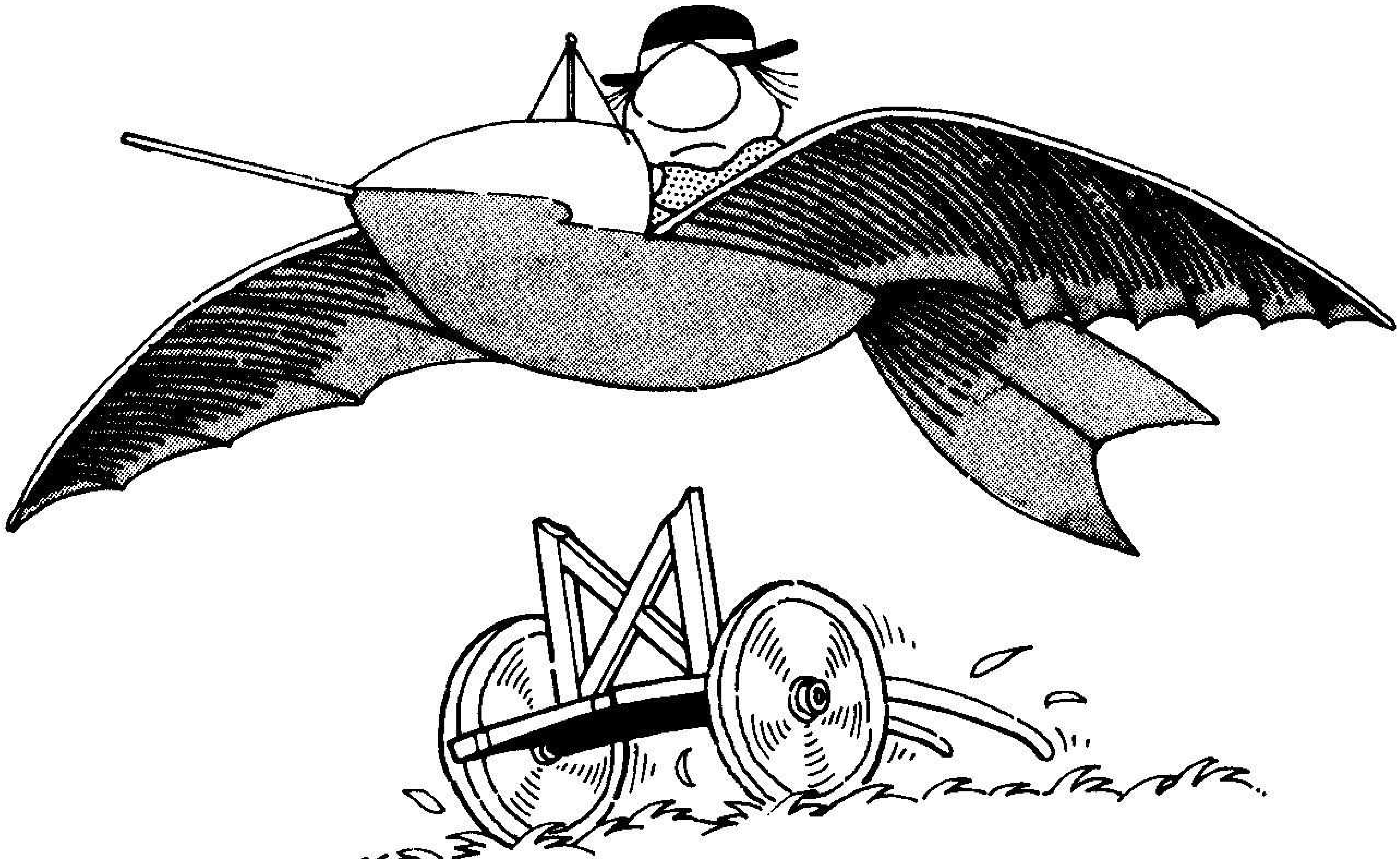
第2章

平面上のベクトル



1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○ベクトルとは何か

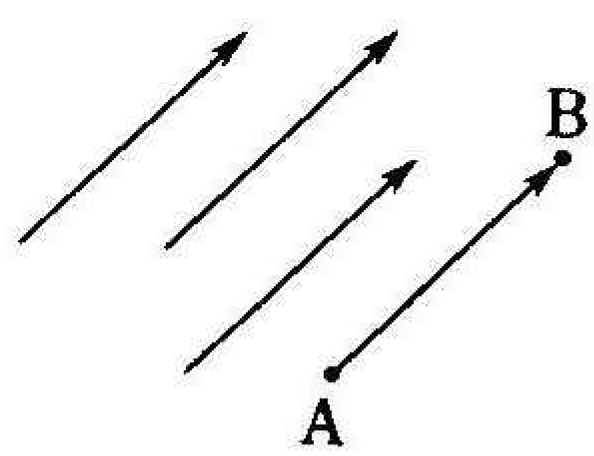
◈ベクトルは便利な道具です。座標などよりずっと役に立つ。というのも，分割できる，いや分割処理ができるからなんです。

◆ ベクトルの本来の定義は大学で習うのです。高校でやるのは，2つ。1つは数学でやる幾何ベクトル，もう1つは物理でやる物理ベクトルです。ところで，幾何ベクトルは，方向と大きさをもったものとして定義されます。そして，それには2つあって，それは自由ベクトルと位置ベクトルなのです。

*　*　*

◆ では，まず **自由ベクトル** から：――

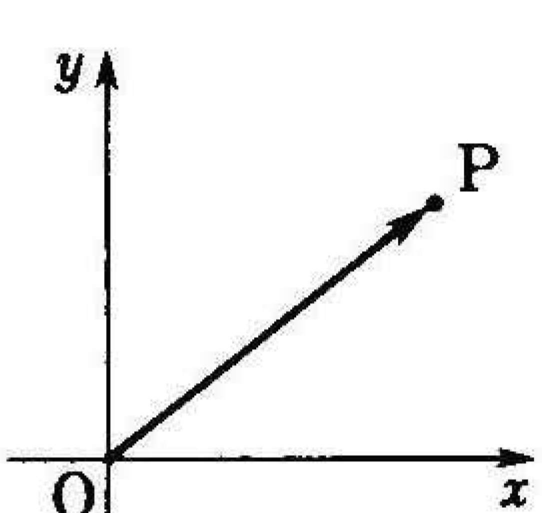
方向と大きさをもったもの をベクトルといいますが，方向と大きさとだけでは，1つにはきまらない。無数にあります。



AからBまで引かれたベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表し，Aを **起点** あるいは **始点** といい，Bを **終点** といいます。ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさ，つまり，長さ，これを $|\overrightarrow{AB}|$ で表します。そして，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさ，長さ，絶対値などと読みます。

とくにベクトルの起点を固定したとき，**位置ベクトル** といいます。起点を固定した，といってもピンとこないかもしれません。簡単にいえば原点から引いたベクトルを位置ベクトルというのです。原点からベクトルを引くと，そのベクトルさえきまれば，終点もきまってしまいます。そこで，そのベクトルで終点を表すこともできます。

右の図で $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$ と表すとき，点Pのことを単に **点 $\boldsymbol{a}$** ということがあります。



*　*　*

◆ ベクトルの成分とは，終点の座標から始点の座標を引いたものです。つまり，

2点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ があるとき，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分は $(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

だから，原点から引いたベクトル $\overrightarrow{OA}$ の成分は $(a_1-0,\ a_2-0)$ つまり $(a_1,\ a_2)$ ですから，原点からの位置ベクトルでは成分と終点の座標は同じもので表せます。だから，座標で解ける問題はすべて位置ベクトルを使ってできるわけ。しかも，ベクトルの成分については点の座標にない便利な点がありますので，多くの場合ベクトルのほうが便利です。

練習 1. 平面上に3点 $A(1,\ 2)$，$B(4,\ 5)$ および $C(-1,\ -4)$ がある。ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分で表せ。

(解) $\overrightarrow{AB}=(4-1,\ 5-2)=(3,\ 3)$
$\overrightarrow{BC}=(-1-4,\ -4-5)=(-5,\ -9)$

なおベクトルの成分について詳しいことは（☞ p.46）を参照してください。

*　*　*

◆ 位置ベクトルと自由ベクトルの関係をしっかりつかんでおくことが大切です。自由ベクトルは，大きさと方向だけをきめてとくに起点を固定してないもの。簡単にいうと，原点から引かれてないベクトルともいえます。

さて，$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ としますと，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は位置ベクトルで，$\overrightarrow{AB}$ や $\overrightarrow{BA}$ は自由ベクトルというわけです。そして

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

なる関係があります。

* * *

◆ ここでベクトルの演算について説明しておきましょう。(1, 2) と書いたときに，これが座標を表しているのか，位置ベクトルあるいは自由ベクトルの成分を表しているのかわかりませんね。つまり，区別がつかない。

