (x,\ y) \longrightarrow (-x,\ -y)$

$g : (x,\ y) \longrightarrow (x-a,\ y+b)$

変換 f を行ったあと，変換 g を行うことを $g\circ f$ で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) $g\circ f$ は点 $(2,\ 1)$ をどんな点に移すか。

(2) $a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき，$g\circ f \neq f\circ g$ であることを示せ。

(3) $g\circ f$ が点 $(2,\ 1)$ を点 $(2,\ 1)$ に移すように a, b の値を定めよ。

(4) $a=3$, $b=2$ のとき，$g\circ f$ は集合 $D=\{(x,\ y)\,|\,(x-1)^2+y^2 \leqq 1\}$ をどのような集合に移すか。　(熊本大)

解 (1) f によって $(2,\ 1) \longrightarrow (-2,\ -1)$ さらに g によって $(-2,\ -1) \longrightarrow (-2-a,\ -1+b)$ であるから $g\circ f$ は点 $(2,\ 1)$ を $(-2-a,\ -1+b)$ に移す。

(2) $g\circ f : (x,\ y) \longrightarrow (-x-a,\ -y+b)$

$f\circ g : (x,\ y) \longrightarrow (-x+a,\ -y-b)$

$\therefore\ g\circ f \neq f\circ g$

(3) $g\circ f$ によって $(2,\ 1) \longrightarrow (-2-a,\ -1+b)$ であるから，これが $(2,\ 1)$ になるためには

$$-2-a=2,\quad -1+b=1$$

$$\therefore\ a=-4,\ b=2$$

(4) $a=3$, $b=2$ ならば

$$g\circ f : (x,\ y) \longrightarrow (-x-3,\ -y+2)$$

ゆえに $D=\{(x,\ y)\,|\,(x-1)^2+y^2 \leqq 1\}$ は

$$(x+4)^2+(y-2)^2 \leqq 1$$

に移される。

すなわち，求める集合を D' とすると

$$D'=\{(x,\ y)\,|\,(x+4)^2+(y-2)^2 \leqq 1\}$$

練習8. 実数全体で定義された2つの関数 $f(x)=3x-2$, $g(x)=ax+b$ (a, b は実定数) について，次の問いに答えよ。

すべての x に対して $f(g(x))=g(f(x))$ が成り立つとき，直線 $y=g(x)$ ~~はつねに~~ 定点を通ることを示せ。　(宮崎大)

解 $f(g(x))=3ax+(3b-2)$

$g(f(x))=3ax+(-2a+b)$

$f(g(x))=g(f(x))$ が成り立つから

$$3b-2=-2a+b$$

$$\therefore\ a+b=1$$

したがって，$y=g(x)$ は　$y=ax+(1-a)$

$$\therefore\ (x-1)a+(1-y)=0$$

これは定点 $(1,\ 1)$ を通る。(定点通過については (☞ 数Ⅰ p.302) を参照)

○逆写像とは何か

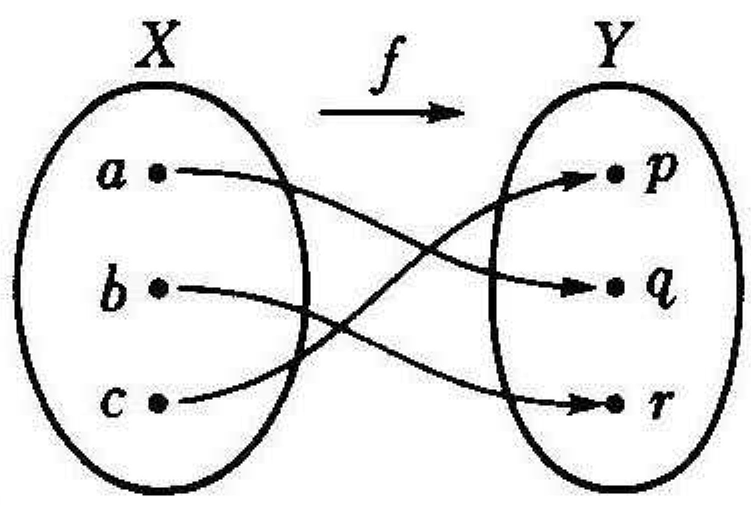
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆逆数，逆元，逆関数，逆写像と，逆という字のついたものは多い。実は，これらはすべて同じもののべつな表現なのです。

◆ 写像 $f:X\longrightarrow Y$ が X から Y の上への写像で，1対1の写像であるとき，$g:Y\longrightarrow X$ を元の写像 f の **逆写像** といい，f^{-1} で表します。

ここには大切なことが2つあります。第1は **f が上への写像** だということ。つまり $f(X)$ と Y とが一致しなければなりません。第2は，**1対1の写像** だということです。

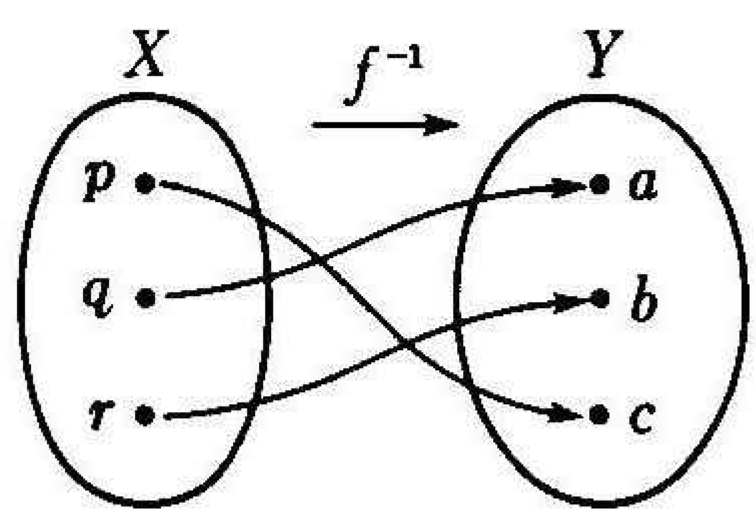
■練習1. 写像 f が右の図のように与えられているとき f^{-1} を図示せよ。



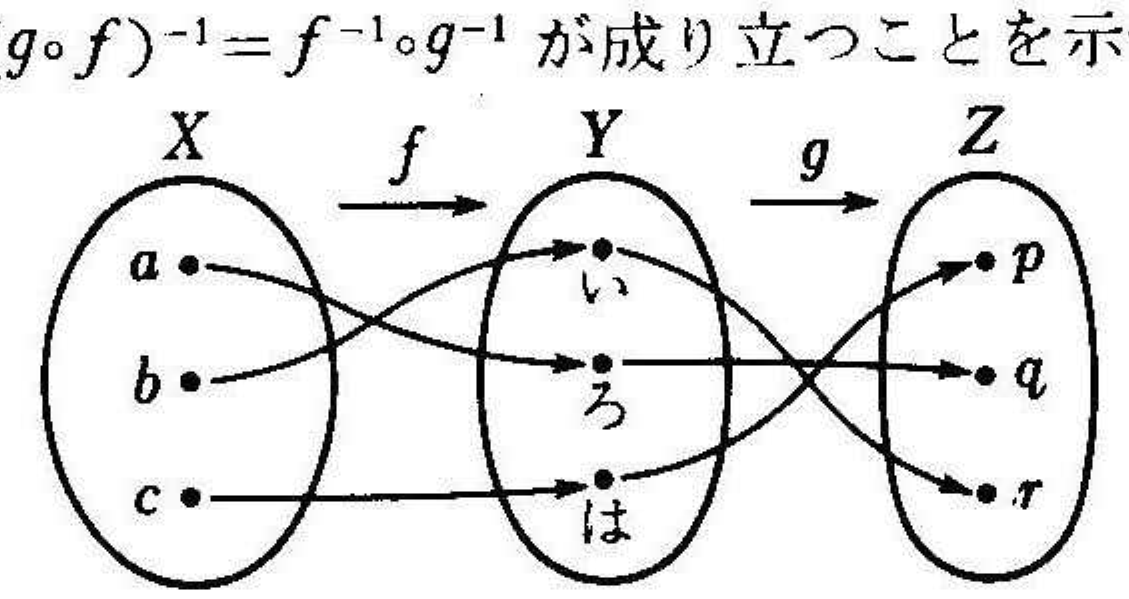
ヒント　$a,\ b,\ c$ がそれぞれ $q,\ r,\ p$ に移されています。記号で書けば

$f(a)=q,\ f(b)=r,\ f(c)=p$

つまり，X の要素が Y のすべての要素に対応し，余るものがないから f は上への写像です。次に1個に1個だけ対応していますから1対1の写像です。そこで逆写像は右のようになります。

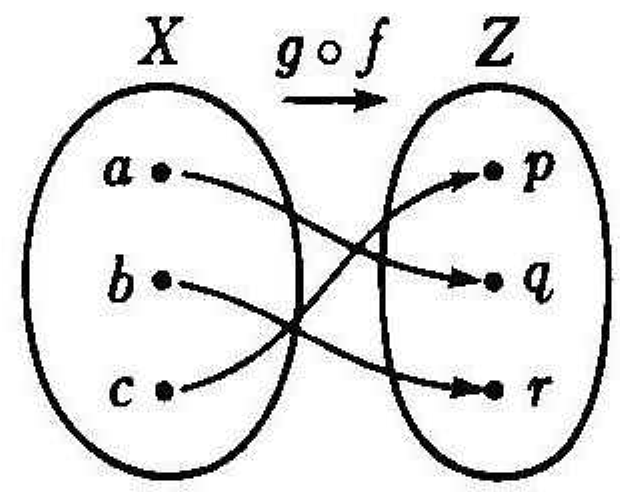


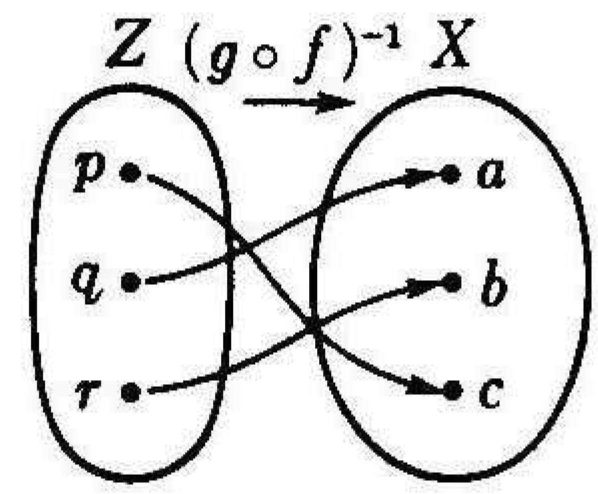
■練習2. 2つの写像 $f:X\longrightarrow Y,\ \ g:Y\longrightarrow Z$ が下図のように与えられているとき，$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ が成り立つことを示せ。



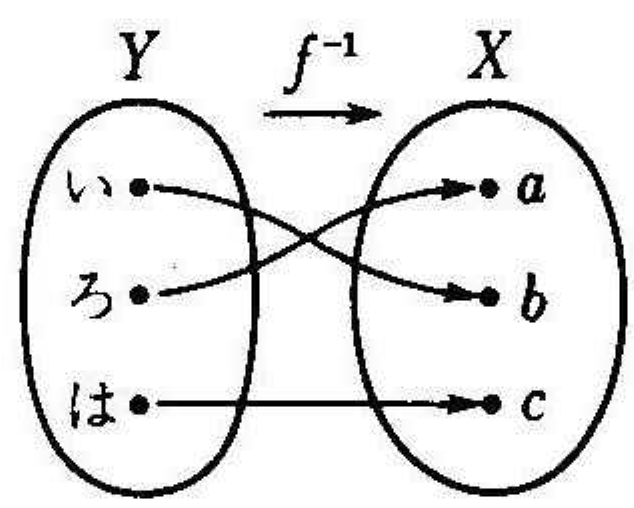
ヒント　図に示してみるのがいいでしょう。もちろん表を作ってみてもよいが，……

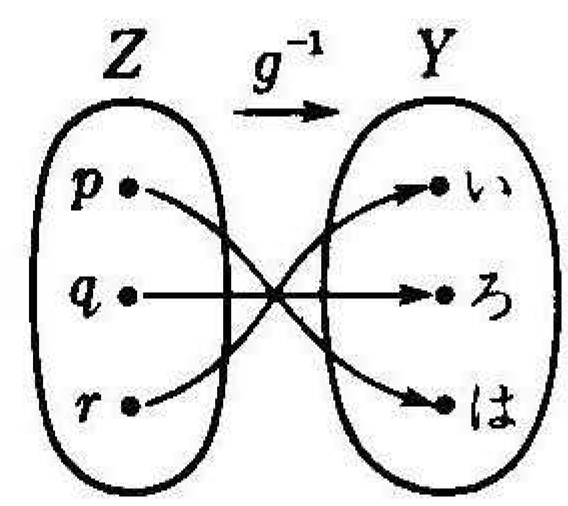
まず，$g\circ f$ は下の左のようになり，したがって $(g\circ f)^{-1}$ は下の右のようになります。



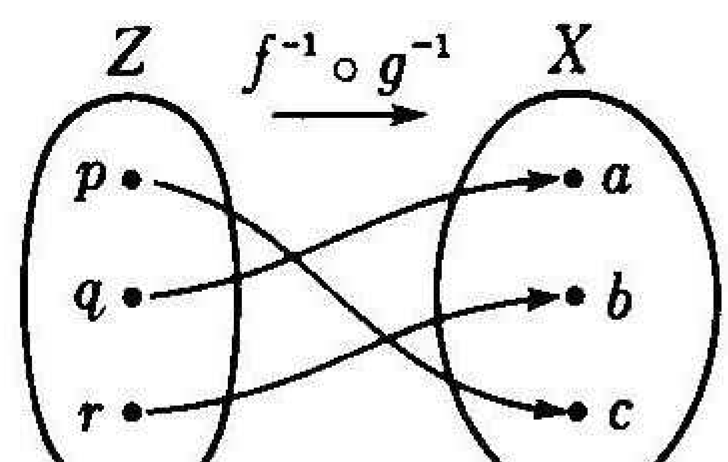


次に，$f^{-1},\ g^{-1}$ は下のようになります。





したがって $f^{-1}\circ g^{-1}$ は下の通り。



これを上の $(g\circ f)^{-1}$ と比べると確かに一致しています。よって証明されたのです。

*　*　*

◆ 写像 $f:X\longrightarrow Y$ において，集合 $X,\ Y$ の要素が数のとき関数といいます。ですから，関数は写像の一部ということになります。では，次の練習をやってみませんか。

■練習3. $0\leqq x\leqq 6$ のとき，次の関数の逆関数は存在するか。

(1)　$y=-3$　　　(2)　$y=|x-4|$

ヒント　(1) $y=-3$ は $y=0\cdot x-3$ でもあります。x の無数の値に対して y はただ1つ -3

が対応しているのですから上への写像ではありますが，1対1ではありません。だから逆関数は存在しません。

(2)ではグラフをかいてみるとわかるように，やはり1対1ではない。例えば $x=3$ のときも $x=5$ のときも y は1になります。だから逆関数は存在しないのです。

練習4. 関数 $f(x)=ax+1$ $(a\neq 0)$ の逆関数 $g(x)$ が，$f(x)=g(x)$ をみたすように a を定めよ。（創価大）

（解）$y=ax+1$ とおいて x について解くと

$$x=\frac{y-1}{a}$$

$$\therefore\quad g(x)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$$

ゆえに $f(x)=g(x)$ となるための条件は

$$\frac{1}{a}=a,\quad -\frac{1}{a}=1$$

が成り立つこと。すなわち　$a=-1$

$\boxed{答}$　$a=-1$

さあ，もう1つやってみようか。

練習5. 4つの関数 f, g, h, φ を次のように定義する。

$$f: x\longrightarrow x+a,\quad g: x\longrightarrow bx^2$$
$$h: x\longrightarrow x+c$$
$$\varphi: x\longrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma$$

ここで a, b, c, α, β, γ は定数で，$\alpha\neq 0$ とする。

(1)　合成関数 $f^{-1}\circ g\circ h^{-1}$ を求めよ。

(2)　$\varphi=f\circ g\circ h$ のとき a, b, c を α, β, γ で表せ。（津田塾大）

（ヒント）(1)　$f(x)=x+a$ ですから

$f^{-1}(x)=x-a$

$h(x)=x+c$ ですから

$h^{-1}(x)=x-c$

$\therefore\quad g\circ h^{-1}(x)=b(x-c)^2$

$\therefore\quad f^{-1}\circ g\circ h^{-1}=b(x-c)^2-a$

すなわち

$f^{-1}\circ g\circ h^{-1}: x\longrightarrow b(x-c)^2-a$ …$\boxed{答}$

(2)　次に $\varphi=f\circ g\circ h$ ならば

$$f^{-1}\circ\varphi\circ h^{-1}=g$$

として両辺を比べたほうが少しラクそうだ。

$$\varphi\circ h^{-1}(x)=\alpha(x-c)^2+\beta(x-c)+\gamma$$

$$\therefore\quad f^{-1}\circ\varphi\circ h^{-1}(x)$$
$$=\{\alpha(x-c)^2+\beta(x-c)+\gamma\}-a$$

ですから，両辺の係数を比べて，……

$\boxed{答}$　$a=\gamma-\dfrac{\beta^2}{4\alpha}$,　$b=\alpha$,　$c=\dfrac{\beta}{2\alpha}$

*　*　*

◆ 写像の合成についてこんな問題がある。しかし，これは合成というよりは場合の数に焦点があるというべきでしょう。要するに写像が難しいのではないのです。

練習6. 集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ から A の上への1対1の写像 f で $f\circ f\circ f$ が恒等写像（すなわち $f\circ f\circ f(k)=k$, $k=1, 2, 3, 4$）となるものはいくつあるか。（電通大）

（ヒント）まず $A=\{1, 2\}$ のときはどうだろう。

$$\left.\begin{array}{l}1\longrightarrow 1\\ 2\longrightarrow 2\end{array}\right\}\quad と\quad \left.\begin{array}{l}1\longrightarrow 2\\ 2\longrightarrow 1\end{array}\right\}$$

しかない。$1\longrightarrow 1$, $2\longrightarrow 2$ は恒等写像でもちろん条件に適するが，$1\longrightarrow 2$, $2\longrightarrow 1$ はやってみるとダメ。

次に，$A=\{1, 2, 3\}$ のときはどうだろう。全部で6個しかないから全部調べてみるとすぐわかる。いや，全部調べるまでもない。$1\longrightarrow 1$ のとき $2\longrightarrow 2$ か $2\longrightarrow 3$ しかない。前のほうは恒等写像になって合格，あとのほうは2つの場合からわかるようにダメ。したがって $1\longrightarrow 2$, $2\longrightarrow 3$, $3\longrightarrow 1$ か，$1\longrightarrow 3$, $3\longrightarrow 2$, $2\longrightarrow 1$ しかない。3組です。

いよいよ $A=\{1, 2, 3, 4\}$ の場合，これも $1\longrightarrow 1$, $2\longrightarrow 2$, $3\longrightarrow 3$, $4\longrightarrow 4$。つまり恒等写像を除くと，上の3つの場合からわかるように，$1\longrightarrow 1$, $2\longrightarrow 3$, $3\longrightarrow 4$, $4\longrightarrow 2$: $1\longrightarrow 1$, $2\longrightarrow 4$, $4\longrightarrow 3$, $3\longrightarrow 2$ といったぐあいで，合計9組となる。

○1次変換とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆変換はコワイヨ!! 猫を虎に変じ，サギをカラスに変じ，美少女を老婆に変ずる!! チョット，オーバーかな?!

◆ ≪点 $(x,\ y)$ が直線 $x+2y=4$ 上を動くとき，点 $(x+y,\ x-y)$ はどんな線上を動くか≫という問題は数Ⅰで数多くやったハズです。あのとき，次のようにやりましたね。

$$x+y=u,\ x-y=v \qquad \cdots\cdots(*)$$

とおくと

$$x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$$

これを $x+2y=4$ に代入しますと

$$\frac{u+v}{2}+2\cdot\frac{u-v}{2}=4$$

$$\therefore\ 3u-v=8$$

となります。ゆえに，点 $(x+y,\ x-y)$ は (u, v の代わりに x, y と書きかえて) 直線

$$3x-y=8$$

上にある，ということになるのです。そして (*) を **変換式** といいます。そして (ヤレヤレマタ，ソシテ，ダ) このように

変換式が x，y についての1次式で，しかも定数項をもたないとき
1 次 変 換

というのです。だから

$$u=x+y+1,\ v=x-y+3$$

では，もはや1次変換とはいわないし，

$$u=x+y,\ v=xy$$

は1次式でないから，いうまでもなく1次変換ではありません。こうしてみると，まえにやった写像のごく一部にすぎません。だからめんどうなハズはないのです。しかも，それを救うのに行列という便利な道具があるのですから，いよいよカンタンなハズ。

ところが，見るのもイヤという人が多いのはふしぎなことです。それはともかく，次には具体的な練習に入りましょう。

7/12

■練習 1. $x+2y=x'$, $x-2y=y'$ なる1次変換によって直線 $x+y=1$ はどんな直線にうつされるか。

（解）
$$x+2y=x'$$
$$x-2y=y'$$

より

$$x=\frac{x'+y'}{2},\ y=\frac{x'-y'}{4}$$

これを $x+y=1$ に代入すると

$$\frac{x'+y'}{2}+\frac{x'-y'}{4}=1$$

$$\therefore\ 3x'+y'=4$$

ゆえに求める直線は $3x+y=4$ である。

答 $3x+y=4$

（注） x', y' のダッシュは，もとの点とちがうことを表すためにつけただけですから，求めてしまえば，とっていいのです。いや，とったほうがいいのです。

また，行列を使いますと，与えられた式は

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

と書くことができます。そこで，この行列

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ を，この1次変換の行列といいます。あるいは≪**1次変換を表す行列**≫ともいうし，もっと簡単に≪**1次変換 A**≫といった表し方もするのです。

では，次をやってみませんか。

■練習 2. 1次変換 $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ によって点 $(1,\ 2)$ はどんな点にうつされるか。

（ヒント） 点 $(1,\ 2)$ を縦（たて）ベクトルで表して $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ とします。そして

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+3\cdot2\\2\cdot1+(-2)\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

となりますから，再び座標に戻して $(5,\ -2)$ が求める点です。

答　$(5,\ -2)$

*　　*　　*

◆ 次に，1次変換の行列を求める問題を考えてみましょう。

練習 3. $(2,\ 1)$ を $(6,\ 0)$ に，$(0,\ 3)$ を $(0,\ 6)$ に変換する1次変換の行列を求めよ。　(小樽商大)

ヒント　求める1次変換の行列を A として，

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

としますと，題意から

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad 2a+b=6,\quad 2c+d=0$$
$$0a+3b=0,\quad 0c+3d=6$$

これを解いて

$$a=3,\ b=0,\ c=-1,\ d=2$$

ゆえに求める行列は $\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ であることがわかります。

次はちょっと意地のわるい問題を：——

練習 4. 直線 $2x+3y=1$ 上のすべての点を点 $(0,\ 1)$ にうつすような1次変換 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ を求めよ。　(東北学院大)

ヒント　直線 $2x+3y=1$ 上の点は $\left(t,\ \dfrac{1-2t}{3}\right)$ と書けます。t があらゆる実数値をとると，上の直線上のすべての点を動くわけです。さて，

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ \dfrac{1-2t}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+b\cdot\dfrac{1-2t}{3}\\ ct+d\cdot\dfrac{1-2t}{3}\end{pmatrix}$$

ですから，t が何であっても

$$at+b\cdot\frac{1-2t}{3}=0$$

$$ct+d\cdot\frac{1-2t}{3}=1$$

となるように $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めればよいわけです。

上の2式を変形して

$$(3a-2b)t+b=0$$
$$(3c-2d)t+(d-3)=0$$

ですから，これが t について恒等式であるための条件は

$$3a-2b=0,\ b=0\ ;\ 3c-2d=0,\ d-3=0$$

$$\therefore\quad a=0,\ b=0,\ c=2,\ d=3$$

というわけ。ゆえに，求める1次変換は

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

です。

注　実は $2x+3y=1$ は

$$2(x+1)=-3(y-1)$$

つまり

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-1}{2}$$

を変形できますから，これを $=t$ とおくと

$$x=-3t-1,\ y=2t+1$$

となって，いささかエレガントになる。しかし，それは本質的なことではありません。

*　　*　　*

◆ 図形の移動で，1次変換になるものはいろいろあります。例えば，原点に関する対称変換，原点を通る直線に関する対称変換，原点のまわりの回転，原点を中心とする相似変換など，それらについてはそれぞれの項目を参照してください。

また1次変換の合成や，それを応用して三角関数の加法定理を導くことなども大切なことがらですが，それらについてもそれぞれの項目を参照してください。なお，一次変換とも書くし，1次変換とも書きます。

なお，ついでに，うつすというのを写すとも移すとも書きます。念のため。

○変換の行列とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆1次変換は行列で表され，逆に行列は1次変換を表しています。このキレイな関係は行列をニギニギシイものにしている。

◆ 1次変換というのは，例えば

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(2x+3y,\ 3x+5y)$$

つまり，変換式が

$$2x+3y=x'$$
$$3x+5y=y'$$

なる，x，y の1次式（同次式）で与えられるのをいいます。

あるいは，これを行列を使って表しますと

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

となります。この行列

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$$

のことを **1次変換 f の行列** というのです。あるいは，簡単に，1次変換 $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$ というい い方も使われます。

では，次の問題をやってみませんか。

練習1. 1次変換

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(y,\ x)$$

の行列を求めよ。

（解） $f:(x,\ y)\longrightarrow(y,\ x)$ の変換式は

$$0\cdot x+1\cdot y=x'$$
$$1\cdot x+0\cdot y=y'$$

であるから，行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

となる。ゆえに求める行列は

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

である。

答 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

練習2. 点 (1, 2) を点 (1, 5) に，点 (3, 1) を点 (3, 5) にうつす1次変換の行列を求めよ。

（解）1. 求める行列を $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

となります。つまり

$$a+2b=1,\ c+2d=5$$
$$3a+b=3,\ 3c+d=5$$

これを解いて

$$a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=2$$

ゆえに，求める行列は

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

（解）2. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\5&5\end{pmatrix}$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&3\\5&5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&1\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5&0\\-5&-10\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

（注） 逆行列はいいですね。すなわち

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \text{ならば}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

（ただし，$ad-bc\neq0$）

必ずものにしておいてくださいよ。

◆　1次変換 f，次に g と続いて行うことを**1次変換の合成** といい，$g\circ f$ で表します。$f\circ g$ ではありませんよ。**あとに行うほうを左に書く** のです。そして，f の行列を F，g の行列を G としますと，$g\circ f$ の行列は行列の積 GF で与えられます。これは，変換の行列のもっとも有力な点のひとつです。

では，具体的なものをやってみませんか。

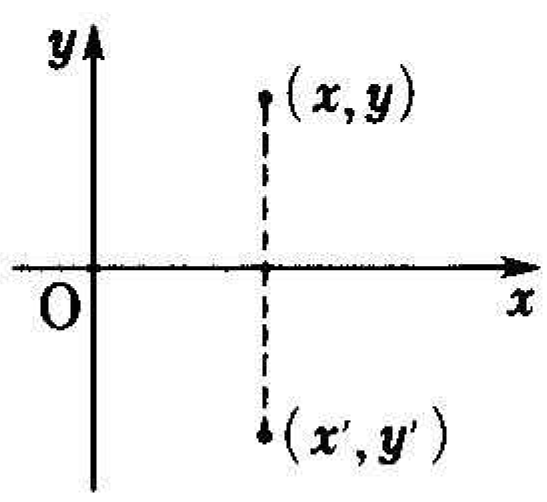
練習 3. x 軸および直線 $y=x$ に関する対称移動をそれぞれ f，g とする。このとき，合成写像 $h=g\circ f$ は原点Oのまわりの $90°$ 回転であることを示せ。

ヒント　x 軸に関する対称移動は

$$x'=x$$
$$y'=-y$$

で，変換行列は

$$F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$



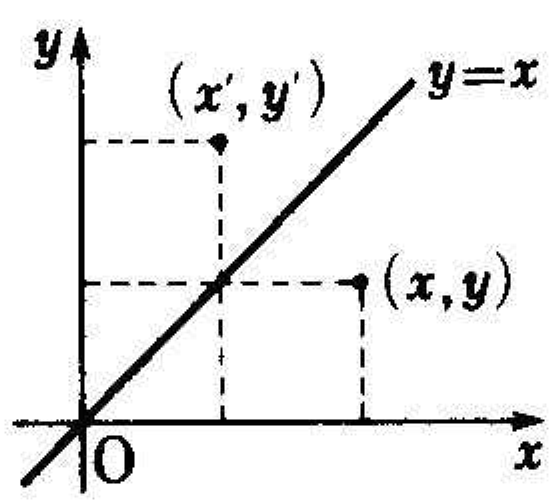
です。

また，$y=x$ に関する対称移動は

$$x'=y$$
$$y'=x$$

で，変換行列は

$$G=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$



です。したがって，$h=g\circ f$ の変換行列は

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}$$

となり，これは，確かに，原点Oのまわりの $90°$ 回転です。

練習 4. $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ は座標平面上の点を原点のまわりに θ だけ回転する1次変換を表す行列である。n が自然数のとき，$A^n(\theta)$ はどのような形の行列となるか。ただし，$A^2=AA$，$A^3=AA^2$，……，$A^n=AA^{n-1}$ である。（芝浦工大）

ヒント　$A^2=AA$ は原点のまわりに θ だけ回転する1次変換を続いて2回行うことを示しているわけですから

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

となるでしょう。A^3，A^4，……も同じで，

$$A^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

練習 5. xy 平面において，2つの変換 f，g が次のように与えられている。

$$f:(x,\ y)\longrightarrow(-x,\ -y)$$
$$g:(x,\ y)\longrightarrow(x-ay,\ y+bx)$$

$f\circ g$ と $g\circ f$ が一致することを示せ。

ヒント　f の行列は $F=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ で，g の行列は $G=\begin{pmatrix}1 & -a\\ b & 1\end{pmatrix}$ ですから，

$$FG=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a\\ b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -b & -1\end{pmatrix}$$
$$GF=\begin{pmatrix}1 & -a\\ b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & a\\ -b & -1\end{pmatrix}$$