実は，そこのところが便利な点で，その便利な原因は演算にあるのです。

◉ベクトルの和；ベクトルを成分で表したとき，和を次のように定義します。

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})+(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2}+\boldsymbol{b_2})$$

そうすると，ベクトルの差は当然

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})-(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2}-\boldsymbol{b_2})$$

ということになりましょう。

とくに，

$$(a_1,\ a_2)-(a_1,\ a_2)$$
$$=(a_1-a_1,\ a_2-a_2)=(0,\ 0)$$

となります。つまり成分が2つとも0のベクトル，しかし，これでは方向性がない。ベクトルとはいいにくいところですが，これをとくに **零ベクトル** といいます。

◉ベクトルに実数を掛ける；2つのベクトルの和の定義から

$$2(a_1,\ a_2)=(a_1,\ a_2)+(a_1,\ a_2)$$
$$=(a_1+a_1,\ a_2+a_2)=(2a_1,\ 2a_2)$$

はすぐ出ます。一般に k を実数として

$$\boldsymbol{k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)}$$

が成り立ちます。では，次の練習を：——

4/23

■練習 2. $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ 1)$ とするとき $3\vec{a}+4\vec{b}$ を成分で表せ。

(解) $3\vec{a}+4\vec{b}=3(2,\ 3)+4(5,\ 1)$

$=(6,\ 9)+(20,\ 4)=(26,\ 13)$

答 (26, 13)

4/28

■練習 3. $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$, $\vec{c}=(4,\ 2)$ のとき $3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を求めよ。また $\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}=\vec{0}$ となる x があるか。

答 (6, 11)，ない。

4/27

■練習 4. $\vec{a}=(2, 3)$, $\vec{b}=(1, -1)$, $\vec{c}=(1, 4)$ のとき $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ ならば実数 k, l の値を求めよ。

(ヒント) $k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(1,\ -1)$

$=(2k+l,\ 3k-l)$

これが $\vec{c}$ に等しいから

$$2k+l=1,\ 3k-l=4$$

これを解いて

$$k=1,\ l=-1 \quad \cdots\cdots \text{答}$$

* * *

◆ ベクトルは和や差についてはふつうの代数のように扱うことができます。例えば，これです。

■練習 5. $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(5,\ -3)$ のとき $3\vec{a}+\vec{x}=4\vec{b}$ となる $\vec{x}$ を求めよ。

(解) $3\vec{a}+\vec{x}=4\vec{b}$

$\therefore\ \vec{x}=4\vec{b}-3\vec{a}=4(5,\ -3)-3(2,\ 4)$

$=(20,\ -12)-(6,\ 12)$

$=(20-6,\ -12-12)$

$=(14,\ -24)$

4/18 答 (14, −24)

■練習 6. $\vec{x}+2\vec{y}=(1,\ 3)$ ……①

$2\vec{x}+\vec{y}=(4,\ 1)$ ……②

を解け。

(ヒント) ①−②×2 を作れば

$$-3\vec{x}=(-7,\ 1)$$

$$\therefore\ \vec{x}=\left(\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

①×2−② を作れば

$$3\vec{y}=(-2,\ 5)$$

$$\therefore\ \vec{y}=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

といったぐあい。べつにめんどうではありませんね。ベクトルの立入ったことについては（☞ p.56, p.52, p.48）などを参照してください。くどいが自由ベクトルと位置ベクトルに注意すること。

○ベクトルの成分とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈ベクトルは多くの場合，成分に分けないでやるのがコツ。しかし，成分で与えられているものは仕方があるまい。

◆　2点A，Bの座標が与えられたとき，終点の座標から始点の座標を引いたもの，つまり

$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ のとき，
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$
を ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分 という。

したがって

$\overrightarrow{BA}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

であるし，原点を $O(0,\ 0)$ とすると

$\overrightarrow{OA}=(a_1-0,\ a_2-0)=(a_1,\ a_2)$

つまり，原点から引いたベクトルの成分は終点の座標と同じ形に表されます。しかし，点とはちがいます。**ベクトルは演算ができる**からです。すなわち，

$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

kを実数として
$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$

など。また，2つのベクトルが等しいというのは対応する成分が等しいことです。これはベクトルの定義から明らかなこと。

4/18
■練習1. $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき
$2\vec{a}-3\vec{b}$
を計算して成分で表せ。

（解）$2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,\ 2)-3(3,\ 4)$
$=(2,\ 4)-(9,\ 12)=(2-9,\ 4-12)$
$=(-7,\ -8)$

答　$(-7,\ -8)$

4/18
■練習2. $x(1,\ 2)+y(2,\ 3)=(10,\ 16)$
が成り立つように，実数 x，y を求めよ。

（ヒント）　$x+2y=10$
$2x+3y=16$

を解いて $x=2$，$y=4$ です。

答　$x=2$，$y=4$

＊　＊　＊

◆　ベクトルの成分について大切なことは3つあります。第1はベクトルの平行条件，第2はベクトルの長さ，第3はベクトルの内分点・外分点の問題です。

まず，平行条件から。

ベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行であるための条件は
$\vec{a}=k\vec{b}$
なる0でない実数kがあること

です。そこで，成分でなら

$(a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)\quad(k\neq 0)$

$\therefore\ a_1=kb_1,\ a_2=kb_2$

したがって，また

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\neq 0$$

とも書けます。

4/18
■練習3. 2点 $A(1,\ 2)$，$B(3,\ 5)$ を通る直線の方程式を，ベクトルを使って求めよ。

（ヒント）　直線上の点を $P(x,\ y)$ とすると
$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2)$
3点A，B，Pが1直線上にあるとは
$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AP}$
ということです。

$\therefore\ (x-1,\ y-2)=k(2,\ 3)$

$\therefore\ x-1=2k,\ y-2=3k$

$\therefore\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$

$\therefore\ 3(x-1)=2(y-2)$

$\therefore\ 3x-2y+1=0$　……答

練習 4. 平面上に異なる 4 点 A, B, C, D が与えられ，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ の成分表示がそれぞれ $(4,\ 5)$, $(a,\ b)$, $(-3,\ -2)$ であるとき，$\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{DA}$ が平行であれば，a と b はどのような関係にあるか。

ヒント　ベクトルの問題で，しかも図形の問題ですから，まず，ベクトルの起点をきめるべきです。どこでもいいが，点Aを採用しましょう。そうすると

$$\overrightarrow{AB}=(4,\ 5)$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(4,\ 5)+(a,\ b)$$
$$=(4+a,\ 5+b)$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=(4,\ 5)+(a,\ b)+(-3,\ -2)$$
$$=(4+a-3,\ 5+b-2)$$
$$=(a+1,\ b+3)$$

したがって

$$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=(-a-1,\ -b-3)$$

で，$\overrightarrow{BC} /\!/ \overrightarrow{DA}$ という条件から，k を実数として

$$(a,\ b)=k(-a-1,\ -b-3)$$
$$\therefore\ a=k(-a-1) \qquad \cdots\cdots①$$
$$b=k(-b-3) \qquad \cdots\cdots②$$

①÷② より

$$\frac{a}{b}=\frac{-a-1}{-b-3}$$
$$\therefore\quad b=3a \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　　*　　*

◆ 第2はベクトルの長さ（大きさ）です。成分が $(a,\ b)$ なら長さはいうまでもなく

$$\boldsymbol{|(a,\ b)|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられます。

練習 5. ベクトル $\vec{a}=(4,\ 3)$ の長さを求めよ。　（東海大）

解　$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\boxed{答}$ 5

練習 6. A(2, 3), B(3, −1) とするとき $\overrightarrow{AB}$ の大きさを求めよ。

解　$\overrightarrow{AB}=(3-2,\ -1-3)=(1,\ -4)$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17} \cdots\cdots \boxed{答}$

練習 7. $\vec{a}=(1,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$ とするとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

ヒント　$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 1)+t(2,\ 3)$

$$=(2t+1,\ 3t+1)$$
$$\therefore\ |\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2t+1)^2+(3t+1)^2$$
$$=13t^2+10t+2$$
$$=13\left(t+\frac{5}{13}\right)^2+\frac{1}{13}$$

ゆえに $t=-\dfrac{5}{13}$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ なる最小値をとることがわかります。　$\boxed{答}$ $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

*　　*　　*

◆ 最後に内分点・外分点のこと。

2点A, Bの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とするとき，AB を $m:n$ に，

内分する点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}}$$

外分する点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}}$$

で与えられます。したがって，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の成分がわかれば，内分点・外分点の位置ベクトルの成分もわかるわけです。（☞ p.52）