*　　*　　*

◆　変換の行列で変わったものでは，こんなのもあります。

$f(x)=\dfrac{3x+4}{2x+1}$ は

$$f:x\longrightarrow\frac{3x+4}{2x+1}$$

とも表され，これは行列

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

に対応します。そして $f\circ f(x)$ は，

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}17 & 16\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

に対応します。すなわち

$$f\circ f(x)=\frac{17x+16}{8x+9}$$

です。このように，1次の有理関数の扱いにはスゴク便利なのです。詳しくは（☞ p.183）を参照してください。

○1次変換と行列の関係

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆写像というと簡単に聞こえ，1次変換というとめんどうに聞こえるという人が多いのです。しかし，それは食わずギライなのだ。

◆　**1次変換**というのは点 $(x,\ y)$ から点 $(x',\ y')$ への変換が

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=x' \\ cx+dy&=y' \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(*)$$

なる形で与えられるときをいうのです。1次式でも

$$ax+by+c=x'$$
$$dx+ey+f=y'$$

は1次変換といわないのです。このことをマチガッテいる人がスゴク多い。**変換式が1次であれば1次変換と思ってはいけません。**（正確にいえば，1次の同次式で表されたとき1次変換というのです。）

*　　*　　*

◆　さて，(*) のような変換式に行列を使うと次のように書けます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

つまり，**どんな1次変換でも行列で表せる**のです。

逆に，行列で表せるなら1次変換です。このことはいうまでもないでしょう。そこで，1次変換を調べるには行列の性質を調べればいいことになりますし，行列の性質を調べるのに1次変換を使うこともできるだろう，ということになります。実際，この両者は完全に対応のつくことがわかっておりますが，それは高校の範囲ではありません。

ここでは，その具体例を扱ってみることにしましょう。

■**練習1.** 点 $(1,\ 2)$ を点 $(2,\ 1)$ に，点 $(3,\ 4)$ を点 $(4,\ 3)$ に移す1次変換を表す行列を書け。

ヒント　変換式を

$$ax+by=x'$$
$$cx+dy=y'$$

としますと

$$1\cdot a+2b=2,\quad 1\cdot c+2d=1$$
$$3a+4b=4,\quad 3c+4d=3$$

となります。これを解くと

$$a=0,\ b=1\ ;\ c=1,\ d=0$$

ですから，変換式は

$$0\cdot x+1\cdot y=x'$$
$$1\cdot x+0\cdot y=y'$$

つまり

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

つまり求めるものは $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ です。

あるいは，次のようにもできます。与えられた条件から求める行列を A としますと

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

これを1つにまとめると

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となります。これから A を求めたい，というわけ。そこで $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ を両辺の右から掛けてやりますと

$$\begin{aligned} A&=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ 1次変換の合成は，それを表す行列の積に対応しています。こういっただけでは何のことかわからない。具体的な練習をやってみるのがもっともよい。

では，これを：――

7/13

練習 2. 座標平面上において行列$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$および$\begin{pmatrix}-1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$で表される2つの1次変換をそれぞれ f，g で表すとき，合成された変換 $f\cdot g$ の行列を求めよ。（高知女大）

(ヒント) $f:\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ ……①

$g:\begin{pmatrix}-1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ……②

としますと，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{g}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{f}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

という順序で$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$に移されます。つまり，①，②から

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

行列の積は結合法則が成り立つのですから

$$\left\{\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\begin{pmatrix}-5 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

したがって $f\cdot g$ の行列は$\begin{pmatrix}-5 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$です。

(注) 入試問題などとして出題されたとき，どの程度に解答を書かなければならないのかということになると困ってしまいます。しかし，この場合は，上のように詳しく書くほどのこともないでしょう。例えば：――

(解) $F=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$，$G=\begin{pmatrix}-1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$とすれば合成された変換 $f\cdot g$ の行列は積 FG で与えられる。ゆえに求める行列は

$$FG=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$$ ……答

である。

7/13

練習 3. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$への1次変換$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$への1次変換$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$について，次の問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$への1次変換を表す行列を求めよ。

(2) (1)で求めた変換の逆変換を表す行列を求めよ。（東京経大）

(ヒント) $f\cdot g=e$ のとき f と g は互いに他の**逆変換**というのでした。e というのは**恒等変換**，つまり $e(x)=x$ です。そこで，行列についても

F と G が互いに他の逆行列のとき
$FG=E$

となるのです。ここに E はいうまでもなく**単位行列**です。要するにある1次変換を表す行列を A とすると，その逆変換を表す行列は逆行列 A^{-1} なのです。

(解) (1) 求める行列は

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$$

である。

(2) 上の行列の逆行列を求めればよいから求めるものは

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-3+4}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$$

である。

＊　＊　＊

◆ 高校ではこの程度のことですが，もっと高度のことになるといろいろと役に立つことも多いのです。

◑不変直線を求めること

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆変わるものがあればこそ，変わらないものは意味をもつのだ。いや，変わらないものこそ，変わるものを支えているのである。

◆ 変換によって変わらない図形を不変図形といいます（点の場合は不動点というのがふつうですが）。ここでは1次変換によって変わらない直線を求めるのが目的です。では，次の練習1.をやってみませんか。

練習1. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ によって直線 $x+y=0$ はどんな図形にうつされるか。

ヒント A によって点 (x, y) が点 (x', y') に写されるとしますと

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}1x+2y=x'\\ 4x+3y=y'\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots②$$

これから x, y を x', y' で表して $x+y=0$ に代入すれば x', y' の関係が得られるハズ。それが求めるものです。しかし，それなら，②を解くよりも，①の両辺に左から A^{-1} を掛けたほうが楽です。つまり

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore x=-\frac{1}{5}(3x'-2y')$$

$$y=-\frac{1}{5}(-4x'+y')$$

これを $x+y=0$ に代入しますと

$$-\frac{1}{5}(-x'-y')=0$$

$$\therefore x'+y'=0$$

x', y' の代わりに改めて x, y と書くと，

$$x+y=0$$

これが求めるものです。

注 こうして，1次変換 A によって，直線 $x+y=0$ は変わらないことがわかったのです。しかし，まだあるかもしれません。次をやってみましょう。

練習2. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ によって直線 $y=mx$ は自身にうつされるという。m の値を求めよ。

ヒント $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

より

$$x=-\frac{1}{5}(3x'-2y')$$

$$y=-\frac{1}{5}(-4x'+y')$$

これを $y=mx$ に代入しますと

$$-\frac{1}{5}(-4x'+y')=m\cdot\left\{-\frac{1}{5}(3x'-2y')\right\}$$

これから

$$y'=\frac{3m+4}{2m+1}x'$$

x', y' を x, y と書きかえて

$$y=\frac{3m+4}{2m+1}x$$

これが $y=mx$ と一致するための条件は

$$\frac{3m+4}{2m+1}=m$$

$$\therefore 3m+4=2m^2+m$$

$$\therefore m^2-m-2=0$$

$$\therefore m=2, \ -1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

注 つまり $y=2x$, $y=-x$ は不変直線というわけ。

なお，$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ は正則ですから，逆変換も存在しますから，上のようにやらないで次のようにしてもよいのです。

$$x'=x+2y$$
$$y'=4x+3y$$

を $y'=mx'$ に代入しますと

$$4x+3y=m(x+2y)$$

$$\therefore\quad y=\frac{4-m}{2m-3}x$$

これが $y=mx$ と一致するのですから

$$m=\frac{4-m}{2m-3}$$

これを解いて

$$m=2,\ -1$$

当然ながら，上と同じ解になりました。

*　*　*

◆ では，練習を2つやってみましょう。

練習 3. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ によって不変な直線を求めよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad x'=x+2y \qquad \cdots\cdots①$$
$$y'=4x+3y \qquad \cdots\cdots②$$

いま，求める直線を

$$ax+by+c=0 \qquad \cdots\cdots③$$

としますと

$$ax'+by'+c=0 \qquad \cdots\cdots④$$

④に①，②を代入して

$$a(x+2y)+b(4x+3y)+c=0$$
$$\therefore\quad (a+4b)x+(2a+3b)y+c=0 \quad \cdots⑤$$

③と⑤が一致するための条件は

$$\frac{a}{a+4b}=\frac{b}{2a+3b}=\frac{c}{c} \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$\therefore\quad \frac{a}{a+4b}=1,\ \frac{b}{2a+3b}=1$$

$$\therefore\quad a+4b=a,\ 2a+3b=b$$

$$\therefore\quad a=b=0$$

おや，困ったぞ。これでは直線にならない。解なし!! か？

そうではありません。⑥において，$\frac{c}{c}=1$ としたから，こうなったのですが，$c\neq 0$ のときのみこうなるのです。

$c=0$ なら③と⑤が一致するための条件は

$$\frac{a}{a+4b}=\frac{b}{2a+3b}$$

$$\therefore\quad a^2+ab-2b^2=0$$

$$\therefore\quad (a+2b)(a-b)=0$$

$$\therefore\quad a=-2b \quad \text{あるいは} \quad a=b$$

$a=-2b,\ c=0$ なら，③から　$y=2x$

$a=b,\ c=0$ なら，③から　$y=-x$

となります。

では，もう1つ：——

練習 4. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ によって不変な直線を求めよ。

解　$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

とすると

$$x'=x+2y \qquad \cdots\cdots①$$
$$y'=3x+2y \qquad \cdots\cdots②$$

Aによって不変な直線を

$$ax+by+c=0 \qquad \cdots\cdots③$$

とすると

$$ax'+by'+c=0 \qquad \cdots\cdots④$$

で，Aが正則であるから④に①，②を代入したものは③に一致しなければならない。すなわち，

$$(a+3b)x+(2a+2b)y+c=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

が③に一致するのは，$c\neq 0$ のとき

$$a=a+3b,\ b=2a+2b$$

$$\therefore\quad a=b=0$$

これは不合理である。

$$\therefore\quad c=0$$

このとき⑤と③が一致する条件は

$$\frac{a}{a+3b}=\frac{b}{2a+2b}$$

$$\therefore\quad 2a=-3b \quad \text{あるいは} \quad a=b$$

よって，求める直線は

$$y=\frac{3}{2}x,\ y=-x \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑ 不変直線を求めること（正則でない場合）

◆行列では，正則である場合と，正則でない場合とでは，まったくちがってくるものです。この不変直線の場合もまたおなじ。

◆ 本論に入る前に，正則でない行列で表される1次変換についてまず当ってみましょう。まず，これから：——

■練習 1. 零行列によって xy 平面はどのようにうつされるか。

ヒント
$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

というのですから

$$x'=0,\ y'=0$$

つまり xy 全平面が原点 O(0, 0) にうつされるのです。

注　これによると xy 平面のあらゆる直線もまた O(0, 0) にうつされることがわかります。してみると，不変直線は存在しないのです。しかし，不動点はありますよ。O(0, 0) がそれです。

■練習 2. 1次変換 $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ によって xy 平面はどのようにうつされるか。

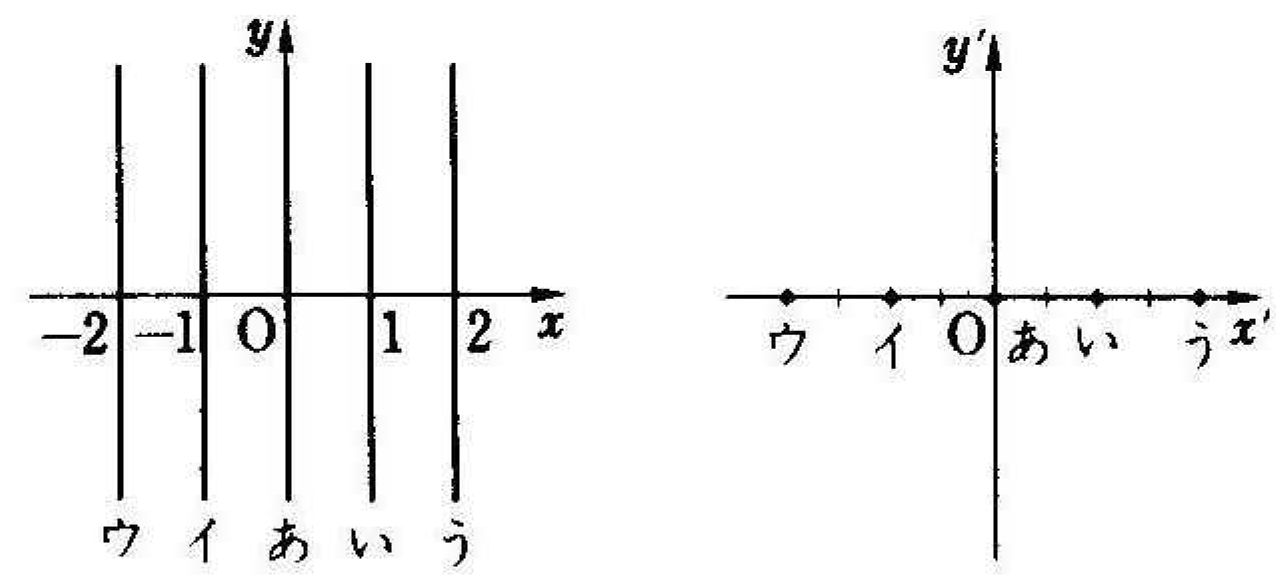
ヒント
$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ 2x=x',\ y'=0$$

つまり，xy 平面はすべて $y'=0$，つまり横軸上にうつされるのです。

では，どのようにうつされるのか？

それは $x'=2x$ できまります。つまり直線 $x=0$ は原点に，直線 $x=1$ は点 (2, 0) に，直線 $x=2$ は点 (4, 0) に，と，いったぐあい。このようにして y 軸に平行な直線は横軸上の1点にうつされるのですが y 軸に平行でない直線はすべて横軸 $y'=0$ にうつされます。この場合には不変直線は x 軸そのものであることがわかるでしょう。



＊　＊　＊

◆ そこで，いよいよ本論に入って，これです。

■練習 3. 1次変換 $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ による不変直線の方程式を求めよ。

ヒント
$$\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

から

$$x+2y=x'$$
$$0=y'$$

つまり，x，y のすべての値に対して $y'=0$ ですから，xy 平面は直線 $y=0$（ダッシュは最終段階でとるのが正式）にうつされます。そして $x+2y=1$ は点 (1, 0) に，$x+2y=2$ は点 (2, 0) といったぐあい。つまり，傾き $-\frac{1}{2}$ の直線はすべて1点にうつされるのです。そして，それ以外の直線はすべて $y=0$ にうつされるのです。

してみると，不変直線は $y=0$ だけであることがわかりましょう。

注　それを次のようにやってはマチガイです。というのも，1対1の対応ではないからなのです。

☆　**マチガイの解答**

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

より

$$x+2y=x' \qquad \cdots\cdots①$$

$$0=y' \qquad \cdots\cdots②$$

不変直線を　$ax+by+c=0$　……③

とすると，像もこの上にあるから

$$ax'+by'+c=0 \qquad \cdots\cdots④$$

①，②を④に代入して

$$a(x+2y)+b\cdot 0+c=0$$

すなわち

$$ax+2ay+c=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

③と⑤が一致するための条件は

$c \fallingdotseq 0$ のとき

$$b=2a$$

$$\therefore\ \ ax+2ay+c=0$$

$$\therefore\ \ x+2y+k=0 \quad (k \fallingdotseq 0)$$

$c=0$ のとき

$$b=2a$$

$$\therefore\ \ x+2y=0$$

上の 2 つの結果をまとめて不変直線は

$$x+2y+k=0 \quad (k\text{は任意})$$

このようなマチガイはとかくやりがちです。正則でないとき①，②を④に代入しても原像は得られないのです。

*　*　*

◆ では，少し応用的な問題を練習してみませんか。

練習 4. 1 次変換 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ によって平面上の直線 $ax+by+c=0$ が 1 点にうつされるための条件を求めよ。

ヒント

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

より

$$2x-y=x' \qquad \cdots\cdots①$$

$$-2x+y=y' \qquad \cdots\cdots②$$

$$\therefore\ \ y'=-x'$$

つまり xy 平面は直線 $y=-x$ にうつされるのです。そして，

$$2x-y=k$$

なら

$$x'=k,\ \ y'=-k$$

ですから，直線 $2x-y=k$ が 1 点 $(k,\ -k)$ にうつされるわけ。

したがって求める条件は

$$a=-b \quad (\fallingdotseq 0)$$

です。

練習 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$S=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ とする。A および A^2 で表される 1 次変換によって，S は各々どのような図形にうつされるか。

ヒント

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \ x+y=x'$$

$$2x+2y=y'$$

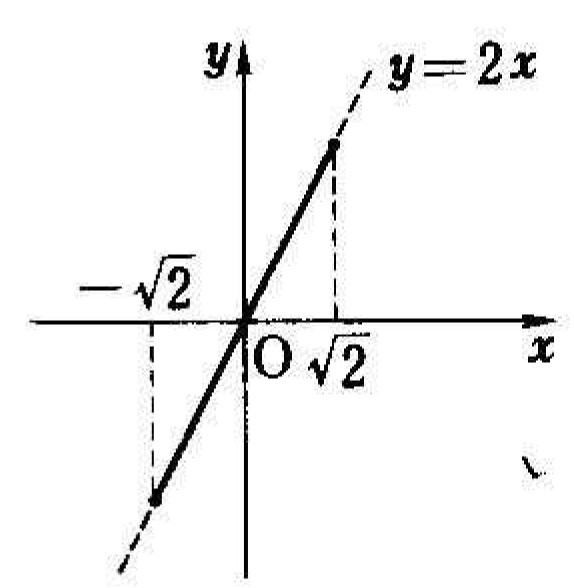
$$\therefore\ \ y'=2x'$$

したがって xy 平面はすべて直線 $y=2x$ にうつされるのです。$x^2+y^2=1$ とてもおなじこと。しかし，その全部ではありません。ではどんな範囲か。$x^2+y^2=1$ から $x+y$ のとりうる値の範囲をしらべればよいでしょう。

つまり

$$-\sqrt{2} \leqq x+y \leqq \sqrt{2}$$

$$\therefore\ \ -\sqrt{2} \leqq x' \leqq \sqrt{2}$$



さて，次は：——

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

についておなじようにやればいいのです。あるいは円 $x^2+y^2=1$ 上の点が $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で表せることを使うと少しラクになります。ともあれ，その結果は線分：

$$y=2x \quad (-3\sqrt{2} \leqq x \leqq 3\sqrt{2})$$

なのです。

*　*　*

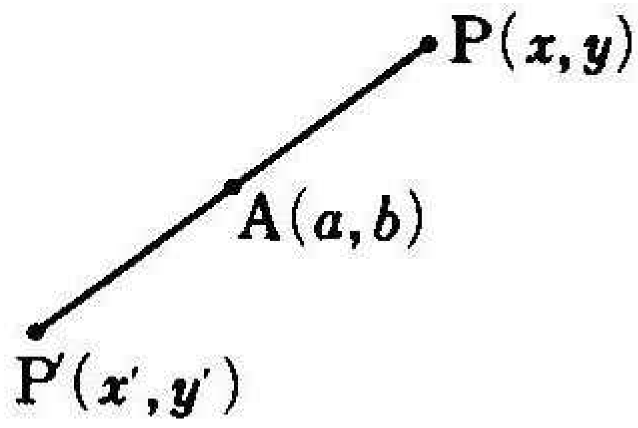
だから，1 次変換の問題をみたら，すぐ正則か否かを判定して分類することが大切です。

○ (原点に関する)対称変換

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆原点に関する対称変換はべつにめんどうはありませんが，とかく，他の分野とコンビで提出されてかえって複雑になってしまう。

◆ 点 $A(a,\ b)$ について点 $P(x,\ y)$ と点 $P'(x',\ y')$ が対称だとしますと



$$a=\frac{x+x'}{2},\quad b=\frac{y+y'}{2}$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x'&=2a-x\\ y'&=2b-y\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(*)$$

これが変換公式です。したがって，任意の点に関する点対称変換は1次変換ではありません。

念のため，**1次変換** というのは

$$\boldsymbol{x'=ax+by}$$
$$\boldsymbol{y'=cx+dy}$$

という形でなければなりません!!

しかし，(*) において $a=b=0$ のときには

$$x'=-x+0\cdot y$$
$$y'=0\cdot x-1\cdot y$$

で，これは1次変換で，それを行列で表すと

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

となります。

*　*　*

◆ こんなわけで，原点に関する対称変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ということがわかります。さて：——

練習 1. 点 P を原点に関して対称変換した点を P′ とし，点 P′ を原点に関して対称変換した点を P″ とすると P と P″ は一致する。このことを変換行列を使って表せばどうなるか。

(ヒント) 原点に関して二度対称変換をするのですから

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

つまり **恒等変換** になります。恒等変換というのは変換しないのと同じこと。つまり，もとの点に戻るのです。

こんな明々白々なことでも答案に書こうとすると，どう書いていいか，まったく困ってしまう。そこで，その見本をひとつ：——

(解) 原点に関する対称変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

であるから，これを続いて行う対称変換の合成に対応する行列は

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。これは単位行列であるから，恒等変換を表し，点Pは自身に写されることになる。

Q. E. D.

7/17

練習 2. 点Pを x 軸に関して対称変換し，次に y 軸に関し対称変換することは，点Pを原点に関し対称変換すると同じことである。これを行列を使って表せ。

(ヒント) x 軸に関する対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ で，y 軸に関する対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ですから，この合成は

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad\cdots(*)$$

ナルホド，これは原点に関する対称変換で

す。

（注）（*）のところを順序を逆に

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

とやっては結果は同じでもマチガイですよ。

*　　*　　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

7/8

■練習 3. 原点のまわりに θ だけ回転する1次変換 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ に対して，A^2 は原点に関する対称変換になるという。θ を求めよ。ただし，$0<\theta<2\pi$ とする。

（解）

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^2$$
$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}$$

これが原点に関する対称変換に等しいから

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\cos2\theta=-1\\ \sin2\theta=0\end{cases}\quad(0<2\theta<4\pi)$$

$$\therefore\ 2\theta=\pi,\ 3\pi$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\qquad\cdots\cdots \text{答}$$

*　　*　　*

◆ ここでひとこと，ご注意を：―― 平面上の任意の点についての点対称は1次変換ではありません。例えば，

A(1, 2) について P$(x,\ y)$ と対称な点を P$'(x',\ y')$ としますと，Aは PP$'$ の中点ですから

$$\frac{x'+x}{2}=1,\ \frac{y'+y}{2}=2$$

$$\therefore\ x'=-x+2,\ y'=-y+4$$

となって，この $+2$，$+4$ があるからだめなのです。しかし，P$(x,\ y)$ について原点の対称点を P$'(x',\ y')$ とすると1次変換になります。つまり　$\dfrac{0+x'}{2}=x$，$\dfrac{0+y'}{2}=y$

$$\therefore\ x'=2x,\ y'=2y$$

そして，その変換の行列は

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

です。では，これをやってみませんか。

7/8

■練習 4. だ円 $x^2+4y^2=4$ 上の点Pについて原点と対称な点の軌跡を求めよ。

（ヒント）　上の変換式と $x^2+4y^2=4$ とから x，yを消去しますと　$x'^2+4y'^2=16$

答　$x^2+4y^2=16$

*　　*　　*

◆ では，やや，応用的問題をやってみませんか。

■練習 5. 曲線 $f(x,\ y)=0$ と原点について対称な曲線の方程式を求めよ。

（解）　点 $(x,\ y)$ に対応する点を $(X,\ Y)$ とすると　$x=-X,\ y=-Y$

$$f(x,\ y)=0$$

この3式から x，yを消去して

$$f(-X,\ -Y)=0$$

ここでX，Yの代わりにx，yと書いて求める方程式は　$f(-x,\ -y)=0$　……答

■練習 6. 点 (1, 2) を点 $(-1,\ -2)$ にうつす1次変換を求めよ。

（ヒント）　原点に関する対称変換ならもちろんいいが，ほかにもあるかもしれない。では，どうか：――

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$$

とすると

$$a+2b=-1,\ c+2d=-2$$

$$\therefore\ a=-2b-1,\ c=-2d-2$$

したがって，求める1次変換は

$$\begin{pmatrix}-2k-1 & k\\ -2l-2 & l\end{pmatrix}$$

となるが，ハテ，具体的に何かな？

◑（線）対称の扱い方

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆高校で扱ういろいろの変換の中で，もっともめんどうでもあり，扱いにくくもあるのがこの線対称なんです。

◆ 与えられた直線について，与えられた点と対称な点を求めることはしばしば必要になります。そして，それには，3つの大切なことがあります。第1は座標を求めること，第2は1次変換の立場から，第3は位置ベクトルのほうからです。では：——

*　　*　　*

◆ 第1の例からはじめましょう。

練習 1. 直線 $x+2y=1$ について原点と対称な点を求めよ。

ヒント　求める点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ としますと，PO は直線 $x+2y=1$ に垂直ですから

$$\frac{Y-0}{X-0}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，PO の中点 $\left(\frac{X}{2},\ \frac{Y}{2}\right)$ は直線 $x+2y=1$ 上にあるから

$$\frac{X}{2}+2\cdot\frac{Y}{2}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②を連立させて解けば

$$X=\frac{2}{5},\quad Y=\frac{4}{5}$$

ゆえに求める点は $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ です。

練習 2. $l:y=3x+a$ に関する線対称の変換式をつくれ。

ヒント　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ としますと $\mathrm{PP}'\perp l$ より

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot 3=-1$$

$$\therefore\quad x'+3y'=x+3y \qquad \cdots\cdots①$$

次に PP' の中点 $\left(\frac{x'+x}{2},\ \frac{y'+y}{2}\right)$ が l 上にあることから

$$\frac{y'+y}{2}=3\cdot\frac{x'+x}{2}+a$$

$$\therefore\quad 3x'-y'=-3x+y-2a \cdots\cdots②$$

①，②より $\quad x'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{3}{5}a$

$$y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{1}{5}a$$

これが求めるものです。

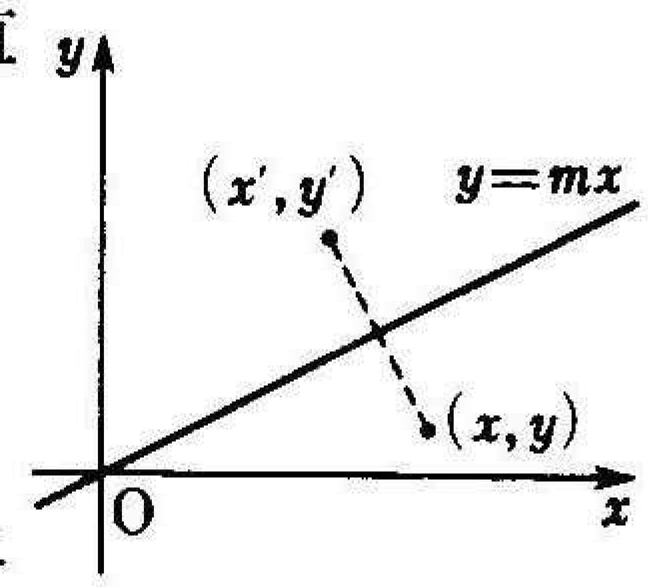
*　　*　　*

◆ 第2は1次変換ですが，任意の直線についての線対称変換は1次変換ではありません。しかし，原点を通る直線に関する対称は1次変換です。では，次の練習3.をやってみませんか。

練習 3. 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を直線 $y=mx$ に関して対称な点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ に移す変換は1次変換であることを示せ。

ヒント　PQ と直線は直交するから

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot m=-1 \qquad \cdots\cdots①$$



PQ の中点は直線上にあるから

$$\frac{y+y'}{2}=m\cdot\frac{x+x'}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②を x'，y' について解くと

$$x'=\frac{1-m^2}{1+m^2}x+\frac{2m}{1+m^2}y$$

$$y'=\frac{2m}{1+m^2}x-\frac{1-m^2}{1+m^2}y$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2}\\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

このように，行列

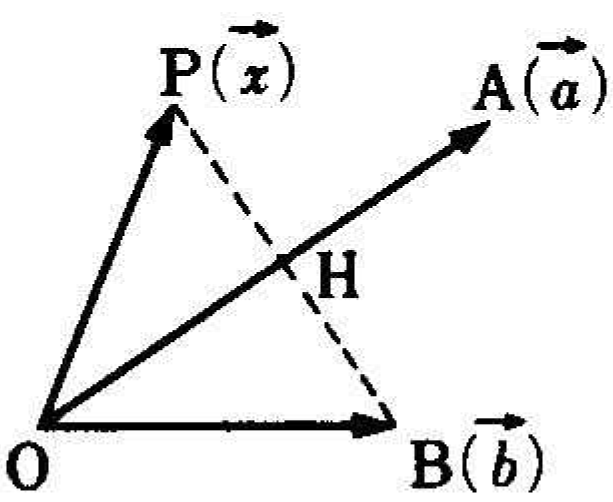
$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2)\end{pmatrix}$$

で表される1次変換であることがわかります。(詳しくは (☞ p.146) 参照)

*　*　*

◆ 第3はベクトルの場合です。さっそく具体例にいきましょう。

練習 4. 右の図において ベクトル $\vec{a}$ について，点 $\vec{b}$ と対称な点 $\vec{x}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。



ヒント PB と OA との交点を H として，まず OH を求め，次に H について B と対称な点 P を求める，という順序で考えてみましょう。

$\angle AOB=\theta$ としますと，

$$\overline{OH}=\overline{OB}\cos\theta=|\vec{b}|\cos\theta$$

ところが

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore\quad \overline{OH}=|\vec{b}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

ところで，$\overrightarrow{OA}$ 方向の単位ベクトルは $\vec{a}$ を $\vec{a}$ の長さ $|\vec{a}|$ で割ったもの，すなわち $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ですから，

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

もうできるでしょう。H は PB の中点だから

$$\frac{\vec{x}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\therefore\quad \vec{x}=-\vec{b}+2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\qquad\cdots\cdots\ 答$$

*　*　*

◆ さあ，これで大事なことは終わった。次は応用問題にいきましょう。

練習 5. 平面上に3点 O，A，B がある。直線 OB に関する A の対称点を A_1，直線 OA_1 に関する B の対称点を B_1，直線 OB_1 に関する A_1 の対称点を A_2，直線 OA_2 に関する B_1 の対称点を B_2 とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA_1}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $|\vec{a}|=\overline{OA}=1$，$|\vec{b}|=\overline{OB}=\sqrt{3}$，$\angle AOB=30°$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OB_2}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(3) (2)において，点 A_1，A_2 は線分 BB_2 をそれぞれ $1:2$ および $2:1$ に分けることを証明せよ。　(成蹊大)

ヒント (1) $\overrightarrow{OA_1}=2\cdot\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}-\vec{a}$

(練習 4. からすぐわかるハズ)

(2) $\overrightarrow{OA_2}=\vec{b}-2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB_2}=\vec{b}-3\vec{a}$

(3) A_1 が BB_2 を $1:2$ に内分することをいうには，内分の公式を使ってもいいが，

$$\overrightarrow{BA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_2}$$

をいえばいい。ところが

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA_1}&=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB}\\&=\left(2\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}-\vec{a}\right)-\vec{b}\\&=\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

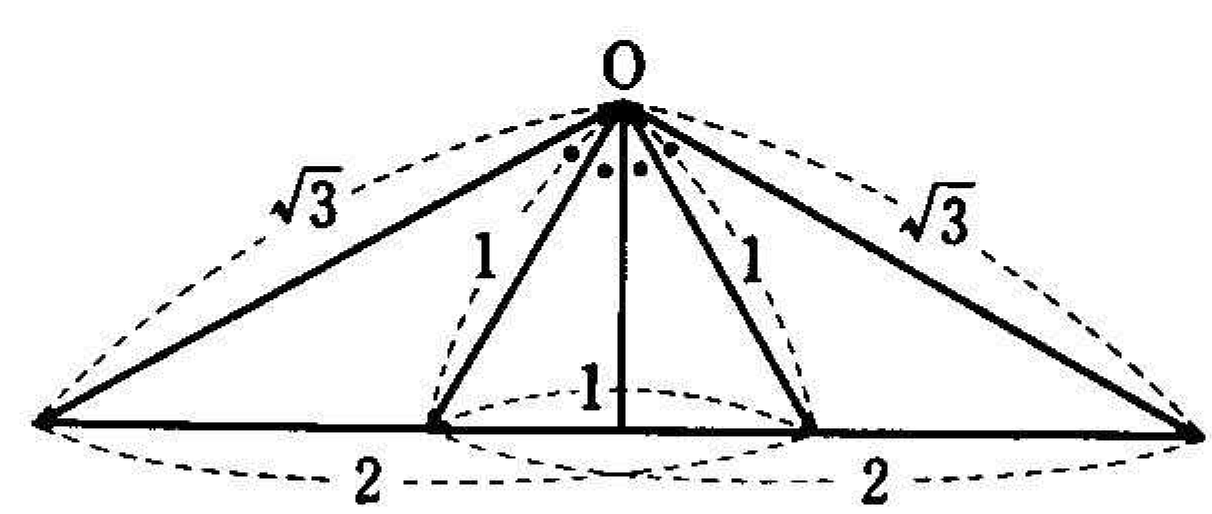
ここで，

$$|\vec{b}|^2=(\sqrt{3})^2=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{3}\cos 30°=\frac{3}{2}$$

ですから　$\overrightarrow{BA_1}=-\vec{a}$

また，$\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OB}=\cdots\cdots$

注 なお上の(3)の証明は図形的にも出てきますから，やってみませんか。(下図参照)



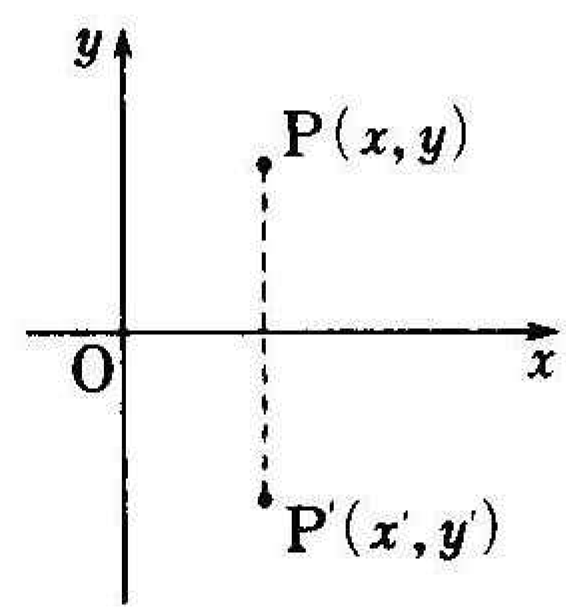
○座標軸に関する対称変換

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

※線対称変換は一般に1次変換ではありません。しかし，原点を通る直線に関する対称変換は1次変換なのです。

◆ 原点を通る直線に関する対称変換が1次変換となることについては（☞ p.146）を参照してください。ここでは，その中でも特別な場合に当たる座標軸に関する対称変換を考えてみましょう。

さて，x 軸について，点 P$(x,\ y)$ と点 P$'(x',\ y')$ が対称であるならば



$$\begin{cases} x=x' \\ y=-y' \end{cases}$$

なる関係があります。あるいは

$$1\cdot x+0\cdot y=x'$$
$$0\cdot x-1\cdot y=y'$$

とも書けます。行列で表せば

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

となります。

まったく同じように，y 軸に関する対称変換は

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

で与えられます。

*　*　*

◆ では，これらをもとにしていくつか具体的な問題を扱ってみましょう。

練習1. 1次変換 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ によって，点 P$(2,\ 3)$ はどんな点に移されるか。

（解） $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

であるから，点 $(2,\ 3)$ は点 $(2,\ -3)$ に移される。

答　$(2,\ -3)$

練習2. 1次変換 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ によって，点 $(1,\ 4)$ に移される点を求めよ。

（解） 求める点を $(a,\ b)$ とすると

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

両辺に $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$ を左から乗じて

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

が得られる。

答　$(-1,\ 4)$

練習3. 1次変換 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ を f_1，1次変換 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ を f_2 で表すとき，$f_1\circ f_2$ と $f_2\circ f_1$ は等しいか，否かを調べよ。

（ヒント） マトモに計算すれば

$f_1\circ f_2$ の行列は

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$f_2\circ f_1$ の行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

となって等しい。

あるいは計算しないでも，f_1，f_2 がそれぞれ y 軸，x 軸に関する対称変換であることを考えると，明らかなことである。

（注） 変換 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ は，原点についての点対称変換です。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な練習をやってみましょう。

練習 4. 座標平面上で，恒等変換を f_1，x 軸に関する対称変換を f_2，y 軸に関する対称変換を f_3，原点に関する対称変換を f_4 とすると，集合 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ は，変換の合成について群をなすことを示せ。

ヒント　集合 G がある演算について群をなすというのは4つの条件を満足しなければならなかった（☞ p.178）。つまり

(1) 閉じていること
(2) 結合法則が成り立つこと
(3) 単位元のあること
(4) 逆元のあること

でしたね。ここで，

$$f_1:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad f_2:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$f_3:\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad f_4:\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

で与えられますから，行列の性質によって，結合法則が成り立つことは明らかです。

あとの3つは，演算表を作って示すのが便利でしょう。これは右のようです。

〈$f_i \circ f_j$ の演算表〉

f_i ＼ f_j	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

注　この演算表（群表）をみると

$$f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$$

であることがわかります。つまり，この群は，この演算について交換可能です。つまり，この群は **可換群**（かかんぐん）あるいは **アーベル群** といわれるものなのです。しかし，べつにこんな名前をオボエル必要はありませんよ。

＊　＊　＊

◆ 前のページでみたように x 軸に関する線対称変換および y 軸に関する線対称変換の行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とでした。この変換を2度続けて行いますと

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

で，恒等変換となります。つまり $A^2=E$ となります。考えてみるまでもなく当然です。では，逆に $A^2=E$ を満足する1次変換 A の中にどのように位置しているでしょうか。では，次をみるとしよう。

練習 5. $A^2=E$ を満足する行列 A による1次変換の中で，x 座標を変えないものは何か。

ヒント　$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ としますと

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

から

$$ax+by=x'$$
$$cx+dy=y'$$

題意により　$x=x'$

$$\therefore\ a=1,\ b=0$$

でなければならない。

$$\therefore\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

より

1−1 成分：　$1=1$　……①
1−2 成分：　$0=0$　……②
2−1 成分：　$c+cd=0$　……③
2−2 成分：　$d^2=1$　……④

④より $d=\pm 1$

$d=1$ のとき③より $c=0$

$d=-1$ のとき③より c は任意

つまり，ひとつは単位行列で当然のこと，いまひとつは

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}\ (c\text{ は任意})$$

で $c=0$ のとき x 軸に関する線対称になる!!

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

(原点を通る直線に関する)線対称変換

◆線対称変換は一般に1次変換ではありませんが，原点を通る直線に関する線対称移動は1次変換です。

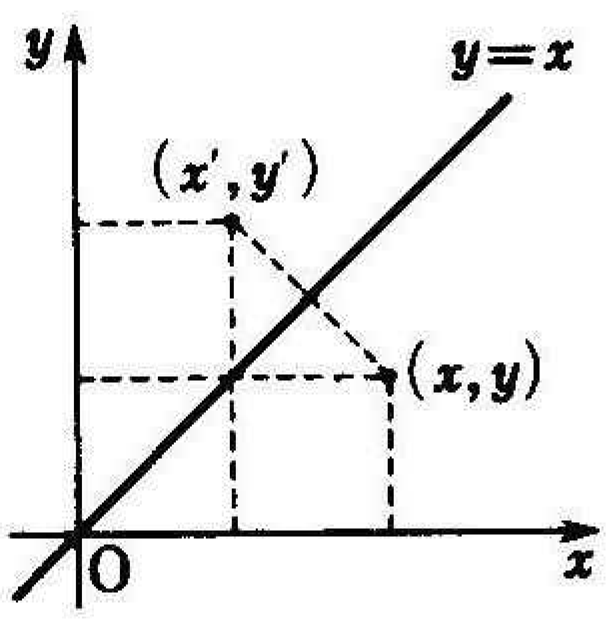
◆ 平面上で任意の直線に関する線対称は1次変換ではありませんが，

原点を通る直線に関する線対称は1次変換

なのです。では，これをやってみませんか。

練習1. 直線 $y=x$ に関する線対称変換を表す行列を求めよ。

ヒント 直線 $y=x$ に関して，2点 $(x,\ y)$ と $(x',\ y')$ が対称であるとしますと，右の図からわかるように



$$x=y'$$
$$y=x'$$

なる関係があります。もっとていねいに書くと，

$$\begin{cases} 0\cdot x+1\cdot y=x' \\ 1\cdot x+0\cdot y=y' \end{cases}$$

変換式を行列を使って表しますと

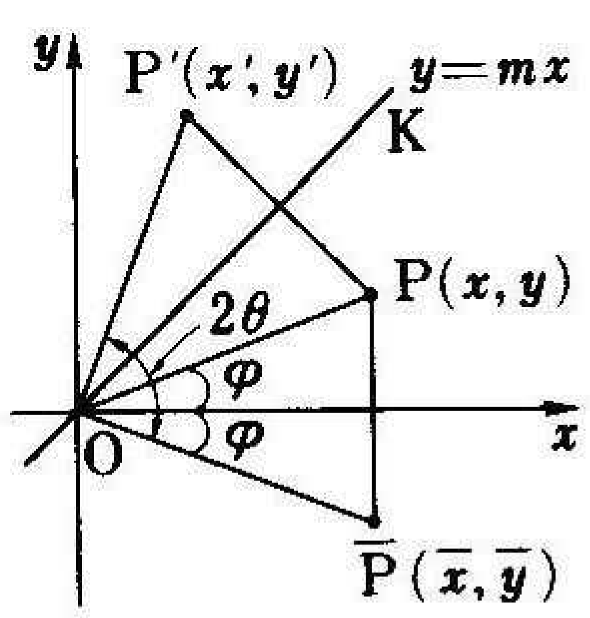
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ゆえに，求める行列は次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

練習2. 直線 $y=mx$ に関する線対称変換を表す行列を求めよ。

ヒント 右の図から分かるように $\mathrm{P}(x,\ y)$ を x 軸に関して線対称変換して点 $\overline{\mathrm{P}}(\overline{x},\ \overline{y})$ にうつし，次に原点Oのまわりに $\angle\overline{\mathrm{P}}\mathrm{OP}'=2\theta$ $(\theta=\angle \mathrm{KO}x)$ だけ回転すれば $\mathrm{P}'(x',\ y')$ にうつるでしょう。



さて，$\mathrm{P}\to\overline{\mathrm{P}}$ の変換の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

でした。また $\overline{\mathrm{P}}\to\mathrm{P}'$ の変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ですから $\mathrm{P}\to\mathrm{P}'$ の変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となります。

ところが $\tan\theta=m$ ですから

$$\sin 2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$$

$$=\frac{2m}{m^2+1}$$

$$\cos 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}$$

$$=\frac{1-m^2}{m^2+1}$$

ゆえに求める行列は

$$\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

で与えられるのです。

142ページの解答やp.147の練習5と比較してみるとおもしろいでしょう。

＊　＊　＊

◆ では，総合的な問題を：――

練習3. 直線 l を直線 $y=-x$ に関して対称移動し，さらに原点のまわりに負の向きに30°だけ回転すると，直線 $2x+3y-1=0$ を得た。l の方程式を求めよ。

ヒント　直線 $2x+3y-1=0$ を原点のまわりに $30°$ 回転し，さらに直線 $y=-x$ に関して対称移動すれば l が得られるハズ。変換行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

となりますから，変換式は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}(-x'-\sqrt{3}\,y')$$

$$y=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\,x'+y')$$

これを $2x+3y-1=0$ に代入して変形すると

$$(2+3\sqrt{3})x'+(2\sqrt{3}-3)y'+2=0$$

が得られます。

注　上の（*）から次の式への変形では，両辺の左側から逆行列を掛けているのです。偶然同じ行列ですが，ハテ，どうしてかな？

8/6

練習 4. 平面上の点 $(x,\ y)$ に点 $(x'',\ y'')$ を対応させる規則が，次の(1)，(2)によって与えられている。

(1)　$x'=x+y,\quad y'=3x-2y$

(2)　原点を通るある直線 l に関する点 $(x',\ y')$ の対称点の座標を $(x'',\ y'')$ とする。

この規則によって，点 $(2,\ 3)$ に点 $(3,\ 4)$ が対応するならば，次の関係が成り立つ。

$$x''=\boxed{}\,x-\boxed{}\,y$$

$$y''=\boxed{}\,x+\boxed{}\,y$$

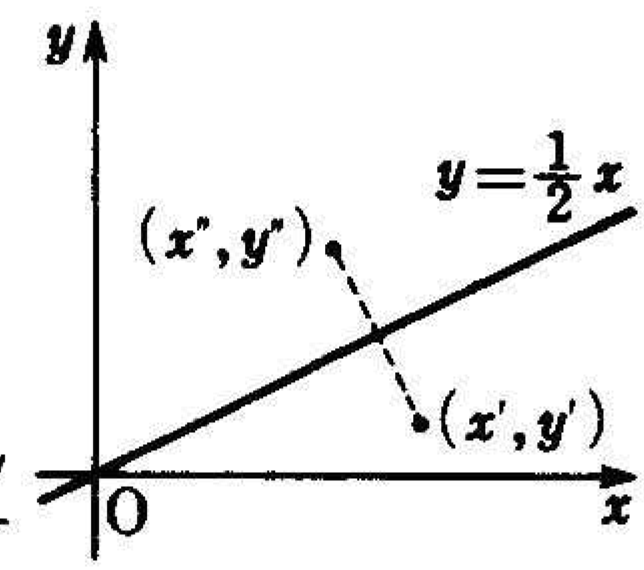
（慶大）

ヒント　まず(1)によって $(2,\ 3)$ は $(5,\ 0)$ に対応するでしょう。そこで，$(5,\ 0)$ と $(3,\ 4)$ は l について対称になるハズ。

そこで，点 $(5,\ 0)$ と点 $(3,\ 4)$ を結ぶ線分の垂直2等分線を求めるため，距離が等しいことを使いますと

$$(x-5)^2+(y-0)^2=(x-3)^2+(y-4)^2$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x$$



ゆえに，

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}\cdot\frac{1}{2}=-1$$

$$\frac{y'+y''}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x'+x''}{2}$$

$$\therefore\ x''=\frac{3x'+4y'}{5},\quad y''=\frac{4x'-3y'}{5}$$

これに $x'=x+y,\quad y'=3x-2y$ を代入して

$$x''=3x-y,\quad y''=-x+2y$$

だから $\boxed{}$ の中は，順に 3，1，-1，2 となります。

2/6

練習 5. 原点を通り，x 軸の正の向きと角 θ をなす直線を l とする。点 $(x,\ y)$ の l に関する対称点 $(x',\ y')$ を，次のような1次変換の合成により求める。

(i)　原点を中心とする角 $-\theta$ の回転により，$(x,\ y)$ を $(x_1,\ y_1)$ にうつす。

(ii)　$(x_1,\ y_1)$ を x 軸に関する対称点 $(x_2,\ y_2)$ にうつす。

(iii)　最後に，原点を中心とする角 θ の回転により $(x_2,\ y_2)$ を $(x',\ y')$ にうつす。

各変換を行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と表し，それらを合成して，

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す。行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を求めなさい。

（津田塾大）

答　$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

（A，C は自分でやってみること）

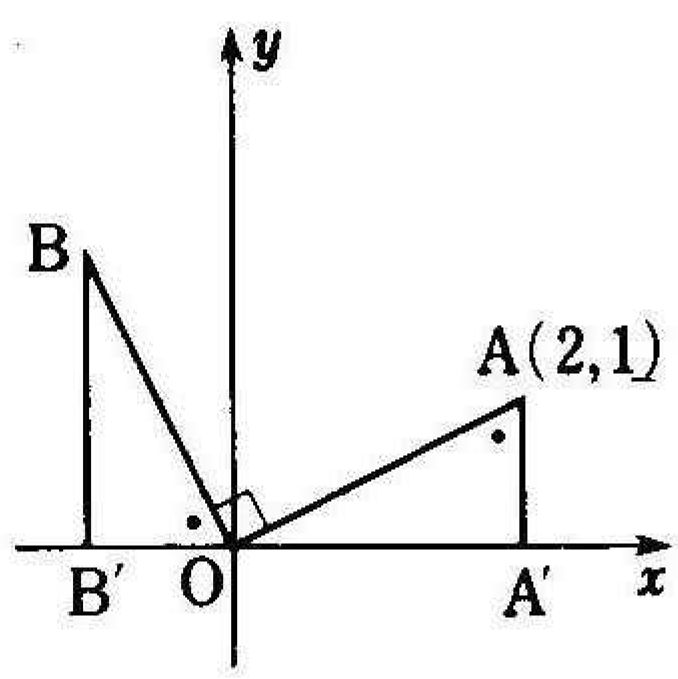
⑪ 回転移動の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ある点のまわりに，ほかの図形を回転して得られる図形を求めるのが問題なのですが，ハテ，どうなるのだろうか。

◆ さっそくながら，具体的な問題からはじめようではありませんか。

練習 1. 座標平面上で，点A(2, 1)を原点を中心として，反時計まわりに 90° 回転して得る点Bの座標を求めよ。



ヒント　A，B から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ A′，B′ としますと，△OAA′ と △BOB′ において

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OA}=\overline{BO}\\ \angle OA'A=\angle BB'O\\ \angle OAA'=\angle BOB'\end{array}\right\}$$

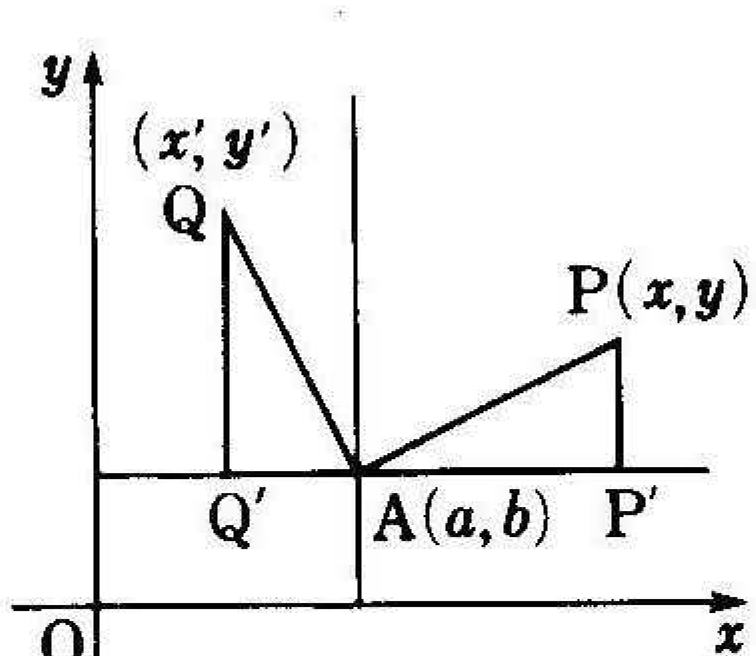
$\therefore$ △OAA′≡△BOB′

$\therefore$ $\overline{OA'}=\overline{BB'}$，$\overline{A'A}=\overline{OB'}$

このことから，点Bの座標は $(-1,\ 2)$ であることがわかります。

練習 2. 座標平面上で点 $A(a,\ b)$ のまわりに点 $P(x,\ y)$ を正の向きに（反時計まわりに）90° 回転した点の座標を求めよ。

解　図のようにAを通り x 軸に平行な直線にP，Qから下した垂線の足をそれぞれ P′，Q′ とする。またQの座標を $(x',\ y')$ とすると，



△AP′P≡△QQ′A　より

AP′＝Q′Q，P′P＝Q′A

$\therefore$　$x-a=y'-b$，$y-b=a-x'$

$$\therefore\quad\left\{\begin{array}{l}x'=-y+(a+b)\\ y'=x-(a-b)\end{array}\right.$$

答　$(-y+(a+b),\ x-(a-b))$

練習 3. 点 $A(x,\ y)$ を原点のまわりに 90° 回転した点は $B(-1,\ 2)$ であった。x，y を求めよ。

ヒント　90° 回転とだけあって，どの方向へとも書いてないのは，+90°，つまり反時計まわりのことと解釈すべきです。してみると，本問は，$B(-1,\ 2)$ を負の方向に 90° 回転した点がAということです。さあ，この続きはやってみてください。

答　(2, 1)

*　*　*

◆ 1点 $(a,\ b)$ のまわりに点 $(x,\ y)$ を反時計まわりに 90° 回転することを f で表しますと，

$f:(x,\ y)\longrightarrow(-y+(a+b),\ x-(a-b))$

と書けます。

このfを2度続けて行うことを $f\circ f$ とか f^2 と表しますが，それは

$f\circ f:(x,\ y)\longrightarrow(-x+2a,\ -y+2b)$

となります。なぜなら，$-y+(a+b)$ において y に $x-(a-b)$ を代入すると

$-\{x-(a-b)\}+(a+b)=-x+2a$

となるからです。y 座標についても同じことですから，やってみませんか。

$f\circ f$ つまり f^2 に，もう1度 90° 回転することを，$f\circ f\circ f$ あるいは f^3 と書くことにしますと

$f^3:(x, y)\longrightarrow(y+(a-b), -x+(a+b))$

同様に

$$f^4 : (x,\ y) \longrightarrow (x,\ y)$$

なる関係があります。

f^4 は，90° ずつ4回回転すると元の点にもどってくることを示し，当然のことです。

では，次をやってみませんか。

7/8

練習 4. x 軸および，直線 $y=x$ に関する対称移動をそれぞれ f，g とする。このとき，合成写像 $h=g\circ f$ は，原点Oのまわりの 90° 回転であることを示せ。

ヒント　$f : (x,\ y) \longrightarrow (x,\ -y)$

$g : (x,\ y) \longrightarrow (y,\ x)$

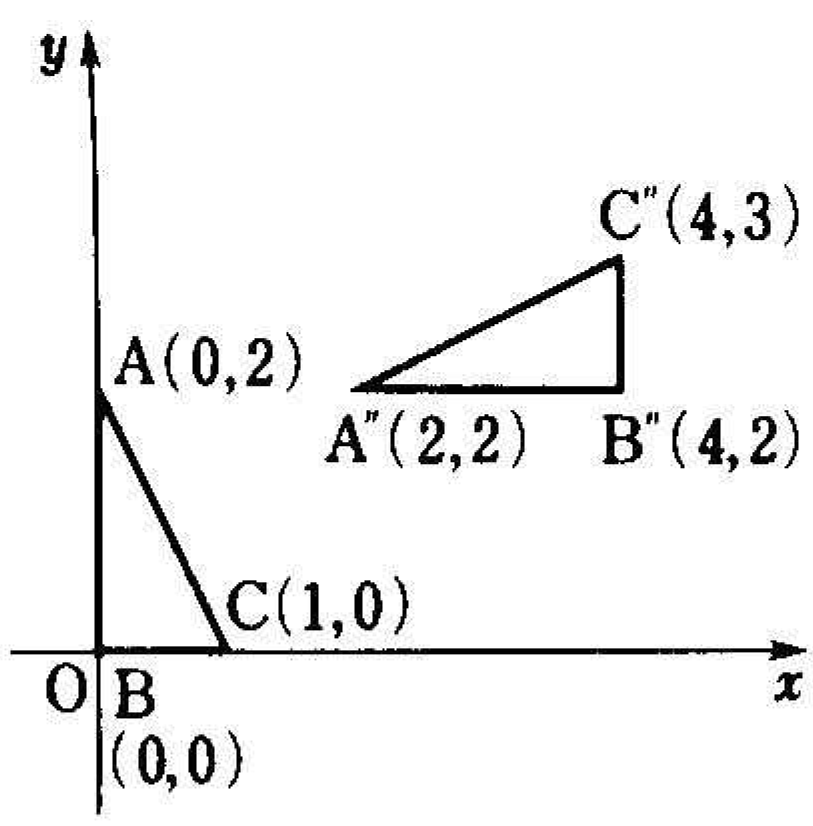
$\therefore\ \ g\circ f : (x,\ y) \longrightarrow (-y,\ x)$

となります。ところが，原点のまわりの 90° 回転は $(-y,\ x)$ ですから，確かに証明されました。

*　　*　　*

◆ では，少しめんどうな問題に当たってみましょう。それはこれです。

練習 5. 図形の移動のうち，平行移動と回転移動とは対称移動（線対称による移動）でおきかえることができるという。下の図で，$\triangle$ABC は平行移動と回転移動とで，$\triangle$A″B″C″ に移ったものとしよう。いま，これを2回の対称移動で移すことを考え，第1回目に対称移動をするとき，Bの対称点はB″ とし，その軸を g_1，移動した三角形を $\triangle$A′B″C′ とし，第2回目に対称移動をするときの軸を g_2 としよう。



(1) g_1，g_2，$\triangle$A′B″C′ をできるだけ正確に，上の図の中にかきこめ。

(2) g_1，g_2 の方程式を求めよ。

（大阪教育大）

ヒント　$\triangle$ABC を平行移動と回転で $\triangle$A″B″C″ に重ねるにはどうすればいいか，おわかりですか？

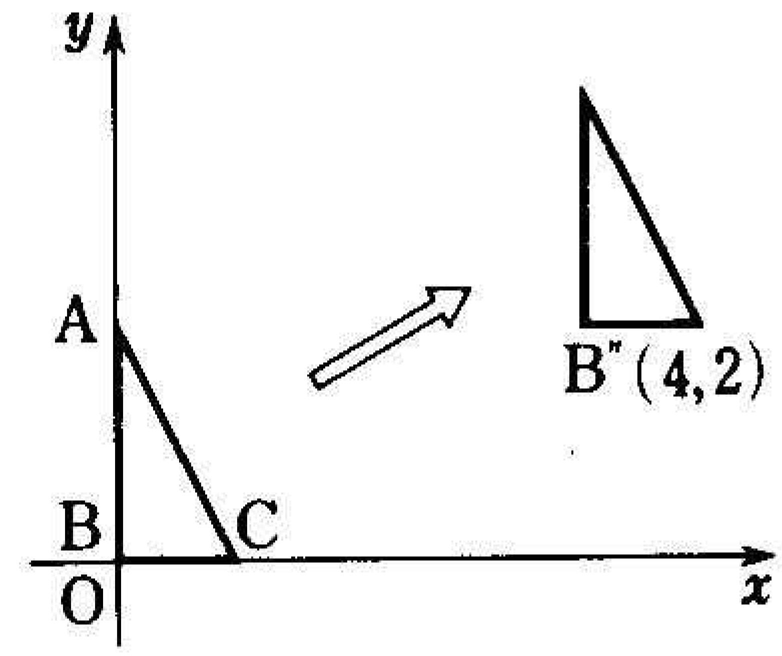
右の図のように，平行移動

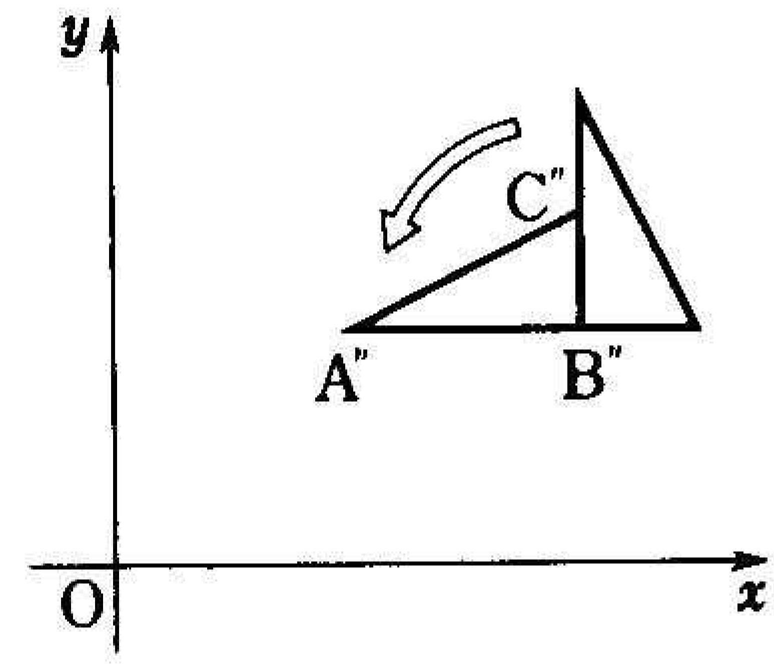
$(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y+2)$