練習 8. 座標平面上で $\overrightarrow{OA}=(1,\ 1)$, $\overrightarrow{OB}=(-2,\ 4)$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表す。線分 AB を 2:1 に内分する点を C，2:1 に外分する点をDとするとき，$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し，それぞれの成分を求めよ。

ヒント　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=(-1,\ 3)$

$$\overrightarrow{OD}=2\vec{b}-\vec{a}=(-5,\ 7)$$

注　実はベクトルは，成分に分けないで，ベクトル1つとして扱うのが本来のあり方です。だから，成分で与えられていないのをすぐ成分で表して考えるというのは，多くの場合まずいのです。

① 単位ベクトルの利用法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルで長さの関係してくる問題に大きな力を発揮するのがその単位ベクトルなんです。使い方をよくマスターしておきたい。

◆ 長さ1のベクトルを **単位ベクトル** といいます。だから，単位ベクトルを使うときには，必ずその方向をいう必要があります。例えば，x軸方向の単位ベクトルとか，直線AB に沿う単位ベクトルとかいったぐあい。

なお，とくにx軸やy軸やz軸に沿う単位ベクトルを **基本ベクトル** ということがあります。そして，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ で表すのがふつうです。

*　*　*

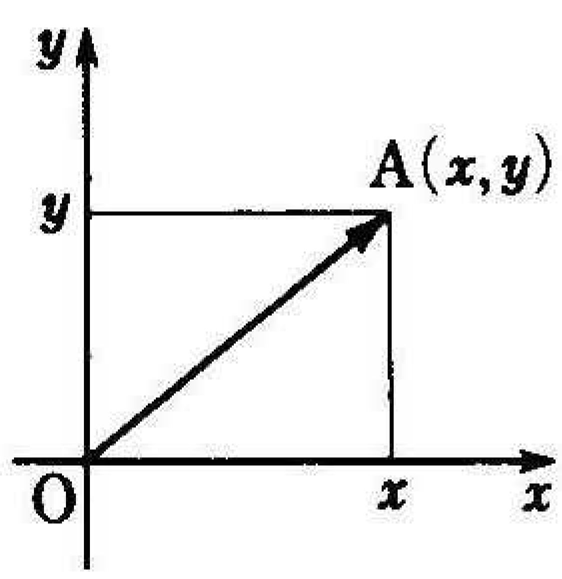
◆ x軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$，y軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ としましょう。成分で表すと

$$\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0),\quad \boldsymbol{e}_2=(0,\ 1)$$

ですから，任意の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の成分を $(x,\ y)$ としますと

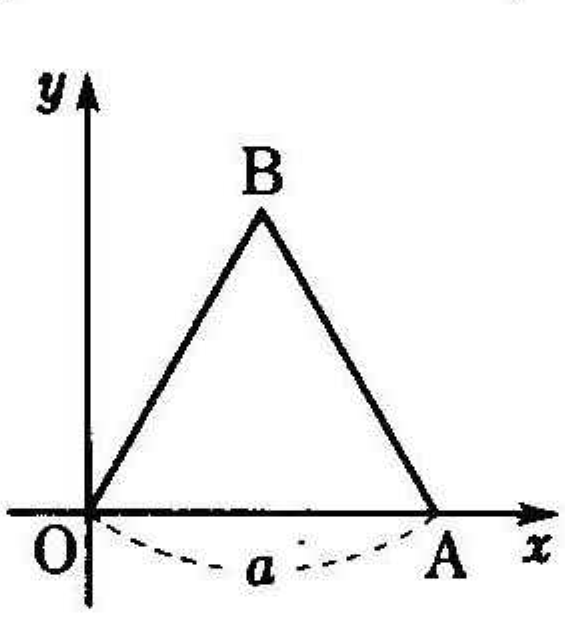
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)\\&=x(1,\ 0)+y(0,\ 1)\\&=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

と表すことができます。



このように，平面上の任意のベクトルは，2つの基本ベクトルで表すことができるのです。

4/25 **■練習 1.** 1辺 a の正三角形 OAB が下の図のように位置しているとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ で表せ。



ヒント　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a\boldsymbol{e}_1$

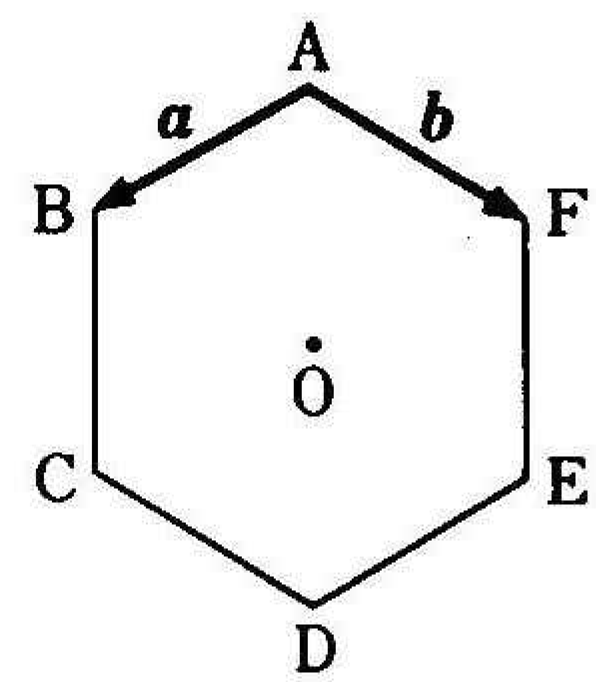
点Bの座標は $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ ですから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{a}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}a\boldsymbol{e}_2$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=-\frac{a}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}a\boldsymbol{e}_2$$

■練習 2. 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\boldsymbol{b}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ で表せ。



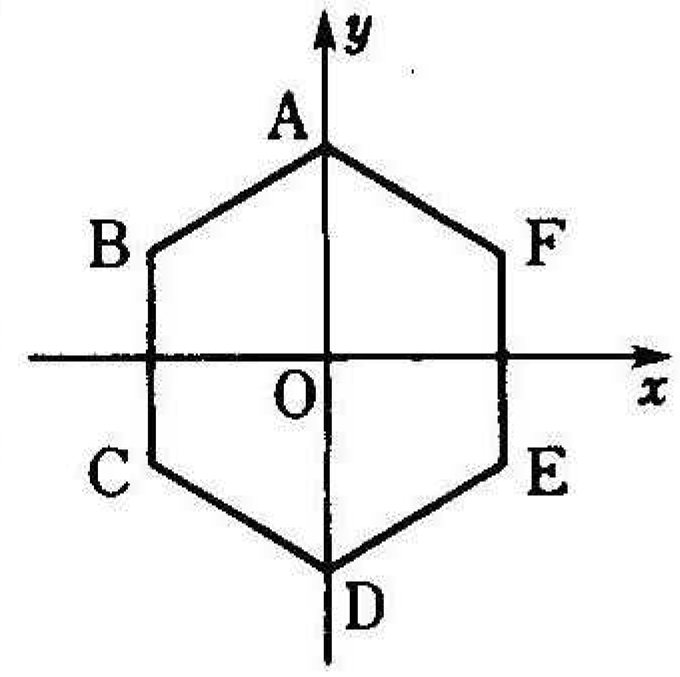
ヒント　正六角形は中心Oをうまく利用するのがコツです。△ABOF は平行四辺形ですから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AO}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$

これでできましたが，もう一度，基本ベクトルを使ってやってみませんか。



それには例えば右のように座標軸をとり，1辺の長さを a とすると，各点の座標がきまりますから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ で表すことができます。したがって，また $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ で表すことができますから，任意のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ で表せるわけです。

*　*　*

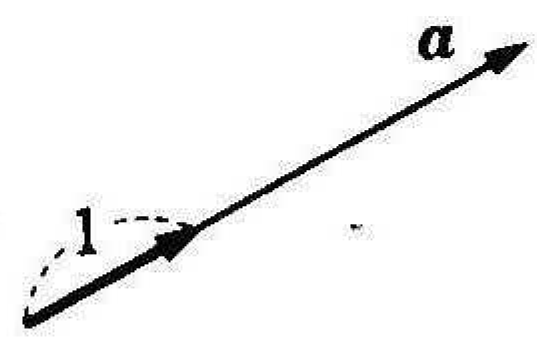
◆ 次には，長さに関係した問題に対して，単位ベクトルをどのように使ったらよいか考えてみることにしましょう。

練習 3. ベクトル $\boldsymbol{a}$ が与えられている。このベクトルに平行で，同じ向きをもつ単位ベクトルを求めよ。

5/19

(解) ベクトル $\boldsymbol{a}$ をその大きさ $|\boldsymbol{a}|$ で割ればいいでしょう。つまり，求めるものは

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$



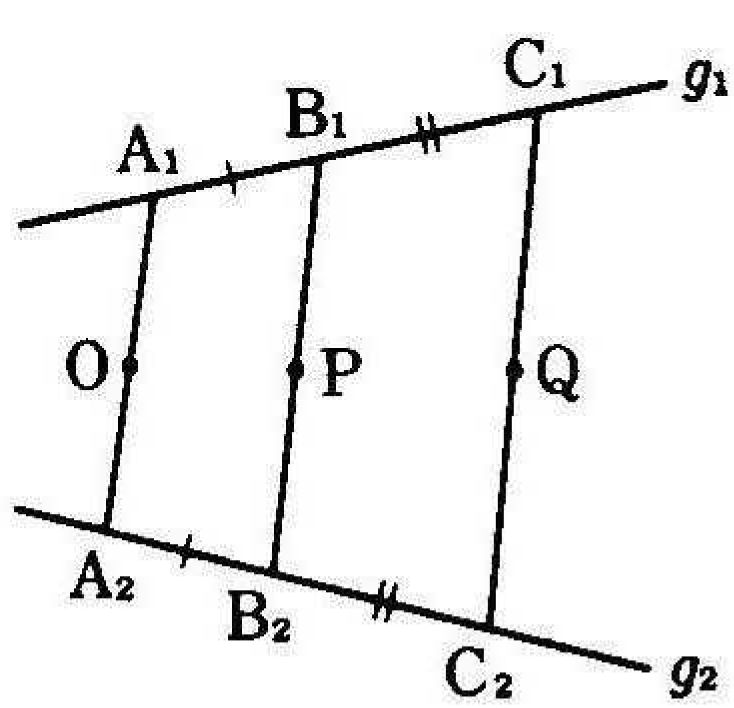
なんです。これがわかれば，次もできますね。

練習 4. ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きをもち，長さ l のベクトルは $l\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ であることを示せ。

(ヒント) アタリマエのことは，かえってめんどうなものですね。

練習 5. 2直線 g_1，g_2 上にそれぞれ A_1，B_1，C_1；A_2，B_2，C_2 をこの順序にとり $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$，$\overline{B_1C_1}=\overline{B_2C_2}$ ならしめると，A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 の中点は同一直線上にあることを示せ。(長崎大)

(ヒント) まず図形問題だから位置ベクトルでやるのが定石です。では，そのベクトルの起点をどこにとるか？



どこでもいいが，$\overline{A_1A_2}$ の中点Oにとるのがよさそうだ。

そうすると，$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}$ とすると $\overrightarrow{OA_2}=-\boldsymbol{a}$，これで，$A_1$，$A_2$ はきまった。次がたいていできない。$\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$ という条件をどう使っていいか，わからないからです。ここで単位ベクトルが絶大な力を発揮します。

g_1，g_2 に沿う単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$ とし，

$$\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=l,\quad \overline{A_1C_1}=\overline{A_2C_2}=m$$

としましょう。

$$\overrightarrow{A_1B_1}=l\boldsymbol{g}_1,\quad \overrightarrow{A_2B_2}=l\boldsymbol{g}_2$$
$$\overrightarrow{A_1C_1}=m\boldsymbol{g}_1,\quad \overrightarrow{A_2C_2}=m\boldsymbol{g}_2$$

と表せます。したがって

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\quad \boldsymbol{a}+l\boldsymbol{g}_1$$
$$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\quad \boldsymbol{a}+m\boldsymbol{g}_1$$
$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=-\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{g}_2$$
$$\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2C_2}=-\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{g}_2$$

と書けますから，B_1B_2 の中点Pの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{g}_1)+(-\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{g}_2)\}$$
$$=\frac{l}{2}(\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)$$

また，C_1C_2 の中点Qの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{g}_1)+(-\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{g}_2)\}$$
$$=\frac{m}{2}(\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}\,/\!/\,\overrightarrow{OQ}$$

なるほど，O，P，Q は1直線上にある。

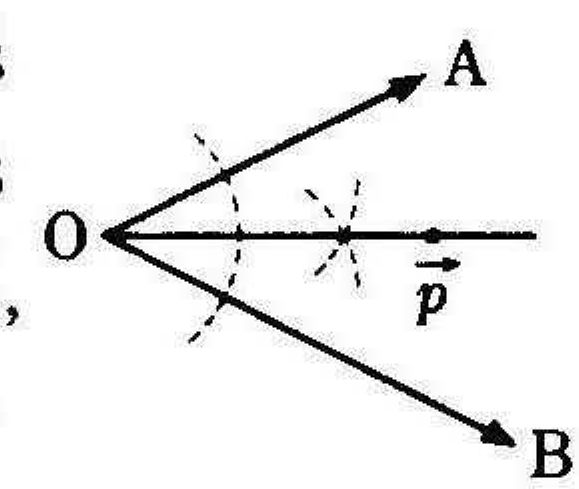
どうです。単位ベクトルの威力は？

4/19

練習 6. ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ のなす角の2等分線のベクトル方程式を求めよ。

(ヒント) ちょっと問題の意味が不明瞭ですが，キミ，わかりますか。

要するに $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\angle AOB$ の2等分線上の点 $\vec{p}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ の関係を求めよ，というわけなんです。



$\overrightarrow{OA}$ に沿う単位ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{OB}$ に沿う単位ベクトルは $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，その和は2等分線に重なる。さてこそ

$$\vec{p}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\quad (k\text{は任意の定数})$$

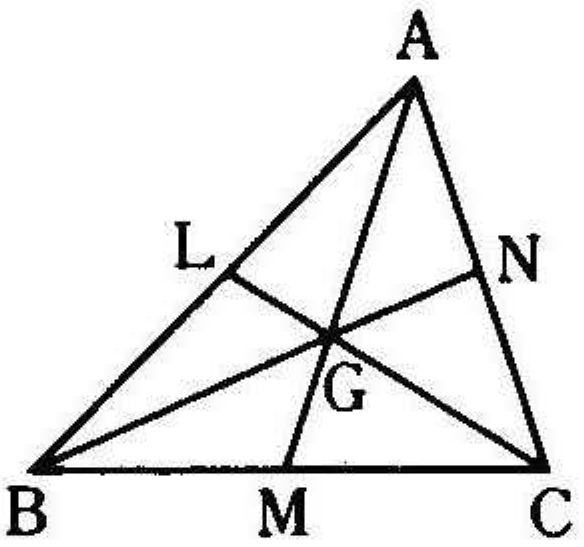
⑩ 位置ベクトルと重心

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ここでは主として三角形の重心を扱いますが，四角形の重心についても，ちょっとばかりふれることにしましょう。

◆ 重心の定義からはじめましょう。

△ABC の3辺 AB, BC, CA の中点をそれぞれ L, M, N とするとき AM, BN, CL は同一点を通ります。この点を **重心** というのです。そして，**重心は各中線を 2：1 に内分する点** なんです。



練習 1. △ABC の3頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とするとき重心Gの位置ベクトルを求めよ。

（ヒント） BC の中点をMとすると，Gは AM を 2：1 に内分する点です。さて：——

A, B, C の位置ベクトルがそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ だから，BC の中点 M の位置ベクトルは

$$\mathrm{M} : \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

ゆえに，AM を 2：1 に分ける点の位置ベクトルは

$$\mathrm{G} : \frac{2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+1\cdot\vec{a}}{2+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \cdots \boxed{答}$$

で与えられます。

なお，この関係は公式として使ってさしつかえありません。

練習 2. △ABC の頂点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とするとき $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ならば，ベクトルの起点Oは重心であることを示せ。（近畿大）

（ヒント）
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$
$$\therefore\ 2\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{c}=\vec{0}$$

AB の中点をLとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$\therefore\ 2\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \quad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\ \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\vec{0}$$

ゆえに LC を 1：2 に内分する点をKとすると

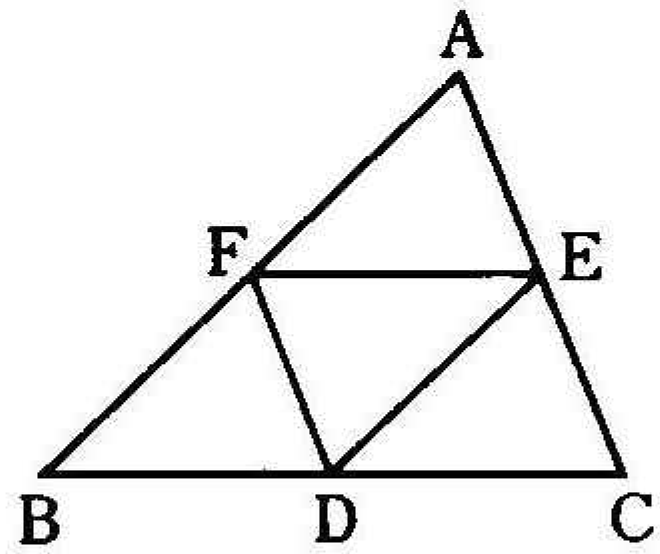
$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ が零ベクトルであるから，OとKは同じ点です。ところが，Kは中線 CL を 2：1 に内分する点ですから，Kは重心です。ナルホド，Oは重心なわけだ。