を行い，次に，点 B″ のまわりに＋90° の回転

$(x,\ y) \longrightarrow (-y+6,\ x-2)$

を行えばいいのです。





合成すれば

$$(x,\ y) \longrightarrow (-y+4,\ x+2)$$

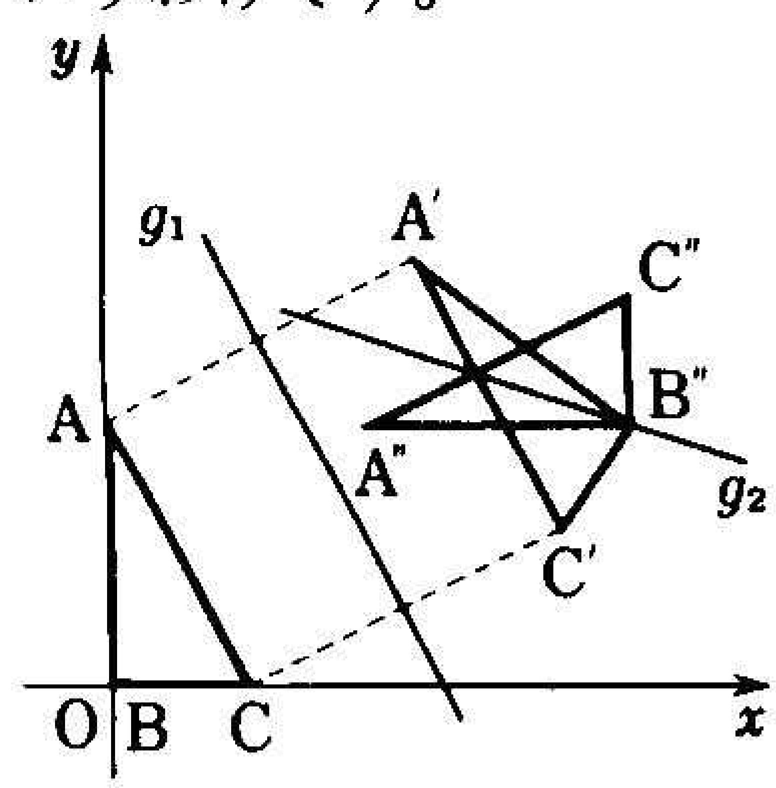
となります。

ところで，われわれの問題はこれを2回の対称移動でやれというわけです。

g_1 は BB″ の垂直2等分線ですから，すぐ求められますね。それは

$$y=-2x+5$$

です。



C′ は g_1 に関するCの対称点で

$$\left(\frac{17}{5},\ \frac{6}{5}\right)$$

となります。そして，g_2 は C′C″ の垂直2等分線ですから，結果は

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

となります。

$$\boxed{答}\ \begin{cases} g_1 : y=-2x+5 \\ g_2 : y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

途中の計算は省略しましたが，余裕があったらキチンと計算してくださいよ。

(原点のまわりの) 回転変換

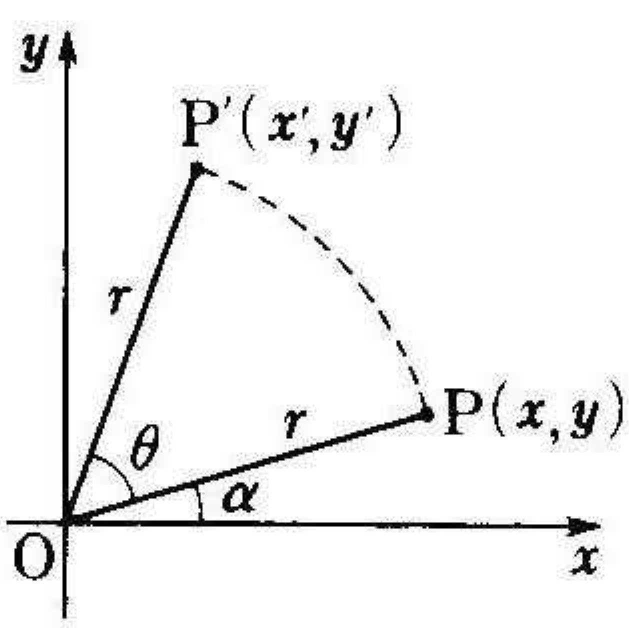
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈回転変換の性質は結晶の研究にも原子物理学の研究にも大きな役割を演じたものでした。これは遊びじゃありませんよ。

◆ 原点のまわりに点 $(x,\ y)$ を θ だけ回転する変換は **1次変換** です。いいかえると，**行列で表すことができる** のです。ともかく，それからはじめるとしましょう。

8/21

■練習 1. 原点のまわりに θ だけ回転する変換を表す行列を求めよ。　　　（鳥取大）



（ヒント） 点Pを原点のまわりに θ だけ（チョット待ッタ，θ がプラスなら反時計まわり，マイナスなら時計まわり，そういう約束なんですよ）回転して得られる点を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ としましょう。$x,\ y$ と $x',\ y'$ の間にどんな関係があるか，これが問題です。

$\angle \mathrm{PO}x=\alpha$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OP}'=r$ とおきますと，

$$\begin{aligned} x' &= \mathrm{OP}'\cos\angle \mathrm{P}'\mathrm{O}x = r\cos(\theta+\alpha) \\ &= r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha) \\ &= \cos\theta(r\cos\alpha)-\sin\theta(r\sin\alpha) \\ &= \cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y \end{aligned}$$

$$\therefore\quad x'=(\cos\theta)x-(\sin\theta)y$$

まったく同じように，

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\theta+\alpha) \\ &= r(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad y'=(\sin\theta)x+(\cos\theta)y$$

つまり

$$(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=x'$$
$$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=y'$$

これを行列で表せば

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

ということになります。

さては，求める行列は

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{-\sin\theta}\\ \boldsymbol{\sin\theta} & \boldsymbol{\cos\theta}\end{pmatrix}$$

ということになりましょう。

＊　＊　＊

◆ 次は，ちょっと立場を変えて：——

■練習 2. 原点のまわりに θ だけ回転する 1 次変換を表す行列が

8/

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

であることを使って，正弦関数および余弦関数の加法定理を導け。

（解） 原点のまわりに α だけ回転し，ついで β だけ回転することは，原点のまわりに $\alpha+\beta$ だけ回転することに等しいから

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

左辺を計算して右辺と比べると

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

が得られる。これが求めるものである。

（注） もちろん：

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}$$
$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

と形を整えておくのがよいし，さらに，細かいことではあるが，β の代わりに $-\beta$ を入れて $\cos(\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ の公式を導いておくのがよいでしょう。あるいは，マトモに，原点のまわりに α だけ回転し，次に β だけ時計まわりに回転した，といってもいいわけだ。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや応用的な問題や総合的な問題をやってみましょう。

練習 3. 原点を中心とする 45° の回転によって，点 (3, 1) はどのような点に移るか。　　　　(日本大)

(解)　$\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

答　$(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

練習 4. 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$ の表す1次変換をそれぞれ S, T とする。点 (1, 1) をまず S で移し，さらに T で移すとき，点 (1, 1) が点 (2, 0) に移るように，θ および k を定めよ。　　　　(東海大)

(解)　$TS=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ -k\sin\theta & -k\cos\theta \end{pmatrix}$

であるから

$$TS\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k(\cos\theta-\sin\theta) \\ -k(\sin\theta+\cos\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad k(\cos\theta-\sin\theta)=2$　　……①

$-k(\sin\theta+\cos\theta)=0$　　……②

①²+②² を作ると

$2k^2=4 \qquad \therefore\quad k=\pm\sqrt{2}$

$k=\sqrt{2}$ のとき，①，②は

$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}$　　……③

$\sin\theta+\cos\theta=0$　　……④

(④−③)÷2 より

$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これは $0 \leqq \theta \leqq \pi$ という仮定に反するから適さない。

次に，$k=-\sqrt{2}$ のとき，①，②は

$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{2}$　　……⑤

$\sin\theta+\cos\theta=0$　　……⑥

より

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

答　$k=-\sqrt{2}$，$\theta=\frac{3\pi}{4}$

練習 5. xy 平面上において，任意の点を原点のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ正の向きに回転し，次に x 軸方向に 4，y 軸方向に $-\sqrt{3}$ だけ平行移動する変換 F は，点Pのまわりのある回転と一致する。点 P の座標を求めよ。　　　　(東大)

(ヒント)　まず答を求めてみよう。任意の点というのであるが，原点を採用すると，

$\mathrm{O}(0,\ 0) \longrightarrow (0,\ 0) \longrightarrow (4,\ 0)$

$\longrightarrow \mathrm{A}(4,\ -\sqrt{3})$

もう1つ，点 (2, 0) をとると

$\mathrm{B}(2,\ 0) \longrightarrow (1,\ \sqrt{3}) \longrightarrow (5,\ \sqrt{3})$

$\longrightarrow \mathrm{C}(5,\ 0)$

したがって，問題がマチガイでないなら，点Pは OA と BC の垂直2等分線の交点であるハズ。さて OA の垂直2等分線は

$8x-2\sqrt{3}\,y=19$　　……①

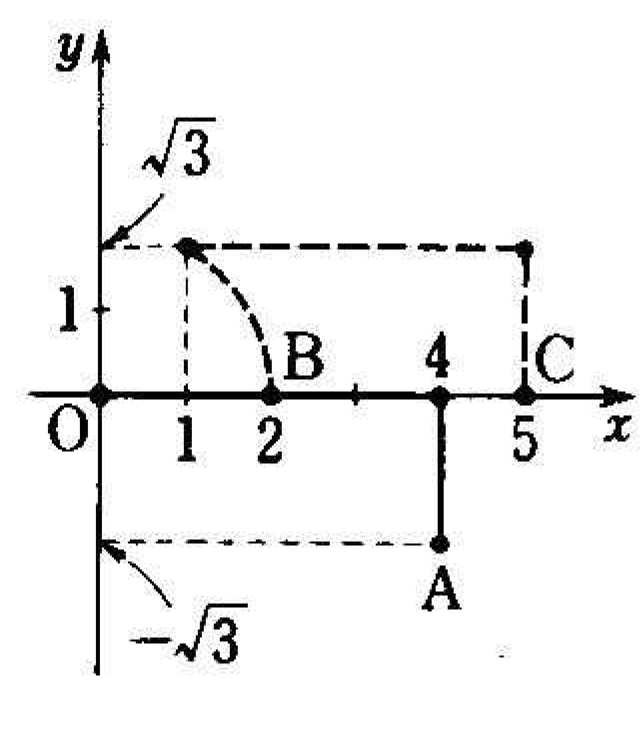
BC の垂直2等分線は

$x=\frac{7}{2}$　　……②

①，②を解いて，$\mathrm{P}\left(\frac{7}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ となるであろう。

この結果の正しいことは実際に任意の点で調べてみればすぐわかるのです。

(注)　しかし，これらの変換は原点のまわりの回転を除いて1次変換ではありません。



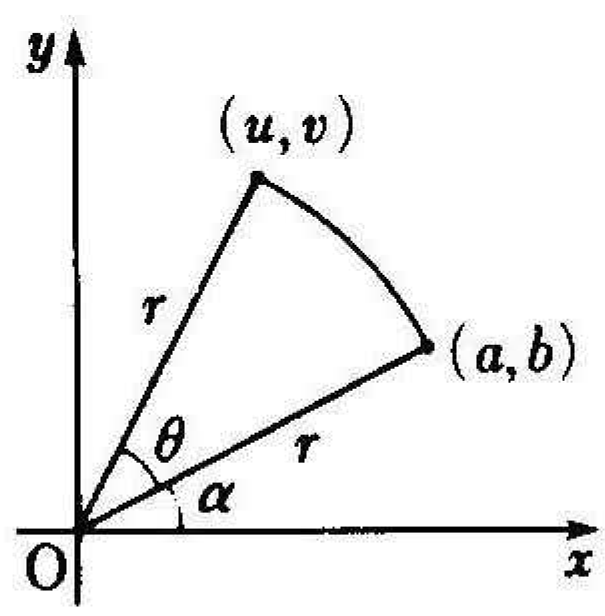
○ベクトルの回転

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルであろうが，点であろうが，回転に変わりはありません。このセクションを敬遠すべからず。

◆ ベクトル $(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転したらどうなるか？　これが中心です。ともあれ，次をやってみませんか。

練習 1. 点 $(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転して得られる点の座標を求めよ。



ヒント 求める点を $(u,\ v)$ としますと，右の図において，

$$a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
u&=r\cos(\theta+\alpha)\\
&=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\\
&=(r\cos\alpha)\cos\theta-(r\sin\alpha)\sin\theta\\
&=a\cos\theta-b\sin\theta\\
v&=r\sin(\theta+\alpha)\\
&=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\
&=(r\cos\alpha)\sin\theta+(r\sin\alpha)\cos\theta\\
&=a\sin\theta+b\cos\theta
\end{aligned}$$

よって，求める点は

$$(a\cos\theta-b\sin\theta,\ a\sin\theta+b\cos\theta)$$

ということになります。

注 上の変換式をもう一度書いてみますと

$$u=a\cos\theta-b\sin\theta$$
$$v=a\sin\theta+b\cos\theta$$

これを行列を使って表すと，次のようになります。

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

ここにできた行列

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

が **1次変換の回転の行列** です。

練習 2. 直線 $y=x-1$ を原点のまわりに $45°$ 回転して得る直線の方程式を求めよ。

ヒント 原点のまわりに $45°$ 回転する変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 45° & -\sin 45°\\ \sin 45° & \cos 45°\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

なんですから，変換式は

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(*)$$

これから

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

これを $x,\ y$ について解いて $y=x-1$ に代入すればよいが，それよりは $(*)$ の両辺に左側から逆行列を掛けて

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\\
&=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

から　$x=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$　が得られ，

これを $y=x-1$ に代入すると

$$\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}-1$$

つまり

$$2x'-\sqrt{2}=0$$

$$\therefore\quad x'=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

答 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

*　*　*

◆ では，やや，総合的な練習をしてみませんか。

練習 3. 1 次変換を表す 2 つの行列を

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & k\end{pmatrix}$$

とするとき，点 $(1,\ 1)$ を A で変換し，さらに B で変換したとき，点 $(1,\ 1)$ が点 $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ に移るように，θ と k の値を決定せよ。　（近畿大）

ヒント　$BA=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta\end{pmatrix}$$

ですから，

$$BA\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta-\sin\theta \\ k\sin\theta+k\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \cos\theta-\sin\theta=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$k\sin\theta+k\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots②$$

①より　$\tan\theta=1\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

これを②に代入しますと

$$k\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+k\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$k=\dfrac{1}{2}$

練習 4. 方程式 $(x\quad y)\begin{pmatrix}1 & h \\ h & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=(1)$ （ただし，$h>0$）が与えられているとき，1 次変換 $\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix}$ によって X，Y の間の関係になおすとき，X，Y の係数が 0 になったとする。θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$.　（長崎大）

ヒント　チョット文面がとりにくいでしょう。まず，方程式

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}1 & h \\ h & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=(1)$$

が与えられている，というのですね。これを具体化にしてみましょう。

$$\text{左辺}=(x+hy\quad hx+y)\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

$$=(x+hy)x+(hx+y)y$$

$$=x^2+2hxy+y^2$$

ナルホド!!　要するに

$$x^2+2hxy+y^2=1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

だということなんです。これを変換式

$$\begin{cases}x=(\cos\theta)X-(\sin\theta)Y \\ y=(\sin\theta)X+(\cos\theta)Y\end{cases}\qquad\cdots\cdots(**)$$

で，X，Y になおす，のだった，のだ。

$(*)$ に $(**)$ を代入して XY の係数をとり出してみますと

$$2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

ですから，

$$2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0\quad(h>0)$$

$$\therefore\quad \tan^2\theta=1$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ですから

$$\tan\theta=1$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

では，もう 1 つ：——

練習 5. $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする。

$$\text{行列}\ A_n=\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\pi & -\sin\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\pi \\ \sin\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\pi & \cos\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\pi\end{pmatrix}$$

の定める平面の 1 次変換を f_n とし，f_n による点 P_{n-1} の像が点 P_n であるとする。ただし，$P_0(1,\ 0)$ とする。P_1，P_2，P_3，$\cdots\cdots$ のうちで何個の点が第 2 象限にあるか。ただし，座標軸上の点はどの象限にも属さないとする。　（東京理大）

答　3 個

座標軸の回転

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆図形を回転するのと，座標軸を回転するのとでは，ちょっとちがう。ちょっとだからこそ，混乱が起こるのだ。

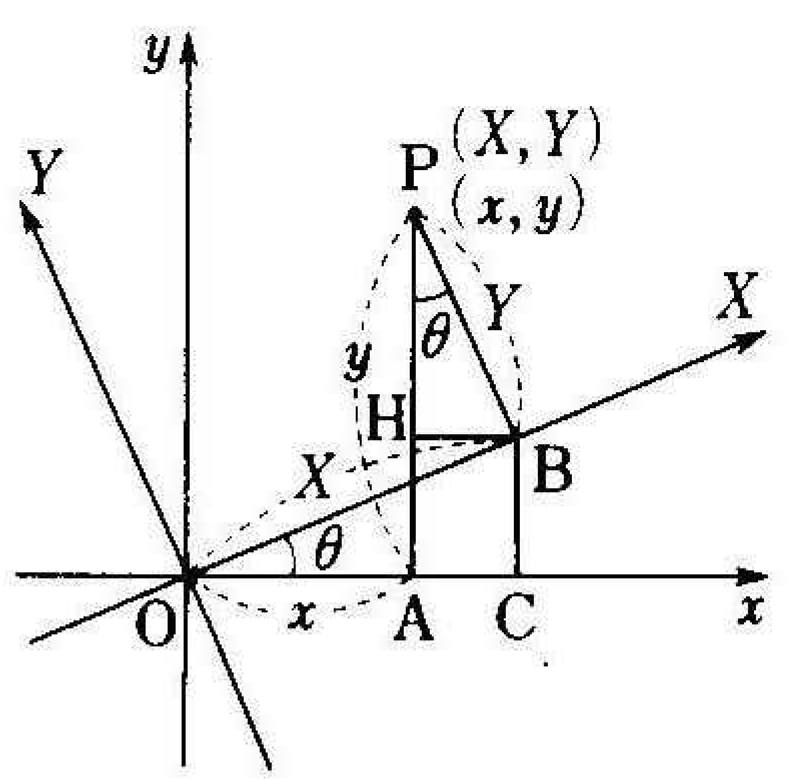
◆ 座標軸を原点のまわりに変換することによって，複雑な方程式を簡単化することができます。いや，できる，といってはいいすぎですが，高校で扱うものの大部分はそうなんです。それを扱うのがここの目的です。

では，まず，変換公式から：——

＊　＊　＊

練習1. x-y 座標軸を原点のまわりに θ だけ回転して得られる座標軸を X, Y として，x, y と X, Y の関係を求めよ。

ヒント 右の図において



$x=\mathrm{OA}$
$=\mathrm{OC}-\mathrm{AC}$
$=X\cos\theta-\mathrm{HB}$
$=X\cos\theta-Y\sin\theta$
$y=\mathrm{AP}$
$=\mathrm{AH}+\mathrm{HP}$
$=\mathrm{CB}+Y\cos\theta$
$=X\sin\theta+Y\cos\theta$

つまり

$$\boldsymbol{x=X\cos\theta-Y\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{y=X\sin\theta+Y\cos\theta}$$

これが求める変換式です。行列を使って表すなら

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

となります。つまり，**これは1次変換**です。

練習2. 方程式 $x^2-xy+y^2=3$ の表す曲線のグラフをかけ。　（東大）

ヒント yについて整理しますと

$$y^2-xy+(x^2-3)=0$$

2次方程式の解の公式を使ってyについて解きますと，

$$y=\frac{x\pm\sqrt{12-3x^2}}{2}$$

そこで

$$y_1=\frac{x}{2},\quad y_2=\pm\frac{\sqrt{12-3x^2}}{2}$$

のグラフを別々にかいて合成してグラフが得られます。しかし，これで正確なグラフがかける人ははなはだ少ないものです。

そのてん，座標変換は的確です。xとyを交換して変わらないから $y=x$ に関して対称，さては 45° 回転してみたらいいだろう。かくして，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

が得られます。これから変換式は

$$\boldsymbol{x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}}$$

もとの方程式を

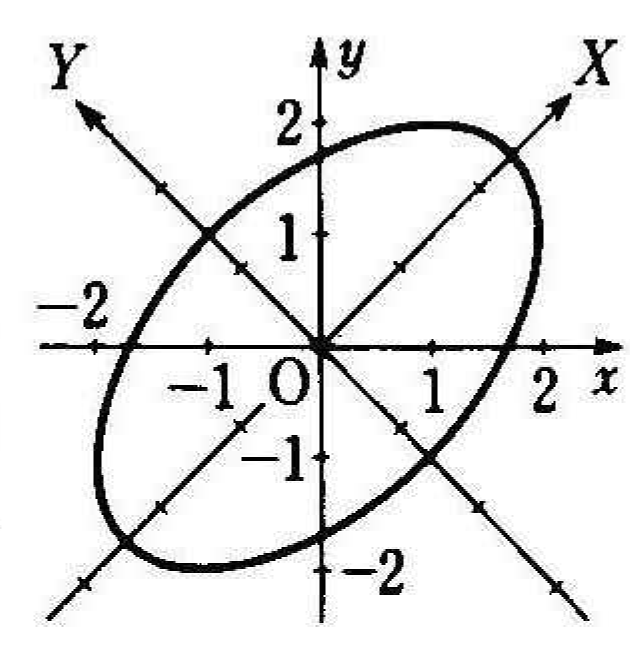
$$(x-y)^2+xy=3$$

と変形して，変換式を代入しますと

$$(-\sqrt{2}\,Y)^2+\frac{X^2-Y^2}{2}=3$$

$$\therefore\quad X^2+3Y^2=6$$

これからわかるようにグラフはだ円で，下のようになります。



なお，グラフはあくまでももとの座標軸についてかかなければなりません。特に注意してください。

＊　＊　＊

◆ 次には，やや総合的な練習をやってみましょう。

練習 3. x，y の2次関数
$$f(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2$$
が $(x,\ y)$ から $(X,\ Y)$ への変換
$$x=X\cos t-Y\sin t$$
$$y=X\sin t+Y\cos t \quad (t\text{ は定数})$$
によって X，Y の2次関数
$$F(X,\ Y)=AX^2+2HXY+BY^2$$
になるとき
(1) $A+B=a+b$
(2) $AB-H^2=ab-h^2$
が成り立つことを証明せよ。（京都府医大）

解 $f(x,\ y)=a(X\cos t-Y\sin t)^2$
$+2h(X\cos t-Y\sin t)(X\sin t+Y\cos t)$
$+b(X\sin t+Y\cos t)^2$

この式を展開し，X^2，$2XY$，Y^2 の係数を求めると
$$A=a\cos^2t+2h\sin t\cos t+b\sin^2t \quad \cdots\cdots ①$$
$$H=(b-a)\sin t\cos t+h(\cos^2t-\sin^2t) \quad \cdots\cdots ②$$
$$B=a\sin^2t-2h\sin t\cos t+b\cos^2t \quad \cdots\cdots ③$$
となる。さて：

(1) ①+③ を作ると
$$A+B=a(\cos^2t+\sin^2t)+b(\sin^2t+\cos^2t)=a+b$$

(2) ①，②，③から
$AB-H^2=\{a\cos^2t+2h\sin t\cos t+b\sin^2t\}$
$\times\{a\sin^2t-2h\sin t\cos t+b\cos^2t\}$
$-\{(b-a)\sin t\cos t+h(\cos^2t-\sin^2t)\}^2$
$=(a^2-4h^2+b^2)\sin^2t\cos^2t$
$+ab(\cos^4t+\sin^4t)$
$+2h\{a(\sin^2t-\cos^2t)\}+b(\cos^2t-\sin^2t)\}$
$\times\sin t\cos t$
$-(b-a)^2\sin^2t\cos^2t-h^2(\cos^2t-\sin^2t)^2$
$-2h(b-a)(\cos^2t-\sin^2t)\sin t\cos t$
$=ab(\cos^4t+\sin^4t+2\sin^2t\cos^2t)$
$-h^2\{4\sin^2t\cos^2t+(\cos^2t-\sin^2t)^2\}$
$=ab-h^2$

（ヤレヤレ，イヤな計算だったなあ!!）

練習 4. 直交座標軸を原点のまわりに角 θ だけ回転して，点 P_1 の座標 $(x_1,\ y_1)$ が $(X_1,\ Y_1)$ に変わり，点 P_2 の座標 $(x_2,\ y_2)$ が $(X_2,\ Y_2)$ に変わるとき，次の関係が成り立つことを証明せよ。
(1) $x_1^2+y_1^2=X_1^2+Y_1^2$
(2) $x_1x_2+y_1y_2=X_1X_2+Y_1Y_2$
（関西学院大）

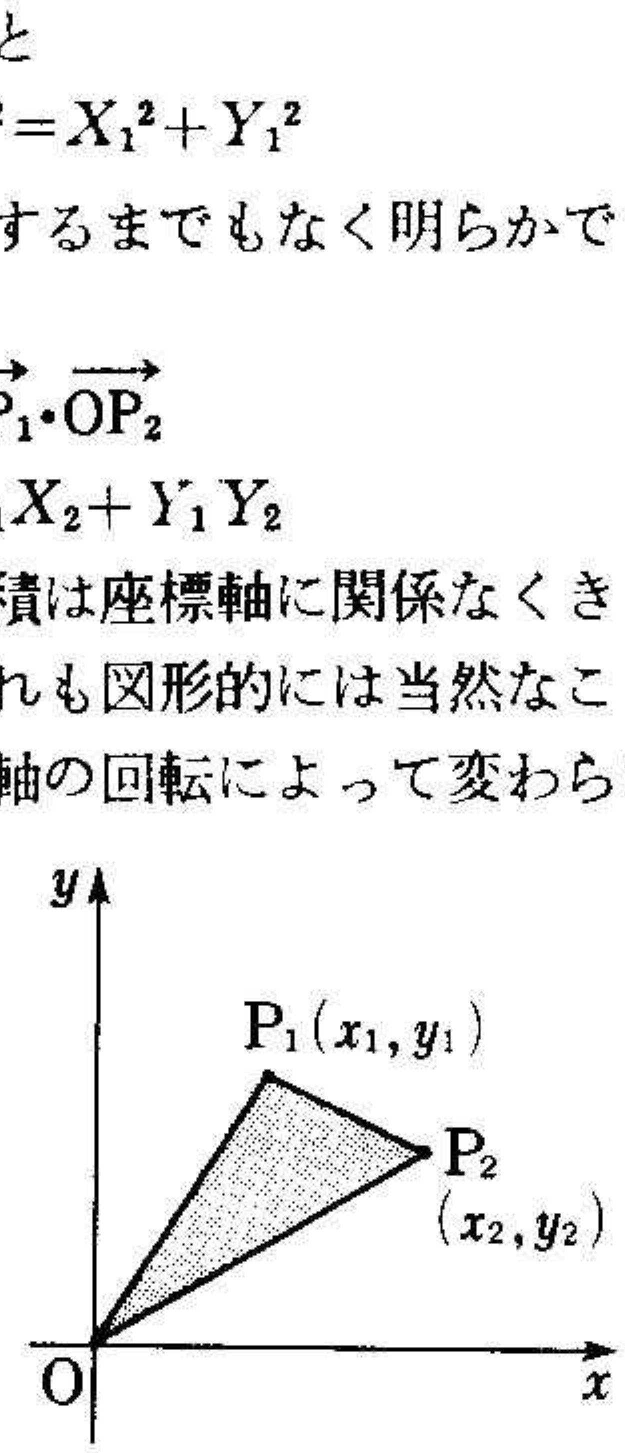
解
$$x_1=X_1\cos\theta-Y_1\sin\theta$$
$$y_1=X_1\sin\theta+Y_1\cos\theta$$
$$x_2=X_2\cos\theta-Y_2\sin\theta$$
$$y_2=X_2\sin\theta+Y_2\cos\theta$$
であるから

(1) $x_1^2+y_1^2$
$=(X_1\cos\theta-Y_1\sin\theta)^2+(X_1\sin\theta+Y_1\cos\theta)^2$
$=X_1^2+Y_1^2$

(2) $x_1x_2+y_1y_2$
$=(X_1\cos\theta-Y_1\sin\theta)(X_2\cos\theta-Y_2\sin\theta)$
$+(X_1\sin\theta+Y_1\cos\theta)(X_2\sin\theta+Y_2\cos\theta)$
$=X_1X_2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+Y_1Y_2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$
$=X_1X_2+Y_1Y_2$

Q. E. D.

注 図形的に考えると
$$x_1^2+y_1^2=\overline{OP_1}^2=X_1^2+Y_1^2$$
であるから，(1)は計算するまでもなく明らかでしょう。また，
$$x_1x_2+y_1y_2=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=X_1X_2+Y_1Y_2$$
つまり，ベクトルの内積は座標軸に関係なくきまる量なんですから，これも図形的には当然なことです。このように座標軸の回転によって変わらないものは，ほかにもあります。$\triangle OP_1P_2$ の面積は
$$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$
ですから，この量もまた不変です。計算でためしてみませんか。



◑ 回転の行列の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆回転の行列をうまく使うと，おもわぬところに絶大な威力を発揮するものです。ではその一部をかいまみることにしよう。

◆ 点 $(x,\ y)$ を原点のまわりに θ だけ回転する1次変換の行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

ですから，これを n 回続けて行うことから

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

がでてきます。そこで，これだ!!

■練習 1. $\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^3$ を計算せよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

$$=2\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad 与式=2^3\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{pmatrix}^3$$

$$=8\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{2} & -\sin\dfrac{\pi}{2}\\ \sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

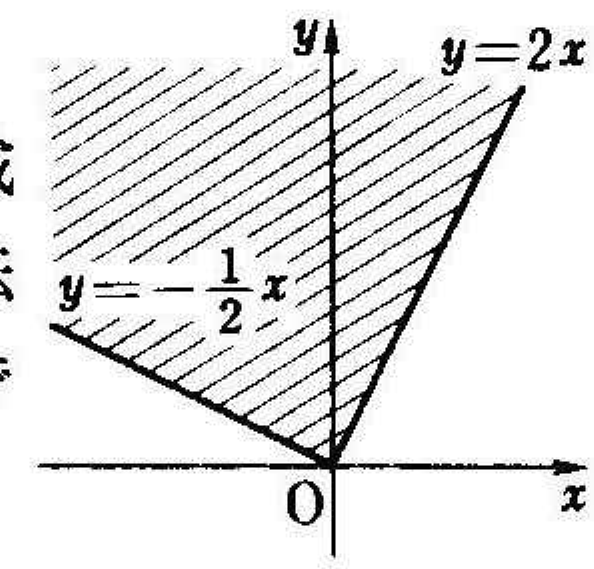
$$=8\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad 答\ \begin{pmatrix}0 & -8\\ 8 & 0\end{pmatrix}$$

■練習 2. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ による1次変換によって $x>0,\ y>0$ となるような範囲はどんな範囲にうつされるか。

ヒント　$A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と書けます。ただし，θ は第1象限の角で $\tan\theta=2$ です。



したがって求める領域は第1象限を θ だけ回転した部分でしょう。図では斜線を引いた部分で，境界線上は含みません。

■練習 3. $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$ を計算せよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$

$$=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}^n$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(-n\theta) & -\sin(-n\theta)\\ \sin(-n\theta) & \cos(-n\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots 答$$

注　実は原点のまわりに座標軸を θ だけ回転したときの変換の行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

なのですから，上の結果はいわば当然のことでした。

*　*　*

◆ 次には，いささか応用的なものをやってみましょうか。

■練習 4. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

となるような最小の自然数 n および正の定数 k の値を求めよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ を書きかえて

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

とすることができます。

$$\therefore\quad \sqrt{2}^{\,n}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{n\pi}{4} & -\sin\dfrac{n\pi}{4}\\ \sin\dfrac{n\pi}{4} & \cos\dfrac{n\pi}{4}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

したがって $\sin\dfrac{n\pi}{4}=0,\ \cos\dfrac{n\pi}{4}=1$ を満足する最小の自然数 n は 8 です。そして

$$\sqrt{2}^{\,8}=k,\qquad \therefore\quad k=16$$

答　$n=8,\ k=16$

いまひとつ：――

練習 5. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とするとき

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) $A^3=E$ となる θ の値を求めよ。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。

（解）(1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(2)
$$A^3=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}^3$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(-3\theta) & -\sin(-3\theta)\\ \sin(-3\theta) & \cos(-3\theta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos 3\theta & \sin 3\theta\\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となるためには

$$\cos 3\theta=1,\ \sin 3\theta=0$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2}{3}\pi\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 6. $\sin 18^\circ$，$\cos 18^\circ$ の値を求めよ。

（ヒント）$\theta=18^\circ$ とおくと

$$5\theta=18^\circ\times 5=90^\circ$$

となります。

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^3$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-2}$$

両辺の 1−1 成分を比較して

$$\cos 3\theta=\sin 2\theta$$

$$\therefore\quad 4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ ですから

$$4\cos^2\theta-3=2\sin\theta$$

$$\therefore\quad 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

練習 7. 1次変換 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ によって，図形の囲む面積は不変であることを示せ。

（解）
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

であるから，この1次変換は，ある図形を x 軸について対称変換し，次に原点のまわりに θ だけ回転する合成変換と同値である。したがって，変換された図形は合同で，面積も等しい。

Q.E.D.

練習 8. 1次変換 $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ によって線分の長さはどのように変るか。ただし，$a^2+b^2\neq 0$ とする。

（ヒント）
$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

ここに　$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

したがって，原点のまわりに回転してから $\sqrt{a^2+b^2}$ 倍する変換を表すわけ。さては，

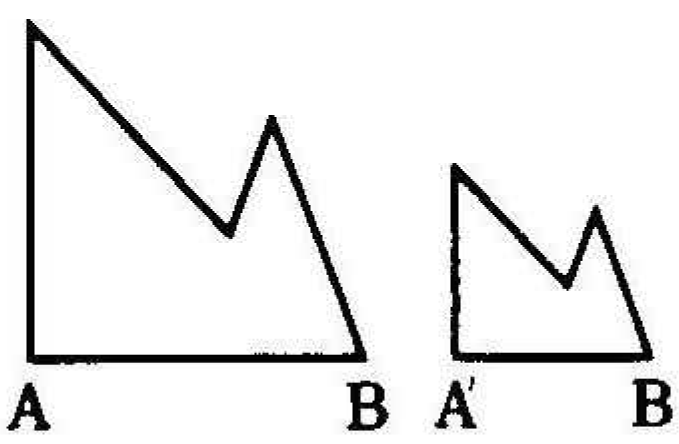
答　$\sqrt{a^2+b^2}$ 倍

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○相似形に関すること

◆2つの図形が相似であることを記号∽で表す。無限大∞や比例∝と紛らわしいね。それにしても変な記号だな。

◆ 2つの相似な図形の対応する長さの比（例えば，右の図形で AB : A′B′）を**相似比** といいます。このとき，

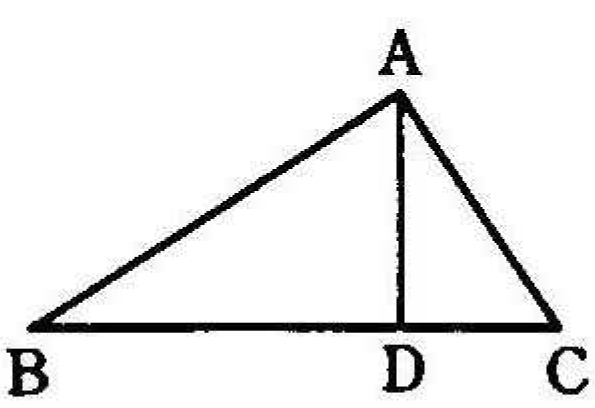


面積は，相似比の2乗に比例
体積は，相似比の3乗に比例

します。では，相似形の関係してくる問題を2，3やってみませんか。

＊　＊　＊

練習 1. $\angle A=90°$ の直角三角形 ABC において，Aから BC に下した垂線の足をDとすると，



$$AB^2=BD\cdot BC$$

であることを示せ。

(解) $\triangle ABD$ と $\triangle CBA$ において

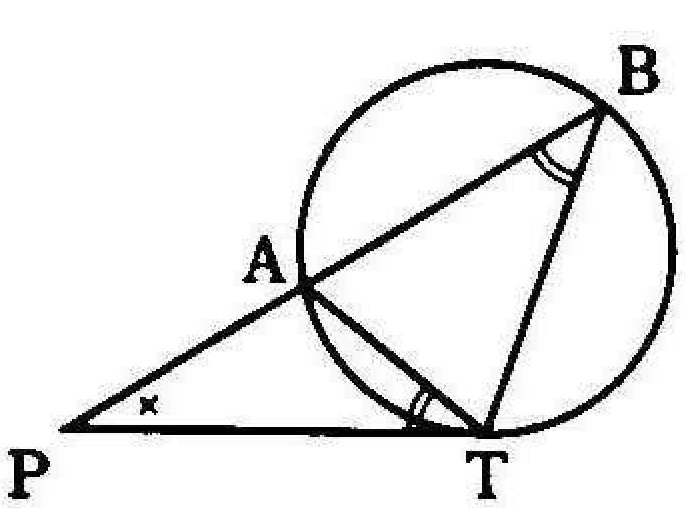
$$\begin{cases}\angle B \text{ は共通}\\ \angle ADB=\angle CAB\end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABD \backsim \triangle CBA$

$\therefore\ \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{CB}{BA}$

$\therefore\ AB^2=BD\cdot BC$　　Q. E. D.

練習 2. 円外の点 P から，接線 PT および割線 PAB を引くと



$$\mathbf{PT^2=PA\cdot PB}$$

であることを示せ。**(方べきの定理)**

(解) $\triangle APT$ と $\triangle TPB$ において

$$\begin{cases}\angle P \text{ は共通}\\ \angle ATP=\angle TBP\end{cases}$$

$\therefore\ \triangle APT \backsim \triangle TPB$

$\therefore\ \dfrac{PT}{PB}=\dfrac{PA}{PT}$

$\therefore\ PT^2=PA\cdot PB$　　Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ 2つの三角形が相似であるのは3つの場合があります。それは

(i) **2角の相似**：$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$（したがって，$\angle C=\angle C'$ でもある）のとき

(ii) **2辺とその夾角の相似**：$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において，$\angle A=\angle A'$，$AB : AC=A'B' : A'C'$ のとき

(iii) **3辺の相似**：$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において $AB : BC : CA=A'B' : B'C' : C'A'$ のとき，です。これをやってみませんか。

練習 3. 平面上の三角形の頂点を P, Q, R とし，その座標をそれぞれ $(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ とする。

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ とし，$\begin{pmatrix}x_i'\\ y_i'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}x_i''\\ y_i''\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_i'\\ y_i'\end{pmatrix}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ により，

$\begin{pmatrix}x_i'\\ y_i'\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_i''\\ y_i''\end{pmatrix}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ を定める。

ここで，$(x_i'',\ y_i'')$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ を座標にもつ点をそれぞれ P''，Q''，R'' とする。このとき，三角形 $P''Q''R''$ の面積 S'' と三角形 PQR の面積 S との比 $\dfrac{S''}{S}$ の値を求めよ。　（東海大）

(ヒント)　3 : 4 は比ですが，比 3 : 4 の値といえば $\frac{3}{4}$ のことをいいます。さて：——

$$\begin{pmatrix} y_i'' \\ x_i'' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}''} = -2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ですから，

$$\triangle \mathrm{P''Q''R''} \backsim \triangle \mathrm{PQR}$$

$$\therefore \quad \frac{S''}{S} = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1} = 4$$　　答　4

*　　*　　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみましょう。

練習 4. 平面上で，ベクトル $\boldsymbol{a}=(a,\ b)$ をベクトル $\boldsymbol{b}=(a-b,\ a+b)$ にうつす変換を $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a}$ とする。次の問に答えよ。

(1)　$\boldsymbol{a}$，$A\boldsymbol{a}$ の長さの比を求めよ。

(2)　$\boldsymbol{a}$ と $A\boldsymbol{a}$ のなす角を求めよ。

(3)　変換Aはどんな変換か。図形的な用語で述べよ。

(4)　変換Aを 2×2 行列で表せ。

（城西歯大）

(解)　(1)　$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

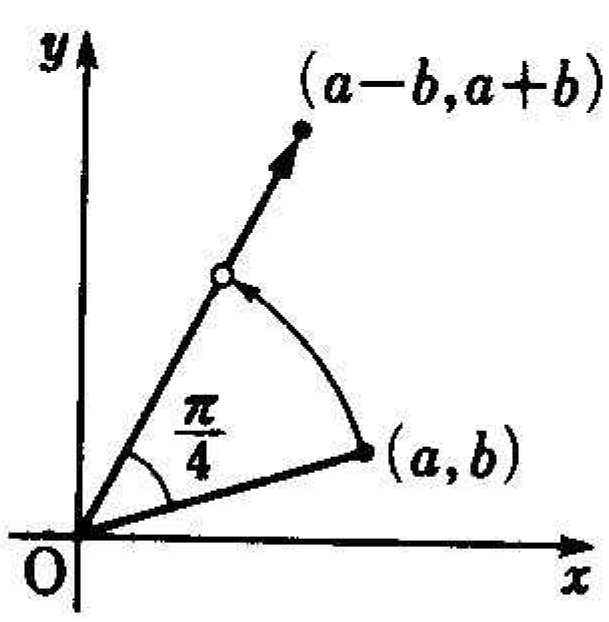
$$\therefore \quad |\boldsymbol{a}| : |A\boldsymbol{a}| = 1 : \sqrt{2}$$

(2)　求める角をθとすると

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a(a-b)+b(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}(a^2+b^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

(3)　上の(1)，(2)からわかるように，ベクトル$\boldsymbol{a}$を原点のまわりに$\frac{\pi}{4}$回転し，さらに$\sqrt{2}$倍に拡大したものである。(合成の順序は逆でも可)



(4)　原点のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転する変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

で，原点を中心に $\sqrt{2}$ 倍に拡大する変換は

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であるから，求める変換Aは

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

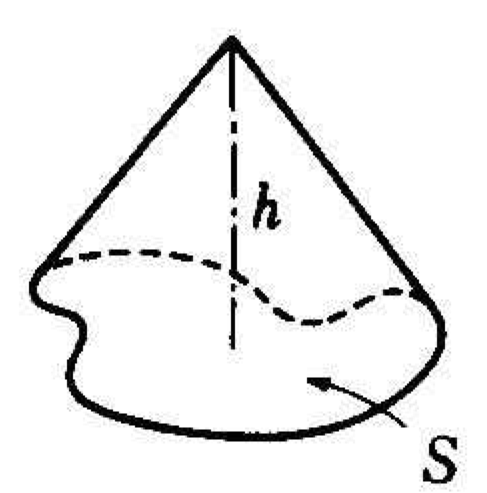
である。

*　　*　　*

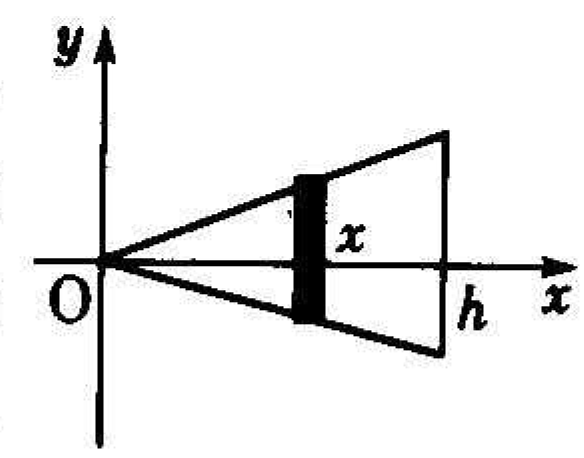
◆ 相似形は体積を求める場合などにも出てきます。例えば，これです。

練習 5. 底面積 S，高さ h のすい体の体積は $\frac{1}{3}hS$ であることを示せ。

(ヒント)　底面積Sというだけですから，形状はわかっていないのです。



このままでもいいが，すい体の頂点を原点に，高さをx軸の正の側にとってみますと，右下のようになりましょう。そしてx座標がxのところの切り口もhのところの切り口（つまり底面）も相似形になるハズ。したがって，その面積の比は相似比の2乗に等しく



$$S_x : S_h = x^2 : h^2$$

$$\therefore \quad S_x = \frac{x^2}{h^2}S_h = \frac{S}{h^2}x^2 \quad (\because \quad S_h = S)$$

ゆえに，求める体積Vは

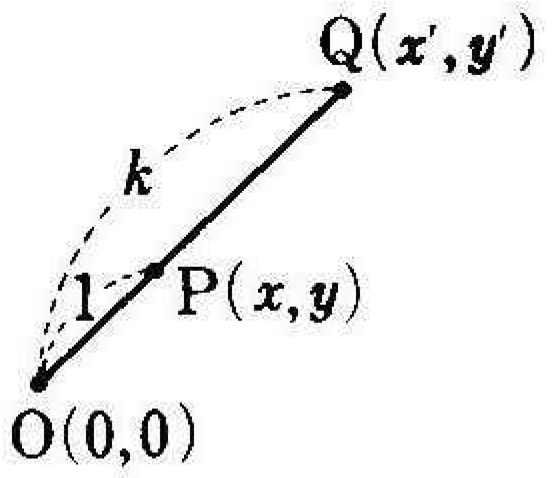
$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}hS$$

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

○(図形の)相似変換の扱い方

◆図形を拡大したり縮小したりすることはよく知っているが，さて，それを数学の問題としてとりあげると，こういうことになる。

◆　1点Oを中心とし，図形を拡大または縮小する問題を考えてみましょう。



いまOを原点にとり，点Oと異なる点 $P(x,\ y)$ をとります。そして，$OQ=kOP$ $(k>0)$ なる点$Q(x',\ y')$ を半直線 OP 上にとりますと，　1/8

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{1}{k}$$

なる関係があります。

かくて，相似変換の行列は次のようです。

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

4/16

練習 1. 変換： $x=kX,\ y=kY$ $(k>0)$ によって円 $x^2+y^2=1$ はどんな図形に移されるか。

ヒント　$x^2+y^2=1$ に $x=kX,\ y=kY$ を代入しますと

$$k^2X^2+k^2Y^2=1$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2=\frac{1}{k^2}$$

ゆえに中心が同じで，半径 $\frac{1}{k}$ の円に拡大（縮小）されることがわかります。

練習 2. 変換： $x=\frac{X}{3},\ y=\frac{Y}{3}$ によって円 $x^2+y^2-2x-4y=0$ はどんな図形に移されるか。

ヒント　$x=\frac{X}{3},\ y=\frac{Y}{3}$ を代入しますと

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{9}-2\cdot\frac{X}{3}-4\cdot\frac{Y}{3}=0$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2-6X-12Y=0$$

ゆえに，この円は，円 $x^2+y^2-6x-12y=0$ に移されます。

注　与えられた円は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

ですから半径は $\sqrt{5}$ ですが，移された円は

$$(x-3)^2+(y-6)^2=45$$

で，この円の半径は $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ です。つまり3倍に拡大されているのです。

練習 3. 放物線 $y=x^2$ を，原点Oを中心として3倍に拡大せよ。

ヒント　変換公式は

$$x=\frac{X}{3},\quad y=\frac{Y}{3}$$

ゆえに拡大された放物線は

$$\frac{Y}{3}=\left(\frac{X}{3}\right)^2\qquad\therefore\quad Y=\frac{1}{3}X^2$$

ゆえに求める方程式は $y=\frac{1}{3}x^2$ です。

注　放物線の方程式はふつう

$$y=ax^2+bx+c$$

で与えられますが，$|a|$ が等しい2つの放物線は重ね合わせることができます。つまり合同です。だから，すべての**放物線は相似**であることがわかります。

練習 4. 点 $(x,\ y)$ が直線 $2x+3y=6$ 上を動くとき，点 $(2x,\ 2y)$ はどんな線上を動くか。

解　$2x=u,\ 2y=v$

とおくと

$$x=\frac{u}{2},\quad y=\frac{v}{2}$$

これを $2x+3y=6$ に代入して

$$2\frac{u}{2}+3\frac{v}{2}=6$$

$$\therefore\quad 2u+3v=12$$

ゆえに求める直線の方程式は

$$2x+3y=12\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

■練習 5. 点 (x, y) が双曲線 $xy=1$ 上を動くとき，点 $(3x, 2y)$ はどんな曲線上を動くか。曲線の方程式を求めよ。

(解) $3x=u,\ 2y=v$

とおくと

$$x=\frac{u}{3},\ y=\frac{v}{2}$$

これを，$xy=1$ に代入して

$$\frac{u}{3}\cdot\frac{v}{2}=1 \qquad \therefore\ uv=6$$

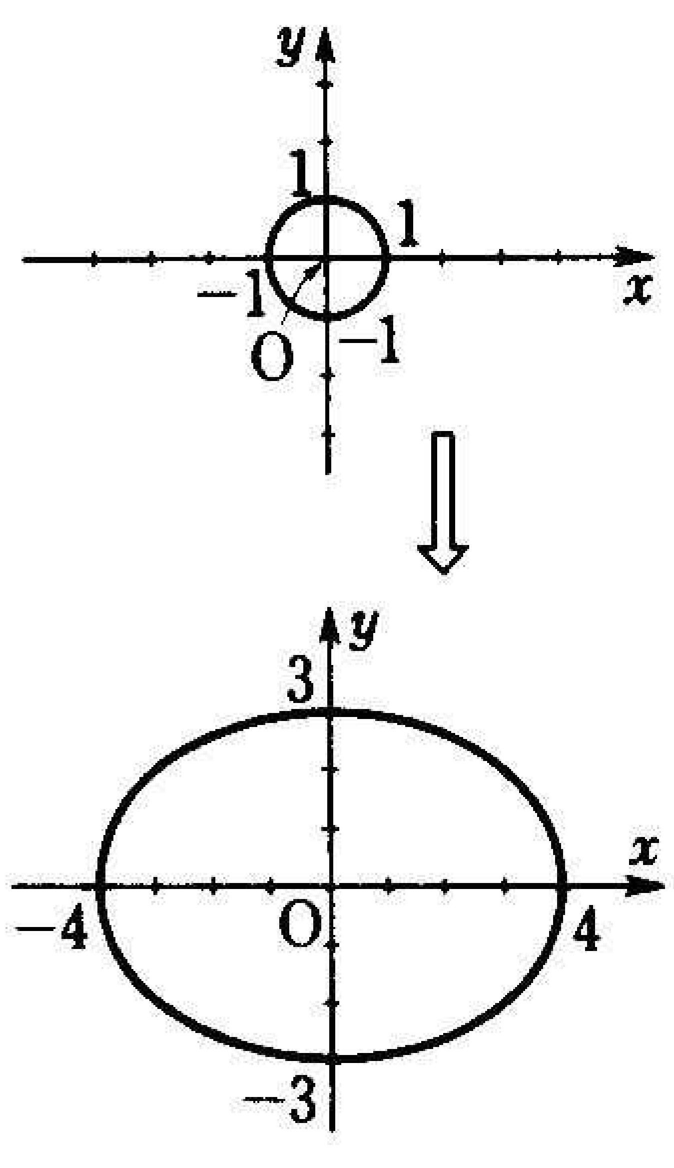
ゆえに求める方程式は $xy=6$ である。

答 $xy=6$

(注) $x=\frac{u}{3},\ y=\frac{v}{2}$ は x 軸方向には3倍に拡大し，y 軸方向には2倍に拡大したことを意味しています。

では，もう1つ。

■練習 6. 点 (x, y) が円 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，点 $(4x, 3y)$ はどんな曲線上を動くか。



(解) $4x=u$

$3y=v$

とおくと

$$x=\frac{u}{4},\ y=\frac{v}{3}$$

これを $x^2+y^2=1$ に代入すると

$$\frac{u^2}{4^2}+\frac{v^2}{3^2}=1$$

ゆえに求めるものは

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

で，これはだ円である。

* * *

◆ ややめんどうな問題をやりましょう。

■練習 7. 放物線 $y=4x^2+24x-8$ を放物線 $y=x^2-2x$ に重ねるにはどのようにすればよいか。

(ヒント) $y=4x^2+24x-8=4(x+3)^2-44$

ですから，頂点は $(-3, -44)$ です。

また，$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$

ですから，頂点は $(1, -1)$ です。

そこで，まず，$y=4x^2+24x-8$ を右へ4だけ，上へ43だけ平行移動すると，頂点と軸が一致します。

さらに，点 $(1, -1)$ を中心として4倍に拡大すると，$y=x^2-2x$ に重なります。

* * *

◆ 最後に，相似な図形について2，3大切な性質をあげておくことにしましょう。

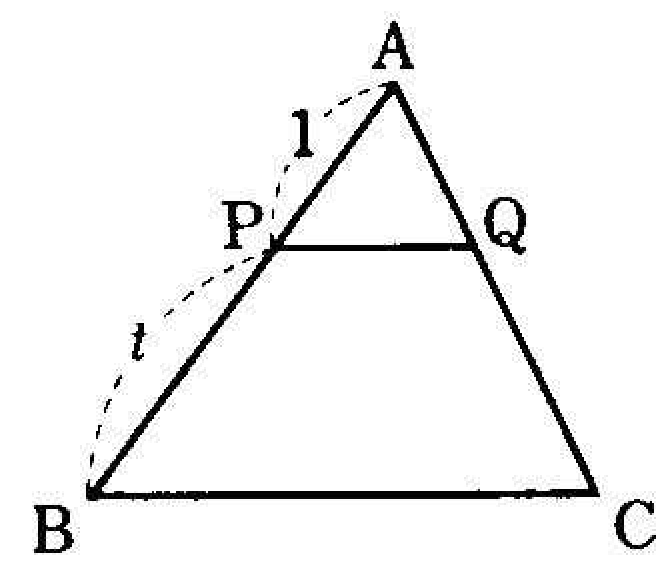
2つの図形が相似な場合に，対応する2点間の比は一定です。これを **相似比** といいます。2つの相似な図形について，

面積は　相似比の2乗に比例

体積は　相似比の3乗に比例

するのです。

■練習 8. $\triangle ABC$ において AB, AC を $1:t$ に内分する点をそれぞれ P, Q とするとき，$\dfrac{\triangle APQ}{\triangle ABC}$ の値を求めよ。



(ヒント) AP : AB

$=1:1+t$

ですから，相似比は

$1:1+t$

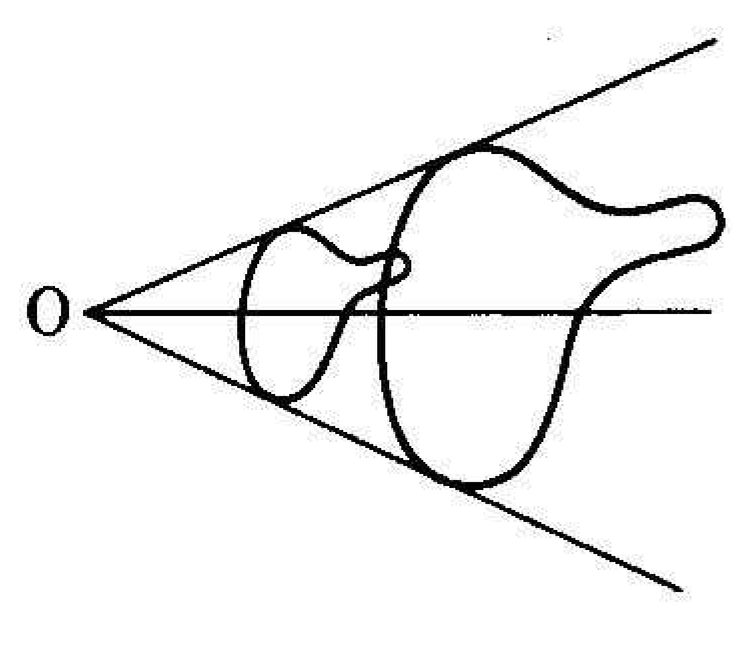
面積比は

$1^2:(1+t)^2$

$=1:(1+t)^2$

答 $\dfrac{\triangle APQ}{\triangle ABC}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$

また，2つの相似な図形の対応する点を結ぶ直線が1点Oを通るときこの2つの図形は相似にして相似の位置にあるといいます。そして，点Oを相似の中心といいます。上の拡大の公式



$$x=\frac{X}{k},\ y=\frac{Y}{k}$$

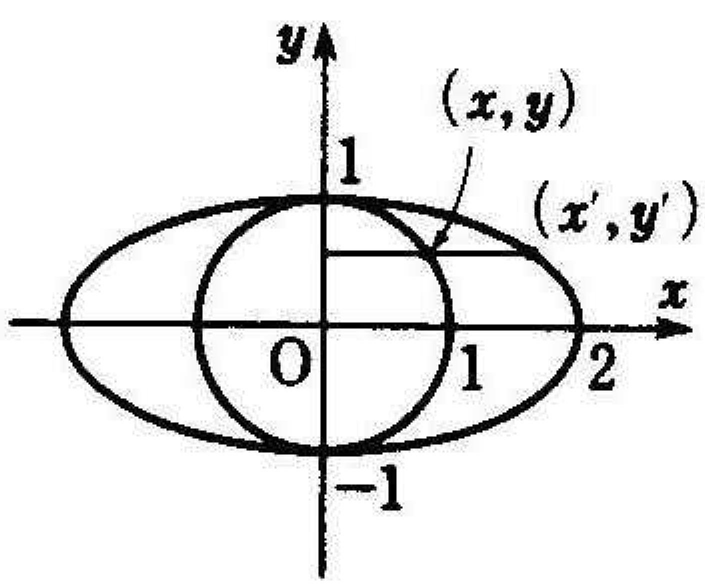
は原点Oを相似の中心にとっていたのです。

◑ 拡大と縮小について

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆正三角形がすべて同じ形であるから相似というのもわかる。円がすべて相似というのもわかる。しかし，放物線になるとどうだ。

◆ 例えば，円 $x^2+y^2=1$ をとってみましょう。その上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の y 座標を変えないで x 座標だけ2倍にした点を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ としますと



$$2x=x',\quad y=y'$$

なる関係がなります。

つまり

$$\left.\begin{aligned}2x+0\cdot y&=x'\\0\cdot x+1\cdot y&=y'\end{aligned}\right\}$$

一般に x 方向に k 倍，y 方向に l 倍しますと，変換公式は

$$\left.\begin{aligned}kx+0\cdot y&=x'\\0\cdot x+\ ly&=y'\end{aligned}\right\}$$

となります。これは1次変換です。（1次変換については（☞ p.130）を参照）

これを行列で表しますと

$$\begin{pmatrix}k&0\\0&l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

となります。$k=l=1$ ならもちろん恒等変換，つまり，変換しないのと同じこと!!