上の解答はややくどいが，(*) のところでOは CL を 2：1 に内分する点だといっていいわけです。

練習 3. △ABC の辺 BC, CA, AB を 3：4 に内分する点をそれぞれ D, E, F とすると，△ABC と △DEF の重心は一致することを示せ。（近畿大）

（解） A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とすると，Oを起点として



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4\vec{b}+3\vec{c}}{7}$$

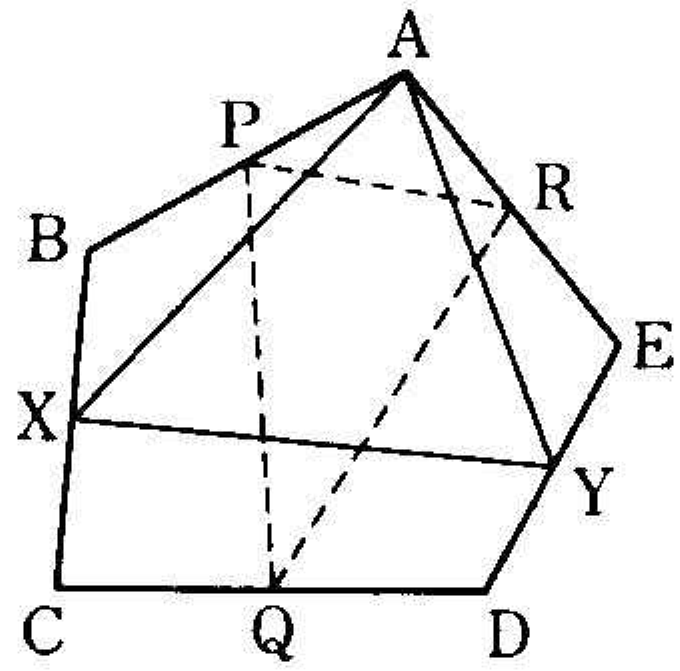
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{4\vec{c}+3\vec{a}}{7},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$$

ゆえに △DEF の重心の位置ベクトルは

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4\vec{b}+3\vec{c}}{7}+\frac{4\vec{c}+3\vec{a}}{7}+\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

これは △ABC の重心である。

■練習 4. 五角形 ABCDE において，辺AB, BC, CD, DE, EA の中点をそれぞれ P, X, Q, Y, R とするとき，△PQR と △AXY の重心は一致することを示せ。



ヒント A, B, C, D, E の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ とすると，各中点の位置ベクトルは

$$P\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right),\ X\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right),\ Q\left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)$$

$$Y\left(\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}\right),\ R\left(\frac{\vec{e}+\vec{a}}{2}\right)$$

ですから，△PQR の重心は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{e}+\vec{a}}{2}\right)=\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}}{6}$$

で，△AXY の重心は

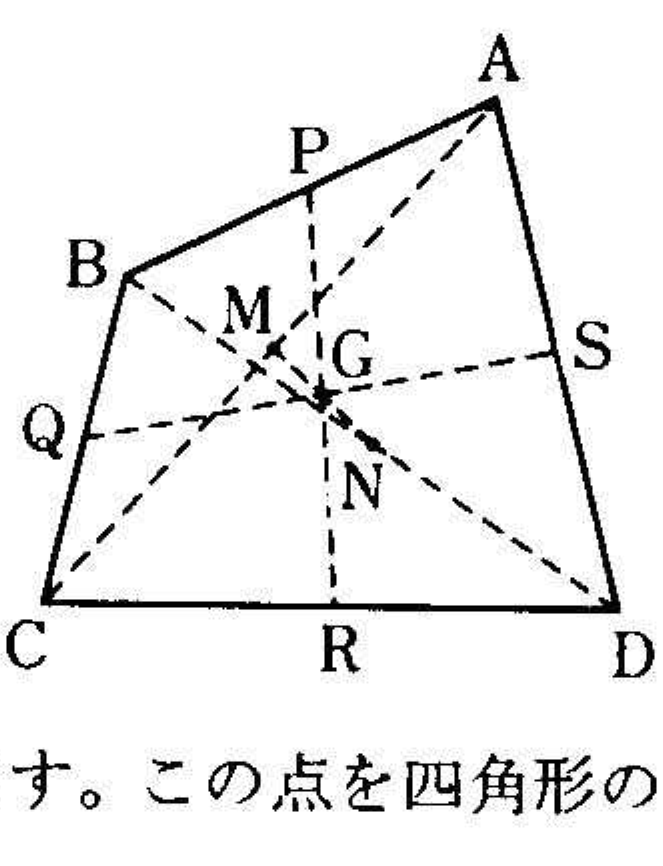
$$\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}\right)=\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}}{6}$$

よって，証明された。

*　　*　　*

◆ 重心に関係した問題もいろいろありますがこれくらいにして，次には，四角形の重心についてちょっと説明しておきましょう。

四角形 ABCD において，AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とし，対角線 AC, BD の中点を M, N としますと PR, QS, MN は同一点を通ります。この点を四角形の重心というのです。



■練習 5. 四角形 ABCD において，AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ P, Q, R, S, M, N とするとき，PR, QS, MN はその中点において交わることを示せ。

ヒント さあ，どうです。できそうですか。

A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ としますと

$$P\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right),\ R\left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)$$

ですから，PR の中点は

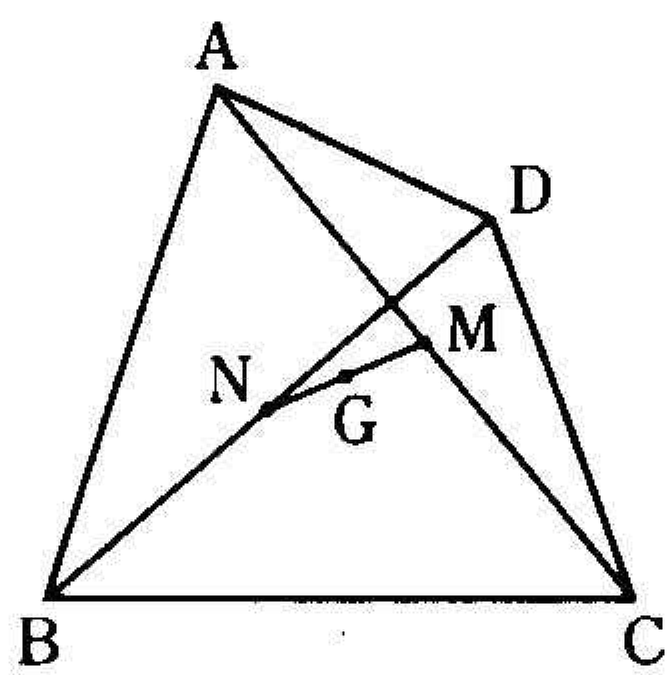
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

で与えられる。QS, MN の中点もまったく同じになるから，PR, QS, MN はその中点で交わることがわかります。

■練習 6. 四辺形 ABCD の対角線の中点を結ぶ線分の中点を G とし，この平面上の任意の点を P とするとき，次の等式を証明せよ。

$$4\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$$

ヒント AC の中点を M, BD の中点を N とすると，



$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PN}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$$

$$=2(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})=2(2\overrightarrow{PG})=4\overrightarrow{PG}$$

■練習 7. △ABC の重心を G, BC の中点を L, CA の中点を M とする。3 点 A, M, G の座標がそれぞれ (6, 6), (7, 4), $\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$ のとき，B, L の座標を求めよ。

(東京理大)

ヒント A, B, C, L, M, G の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{g}$ で表すと

$$\vec{a}=(6,\ 6),\ \vec{m}=(7,\ 4),\ \vec{g}=\left(\frac{16}{3},\ \frac{8}{3}\right)$$

また，$\vec{l}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{m}=\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$, $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$$\therefore\ \vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}-\vec{a},\ \vec{c}=2\vec{m}-\vec{a},\ \vec{l}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