■練習 1. 円 $x^2+y^2=1$ に，変換

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

を施すとどうなるか。

(ヒント)
$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}x',\quad y=y'$$

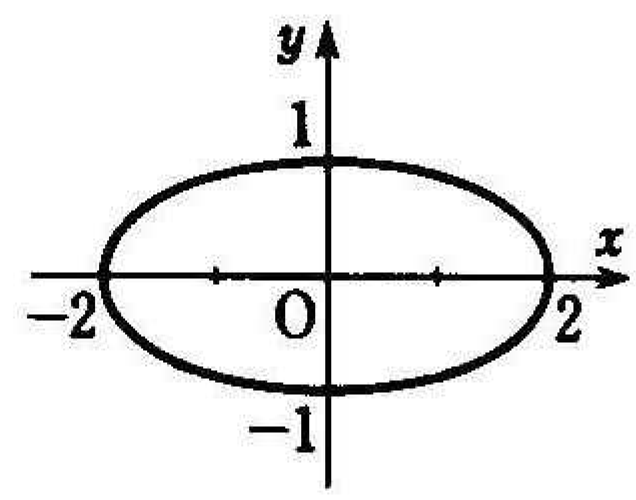
これを $x^2+y^2=1$ に代入すると

$$\frac{x'^2}{2^2}+y'^2=1$$

$x',\ y'$ を $x,\ y$ で書きかえて

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

このグラフは右のようなだ円です。



■練習 2. $y=x^2$ は変換

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$$

によってどんな曲線にうつされるか。

(解)
$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}x',\quad y=\frac{1}{3}y'$$

これを $y=x^2$ に代入して

$$\frac{1}{3}y'=\left(\frac{1}{2}x'\right)^2$$

$$\therefore\quad y'=\frac{3}{4}x'^2$$

$x',\ y'$ を $x,\ y$ で書きかえて

$$y=\frac{3}{4}x^2\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

* * *

◆ では，やや総合的な問題を：——

■練習 3. 平面から同じ平面への1次変換が

$$\begin{cases}x'=2\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}\,y\\y'=2\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}\,y\end{cases}$$

によって与えられるとき，この写像は回転と相似拡大を合成して得られることを示せ。

(ヒント) $\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

ところで

$$\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}=2\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ではまずい。しかし，θ回転の行列が一般に

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

で，特に，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ とおくと

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

であることを思い出すと，

$$2\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

と書けること，したがって

$$\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

と書けて，原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転することと，原点を中心として4倍に相似拡大する変換の合成したものであることがわかります。

では，解答はどう書くか。

(解) $x'=2\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}\,y$

$y'=2\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}\,y$

を行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

と書ける。

ゆえに，この写像は，原点のまわりの $\dfrac{\pi}{4}$ 回転と，原点を中心とする4倍の相似拡大の合成したものである。

練習 4. 原点を中心とする円を，原点を中心とする円にうつすような1次変換の行列の一般形を求めよ。

(ヒント) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

とすると

$$ax+by=x',\ cx+dy=y'$$

いま，円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ が

円 $x'^2+y'^2=r'^2$ $(r'>0)$

にうつされたとすると，

$$\begin{aligned}x'^2+y'^2&=(ax+by)^2+(cx+dy)^2\\ &=(a^2+c^2)x^2+(b^2+d^2)y^2\\ &\quad+2(ab+cd)xy=r'^2\end{aligned}$$

ですから $a^2+c^2=b^2+d^2\neq0$，$ab+cd=0$ が必要で，このとき

$$r^2=\frac{r'^2}{a^2+c^2}$$

となります。したがって，求める条件は

$$a^2+c^2=b^2+d^2\ (\neq0)\quad\cdots\cdots①$$

および　$ab+cd=0$　……②

ですが，もっと形を変えることができます。

つまり，①より $k\neq0$ として

$$a=k\cos\alpha,\ c=k\sin\alpha$$
$$b=k\cos\beta,\ d=k\sin\beta$$

とおくことができ，これを②に代入すると

$$k^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=0$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha-\beta)=0$$

$$\therefore\quad \beta-\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$\therefore\quad b=k\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\mp k\sin\alpha$$

$$d=k\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\pm k\cos\alpha$$

つまり，この変換の行列は

$$k\begin{pmatrix}\cos\alpha & \mp\sin\alpha\\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha\end{pmatrix}\ (\text{複号同順})$$

で，これは回転と拡大の合成したものです。

○等積変換とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆等積の積は，いわゆる乗法における積ではありません。面積のことなんです。つまり面積を変えない変換をいうのです。

◆ 変換によって面積の変わらないのを**等積変換**といいます。応用上重要ですから，いろいろと研究されていますが，高校の範囲では扱えないので，ここでは，ごく限られたものを扱うだけです。

何はともあれ，これをやってみませんか。

練習 1. 変換 $f:(x,\ y)\longrightarrow(x+a,\ y+b)$ によって，三角形 ABC の面積は変わらないことを示せ。ただし，3つの頂点が (a_1, b_1)，$(a_2,\ b_2)$，$(a_3,\ b_3)$ なる三角形の面積は

$$\frac{1}{2}|a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_2b_1-a_3b_2-a_1b_3|$$

であることを使いなさい。

ヒント　$A(x_1,\ y_1)\longrightarrow A'(x_1+a,\ y_1+b)$

$B(x_2,\ y_2)\longrightarrow B'(x_2+a,\ y_2+b)$

$C(x_3,\ y_3)\longrightarrow C'(x_3+a,\ y_3+b)$

としましょう。

$$\begin{aligned}&(x_1+a)(y_2+b)+(x_2+a)(y_3+b)\\&+(x_3+a)(y_1+b)-(x_2+a)(y_1+b)\\&-(x_3+a)(y_2+b)-(x_1+a)(y_3+b)\\=\ &x_1y_2+bx_1+ay_2+ab\\&+x_2y_3+bx_2+ay_3+ab\\&+x_3y_1+bx_3+ay_1+ab\\&-x_2y_1-bx_2-ay_1-ab\\&-x_3y_2-bx_3-ay_2-ab\\&-x_1y_3-bx_1-ay_3-ab\\&=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3\end{aligned}$$

です。もういいでしょう。

注　この変換は平行移動ですから，図形は変換しても合同です。だから，面積はもちろん変わるハズがない。

練習 2. 1次変換 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ によって円 $x^2+y^2=r^2$ の面積は変わらないことを示せ。

解　$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x=\cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y'$$
$$y=-\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y'$$
$$\therefore\quad x^2+y^2=x'^2+y'^2$$

ゆえに円 $x^2+y^2=r^2$ はこの変換によって変わらない。したがって面積も不変である。

注　この1次変換は原点のまわりの回転ですから，面積の不変なのも当然です。

練習 3. 1次変換 $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ によって △OPQ は面積の等しい △OP′Q′ にうつされるという。a, b の条件を求めよ。（$|a|\neq|b|$）

ヒント　$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

とすると

$$x'=ax+by,\quad y'=bx+ay$$

ですから △OP′Q′ の面積は，$P'(x_1',\ y_1')$，$Q'(x_2',\ y_2')$ として

$$\begin{aligned}\triangle OP'Q'&=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|\\&=\frac{1}{2}|(ax_1+by_1)(bx_2+ay_2)\\&\quad-(ax_2+by_2)(bx_1+ay_1)|\end{aligned}$$

$=\dfrac{1}{2}|(a^2-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)|$

これが $\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ に等しくなるための条件は $a^2-b^2=\pm1$ でしょう。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的な問題を：——

練習 4. 平面上で点 $P(x,\ y)$ を点 $P'(x',\ y')$ へうつす1次変換 f が

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

で表されているとする。このとき，任意の2点A，Bの f による像をそれぞれ A'，B' とするとき，$\triangle OAB$ と $\triangle OA'B'$ との面積の比は一定であることを証明せよ。ただし，Oは原点であり，3点O，A，Bは同一直線上にないものとする。　（福井大）

ヒント　$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ としますと，

$A'(2a_1+3a_2,\ 5a_1-a_2)$

$B'(2b_1+3b_2,\ 5b_1-b_2)$

で与えられますから，

$$\begin{aligned}\triangle OA'B'&=\frac{1}{2}|(2a_1+3a_2)(5b_1-b_2)\\&\quad-(5a_1-a_2)(2b_1+3b_2)|\\&=\frac{17}{2}|a_1b_2-a_2b_1|\end{aligned}$$

ところが

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

$\therefore$　$\triangle OA'B'=17\triangle OAB$

だから

$\triangle OAB:\triangle OA'B'=1:17$ （一定）

Q. E. D.

練習 5. 行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ で表される平面上の1次変換を f とするとき，

(1) 点 $(2,\ -1)$，$(1,\ 2)$ が f によってそれぞれ $(5,\ 0)$，$(0,\ 5)$ にうつされるとき，変換 f の行列 A を定めよ。

(2) 3点 $P(5,\ -1)$，$Q(2,\ 3)$，$R(-6,\ -3)$ を頂点とする三角形PQRを(1)で定めた f によって変換してできる三角形の面積を求めよ。　（宮崎大）

ヒント　(1) 題意から

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$$

が成り立ちますが，これをひとつにまとめて

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$$

とすることができます。そこで，$\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$ の逆行列を両辺の右から掛けて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$ ……答

これで A は求まりました。

(2) (1)から

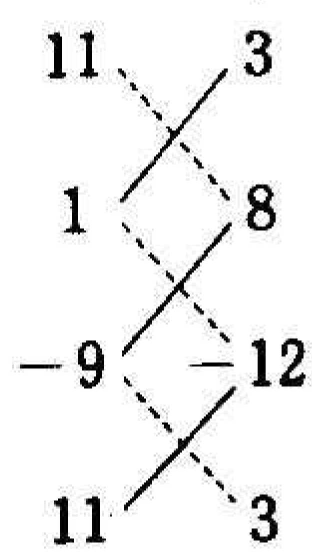
$$\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&-6\\-1&3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&1&-9\\3&8&-12\end{pmatrix}$$

ですから，$\triangle PQR$ の頂点は

$P(11,\ 3)$，$Q(1,\ 8)$，

$R(-9,\ -12)$

したがって $\triangle PQR$ の面積は



$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|11\cdot8+1\cdot(-12)+(-9)\cdot3\\&\quad-1\cdot3-(-9)\cdot8-11\cdot(-12)|\\&=125\end{aligned}$$ ……答

注　右のほうに書いてあるのは，三角形の面積の公式のオボエ方を示したものです。

では，最後に変わった問題を1つ：——

練習 6. 三角形ABCの辺上を動く点D，E，Fが時刻 $t=0$ にそれぞれA，B，Cを出発し，B，C，Aに向かってそれぞれ一定の速さで進んで，時刻 $t=1$ にB，C，Dに達するものとする。$\triangle DEF$ の面積の最小値は $\triangle ABC$ の面積の何倍か。

（京大）

答　$\dfrac{1}{4}$

○等長変換とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆長さの変わらない変換，といわれて，ああ，あんなのもあった，こんなのもあった，といくつかすぐあげられますか。

◆ 変換によって長さが変わらないとき，**等長変換**（とうちょうへんかん）ということがあります。名前なんかどうでもよいが，この種の問題はかなりあるので，できるようにしてほしいもの。では，さっそく次の練習をやってみませんか。

練習 1. 1次変換 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ によって点Pが点 P′ にうつされるとき，$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP'}}$ であることを示せ。ここに，点Oは原点である。

ヒント 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{P'}(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x'=\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y$$

$$y'=\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&x'^2+y'^2\\ &=(\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y)^2+(\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y)^2\\ &=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)x^2+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)y^2\\ &=x^2+y^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{OP'}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2\qquad \therefore\quad \overline{\mathrm{OP'}}=\overline{\mathrm{OP}}$$

注 この1次変換は原点のまわりに θ だけ回転する変換ですから，$\overline{\mathrm{OP}}$ と $\overline{\mathrm{OP'}}$ が等しいばかりでなく，$\mathrm{P}\longrightarrow\mathrm{P'}$，$\mathrm{Q}\longrightarrow\mathrm{Q'}$ のとき $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{P'Q'}}$ でもあるハズ。やってみませんか。

練習 2. 座標平面上の点にこの平面上の点を対比させる写像 f で，この平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に点 $\mathrm{P'}(x',\ y')$ が対応するとき，P, P′ の座標の間には $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$ （a, b, c, d は定数）という関係があるとする。このとき f で，座標の原点を中心とする単位円周上の点が，この単位円周上の点に写像されるための必要十分条件は，

$$a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1,\ ab+cd=0$$

であることを証明せよ。（上智大）

ヒント 要するに，長さ1の線分 OP を長さ1の線分 OP′ に変換する条件を求めているわけですね。つまり，

$x^2+y^2=1$ が $x'^2+y'^2=1$ に

うつされる条件を求めるのが問題。さて，

$$\begin{aligned}&x'^2+y'^2\\ &=(ax+by)^2+(cx+dy)^2\\ &=(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2\end{aligned}$$

ですから，$x^2+y^2=1$ と比較して，もう，できた感じ。では，答案はどう書くか。

解 写像 f : $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$ によって，単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点が単位円上にうつされるから $x'^2+y'^2=1$ が成立しなければならない。

$$\therefore\quad (ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$$

$$\therefore\quad (a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2=1$$

これが $x^2+y^2=1$ を満足するすべての x, y について成立しなければならない。

$x=1$, $y=0$ とすると $a^2+c^2=1$ ……①

$x=0$, $y=1$ とすると $b^2+d^2=1$ ……②

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると上のことから

$$\frac{1}{2}+(ab+cd)+\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\quad ab+cd=0 \qquad\cdots\cdots③$$

ゆえに①，②，③の成り立つことが必要である。

逆に①，②，③が成り立てば，$x^2+y^2=1$ なる x，y に対して $x'^2+y'^2=1$ となることは明らかである。

よって，証明された。

* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. 座標平面において行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とする。ただし，$a>0$ とする。任意の点Pの f による像をQとするとき，つねに $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$ であるという。a，b の値はいくらか。ただし，Oは原点とする。

（解） P$(x,\ y)$，Q$(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x+by \\ ax-\frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

であるから

$$X=\frac{1}{2}x+by,\quad Y=ax-\frac{1}{2}y$$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$ であるための条件は

$$x^2+y^2=X^2+Y^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}x+by\right)^2+\left(ax-\frac{1}{2}y\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{4}+a^2\right)x^2+(b-a)xy+\left(b^2+\frac{1}{4}\right)y^2$$

これが，x，y の任意の値に対して成り立つための条件は

$$\frac{1}{4}+a^2=1,\quad b-a=0,\quad b^2+\frac{1}{4}=1\ ;\ a>0$$

$$\therefore\quad a=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \cdots\cdots \text{答}$$

（注） このとき f はどんな変換を表しているのか，考えてみてください。

練習 4. Oを原点とする座標平面上に，次の式で表される $(x,\ y)$ から $(x',\ y')$ への1次変換がある。

$$\begin{cases} x'=ax+y \\ y'=x+by \end{cases}$$

(i) P$(x_1,\ y_1)$ を直線 $y=mx$ 上の点とし，Q$(x_1',\ y_1')$ をPの像とする。$\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$ を a，b，m で表せ。ただし，PはOと異なり，$\overline{\mathrm{OP}}$，$\overline{\mathrm{OQ}}$ はそれぞれ線分OP，OQの長さを表す。

(ii) Oからの距離が1であるどんな点もOからの距離が2の点にうつされるという。a，b はどんな値でなければならないか。そのような a，b のとる値の組をすべて求めよ。 （大阪府大）

（ヒント） (i) この1次変換を f としましょう。点P$(x_1,\ y_1)$ が直線 $y=mx$ 上にあるとき，f によるPの像の座標Q$(x_1',\ y_1')$ は

$$x_1'=ax_1+y_1=ax_1+mx_1=(a+m)x_1$$
$$y_1'=x_1+by_1=x_1+bmx_1=(1+bm)x_1$$

で与えられるのですから，

$$\overline{\mathrm{OQ}}^2=x_1'^2+y_1'^2$$
$$=(a+m)^2x_1^2+(1+bm)^2x_1^2$$
$$=\{(b^2+1)m^2+2(a+b)m+(a^2+1)\}x_1^2$$

となります。また

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=x_1^2+y_1^2=x_1^2+m^2x_1^2=(1+m^2)x_1^2$$

ですから，

$$\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{\sqrt{(b^2+1)m^2+2(a+b)m+(a^2+1)}}{\sqrt{1+m^2}}$$

となります。これで，(i)は終わりました。

(ii) $\overline{\mathrm{OP}}=1$ のとき，$\overline{\mathrm{OQ}}=2$ となるのは

$$\frac{\sqrt{(b^2+1)m^2+2(a+b)m+(a^2+1)}}{\sqrt{1+m^2}}=2$$

分母をはらって，平方して m について整理しますと

$$(b^2-3)m^2+2(a+b)m+(a^2-3)=0$$

となります。これが m のすべての実数値に対して成り立つのですから

$$b^2-3=0,\quad a+b=0,\quad a^2-3=0$$

かくて，……

答 $a=\pm\sqrt{3}$，$b=\mp\sqrt{3}$（複号同順）

① 固有値とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆固有値を知らない行列の知識は，目のかいてないダルマのようなものだ。チョットいいすぎかな？

◆ まず定義を：——

正方行列 A に対して

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$$

なるベクトル $\vec{x}$ ($\neq\vec{0}$) と定数 λ が求められたとき，λ を行列 A の固有値（こゆうち）といい，$\vec{x}$ を λ に属（ぞく）する A の固有ベクトルという。

何はともあれ，具体的な問題をとりあげてみましょう。

練習 1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(*)$$

を満足する定数 λ とベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を求めよ。ただし，x，y は同時に 0 ではない。

ヒント (*) を展開して

$$x+2y=\lambda x\quad かつ\quad 4x+3y=\lambda y$$

$$\therefore\quad (1-\lambda)x+2y=0\quad\cdots\cdots①$$

$$4x+(3-\lambda)y=0\quad\cdots\cdots②$$

①×$(3-\lambda)$－②×2 を作ると

$$\{(1-\lambda)(3-\lambda)-4\cdot 2\}x=0$$

$$\therefore\quad (\lambda^2-4\lambda-5)x=0\quad\cdots\cdots③$$

ところが $x=0$ とすると，①より $y=0$，すなわち，x，y は共に 0 になってしまいますから，③において $x\neq 0$

$$\therefore\quad \lambda^2-4\lambda-5=0$$

$$\therefore\quad (\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

$$\therefore\quad \lambda=5\quad あるいは\quad \lambda=-1$$

$\lambda=5$ のときには①，②は

$$\left.\begin{array}{r}-4x+2y=0\\4x-2y=0\end{array}\right\}$$

となり不定です。ただし $y=2x$

そこで，固有ベクトルは $\begin{pmatrix}k\\2k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ となります。($k\neq 0$)

次に，$\lambda=-1$ のときには，①，②は

$$x+y=0$$

となって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix}k\\-k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ となります。($k\neq 0$)

＊　＊　＊

練習 2. $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&0\end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ。

ヒント 固有値を λ としますと

$$\begin{pmatrix}1&4\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x+4y=\lambda x\quad かつ\quad 3x=\lambda y$$

$$\therefore\quad (1-\lambda)x+4y=0\quad\cdots\cdots①$$

$$3x-\lambda y=0\quad\cdots\cdots②$$

①×λ＋②×4：

$$\{\lambda(1-\lambda)+12\}x=0$$

$$\therefore\quad -(\lambda^2-\lambda-12)x=0$$

$x=0$ とすると，①により $y=0$ となるから適さない。

$$\therefore\quad \lambda^2-\lambda-12=0$$

$$\therefore\quad \lambda=4,\ \lambda=-3$$

$\lambda=4$ のとき①，②より $x=4k$，$y=3k$ ($k\neq 0$)，ゆえに固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ です。

$\lambda=-3$ のとき ①，② より $x=k$，$y=-k$ ($k\neq 0$)，ゆえに固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ です。

答 固有値 4，-3 で，固有ベクトルは，それぞれ $k\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

＊　＊　＊

◆ 次には，やや，総合的な問題をやってみませんか。

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を λ とします と，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で，これから

$$(a-\lambda)x+by=0$$
$$cx+(d-\lambda)y=0$$

これを満足する $x=y=0$ 以外の解があるための条件は

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

つまり

$$\boldsymbol{\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0}$$

です。つまり，これを解けば固有値が得られるわけです。この方程式を **固有方程式** といいます。(**特有方程式** という人もあります)

ところで，無理にオボエルこともありませんが，次のような定理があります。

ケーリー・ハミルトンの定理：行列 A の固有方程式を $f(x)=0$ とすると $f(A)=O$ である。

では，これをやってみませんか。

練習 3. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとき $A^2-(a+d)A$ を求めなさい。

（自治医大）

（解） ケーリー・ハミルトンの定理により

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$
$$\therefore\quad A^2-(a+d)A=-(ad-bc)E$$

ところが，逆行列をもたないから

$$ad-bc=0$$
$$\therefore\quad A^2-(a+d)A=O$$

（注） この問題にケーリー・ハミルトンの定理を使うのは雞を割くに牛刀を用いるのたぐいか。しかし，ここでは，その応用としてやってみたのです。

練習 4. $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき $A^2+pA+qE=O$ を満足する p，q を求めよ。

（解） A の固有方程式は

$$\lambda^2-(1+a)\lambda+0=0$$

ゆえに，ケーリー・ハミルトンの定理により

$$A^2-(1+a)A+0\cdot E=O$$

これを与式と比較して

$$p=-(1+a),\ q=0 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ もう少しめんどうなものをやってみましょう。

練習 5. $A=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

のとき，$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$ を求めよ。

（筑波大）

（解） $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

の固有方程式は

$$\lambda^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\lambda+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

すなわち

$$\lambda^2-\lambda+1=0$$

ゆえに

$$A^2-A+E=O$$
$$\therefore\quad A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$$
$$=(A^2-A+E)(A^4+2A^3+2A^2+A)$$
$$=O$$

$\boxed{答}$ O

（注） これも，固有値を知らないでもていねいに計算すればできるのですが，いかにもキレイで，いかにもベンリではありませんか。

固有値はこのほか，数列にも有用ですし，べき乗 A^n を計算するのにも役に立ちます。詳しくは（☞ p.108, p.112, p.172)。

◐ 固有値の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆固有値という言葉を使わないでも，実際上固有値を求めさせる問題は多いのです。イヤガラズ，やっておくことが肝心。

◆ 固有値については（☞ p.168）を通読してください。ここでは，固有値とそれに属する固有ベクトルを求めることが目的です。

では，これをやってみませんか。

練習 1. 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{pmatrix}$ の固有値と，それに属する固有ベクトルを求めよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

とおいて成分に分けますと

$$\begin{cases}2x+4y=\lambda x\\ 3x+13y=\lambda y\end{cases}$$

$$\therefore\quad (2-\lambda)x+4y=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$3x+(13-\lambda)y=0 \quad \cdots\cdots②$$

①×$(13-\lambda)$－②×4 を作りますと

$$\{(2-\lambda)(13-\lambda)-3\cdot4\}x=0 \cdots\cdots③$$

$x=0$ とすると，①から $y=0$ となって適さないから $x\neq0$ でなければなりません。したがって，③において　xの係数$=0$

$$\therefore\quad \lambda^2-15\lambda+14=0$$
$$\therefore\quad (\lambda-1)(\lambda-14)=0$$
$$\therefore\quad \lambda=1,\ 14$$

$\lambda=1$ のとき①，②は $x+4y=0$ となり，$x=4k,\ y=-k\ (k\neq0)$ によって満足されます。したがって，求める固有ベクトルは

$$k\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix}$$

です（ふつうはkを省略します）。

$\lambda=14$ のときには①，②は $y=3x$ と書け，したがって $x=k,\ y=3k\ (k\neq0)$ によって満足され，固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ となります。

答　$1,\ \begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix};\ 14,\ \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

練習 2. 行列 $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解　$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

とおくと

$$\begin{cases}3x-2y=\lambda x\\ 2x+y=\lambda y\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}(3-\lambda)x-2y=0 & \cdots\cdots①\\ 2x+(1-\lambda)y=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

これが $x=y=0$ でない解をもつための条件は

$$(3-\lambda)(1-\lambda)-2(-2)=0$$
$$\therefore\quad \lambda^2-4\lambda+7=0$$
$$\therefore\quad \lambda=2\pm\sqrt{3}\,i$$

$\lambda=2\pm\sqrt{3}\,i$ のとき①，②を満足する x，y は

$$k\begin{pmatrix}2\\ 1\mp\sqrt{3}\,i\end{pmatrix}$$

で与えられる。

答　$2\pm\sqrt{3}\,i,\ \begin{pmatrix}2\\ 1\mp\sqrt{3}\,i\end{pmatrix}$（複号同順）

では，計算ミスのないように，もう1つやってみませんか。

練習 3. 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

答　$\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{2},\ \begin{pmatrix}6\\ 1\mp\sqrt{37}\end{pmatrix}$（複号同順）

＊　＊　＊

◆ 次には3次の正方行列の固有値を求めることをやってみましょう。3次の行列は現在の高校数学では扱わないことになっていますが，本質的には2次の場合と同じです。計算練習と思ってやってみてください。

■練習 4. 行列 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

とおいて，成分に分けてみますと

$$\begin{cases}2x+y+z=\lambda x\\x+2y+z=\lambda y\\x+y+2z=\lambda z\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}(2-\lambda)x+y+z=0 & \cdots\cdots①\\x+(2-\lambda)y+z=0 & \cdots\cdots②\\x+y+(2-\lambda)z=0 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①−② を作りますと

$$(1-\lambda)x+(\lambda-1)y=0$$

$$\therefore\quad(1-\lambda)(x-y)=0$$

$\lambda\fallingdotseq 1$ ならば $x=y$ となります。

同様にして②，③から　$y=z$

$$\therefore\quad x=y=z$$

これを①に代入して

$$(4-\lambda)x=0$$

$x\fallingdotseq 0$ であるから　$\lambda=4$

ゆえに $\lambda=4$ が固有値で，このとき固有ベクトルは

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

となります。

次に，$\lambda=1$ のときは①，②，③は

$$x+y+z=0$$

となりますから，k，l を任意の数として

$$x=k,\ y=l,\ z=-(k+l)$$

とおくことができます。そして，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}k\\l\\-k-l\end{pmatrix}$$

で，書きかえると

$$\begin{pmatrix}k\\0\\-k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\l\\-l\end{pmatrix}$$

$$=k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

とすることができます。これをふつう次のように書きます。

答　$4,\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ 1,\ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

■練習 5. 行列 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

ヒント　$\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

を成分に分けて

$$\begin{cases}3x+2y+4z=\lambda x & \cdots\cdots①\\2x\qquad+2z=\lambda y & \cdots\cdots②\\4x+2y+3z=\lambda z & \cdots\cdots③\end{cases}$$

これが $x=y=z=0$ 以外の解をもつ条件から

$$\lambda=-1,\ 8$$

が得られます。そして

$\lambda=-1$ のとき，①，②，③は

$$2x+y+2z=0$$

となって，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}k\\-2(k+l)\\l\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda=8$ のときは　$k\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

答　$-1,\ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix};\ 8,\ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

●固有値と数列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆固有値（こゆうち）というコトバなんか，どうでもいい。しかし，これを使えることは大切です!!

◆ ここでは固有値を使って数列を扱う方法を練習するのが目的です。固有値について知らなかったら（☞ p.170）をみてから次に進んでください。

練習 1. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ があって

$$a_1=0,\ b_1=1$$

$$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1},\ b_n=4a_{n-1}+3b_{n-1}$$

のとき a_n，b_n を求めよ。

ヒント

$$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$$
$$b_n=4a_{n-1}+3b_{n-1}$$
$$\therefore\ \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=u_n$，$\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}=A$ とおくと

$$u_n=Au_{n-1}$$
$$\therefore\ u_n=A^{n-1}u_1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

となります。そこで A^{n-1} さえ求めればよい。これについては（☞ p.108）を参照してください。

さて，$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ の固有ベクトルを求めてみますと（☞ p.168），$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ですから，行列Pを

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

と定め，$P^{-1}AP$ を作りますと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

両辺をn乗すると（☞ p.109）

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}5^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}$$

そこで，右から P^{-1} を左から P を掛けてやりますと，

$$A^n=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}5^n&(-1)^n\\2\cdot5^n&-(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5^n-2(-1)^n&-5^n+(-1)^n\\-2\cdot5^n+2(-1)^n&-2\cdot5^n-(-1)^n\end{pmatrix}$$

となります。したがって（*）から

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5^{n-1}-2(-1)^{n-1}&-5^{n-1}+(-1)^{n-1}\\-2\cdot5^{n-1}+2(-1)^{n-1}&-2\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ a_n=-\frac{1}{3}(-5^{n-1}+(-1)^{n-1})$$
$$=\frac{5^{n-1}-(-1)^{n-1}}{3}$$
$$b_n=-\frac{1}{3}(-2\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1})$$
$$=\frac{2\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}}{3}$$

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$$

のとき a_n を求めよ。

ヒント　$a_{n-1}=b_n$ とおきますと　$b_2=a_1=0$

$$a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}$$
$$b_n=1\cdot a_{n-1}+0\cdot b_{n-1}$$

ですから

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$$

となります。

さて，$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ですから $P=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=P\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}3^{n+1} & (-1)^n\\ 3^n & -(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3^{n+1}-(-1)^n & -3^{n+1}+3(-1)^n\\ -3^n+(-1)^n & -3^n-3(-1)^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{3^{n-1}+(-1)^n}{4}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

◆ では，同じことですが，総合的な練習をやってみませんか。

練習 3. 甲，乙２つの袋には共に赤球と白球が入っている。甲，乙から１球を取り出すとき，それが赤球である確率はそれぞれ p，q である（ただし，$0<p<1$, $0<q<1$）。いま，甲，乙，いずれかの袋から１球ずつを取り出してはもとに戻す試行をくり返すことにする。１回目は甲から取り出し，それが赤球であれば，２回目は甲の袋から，白球であれば乙の袋から取り出すものとする。以後も同様にその回に取り出した球が赤であれば次の回は甲から，白であれば乙から取り出す。n 回目に取り出した球が赤である確率を f_n，白である確率を g_n とおく（$n=1, 2, \cdots\cdots$）。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix}f_{n+1}\\ g_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}f_n\\ g_n\end{pmatrix}$ となる２次の正方行列 A を p，q を用いて表せ。

(2) 上に求めた A に対して

$$\underbrace{AA\cdots\cdots A}_{n個}=A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ 1-a_n & 1-b_n\end{pmatrix}$$

とおいたとき，この a_n，b_n を p，q を用いて表せ。（埼玉大）

解 (1) 甲，乙２つの袋から白球を取り出す確率はそれぞれ $1-p$，$1-q$ である。

第 $(n+1)$ 回目が赤となるのは，第 n 回目が赤であるときと，第 n 回目が白であるかの２つの場合があり，

$$f_{n+1}=pf_n+qg_n\qquad\cdots\cdots①$$

なる関係がある。白についても同じで

$$g_{n+1}=(1-p)f_n+(1-q)g_n\qquad\cdots\cdots②$$

なる関係があるから，①，②より

$$\begin{pmatrix}f_{n+1}\\ g_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ 1-p & 1-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_n\\ g_n\end{pmatrix}$$

で，したがって，

$$A=\begin{pmatrix}p & q\\ 1-p & 1-q\end{pmatrix}$$

である。

(2) $\begin{pmatrix}p & q\\ 1-p & 1-q\end{pmatrix}$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}q\\ 1-p\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ であるから

$$P=\begin{pmatrix}q & 1\\ 1-p & -1\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}=\frac{1}{1+q-p}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1-p & -q\end{pmatrix}$$

で，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p-q\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (p-q)^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n$$

$$=\begin{pmatrix}q & 1\\ 1-p & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (p-q)^n\end{pmatrix}$$

$$\times\frac{1}{1+q-p}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1-p & -q\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+q-p}\begin{pmatrix}q+(1-p)(p-q)^n & q-q(p-q)^n\\ (1-p)-(1-p)(p-q)^n & (1-p)+q(p-q)^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}a_n&=\frac{q+(1-p)(p-q)^n}{1+q-p}\\ b_n&=\frac{q-q(p-q)^n}{1+q-p}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{答}$$

となります。

注 もちろん固有値を使わないでもできます。

固有値を使ってA^nの計算

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆A^n の計算には4通りあった。その中でもっとも入試にでたのはこの固有値を使うやり方なんです。

◆ 固有値の求め方は知っているとして，ここでは A^n の計算法が目的です。

11/9 **練習 1.** $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ のとき A^n を求めよ。

ヒント　第1段階：固有値と固有ベクトルを求めること。

$$\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

とおいて展開変形すると

$$(3-k)x+y=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$x+(3-k)y=0 \quad \cdots\cdots②$$

①×$(3-k)$−②を作ると

$$(k^2-6k+8)x=0$$

$x=0$ とすると①から $y=0$ となって仮定に反する。　$\therefore\ x\neq0$

$$\therefore\ k^2-6k+8=0$$

$$\therefore\ k=2 \text{ あるいは } 4$$

$k=2$ のとき①から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad t\neq0$$

$k=4$ のとき①から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad s\neq0$$

第2段階：上の結果から行列Pを

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(*)$$

とします。第1，第2列を交換して

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

としてもかまわない。ここでは(*)を採用しましょう。そうすると　$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

これを用いて次を計算するのです。

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2\\4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

第3段階：したがって

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}^n$$

$$\therefore\ P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}$$

第4段階：

$$\therefore\ A^n=P\begin{pmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n-1}&0\\0&2\cdot4^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2\cdot4^{n-1}\\-2^{n-1}&2\cdot4^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n-1}+2\cdot4^{n-1}&-2^{n-1}+2\cdot4^{n-1}\\-2^{n-1}+2\cdot4^{n-1}&2^{n-1}+2\cdot4^{n-1}\end{pmatrix}$$

となります。これで完了。

*　*　*

◆ また第2段階から出発している場合も少なくありません。つまり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$$

となるようなPやα，βを求めさせるものです。本質的にはおなじことですが，次にそれをやってみましょう。もちろん，問題にはそれを指定してあるわけです。

■練習 2. $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$ のとき A^n を求めよ。

ヒント 第1段階：$P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ として

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\quad(\alpha>\beta)$$

となるPとα，βを求めます。そのためにはPを左から掛けて

$$\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$$

両辺を比較して

$$3a+c=\alpha a \quad\cdots\cdots①$$
$$2a+2c=\alpha c \quad\cdots\cdots②$$
$$3b+d=\beta b \quad\cdots\cdots③$$
$$2b+2d=\beta d \quad\cdots\cdots④$$

①，②より

$$(3-\alpha)a+c=0 \quad\cdots\cdots①'$$
$$2a+(2-\alpha)c=0 \quad\cdots\cdots②'$$

cを消去して

$$(\alpha^2-5\alpha+4)a=0$$

$a=0$ とすると①′より $c=0$，$a=c=0$ となると P^{-1} が存在しませんから適しません。

$$\therefore\quad \alpha^2-5\alpha+4=0$$
$$\therefore\quad \alpha=1,\ 4$$

次に③，④より

$$(3-\beta)b+d=0 \quad\cdots\cdots③'$$
$$2b+(2-\beta)d=0 \quad\cdots\cdots④'$$

③′，④′からdを消去して

$$(\beta^2-5\beta+4)b=0$$

$b=0$ とすると③′から $d=0$ となり，これでは $b=d=0$ となって P^{-1} が存在しません。

$$\therefore\quad \beta^2-5\beta+4=0$$
$$\therefore\quad \beta=1,\ 4$$

こうして，α，βは組み合わせると4組の解が出てきますが，$\alpha>\beta$ という条件がありますので

$$\alpha=4,\ \beta=1$$

ときまります。

そして $\alpha=4$ のとき①′，②′から

$$a=c$$

また $\beta=1$ のとき③′，④′から

$$d=-2b$$

となります。そこで，カンタンな値の一組を採用して

$$a=1,\ c=1\ ;\ b=1,\ d=-2$$

としましょう。

かくして

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

とします。かくして

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$$

第2段階：両辺をn乗して

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}4^n&0\\0&1\end{pmatrix}$$

第3段階：

$$\therefore\quad A^n=P\begin{pmatrix}4^n&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n&1\\4^n&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot4^n+1&4^n-1\\2\cdot4^n-2&4^n+2\end{pmatrix}$$

となって完了。

* * *

◆ 入試問題は多少のちがいはありますが，上の2つのやり方を指示して，コウヤレ，アアヤレ，とかいてあるわけですから，この手順をおぼえる必要はありません。しかし，一度はキチンとやって理解しておかなければ，実際上はできないものです。

ともあれ，一度はキチンとやっておくことが大切です。

① 群とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈コンナ変ナモノヲナゼヤルノカ，などと思ってはいけない。物理・化学・農学・生物学など，あらゆる分野に応用されている!!

◆ 集合Gがあって，ある演算について次の4つの条件を満足するとき，この集合Gは，その演算について **群**（ぐん）をなす，あるいは，その演算についての群である，といいます。

さて，その条件というのは

(1)　Gは，その演算について閉じている
(2)　その演算について結合法則が成り立つ
(3)　その演算について単位元がある
(4)　その演算について逆元がある

です。結合法則や，単位元や逆元を忘れている人は，この機会に復習しておくことです。
（☞「数Ⅰ」p.98, 94, 96）

*　　*　　*

◆ では，具体的な練習にいきましょう。

練習 1. 整数の集合は加法について群をなすことを示せ。

ヒント　まず整数の集合をIとしますと

$$a\in I,\ b\in I \text{ ならば } a+b\in I$$

が成り立ちます。コトバでいえば，2つの整数の和は整数である，というわけ。これで，第1条件は合格。

次に，加法について

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

つまり，結合法則が成り立っています。これで第2条件も合格。

第3に，$a\in I$ なるすべてのaに対して

$$a+0=0+a=a$$

が成り立つ。つまり，単位元は0で，確かにIに属しています。これで，第3条件も合格です。

第4に，$a\in I$ なるすべてのaに対して

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

なる $-a$ が I に属していますから，すべての元について，逆元が存在します。こうして第4条件も合格しました。

かくて，証明は終わりです。

練習 2. 行列$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$の集合$G$は，乗法について群をなすことを証明せよ。$a$は実数。　（名古屋市大）

解　(1)　$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

であるから乗法可能である。

(2)　行列の積については結合法則が成り立つから，この場合も結合法則が成り立つ。

(3)　単位元は$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$で，これは確かに$G$に属する。

(4)　$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$について $1\cdot1-a\cdot0\neq0$ であるから，これは正則行列で，その逆行列は$\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$で，確かに$G$に属する，ゆえに逆行列も存在する。

したがって，Gは群をなす。　Q. E. D.

練習 3.

$$\left\{1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, x\right\}$$

が乗法に関して群となるようにxの値を求めよ。　（長崎造船大）

ヒント　まず，第1条件は乗法に関して閉じていること。しかし，それを調べるとなるとゴタゴタする。そこで，それはあとまわしにして，第2は結合法則だが，6個の複素数について成り立つのは当然で，やるほどのことも

なし。第3は単位元，そうだ，これを調べてみよう。単位元が1であることはいうまでもない。そこで $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ の逆元は

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{2(1-\sqrt{3}\,i)}{4}=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

で，すでに存在する。

$\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ の逆元はもはや計算するまでもなし，$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ です。-1 の逆元は -1 でこれもよし。

最後に $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ の逆元は

$$\frac{2}{-1+\sqrt{3}\,i}=\frac{2(-1-\sqrt{3}\,i)}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

これが，この集合に含まれていなければならない。つまり

$$x=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

であることがわかった。と，同時に，閉じているという条件も満足されていることがわかったのです。

*　　*　　*

◆ 次には，ややめんどうなものを扱ってみましょう。

練習 4. 関数 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$f_3(x)=\dfrac{x-1}{x}$，$f_4(x)=1-x$，$f_5(x)=\dfrac{1}{x}$，$f_6(x)=\dfrac{x}{x-1}$ の集合 $\{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6\}$ は合成関数 $f_i(f_j(x))$ を作る操作について，群を作ることを示せ。

ヒント　$f_i(f_j(x))$ は $f_i\circ f_j(x)$ と書いてもいいのでしたね。そこで，$i=1\sim6$，$j=1\sim6$ について，$f_i\circ f_j(x)$ を求めて，表に示してみればいいでしょう。これを群表といいます。詳しくは（☞ p.178）。

さて，

$$f_1\circ f_1(x)=f_1(f_1(x))=f_1(x)=x$$

$$f_1\circ f_2(x)=f_1(f_2(x))=f_2(x)=\frac{1}{1-x}$$

といったぐあい。全部を調べて表にしたのが，これです：——

$f_i \backslash f_j$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_5	f_6	f_4
f_3	f_3	f_1	f_2	f_6	f_4	f_5
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_1	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

あとは，この表をもとにして，群をなすための条件を1つずつ調べてみましょう。

(1)　閉じているか。いずれの2つの合成関数を作ってみても，f_1，f_2，……，f_6 以外に出てこないことは確かです。合格!!

(2)　結合法則はどうか。

一般に $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ の形の関数について

$$(f_i\circ f_j)\circ f_k=f_i\circ(f_j\circ f_k)$$

であることが証明できます。あるいは $f_i\circ f_j$ と行列の関係を使ってもできます(☞ p.182)。

(3)　単位元はいうまでもなく，$f_1(x)=x$

(4)　逆元は上の表からすぐわかります。

$$f_1^{-1}(x)=f_1(x)$$
$$f_2^{-1}(x)=f_3(x)$$
$$f_3^{-1}(x)=f_2(x)$$
$$f_4^{-1}(x)=f_4(x)$$
$$f_5^{-1}(x)=f_5(x)$$
$$f_6^{-1}(x)=f_6(x)$$

確かに逆元も存在しますね。

*　　*　　*

◆ 上の表からわかるように f_1，f_2，f_3 の3つだけでも群を作ることがわかります。一般に，ある演算について，群 A の一部分 B も群を作るとき，B を A の **部分群**（ぶぶんぐん）といいます。

くどいけれども，例をとってみようか。

群 $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ は群 $\{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6\}$ の部分群なのです。

① 群表とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ケーレーの表ともいいます。誰でも考えつくような事でも，いちいち，名称をつけるのはプライオリティを尊重するためだ。

◆ **群**（ぐん）というのは，4つの条件を満足する集合をいいます。その中の3つは，閉じていること，単位元のあること，逆元のあること，です。ところで，要素が有限なものを有限集合といいますが，有限集合について，上の3つの条件を満足するかどうかを調べるには，全部の場合を表にするのがいいでしょう。この表を **群表**（ぐんひょう）といいます。その表の作り方をマスターするのが，この項の目的です。さて：——

*　*　*

■練習1.　集合 $A=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ は乗法について群をなすことを示せ。

(ヒント)　Aの要素はすべて複素数であるから結合法則は成り立つこと，いうまでもなく掛算の表は右の通りです。つまり，$1,\ -1,\ i,\ -i$ の中から2つとって積を作ると，これ以外のものは出てきません。つまり，この集合は乗法に関して閉じています。次に，単位元はいうまでもなく1で，逆元は $1,\ -1,\ i,\ -i$ に対して，それぞれ $1,\ -1,\ -i,\ i$ で，確かに存在します。

	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

こうして，Aが乗法について群をなすことが証明されたわけです。

■練習2. 1の立方根は乗法に関して群をなすことを示せ。

(解)　1の立方根は $1,\ \omega,\ \omega^2$ とおくことができる。ここに $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。結合法則が成り立つことは明らかである。

掛算表を作ると右のようになり，これから単位元は1で，$1,\ \omega,\ \omega^2$ の逆元はそれぞれ $1,\ \omega^2,\ \omega$ であることがわかる。

	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

ゆえに，$\{1,\ \omega,\ \omega^2\}$ は，乗法に関して群を作る。

(注)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ で，$\omega^3=1,\ 1+\omega+\omega^2=0$ などの関係があります。（詳しくは☞「数I」p.122〜123を参照してください）

■練習3. 5による剰余系は加法について群をなすことを示せ。

(ヒント)　5で割った余りは0，1，2，3，4のいずれかです。これに目をつけて整数を次のように分類することができます。

K_0：-10　-5　0　5　10 ……
K_1：-9　-4　1　6　11 ……
K_2：-8　-3　2　7　12 ……
K_3：-7　-2　3　8　13 ……
K_4：-6　-1　4　9　14 ……

そうすると，例えば

$$a\in K_1,\ \ b\in K_2$$

ならば

$$a+b\in K_3$$

となります。

このことを，簡単に

$$K_1+K_1=K_3$$

あるいは

$$1+2=3$$

と書きます。

このように約束すると

$$2+3=0$$

です。なぜなら

$$K_2+K_3=K_0$$

だからです。

このような加え算について，集合

$$\{K_0,\ K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4\}$$

は群をなすことを示せ，というのです。

さて，5の倍数を（5）で表すことにしますと

$$(K_l+K_m)+K_n$$
$$=\{(5)+l+(5)+m\}+(5)+n$$
$$=(5)+l+m+n$$

また，

$$K_l+(K_m+K_n)$$
$$=(5)+l+\{(5)+m+(5)+n\}$$
$$=(5)+l+m+n$$
$$\therefore\ (K_l+K_m)+K_n=K_l+(K_m+K_n)$$
$$\therefore\ (l+m)+n=l+(m+n)$$

つまり，剰余系は加法について結合法則が成り立つのです。

さて，残り3つの条件を調べるために，加算表を作りますと，右のようになります。

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

これからわかるように単位元は0，つまりK_0ですし，逆元は

0, 1, 2, 3, 4

に対して，それぞれ

0, 4, 3, 2, 1

であることがわかります。閉じていることはいうまでもなし。

かくて証明された。

(注) 答案にどの程度詳しく書いたらよいか，はっきりしませんね。そこで，答案に重点をおいてもう1つやってみましょう。

練習 4. 3による剰余系は加法について群を作ることを示せ。

(解) 3で割った剰余が0，1，2である剰余類をそれぞれ0，1，2で表すと，加算表は下のようになる。

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

この表から，単位元は0で，0，1，2の逆元はそれぞれ存在して0，2，1であること，また{0, 1, 2}が加法について閉じていることがわかる。

さらに，3の倍数を(3)で表すと

$$(l+m)+n=\{(3)+l+(3)+m\}+(3)+n$$
$$=(3)+l+m+n$$
$$l+(m+n)=(3)+l+\{(3)+m+(3)+n\}$$
$$=(3)+l+m+n$$
$$\therefore\ (l+m)+n=l+(m+n)$$

となり，結合法則が成り立つ。

以上により，3による剰余系は加法について群をなす。

練習 5. 複素数を成分とする集合 $\{a,\ b,\ c\}$ が乗法について群をなすという。a, b, c を求めよ。

(ヒント) 単位元がなければならないから，a, b, c のうち1つは1でなければならない。$c=1$ とすると，aの逆元はaかbでなければならない。

$a^{-1}=a$ とすると，$a\neq 1$ であることから $a=-1$ でなければならない。そして，このとき，$b\neq 1$, -1 であるから，b^{-1} は存在しない。したがって $a^{-1}=a$ は適さない，ということになりましょう。

$a^{-1}=b$ とすると，掛算表は右の通り。したがって a^2, $\frac{1}{a^2}$ は 1, a, $\frac{1}{a}$ のどれかということになります。よって，……

	1	a	$\frac{1}{a}$
1	1	a	$\frac{1}{a}$
a	a	a^2	1
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	1	$\frac{1}{a^2}$

(答) $\left\{1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$

○群と行列

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆群に強くなるには，あるタイプのものを徹底してやるとよい。そのもっともよい相手は行列なんです。

◆ 群（ぐん）についてまだやってない人は，まず，その大体をつかんで（☞p.176）からここをやってください。では，さっそくながら，練習1にいきましょう。

■練習1. 2つの行列

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

の集合 $S=\{E,\ A\}$ は乗法について群を作ることを示せ。

ヒント　Sが群をなすためには4つの条件を満足しなければならなかった。

(1)　閉じていること

(2)　結合法則の成り立つこと

(3)　単位元のあること

(4)　逆元のあること

です。ところが，(2)は行列すべてが満足するものなんですから，もはやいうまでもなし。(1)，(3)，(4)をみるには群表（☞p.178）を作ってみればよいでしょう。

さて，その結果は右の表の通りです。すなわち，E，Aの任意の2つの積はSに含まれています。単位元はEで，E，Aの逆元はそれぞれE，Aです。

	E	A
E	E	A
A	A	E

Q. E. D.

■練習2. 3つの行列

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

の集合は，乗法について群をなすことを示せ。

ヒント　結合法則は行列であることから，当然成り立ちます。ほかの3つは，やはり群表を使うのがいいでしょう。

さて，それは右のようです。もはや，説明するまでもないでしょう。

	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

注　答案としては，やはり群であるための条件4つをあげて，その4つを満足することを示さなければなりません。

では，もう1つ：——

■練習3. 4つの行列

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

の集合は，乗法について，群を作ることを示せ。

解　行列の積については結合法則が成立するから，この4つの集合についても，結合法則が成り立つ。

与えられた4つの行列について，乗法を表示すると右のようになる。

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

したがって，この集合は乗法に関して明らかに閉じている。

単位元はEで，E，A，B，Cの逆元はそれぞれE，A，B，Cであることもわかる。

ゆえに，E，A，B，Cの集合は乗法について群を作る。

*　*　*

◆ 次には，ややめんどうな問題にいきましょう。めんどうといっても，本質的に変わるところはありません。

練習 4. 4つの行列

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

の集合が乗法について，群を作るための条件を求めよ。

(ヒント) これが群を作るための条件 4 つのうち，1つは，単位元をもつことです。ところが，A, B, C, D のうち，B と D は a をどのように選んでも単位元にはなりえない。してみると A か C が単位元でなければなりません。したがって $a=1$ あるいは -1 でなければなりません。

さて，$a=1$ のときには群を作ることが容易に証明できます。$a=-1$ のときも同じ。

答 $a=\pm 1$

(注) このように，4つの条件のうち，どれにまず目をつけるかによって，めんどうにもやさしくもなるものです。

練習 5. 次の行列の集合は乗法について群を作るという。定数 k の値を求めよ。

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\middle|\, a^2+b^2=k^2,\ a,\ b\in R\right\}$$

ここに，R は実数全体の集合を表す。

(解) S は乗法に関して群を作るから，単位元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含まなければならない。すなわち $a=1$, $b=0$ が満足しなければならない。

$$\therefore\quad a^2+b^2=1$$

ゆえに

$$k=\pm 1$$

でなければならない。

逆に $k=\pm 1$ ならば

$$a^2+b^2=1$$

ゆえに $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$ とおくことができる。したがって，S に属する任意の2つの積は

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AB=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\in S$$

よって，乗法に関して閉じている。

単位元は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で確かに S に含まれる。

また $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ の逆元を求めると

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}\in S$$

結合法則は行列の積であるから成り立つ。

したがって，$k=\pm 1$ のとき，S は，乗法について群をなす。ゆえに，求める k の値は ± 1 である。

練習 6. 6つの行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

の集合が，乗法に関して，群を作るように定数 a の値を求めよ。

(ヒント) A, B, C, D の逆行列がその集合に含まれなければならないことに目をつけて，まず，A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1} を求めてみると

$$A^{-1}=A,\ B^{-1}=C,\ C^{-1}=B$$
$$D^{-1}=D$$

これは結局だめだった。ここで E, F の逆行列を吟味することになる。

答 $a=\pm 1$

行列が群をなせば，それに対応する変換も群を作るハズです。これは変換群といわれるもので，物理学や結晶学など，多くの分野に重要なはたらきをするのです。

◑ 1次の分数関数と行列

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◈ 1次の分数関数も行列を媒介として扱うと急にイキイキしてくるのもふしぎなもの。見方を変えると相手も変わるよい例だ。

◆ 分母・分子がxの1次式である有理関数を考えてみます。つまり，

$$f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$$

です。もちろんaやcが0でもかまいません。では，これをやってみませんか。

1/27

■練習 1. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$，$g(x)=\dfrac{4x+1}{2x+3}$ のとき $f\circ g(x)$ を計算せよ。

(解) $$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{3\cdot\dfrac{4x+1}{2x+3}+1}{\dfrac{4x+1}{2x+3}+2}$$

$$=\frac{3(4x+1)+(2x+3)}{(4x+1)+2(2x+3)}$$

$$=\frac{14x+6}{8x+7}$$ ……$\boxed{答}$

1/27

■練習 2. 行列 $F=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$，$G=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$ について積 FG を求めよ。

(解) $$FG=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot4+1\cdot2&3\cdot1+1\cdot3\\1\cdot4+2\cdot2&1\cdot1+2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&6\\8&7\end{pmatrix}$$ …$\boxed{答}$

(注) 上の2問を比べてみると，$f\circ g(x)$ の計算を行列でやれる（らしい）ことがわかります。証明は，一般の場合についてやってみればよいのです。そして，このことから，次のような問題が行列で扱うことができます。

1/27

■練習 3. $f(x)=\dfrac{5x+1}{3x+2}$ の逆関数を求めよ。

(ヒント) $f\circ f^{-1}(x)=x$ ですからfに対応する行列をFとすると，上の関係は行列では

$$FF^{-1}=E$$

で表せます（☞「数Ｉ」p.210）。ところで

$$F=\begin{pmatrix}5&1\\3&2\end{pmatrix} \text{ ですから } F^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&5\end{pmatrix}$$

です。（☞ p.94）したがって

$$f^{-1}(x)=\frac{\dfrac{2}{7}x-\dfrac{1}{7}}{\dfrac{-3}{7}x+\dfrac{5}{7}}=\frac{2x-1}{-3x+5}$$

です。

■練習 4. $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を3つの1次の分数関数とすると

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

が成り立つことを示せ。

(ヒント) $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ などとおいて強引に計算してもよいが，これはちょっとやり甲斐があるね。

行列を媒介にして考えると，行列の結合法則が成り立つことから当然です。しかし，これを答案として書くにはどうするか，ちょっと気になるが……

(解) $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ に行列 $F=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$ を対応させると，

$f\circ g(x)$ には行列 FG が対応

する。しかるに行列の積については結合法則が成り立つから

$$F(GH)=(FG)H$$

が成り立ち，これに対応して

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

が成り立つ。

このようにして，行列による扱いが大きな力を発揮することがわかりましょう。

＊　　＊　　＊

◆ では，ややめんどうな問題をやってみませんか。

ﾉﾊ7

練習 5. $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$ のとき $f\circ f$ を f^2，$f\circ f^2$ を f^3，……，一般に $f\circ f^{n-1}$ を f^n で表すとき $f^n(x)$ を求めよ。

ヒント　$f^n(x)$ はもちろん $f(x)$ の n 乗ではありませんよ。$f(x)$ の n 乗なら $\{f(x)\}^n$ と書かなければなりません。

さて，この問題はいろいろな解き方があります。**逐次代入法**でもできますし，**数列の扱い方**でもできます。ここでは，行列を使ってやってみましょう。

$f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$ に対応する行列は

$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ で与えられますが，$f^n(x)$ に対応する行列は $A^n=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^n$ で与えられます。A^n の計算にもいろいろのやり方があります（☞ p.108）。ここでは，**逐次計算** でいきましょう。

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2 & 0\\ 2(1+3) & 1^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^2 & 0\\ 2(1+3) & 1^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3^3 & 0\\ 2(1+3+3^2) & 1^3\end{pmatrix}$$

こうして，一般に

$$A^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 2(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}) & 1^n\end{pmatrix}\cdots(*)$$

であることが推定されます。その推定の正しいことは **数学的帰納法** を使って容易に証明できます。ところで (*) をこのままほうっておいてはいけません。

$$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}=\frac{1(1-3^n)}{1-3}$$

$$=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 3^n-1 & 1\end{pmatrix}$$

です。したがって

$$f^n(x)=\frac{3^n x}{(3^n-1)x+1}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

ﾊ/ﾜ

練習 6. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+4}$ のとき $f^2=f\circ f$，$f^n=f\circ f^{n-1}$ $(n\geqq 3)$ で定義する。$f^n(x)$ を求めよ。

ヒント　$f(x)=\dfrac{x-2}{x+4}$ に対応する行列を $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ とおくと，$f^n(x)$ に対応する行列は A^n で与えられる。

ところが $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ の **固有値と固有ベクトル** を求める（☞ p.170）と，固有値 2 とこれに属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$，固有値 3 とこれに属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ であるから，

$$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

となり，したがって

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n$$

より（☞ p. 109）

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}-3^n+2^{n+1} & -2\cdot 3^n+2^{n+1}\\ 3^n-2^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$f^n(x)=\frac{(-3^n+2^{n+1})x+(-2\cdot 3^n+2^{n+1})}{(3^n-2^n)x+(2\cdot 3^n-2^n)}$$

……答

注　本問は，行列の固有値，固有ベクトル，べき乗などの計算を必要とする難問で，できなくても当然。初めて学ぶ際はやらないでよい。

○方程式の解法と行列の利用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆行列を用いて方程式を解け，といわれても困ります。なぜなら，いろいろな方法があるからです。

◆ 連立1次方程式を解くのに行列を応用することができます。それには大きく分けて3つあります。第1は逆行列を使う方法，第2は基本変形法，第3は掃出し法です。では，まず逆行列を使う方法からいきましょう。

*　*　*

◆ まず，第1の **逆行列を使う方法** は次のようです。

練習1. 連立方程式

1/28

$$\begin{cases} x+5y=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

を解け。

ヒント　行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

いま，$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

とおきますと

$$AX=B$$

両辺に左から A の逆行列 A^{-1} を掛けてやりますと

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$

行列の積については結合法則が成り立つのですから，

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

ところが逆行列の定義から，単位行列をEを使って

$$A^{-1}A=E$$

で，

$$EX=X$$

ですから

$$X=A^{-1}B$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -18 \\ -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=2,\ y=1$　……答

答案は次のように書けばいいでしょう。

解　行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

答　$x=2,\ y=1$

*　*　*

◆ 第2は **基本変形法** です。

基本変形というのは次の3つです。

(1)　行列の各行を定数で割ること。

(2)　行列のある行に定数を掛けたものを他の行に加えること。

(3)　2つの行を交換すること。

これらの操作は方程式を解くときに使う操作と同じものであることに注意してください。ともあれ，具体的な例でひとつ考えてみましょう。

1/28

練習2.

$$\begin{cases} x+5y=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

を基本変形法で解け。

ヒント　$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ なる行列を考えます。

これを拡大係数行列といいます。基本変形を施して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を導くと $x=2,\ y=1$ と

いうことになるのです。

では，やってみましょう。

$$\begin{pmatrix}1&5&7\\2&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{第1行を2倍}\\\text{したものを第}\\\text{2行から引く}}]{}\begin{pmatrix}1&5&7\\0&-9&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第2行を}\\-9\text{ で割}\\\text{る}}]{}\begin{pmatrix}1&5&7\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{第2行を5倍し}\\\text{たものを第1行}\\\text{から引く}}]{}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

実際の解答は説明をいちいちかくこともありません。

(解) 拡大係数行列に基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix}1&5&7\\2&1&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&5&7\\0&-9&-9\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&5&7\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

を得る。ゆえに $x=2$，$y=1$ である。

* * *

◆ 第3は **掃出し法**（はきだしほう）です。これは上の基本変形と本質的に同じですが，ワクを作って縦に書いてゆく点で扱いやすいという利点があります。

1/28

練習 3. $\begin{cases}x+5y=7\\2x+y=5\end{cases}$

を掃出し法を用いて解け。

(ヒント) 練習2.でやったと同じことを次のような形式で書けばよいのです。

(解)

		x	y	
	①	1	5	7
	②	2	1	5
	①	1	5	7
②−①×2	②	0	−9	−9
	①	1	5	7
②÷(−9)	②	0	1	1
①−②×5	①	1	0	2
	②	0	1	1

(答) $x=2$，$y=1$

◆ では，次の問題をこの3つの仕方でやってみませんか。

練習 4. $\begin{cases}x+y+z=1\\y+z+u=2\\z+u+x=3\\u+x+y=4\end{cases}$

を解け。（武蔵大）

(答) $x=\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=-\dfrac{2}{3}$，$u=\dfrac{7}{3}$

1/26

練習 5. x，y についての連立1次方程式

$$(a-6)x+(a+1)y=0$$
$$(a-10)x+a(a+1)y=a-2$$

について，次の(1)，(2)に答えよ，ただし，a は定数とする。

(1) この連立1次方程式を行列を用いて表せ。

(2) この連立1次方程式が解をもたないような a の値を求めよ。

（大阪教育大）

(ヒント) (1)のほうはいうまでもなし!!