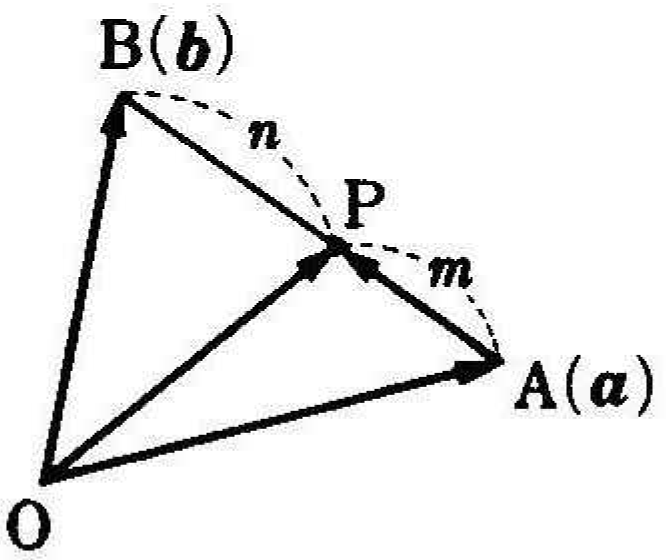
ゆえに，……　　答 B(2, 0), L(5, 1)

位置ベクトルの内分点公式の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆代幾のベクトルの範囲でもっとも有用なのは，ほかでもない。内分・外分の公式なのですが，意外とよくわかっていない。

◆　Oを始点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で表すことにしましょう。



AB を $m:n$ に内分する点をPとしますと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{a}+\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$=\frac{m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{a}}{m+n}$$

この公式を覚えるコツは，$m:n$ に分ける，その m, n **を遠いほうに掛けて加える**ということです。

外分の場合もまったく同様で，AB を $m:n$ に外分する点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{m\boldsymbol{b}-n\boldsymbol{a}}{m-n}$$

で与えられます。これは，内分の公式で，**nの前の符号を変える** と覚えておけばいいでしょう。もちろん，nを変えるといわないで，mの前の符号を変えても同じことです。

(注) 上のようなわけで，m, n に符号をつけて，同符号のとき内分，異符号のとき外分と考えることができます。そうすると，公式は1つだけ：——

$$\frac{m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{a}}{m+n}$$

と書けるばかりでなく，これを変形して

$$\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}+\frac{n}{m+n}\boldsymbol{a}$$

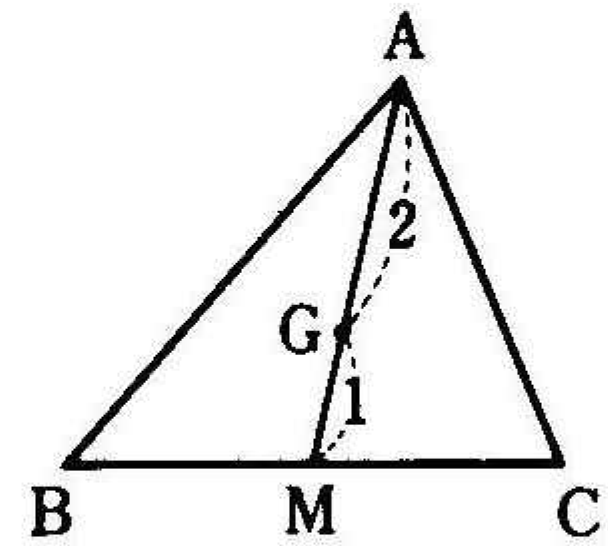
とし，$\dfrac{m}{m+n}=t$ とおくと $\dfrac{n}{m+n}=1-t$ ですから

$$t\boldsymbol{b}+(1-t)\boldsymbol{a}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

と表すことができて便利です。

練習 1. △ABC において，頂点A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とするとき，重心の位置ベクトルを求めよ。

(ヒント) BC の中点を M とすると AM を 2：1 に内分する点が重心です。そして



$$\mathrm{M}:\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}$$

ですから

$$\mathrm{G}:\frac{2\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}+1\cdot\boldsymbol{a}}{2+1}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$$

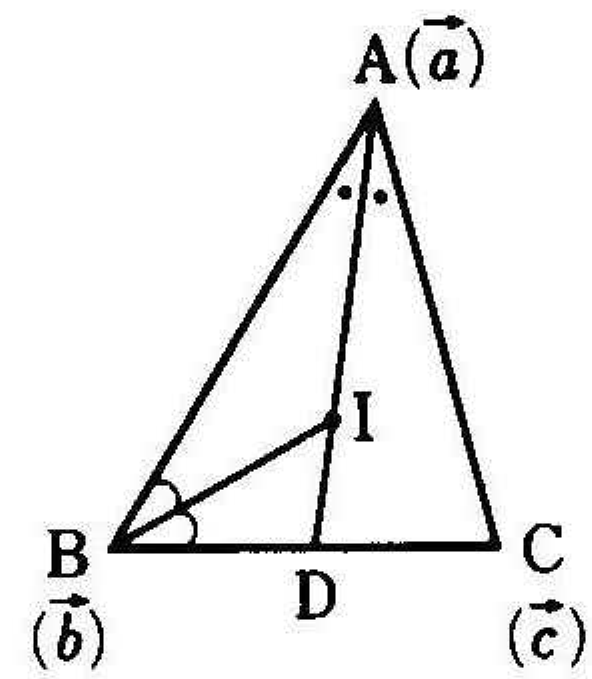
s/1

練習 2. △ABC において

$$\overline{\mathrm{BC}}=6,\ \overline{\mathrm{AC}}=7,\ \overline{\mathrm{AB}}=8$$

のとき，△ABC の内心 I の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ で表せ。

(ヒント) BD：DC
$=$AB：AC$=8:7$
ですから



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{8\cdot\vec{c}+7\cdot\vec{b}}{8+7}=\frac{7\vec{b}+8\vec{c}}{15}$$

また

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\times\frac{8}{8+7}=6\times\frac{8}{15}=\frac{16}{5}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=8:\frac{16}{5}=5:2$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{5\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{5+2}$$

$$=\frac{1}{7}\left(5\cdot\frac{7\vec{b}+8\vec{c}}{15}+2\cdot\vec{a}\right)=\frac{6\vec{a}+7\vec{b}+8\vec{c}}{21}$$

答 $\dfrac{6\vec{a}+7\vec{b}+8\vec{c}}{21}$

*　*　*

◆ 次には，ややめんどうな問題をやってみましょう。

練習 3. △ABC と 1 点 P の間に

$$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

なる関係があるとき，点 P はどんな点であるか。

（ヒント） いくつかの和があるときには 2 コずつ組み合わせて，内分点の公式をくり返せばいいのです。この場合 3 つの和ですから，2 つと 1 つに分けましょう。

$$(2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

内分点の公式を使うために変形します。

$$3\cdot\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

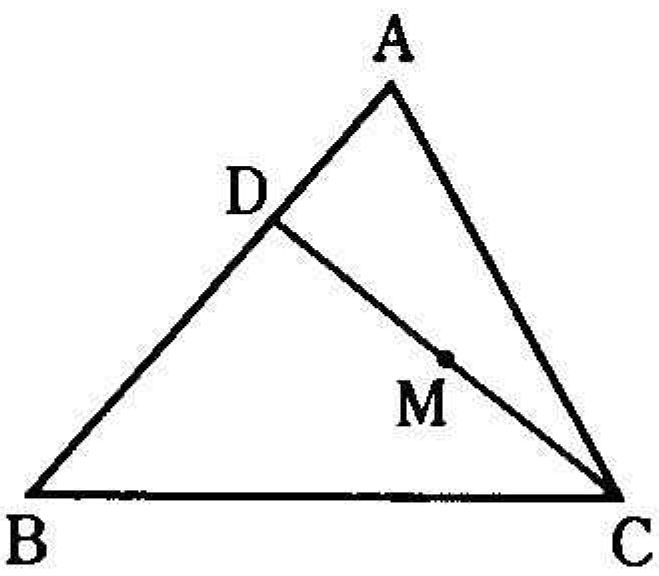
オヤオヤ，3 で割れるのだったな。（しかし，そんなことはササイなことです）

$$\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

AB を 1 : 2 に内分する点を D としますと

$$\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}=\overrightarrow{PD}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}\quad\cdots\cdots(*)$$



両辺を 2 で割って

$$\frac{\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PC}}{2}=\vec{0}$$

CD の中点を M とすれば

$$\overrightarrow{PM}=\vec{0}$$

ゆえに P と M は重なる。なるほど，この M が実は求める P だったのか!!