$$\begin{pmatrix}a-6&a+1\\a-10&a(a+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a-2\end{pmatrix}$$

(2) $(a-6)\cdot a(a+1)-(a-10)(a+1)=0$

が必要条件でした。しかし，十分条件とは限りませんから，個々に調べてみることが必要です。つまり，その結果は

$$a=-1,\ 5$$

不定，不能については（☞ p.190）を参照してください。

* * *

◆ なお，掃出し法を用いて，方程式の不能や不定となる場合の扱い方も知っておきたいところ。例えば，これです。

練習 6. $\begin{cases}x+2y+z=0\\4x+y+3z=0\\3x-y+2z=0\end{cases}$

を解け。

(答) 不定

⑪ 逆行列による方程式の解法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈方程式を解くのに逆行列を使うのはあまりうまくない。なぜなら逆行列を使うのに方程式を解かなければならないから。しかし……

◆ 具体的な問題から出発しましょう。

■練習 1. 逆行列を使って次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x+2y=9 \end{cases}$$

ヒント　与えられた連立方程式を行列を使って表しますと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

いま　$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

とおきますと,

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

両辺に左のほうからAの逆行列 A^{-1} を掛けてやりますと

$$A^{-1}(A\vec{x})=A^{-1}\vec{b}$$

$$\therefore\quad (A^{-1}A)\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

ところが $A^{-1}A=E$ で $E\vec{x}=\vec{x}$ ですから

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

ところで　$A^{-1}=\dfrac{1}{4-15}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\vec{x}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad x=1,\ y=2$　……答

解答としては，次のようでいいでしょう。

解　与えられた連立方程式を行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad x=1,\ y=2$　……答

■練習 2. 逆行列を使って

$$\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 3x-\ y=7 \end{cases}$$

を解け。

解　行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -26 \\ 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

答　$x=2,\ y=-1$

■練習 3. 逆行列を用いて，次の x，y についての連立方程式を解け。

$$\begin{cases} ax-2y-5=0 \\ 3x-\ y-a=0 \end{cases}\quad (a\fallingdotseq 6)$$
（松山商大）

解　行列を使って表せば

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ a \end{pmatrix}$$

$a\fallingdotseq 6$ であるから係数行列 $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列が存在する。これを両辺の左から掛けて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6-a}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6-a}\begin{pmatrix} 2a-5 \\ a^2-15 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad x=-\dfrac{2a-5}{a-6},\ y=-\dfrac{a^2-15}{a-6}$ ……答

◆ 次にはややめんどうな問題をやってみませんか。

練習 4. 逆行列を使って次を解け。

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

(解) 行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a^2 \neq 1$ ならば逆行列が存在し，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a-1}{a^2-1}=\frac{1}{a+1}$$

$$y=\frac{-1+a}{a^2-1}=\frac{1}{a+1}$$

$a=1$ のときは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに不定で $x+y=1$ ならばすべて適する。

$a=-1$ のときは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに不能である。

答 $\begin{cases} a \neq \pm 1 : x=y=\dfrac{1}{a+1} \\ a=1 : 不定 (x+y=1) \\ a=-1 : 不能 \end{cases}$

練習 5. 次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

関係式

$$① \quad \begin{cases} x=\boxed{}u+5v \\ y=4u+\boxed{}v \end{cases}$$

を満たす数 x, y, u, v は，必ず

$$② \quad \begin{cases} u=\boxed{}x-5y \\ v=\boxed{}y+3y \end{cases}$$

を満たし，また逆に，② を満たす数 x, y, u, v は，必ず①をも満たす。 （東大）

(ヒント) ① $\begin{cases} x=au+5v \\ y=4u+bv \end{cases}$

② $\begin{cases} u=cx-5y \\ v=dx+3y \end{cases}$

とおくと，①より

$$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 4 & b \end{pmatrix}$ が正則行列ならば

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 5 \\ 4 & b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ab-20}\begin{pmatrix} b & -5 \\ -4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ab-20}\begin{pmatrix} bx-5y \\ -4x+ay \end{pmatrix}$$

これと②を比較して

$$c=\frac{b}{ab-20} \quad \cdots\cdots ③$$

$$-5=\frac{-5}{ab-20} \quad \cdots\cdots ④$$

$$d=\frac{-4}{ab-20} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$3=\frac{a}{ab-20} \quad \cdots\cdots ⑥$$

④，⑥から　$a=3$

したがって，④より　$b=7$

ゆえに，⑤より　$d=-4$，③より　$c=7$

答 （順に）3，7，7，-4

(注) 答はこれでよいが，行列 $\begin{pmatrix} a & 5 \\ 4 & b \end{pmatrix}$ が正則でないときはどうなるか，自分で考えておいてください。

練習 6. x，y に関する連立1次方程式

$$\begin{cases} (a-3)x-2y=2a \\ 3x+(2a+1)y=-a-2 \end{cases}$$

が解をもたないように a の値を定めよ。答えは既約分数で書け。 （一橋大）

(ヒント) 解をもたないなら，係数行列が正則でないのですから

$$(a-3)(2a+1)-3(-2)=0$$

$$\therefore \quad 2a^2-5a+3=0$$

$$\therefore \quad a=1, \quad a=\frac{3}{2}$$

代入して調べると　$a=\dfrac{3}{2}$

答 $a=\dfrac{3}{2}$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○ 掃出し法による方程式の解法

◆ハキダシ法とはいかにも西洋くさい。東洋流なら，もっと，道徳的，かつ，非人間的名前をつけるところだろうに。

◆ 連立1次方程式を解くに使われる **掃出し法**（はきだしほう）というのはよく使えるようにしておかなければなりません。

まず，これをやってみましょう。

練習 1.　$3x+5y=18$　……①

$2x+3y=11$　……②

を解け。

ヒント　いろいろな解き方がありますが，ここではあとのこともあるので，次のように解いてみましょう。

①×2：　$6x+10y=36$　……③

②×3：　$6x+\ 9y=33$　……④

次に，

③−④：　$0x+1y=3$　……⑤

④÷3：　$2x+3y=11$　……⑥

次に，

⑤：　$0x+1y=3$　……⑦

⑥−⑤×3：　$2x+0y=2$　……⑧

次に，

⑤：　$0x+1y=3$　……⑨

⑧÷2：　$1x+0y=1$　……⑩

次に，

⑨と⑩を交換：　$1x+0y=1$　……⑪

$0x+1y=3$　……⑫

この結果は解が $x=1$，$y=3$ であることを示しています。上のような操作を次のような表にまとめたとき，この方法を掃出し法といいます。もちろん，これはひとつの手順を示しただけですし，これがもっともうまい方法というのでもないのです。番号は常に①，②とつけて左に説明をつけておくのがよいでしょう。

		x	y	
	①	3	5	18
	②	2	3	11
①×2	①	6	10	36
②×3	②	6	9	33
①−②	①	0	1	3
	②	6	9	33
	①	0	1	3
②÷3	②	2	3	11
	①	0	1	3
②−①×3	②	2	0	2
	①	0	1	3
②÷2	②	1	0	1
①，②を交換	①	1	0	1
	②	0	1	3

答　$x=1$，$y=3$

注　最後の欄では x，y の係数が単位行列となっている。つまり，ここまでもってくるのが習慣なのです。

練習 2.　$3x+\ y=8$

$5x+3y=16$

を掃出し法で解け。

ヒント

		x	y	
	①	3	1	8
	②	5	3	16
	①	3	1	8
②−①×3	②	−4	0	−8
	①	3	1	8
②÷(−4)	②	1	0	2
①−②×3	①	0	1	2
	②	1	0	2
①，②を交換	①	1	0	2
	②	0	1	2

答　$x=y=2$

*　　*　　*

◆ では，三元の場合をひとつやってみませんか。

練習 3. 連立方程式

12/2

$$\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ x+2y+z=5 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$$

を解け。

(解)

		x	y	z	
	①	2	1	1	6
	②	1	2	1	5
	③	1	1	2	5
①+②+③	①	4	4	4	16
	②	1	2	1	5
	③	1	1	2	5
①÷4	①	1	1	1	4
	②	1	2	1	5
	③	1	1	2	5
	①	1	1	1	4
②−①	②	0	1	0	1
③−①	③	0	0	1	1
①−(②+③)	①	1	0	0	2
	②	0	1	0	1
	③	0	0	1	1

答 $x=2,\ y=1,\ z=1$

* * *

◆ では，次には文字の入った場合です。

12/2

練習 4. 連立方程式

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

を解け。

(解)

		x	y	
	①	a	1	1
	②	1	a	1
①，②を交換	①	1	a	1
	②	a	1	1
①−②×a	①	$1-a^2$	0	$1-a$
	②	a	1	1

$a^2\neq 1$ のとき

①÷$(1-a^2)$	①	1	0	$\frac{1}{1+a}$
	②	a	1	1
②−①×a	①	1	0	$\frac{1}{1+a}$
	②	0	1	$\frac{1}{1+a}$

$a=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad x+y=1 \text{（不定）}$$

$a=-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{不能}$$

答
$$\begin{cases} a\neq\pm 1 \text{ のとき } x=y=\dfrac{1}{1+a} \\ a=1 \text{ のとき不定 } (x+y=1) \\ a=-1 \text{ のとき不能} \end{cases}$$

練習 5. $a\neq 1,\ -2$ のとき次を解け。

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

(解)

		x	y	z	
	①	a	1	1	1
	②	1	a	1	1
	③	1	1	a	1
①+②+③	①	$a+2$	$a+2$	$a+2$	3
	②	1	a	1	1
	③	1	1	a	1
①÷$(a+2)$	①	1	1	1	$\frac{3}{a+2}$
	②	1	a	1	1
	③	1	1	a	1
	①	1	1	1	$\frac{3}{a+2}$
②−①	②	0	$a-1$	0	$\frac{a-1}{a+2}$
③−①		0	0	$a-1$	$\frac{a-1}{a+2}$
（以下省略）					

答 $x=y=z=\dfrac{1}{a+2}$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○不定・不能の行列

◆不定や不能は数Ⅰでやってありますが，行列の立場からみると，ハテ，どういうことになっているのかな。

◆ このセクションでは連立1次方程式が不定や不能であるとき，行列ではどのように扱うか，ということを練習するのが目的です。ムリにやるほどのこともないが，なるべくならやってほしいもののひとつです。では，さっそく，具体的なものをやってみましょう。

■練習 1. 連立方程式

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=0 & \cdots\cdots① \\ 6x+3y=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の解の集合を求めよ。

ヒント ①の両辺を3倍すれば②になりますから，①を満足する x，y がすべて②を満足するのです。だから，x，y の値はひとつにきまらない。つまり不定です。

さて，$x=k$ とおくと $y=-2k$ ですから，

$$(x,\ y)=(k,\ -2k)=k(1,\ -2)$$

となります。このように，解を成分とするベクトルを解ベクトルといい，$(1,\ -2)$ を **基本解**，$k(1,\ -2)$ を **一般解** といいます。そして，解の集合は，ほかでもない，この一般解のことです。

だから，答は k を任意の定数として

$$(x,\ y)=k(1,\ -2)$$

と書けばいいでしょう。

さて，行列を使って①，②を表せばどうなるのか。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

しかし，この係数行列

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

は正則でありませんから，逆行列をもたない。だから，逆行列を使って解くことはできないのです。

■練習 2. 連立方程式

$$\begin{cases} x+\qquad ay=0 \\ ax+(a+2)y=0 \end{cases}$$

を解け。

（解） 行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

さて，

$$1\cdot(a+2)-a^2=-(a-2)(a+1)$$

である。したがって，

$a \fallingdotseq 2,\ -1$ のときには行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a+2 \end{pmatrix}$ は正則であるから，逆行列が存在し，これを①の両辺に左から乗じて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=0,\ y=0$$

$a=2$ のときには

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに解は

$$(x,\ y)=k(2,\ -1)\quad (k\text{は任意})$$

$a=-1$ のときには

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに解は

$$(x,\ y)=k(1,\ 1)\quad (k\text{は任意})$$

$$\boxed{答}\ \begin{cases} a \fallingdotseq 2,\ -1 \text{ のとき} & x=y=0 \\ a=2 \text{ のとき} & x=2k,\ y=-k \\ a=-1 \text{ のとき} & x=k,\ y=k \end{cases}$$

（kは任意の数）

*　　*　　*

◆ 次には不能の場合を扱ってみましょう。まず，これです。

練習 3. 連立方程式

$$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots① \\ 3x+6y=2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を解け。

ヒント ①の両辺を3倍しますと

$$3x+6y=3 \qquad \cdots\cdots③$$

②，③より 2=3，これは不合理!! いや，ここまでいわないでも解のないこと(つまり，不能である）がわかります。

さて，①，②を行列を使って表してみますと，次の通り。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

そして，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ は $1\cdot6-2\cdot3=0$ ですから正則ではないから，逆行列を左から乗じて解く，というわけにいかないのです。

* * *

◆ 一般に，連立1次方程式

$$ax+by=c$$
$$Ax+By=C$$

を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ C \end{pmatrix}$$

で，正則でないときには

$$aB-Ab=0 \qquad \therefore \ \frac{a}{A}=\frac{b}{B}=k$$

とおきますと $a=kA$, $b=kB$ ですから

$$\begin{pmatrix} kA & kB \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ C \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ \begin{pmatrix} k(Ax+By) \\ 1\cdot(Ax+By) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ C \end{pmatrix}$$

ですから

$\dfrac{c}{C}=\dfrac{k}{1}$ なら 不定 $(Ax+By=C)$

$\dfrac{c}{C}\neq\dfrac{k}{1}$ なら 不能

となるのです。つまり

$\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}=\dfrac{c}{C}$ のとき 不定

$\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}\neq\dfrac{c}{C}$ のとき 不能

というわけです。A, B, C の中に0のある特別の場合は，それぞれ別個に考えてみればいいでしょう。

* * *

◆ 最後に，不定や不能の場合を掃出し法で扱ってみるとどうなるでしょうか。

練習 4. 掃出し法によって次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+\ \ y+2z=5 \\ 5x+5y+8z=13 \end{cases}$$

ヒント 掃出し法ではどうなるか。

		x	y	z	
	①	1	2	3	4
	②	3	1	2	5
	③	5	5	8	13
	①	1	2	3	4
②−①×3	②	0	−5	−7	−7
③−①×5	③	0	−5	−7	−7
	①	1	2	3	4
	②	0	−5	−7	−7
③−②	③	0	0	0	0
	①	1	2	3	4
②÷(−5)	②	0	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$
	③	0	0	0	0
①−②×2	①	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
	②	0	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$
	③	0	0	0	0

ここで $z=k$ とすると，次のようになります。

$$x=\frac{6-k}{5},\ \ y=\frac{7-7k}{5},\ \ z=k$$

(k：任意)

① ケーリー・ハミルトンの定理

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆この定理はオボエテイナケレバナラナイことにはなっていません。しかし，少なくとも受験生は知っている必要があります。

◆ 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

という関係が成り立ちます。これを，**ケーリー・ハミルトンの定理**といいます。

例えば，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

について

$$A^2-4A-5E=O$$

となります。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なら

$$A^2-2A+E=O \qquad \cdots\cdots(*)$$

となりますが，このように$A=E$のときには

$$A^2+5A-6E=O$$

ともなるし

$$A^2-10A+9E=O$$

ともなるのですから(*)しか成り立たないというわけではありません。

*　*　*

◆ では，ケーリー・ハミルトンの定理の関係した問題をいくつか練習しておくことにしましょう。

練習 1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$のとき$A^2$を求めよ。

(ヒント)

$$A^2-3A-10E=O$$

$$\therefore\quad A^2=3A+10E$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

A^2を直接計算してもべつにめんどうはありませんが，こんなこともできる，というわけ。

練習 2. $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$のとき$A^3$を求めよ。

(ヒント)

$$A^2+A+E=O$$

$$\therefore\quad A^3=A\cdot A^2$$

$$=A(-A-E)$$

$$=-A^2-A=E$$

あるいは

$$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$$

$$=(A-E)O=O$$

$$\therefore\quad A^3=E$$

としてもよいのです。

練習 3. 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$において，

$ad-bc=0$が成り立つとき

(1) $A^2=(a+d)A$を示せ。

(2) $A^3=A$ならば$A^2=A$または$A^2=-A$であることを示せ。　（群馬大）

(ヒント) (1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

であるから

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

$ad-bc=0$ならば

$$A^2=(a+d)A$$

(2) $A^3=AA^2=A\cdot(a+d)A$

$$=(a+d)A^2$$

$$=(a+d)\cdot(a+d)A$$

$$=(a+d)^2A$$

$$\therefore\quad (a+d)^2A=A$$

そこで$A\neq O$ならば

$$(a+d)^2=1 \qquad \therefore\quad a+d=\pm1$$

$$\therefore\ A^2=A \text{ または } A^2=-A$$

$A=O$ ならば当然成り立ちます。

練習 4. 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が $A^3=E$ を満足するように実数 a, b, c を定めよ。

（東北大）

（解） $A^2-(a+c)A+(ac-b^2)E=O$

$$\begin{aligned}\therefore\ A^3&=(a+c)A^2-(ac-b^2)A\\&=(a+c)\{(a+c)A-(ac-b^2)E\}\\&\qquad-(ac-b^2)A\\&=\{(a+c)^2-(ac-b^2)\}A\\&\qquad-(a+c)(ac-b^2)E\end{aligned}$$

(i) $A=kE$ となるのは $a=c=k$ かつ $b=0$ のときで，$A^3=k^3E$, $\therefore$ $a=c=1$ かつ $b=0$

(ii) $A\neq kE$ のときには $A^3=E$ であるためには

$$(a+c)^2-(ac-b^2)=0 \quad \cdots\cdots①$$

かつ $$-(a+c)(ac-b^2)=1 \quad \cdots\cdots②$$

ここで $a+c=u$, $ac-b^2=v$ とおくと

$$u^2-v=0\cdots\cdots①',\quad -uv=1\cdots\cdots②'$$

①′より $v=u^2$

②′に代入して $u^3=-1$, $u=-1$

$$\therefore\ v=1$$

$$\therefore\ a+c=-1,\ ac-b^2=1$$

$$a+c=-1\cdots\cdots③,\quad ac=b^2+1\cdots\cdots④$$

③，④を満足する a, c は 2 次方程式

$$t^2+t+(b^2+1)=0$$

の 2 つの解である。ところが判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(b^2+1)=-4b^2-3<0$$

ゆえに③，④を満足する a, c は存在しない。 答 $a=c=1$, $b=0$

* * *

◆ 行列の多項式の計算にも有効です。例えば：——

練習 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $A^3+2A^2+4A-5E$ を計算せよ。

（ヒント） $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ですから

$$A^2-2A-3E=O$$

ところが

$$\begin{aligned}&A^3+2A^2+4A-5E\\&=(A^2-2A-3E)(A+4E)+(15A+7E)\end{aligned}$$

です。これはふつう x の多項式の場合によく使う方法で求められます。つまり：

$$\begin{array}{rrr|rrrr} & & & 1 & 4 & & \\ \hline 1 & -2 & -3) & 1 & 2 & 4 & -5 \\ & & & 1 & -2 & -3 & \\ \hline & & & & 4 & 7 & -5 \\ & & & & 4 & -8 & -12 \\ \hline & & & & & 15 & 7 \end{array}$$

したがって本問の場合

$$\begin{aligned}&A^3+2A^2+4A-5E=15A+7E\\&=15\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 22 & 30 \\ 30 & 22 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります。

練習 6. $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき A^5 を計算せよ。

（解） $$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^2-A+E=O$$

$$\begin{array}{rrr|rrrrrr} & & & 1 & 1 & 0 & -1 & & \\ \hline 1 & -1 & 1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & -1 & 0 & & \\ & & & & 1 & -1 & 1 & & \\ \hline & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & & & & & & & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ A^5&=(A^2-A+E)(A^3+A^2-E)-A+E\\&=-A+E\\&=-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

……答

◐ケーリー・ハミルトンの定理(つづき)

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆便利なものほど，うっかりすると誤って使われることが多いものです。注意せざるべからず，戒心せざるべからず。

◆ ここには，ケーリー・ハミルトンの定理についてやや立ち入ったことがらを練習するのが目的です。

練習1. α，βを実数とするとき

$$A^2-(\alpha+\beta)A+(\alpha\beta)E=O\cdots\cdots(*)$$

を満たす行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad-bc$ の値は $\alpha\beta$，α^2，β^2 のいずれかであることを示せ。

ヒント　ケーリー・ハミルトンの定理により

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)=O\cdots\cdots(**)$$

(*) と (**) とからうっかり

$$\alpha+\beta=a+d,\ \alpha\beta=ad-bc$$

とやってはいけません。それが上の練習1の大事な点です。

さて，(*) から (**) を辺々相減じて

$$\{(a+d)-(\alpha+\beta)\}A-\{(ad-bc)-\alpha\beta\}E=O$$

となります。

そこで

(i)　$a+d=\alpha+\beta$ ならば

$$ad-bc=\alpha\beta$$

となりましょう。

(ii)　$a+d\neq\alpha+\beta$ ならば

$$A=kE$$

と書けます。このとき (*) に $A=kE$ を代入して

$$k^2E-(\alpha+\beta)kE+\alpha\beta E=O$$

$$\therefore\quad \{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}E=O$$

$$\therefore\quad k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta=0$$

$$\therefore\quad (k-\alpha)(k-\beta)=0$$

$$\therefore\quad k=\alpha,\ \beta$$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ あるいは } A=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad ad-bc=\alpha^2 \text{ または } \beta^2$$

Q.E.D.

注　ケーリー・ハミルトンの定理を使わなければどうなるでしょうか。

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を (*) に代入して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\alpha\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

両辺の対応する元をくらべて

$$a^2+bc-(\alpha+\beta)a+\alpha\beta=0\quad\cdots\cdots①$$

$$b\{(a+d)-(\alpha+\beta)\}=0\quad\cdots\cdots②$$

$$c\{(a+d)-(\alpha+\beta)\}=0\quad\cdots\cdots③$$

$$d^2+bc-(\alpha+\beta)d+\alpha\beta=0\quad\cdots\cdots④$$

②，③より

(i)　$a+d\neq\alpha+\beta$ のときには

$$b=0,\ c=0$$

これを①，④に代入して

$$a^2-(\alpha+\beta)a+\alpha\beta=0$$

$$d^2-(\alpha+\beta)d+\alpha\beta=0$$

$$\therefore\quad a=\alpha \text{ あるいは } \beta$$

$$d=\alpha \text{ あるいは } \beta$$

$a=\alpha$，$d=\beta$ あるいは $a=\beta$，$d=\alpha$ のとき上の条件に適しない

ゆえに $a=\alpha$ かつ $d=\alpha$

あるいは $a=\beta$ かつ $d=\beta$

で，このとき

$$ad-bc=\alpha^2 \text{ あるいは } \beta^2$$

(ii)　$a+d=\alpha+\beta$ のときには①より

$$a^2+bc-(a+d)a+\alpha\beta=0$$

$$\therefore\quad ad-bc=\alpha\beta$$

が得られます。(④からもまったくおなじようにしてこれが得られるのです)

こうして証明することができました。

* * *

◆ 固有値とケーリー・ハミルトンの定理の間にも密接な関係があります。つまり

kが $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値であるための必要十分条件は

$$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$$

である。これは，ケーリー・ハミルトンの定理でAのところをkでおきかえたものなのです。では証明をしてみましょう。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を展開して

$$(a-k)x+by=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$cx+(d-k)y=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$\therefore \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でない解をもつための条件は

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix}=0$$

であること，したがって

$$(a-k)(d-k)-bc=0$$

つまり，$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$

が成り立つことなのです。これがピンとこない人は①，②が $x=0$，$y=0$ 以外の解をもつための必要十分条件は，2直線①，②が一致すること，したがって

$$\frac{a-k}{c}=\frac{b}{d-k}$$

となること，を使ったらよいでしょう。

では次の練習をやってみませんか。

練習 2. 行列Aの固有値を α，β とすると，A^2 の固有値は α^2，β^2 であることを証明せよ。

ヒント $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ならば

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix}$$

ところでAの固有値は

$k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$ の2つの解で，A^2 の固有値は

$$k^2-(a^2+d^2+2bc)k$$
$$+\{(a^2+bc)(d^2+bc)-bc(a+d)^2\}=0$$

したがって

$$k^2-(a^2+d^2+2bc)k+(ad-bc)^2=0$$

の2つの解なのです。

ところが，上の方程式の2つの解を k_1，k_2 としますと

$$k_1+k_2=a+d$$
$$k_1k_2=ad-bc$$

ですから

$$k_1{}^2+k_2{}^2=(k_1+k_2)^2-2k_1k_2$$
$$=(a+d)^2-2(ad-bc)$$
$$=a^2+d^2+2bc$$
$$k_1{}^2\cdot k_2{}^2=(ad-bc)^2$$

なるほど予定どおりになりました。

* * *

◆ こうしてケーリー・ハミルトンの定理の一部をのぞいたわけですが，その重要さがよくわかるでしょう。入試としては余り立ち入ることもありませんが，できれば，ケーリー・ハミルトンの定理を使ってとける問題は，別解として，それを使わない解答をつねにやることにすると理解を深めることができるでしょう。

では最後のひとつ。

練習 3. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $A^2-5A+4E=O$ のとき $ad-bc$ の値をすべて求めよ。

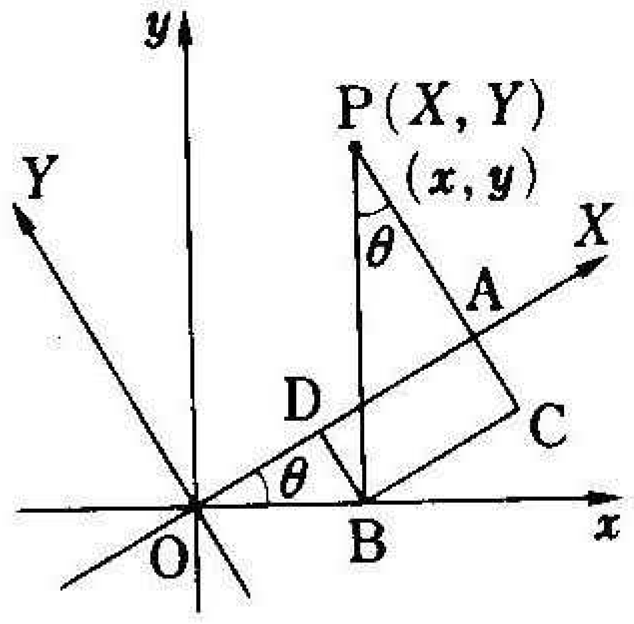
ヒント $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $A^2-5A+4E=O$ に代入してもよし，$A=kE$ と $A\neq kE$ とに分けてケーリー・ハミルトンを使うもよし。

断呼としてやってみること。

答 1，16，4

座標軸の回転と蛇足

◆座標軸の回転と図形の回転の行列があまりによく似ているものですから，とかく，混乱しがちです。そこをハッキリと……



◆ 原点のまわりに x 軸を θ だけ回転して得られる座標系を XY とします。

つまり，点は動かないのに，座標系が変わるために座標が $(x,\ y)$ から $(X,\ Y)$ に変わったというわけです。このとき

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

という関係があります。

証明は，上の図を使うと

$$\begin{aligned}X&=\mathrm{OA}=\mathrm{OD}+\mathrm{DA}\\&=\mathrm{OD}+\mathrm{BC}\\&=x\cos\theta+y\sin\theta\\Y&=\mathrm{CP}-\mathrm{CA}=-\mathrm{BD}+\mathrm{CP}\\&=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{aligned}$$

これをp.152のやり方とくらべてみないか。ところで，応用例をやってみましょう。

■練習 1. 曲線 $x^2+4xy+y^2=1$ のグラフをかけ。

(ヒント) x，yについて対称です。つまり，x，yを交換して変わらない。だから，この曲線は $y=x$ について対称です。してみると 45° 回転して対称軸をX軸にすれば簡単な形になるにちがいない。

そこで変換の行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}$$

つまり

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}},\ y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

ところで $x^2+4xy+y^2=1$ を変形して

$$(x+y)^2+2xy=1$$

$$\therefore\ (\sqrt{2}X)^2+2\frac{X^2-Y^2}{2}=1$$

$$\therefore\ 3X^2-Y^2=1$$

これは新座標系について，漸近線

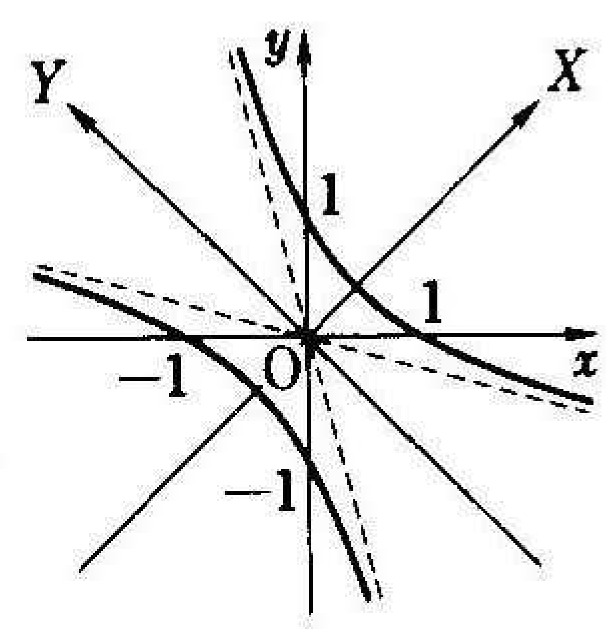
$$Y=\pm\sqrt{3}X$$

の双曲線です。グラフは下のとおり。

そして

$$X=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$Y=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$



を代入してみると漸近線のもとの座標系に関する方程式が得られます。それは

$$y=(-2\pm\sqrt{3})x$$

となります。焦点は新座標系では

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$$

でもとの座標系では

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\ （複号同順）$$

です。

*　*　*

なお，座標軸を回転するのはあくまでも手段であって，目的は旧座標系であるのがふつうです。だから，旧座標系に即して考えることにつとめなければなりません。