（注） 実は，(*) のところから，すぐ，点 P が CD の中点であるといえたわけです。しかし，上では，きまった通り最後まで押し通した，というわけ。なお，どの 2 つをまとめるかで，見かけ上ちがってきますが，もちろん本質的には同じです。そこで次の形で出題すると，形式的にも同じになるのです。

練習 4. △ABC において

$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ なる関係があるとき，

△PBC : △PCA : △PAB を求めよ。

（解） 変形して

$$7\cdot\frac{3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}}{7}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

AB を 4 : 3 に内分する点を D とすると

$$7\overrightarrow{PD}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

$$\therefore\quad \frac{7\overrightarrow{PD}+5\overrightarrow{PC}}{12}=\vec{0}$$

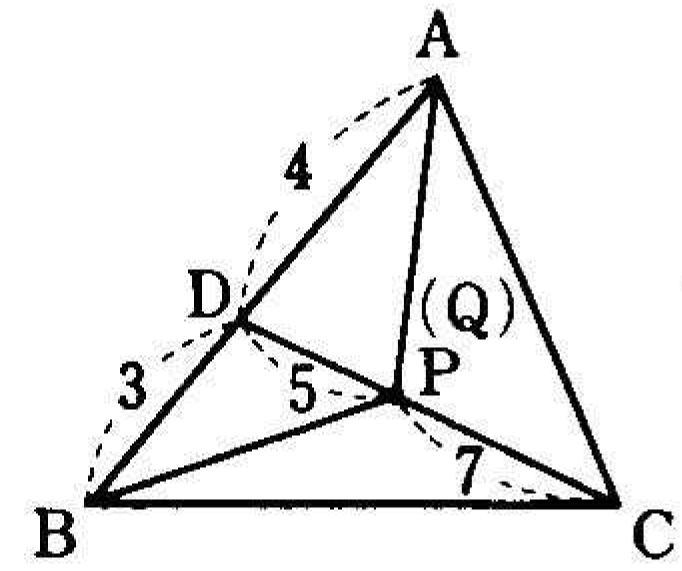
ゆえに CD を 7 : 5 に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$$

ゆえに P と Q は一致する。そこで

△PBD $=S$

とすると



△PAD $=\frac{4}{3}S$

△PBC $=\frac{7}{5}S$

また

$$\triangle PCA=\left(\frac{4}{3}S\right)\times\frac{7}{5}=\frac{28}{15}S$$

したがって

$$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$$

$$=\frac{7}{5}S : \frac{28}{15}S : \left(S+\frac{4}{3}S\right)$$

$$=3 : 4 : 5$$

答　3 : 4 : 5

（注） △PBD $=S$ とおかないで △PBD $=15S$ とおけばもっとラクです。やってみませんか。

*　*　*

◆ 内分点の公式はこのほかいろいろな使い方があります。2 直線の交点を求めるにも役に立つし，点の存在範囲を求めるにも有用ですが，本質的にはこれだけです。

最後に 1 つやってみましょう。

練習 5. △ABC と 1 点 P があって

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$$

のとき点 P の位置を求めよ。

（ヒント） 位置ベクトルと自由ベクトルの混在がいけない。$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$ を代入するとすぐできる。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑自由ベクトルと位置ベクトルの関係

◆ベクトルがわからなくなる最大の原因は，自由ベクトルと位置ベクトルの混同にあるのです。この意味，おわかり？

◆ 高校で習うベクトルは2つあります。第1は速度ベクトル，加速度ベクトルなどのような，いわゆる **物理ベクトル** です。そしていま1つは方向と大きさの与えられるベクトルで，これを **幾何ベクトル** といいます。

ところで，この幾何ベクトルは，さらに2つに分けられます。**自由ベクトル** と **位置ベクトル** がそれです。

さて，位置ベクトルとは，原点から引いたベクトルと考えればいいでしょう。これに対して自由ベクトルとは，単に方向と大きさだけが与えられたベクトルです。したがって，等しいベクトルは無数にあるのです。

いや，こんな抽象的なことはよそう。さっそくながら本論にいくとしよう。

■練習 1. 位置ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とするとき，$\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{BA}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

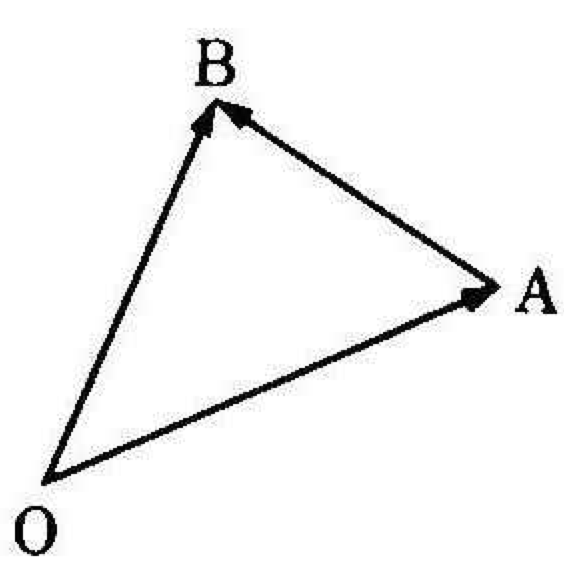
ヒント　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=\vec{b}-\vec{a}$

同様にして

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$



注　つまり自由ベクトルは到着点の位置ベクトルから出発点の位置ベクトルを引いたものです。このことはきわめて大切です。すぐ出せるようによく覚えておいてください。

■練習 2. △ABC において BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とすると

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$$

であることを示せ。

ヒント　図形をベクトルで扱うには，まず原点，つまり，位置ベクトルの起点をきめて，各点の位置ベクトルを求めるのがコツです。

この場合，A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ としますと

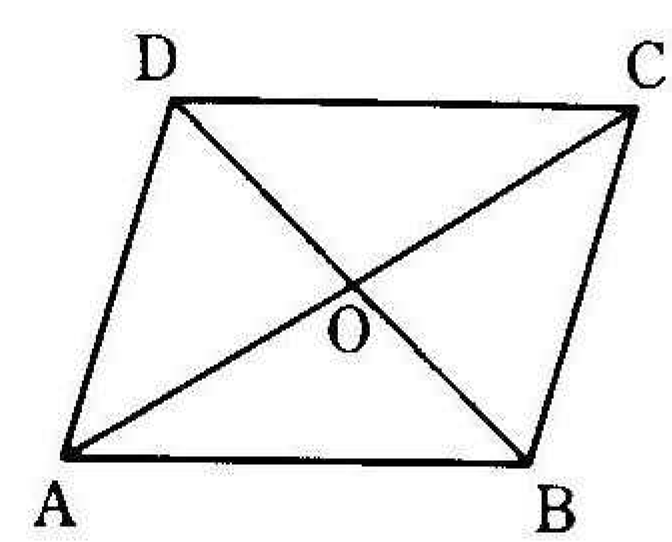
$$L:\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad M:\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\quad N:\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

となります。とくに，原点について断らないのはどこでもいいという意味ですし，上の L：$\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ と書いてあるのは点 L の位置ベクトルが $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ になる，という意味です。さて，

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}$$
$$=\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}\right)+\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\vec{b}\right)+\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}\right)$$
$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$$

Q. E. D.

■練習 3. ▱ABCD において，A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ とすると



$$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$$

であることを示せ。

ヒント　▱ABCD の対角線 AC, BD の交点を O とすると，O は AC の中点でかつ BD の中点ですから

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\qquad\therefore\ \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$$

あるいは $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ から　$\vec{d}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$

$$\therefore\ \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$$

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ そこで，ややめんどうな問題をやってみましょう。

練習 4. △ABC において

6/5　$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$$

のとき △PBC : △PCA : △PAB の比を求めよ。

(ヒント) まずこれをみてすぐ気がつかなければならないことは，Pを原点（位置ベクトルの起点）と考えると

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ は **位置ベクトル**

$\overrightarrow{AB}$ は **自由ベクトル**

で，両者が混在しています。これはまずい。

そこで，何はともあれ

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$$

を使って，**自由ベクトルをなくす** のです。

$$\therefore\ \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$$

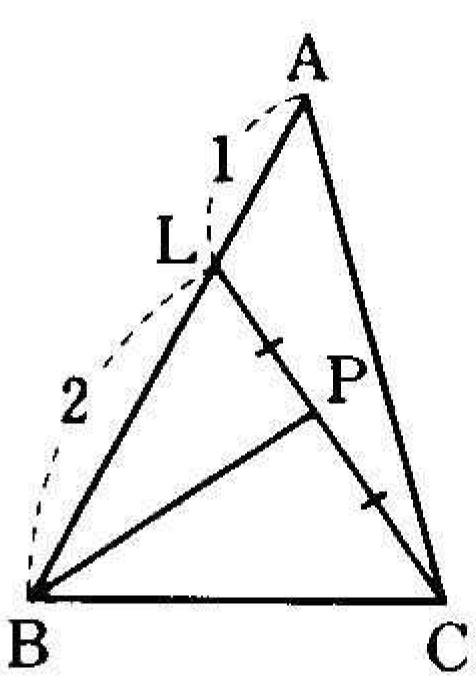
$$\therefore\ 2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

これで第1段階は終わりです。

次は内分点の公式をくり返し使って，左辺を1つにまとめるのがコツ（内分点公式については（☞ p.52）参照）。

さて，

$$3\cdot\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$



$\overline{AB}$ を 1 : 2 に内分する点をLとすると

$$3\overrightarrow{PL}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PL}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

ゆえに，Pは線分 CL の中点です。

そこで △PCA$=S$ とすると　△ALP$=S$

∴ △BPL$=2S$　　∴ △PBC$=2S$

∴ △PBC : △PCA : △PAB

$=2S : S : 3S=2:1:3$

答　2 : 1 : 3

練習 5. △ABC と1点Pがあって

$$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

のとき △PBC : △PCA : △PAB の比を求めよ。

答　1 : 3 : 5

＊　＊　＊

◆ 位置ベクトルで重要な性質の1つは

$\vec{a}\,/\!\!/\,\vec{b}$ でないとき α, β を実数として

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$$

ならば

$$\alpha=\beta=0$$

だということです。証明は次の通り。

$\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ とすると

$$\beta\vec{b}=-\alpha\vec{a}\qquad\therefore\ \vec{b}=-\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}$$

ところが $\vec{b}=k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行なことを意味します。したがって，上の関係式は不合理です。なぜ，こんな不合理になったかというと $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ としたからです。

また，$\alpha=0$ なら　$\beta\vec{b}=0$　∴　$\beta=0$

$\beta=0$ なら　$\alpha\vec{a}=0$　∴　$\alpha=0$

以上のようにして $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ が成り立てば $\alpha=\beta=0$ であることがわかったのです。上の定理はきわめて有用です（☞ p. 56）。

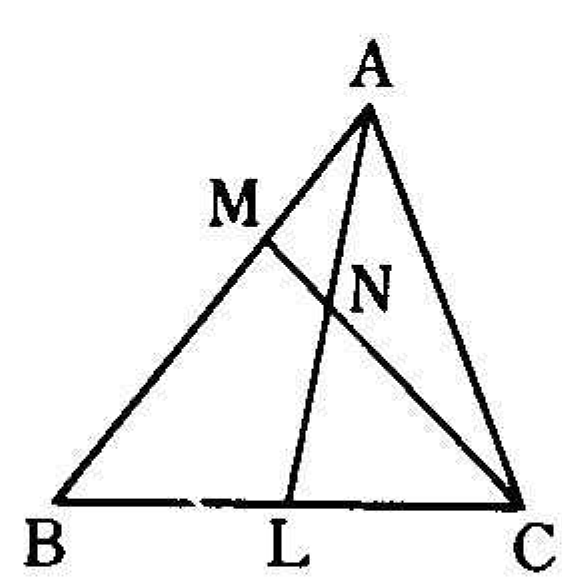
ここには，次に1例だけあげておくことにしましょう。

6/5 **練習 6.** 右の図において，Bを位置ベクトルの起点とし，

M : $2\vec{a}$, A : $3\vec{a}$,

L : $\vec{b}$, C : $2\vec{b}$

とするとき，AL, CM の交点Nを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。



(ヒント)　AN : NL$=s:1-s$

CN : NM$=t:1-t$

とすると，Nは2通りに表せるから

$$s\vec{b}+(1-s)(3\vec{a})=t(2\vec{a})+(1-t)2\vec{b}$$

$$\therefore\ (2t+3s-3)\vec{a}+(-2t-s+2)\vec{b}=\vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ 2t+3s-3=0\\ \text{かつ}\ \ -2t-s+2=0\end{array}\right\}\qquad\therefore\ s=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$N : \dfrac{1}{2}\vec{b}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)(3\vec{a})=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

ベクトルの平行条件の使い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルについて大切なことはいくつかありますが，その中でもっとも大切なことの1つはベクトルの平行条件の使い方デス。

◆　ベクトル$\vec{a}$とベクトル$\vec{b}$が等しいときはもちろん

$$\vec{a}=\vec{b}$$

と書くことができます。また，ベクトル$\vec{a}$がベクトル$\vec{b}$の2倍に等しいなら

$$\vec{a}=2\vec{b}$$

といったぐあいで，一般に，

ベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行なとき
$\vec{a}=k\vec{b}$　$(k\neq 0)$

なる関係が成り立ちます。そして

$k>0$ なら$\vec{a}$と$\vec{b}$が同じ向きで平行
$k<0$ なら$\vec{a}$と$\vec{b}$が反対向きで平行

ということになります。

kを使わないで$\vec{a}$と$\vec{b}$の平行であることを表すこともできますが，それにはベクトルの内積が必要になってきます。ここでは，これは扱わないことにします。と，いうのも，とくに必要性がないからです。では：——

9/6
練習1. ベクトル $\vec{a}=(2,\ 3)$ と $\vec{b}=(6,\ k)$ が平行であるように定数kの値を定めよ。

(ヒント)　$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行であるから上のような関係が成り立つ。しかし，kは混乱のもと，かわりにcを使うとしようか。

$$\vec{b}=c\vec{a}\quad (c\neq 0)$$
$$\therefore\quad (6,\ k)=c(2,\ 3)$$
$$\therefore\quad 6=2c,\ k=3c$$
$$\therefore\quad c=3\qquad \therefore\quad k=9$$

答　$k=9$

練習2. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ 1)$ について，$\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるようにxの値を求めよ。　（東北学院大）

(解)　$\vec{a}+2\vec{b}=(1,\ 2)+2(x,\ 1)=(1+2x,\ 4)$
$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,\ 2)-(x,\ 1)=(2-x,\ 3)$

が平行であるから

$$(1+2x,\ 4)=k(2-x,\ 3)\quad (k\neq 0)$$
$$\therefore\quad 1+2x=k(2-x)\qquad \cdots\cdots①$$
$$4=k\cdot 3\qquad \cdots\cdots②$$

②より

$$k=\frac{4}{3}$$

これを①に代入して

$$1+2x=\frac{4}{3}(2-x)$$
$$\therefore\quad 3+6x=8-4x$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\qquad \cdots\cdots 答$$

＊　＊　＊

◆　3点A，B，Cが1直線上にあるための条件はベクトル$\overrightarrow{AB}$とベクトル$\overrightarrow{AC}$が平行なことです。だから，次のような問題は平行条件の応用ということになります。

6/6
練習3. 一定点を始点とする次の3つのベクトルの終点は，1直線上にあることを示せ。　$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$

(ヒント)　3点をそれぞれA，B，Cで表しますと，

$$\overrightarrow{AB}=(\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AC}=(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$$

ゆえに3点A，B，Cは1直線上にある。

6/6
練習4. 3点 $(2\vec{a}+\vec{b})$, $(3\vec{a}-\vec{c})$, $(3\vec{b}+2\vec{c})$ は1直線上にあることを示せ。

◆ では，さらに一歩進んで，図形への応用を考えてみましょう。

5/6

練習5. ベクトルを使って，2点A(1, 2), B(4, 1) を通る直線の方程式を求めよ。

（解） 直線上の点を $P(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AP}$$

$$\therefore\quad (3,\ -1)=k(x-1,\ y-2)$$

$$\therefore\quad 3=k(x-1)$$

$$-1=k(y-2)$$

k を消去して

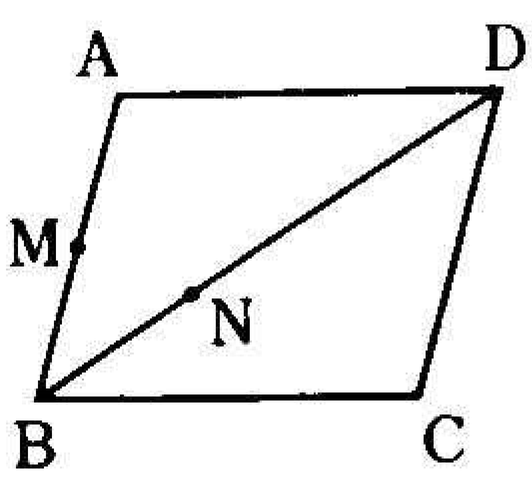
$$-3=\frac{x-1}{y-2}$$

$$\therefore\quad x+3y-7=0$$

これが求める直線である。

細かいことをいうと，$y=2$ のときはどうするか，といったこともあるが，それはキミに考えてもらうとしよう。

練習6. ▱ABCD において AB の中点をM, BD を 1:2 に内分する点をNとすれば3点M, N, Cは1直線上にあることを示せ。



（ヒント） ベクトル $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{MC}$ が平行であることをいえばいいだろう。

そのために，まず，ベクトルの起点をきめなければなるまい。どこでもいいが，点Bがもっともよさそうだ。

さて，点Bを起点とし，点Aの位置ベクトルを $\vec{a}$，点Cの位置ベクトルを $\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})$

また，　$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\vec{a}$

こんなわけで各点の位置ベクトルはすべて求まった。そして

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{6}(2\vec{c}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{MC}=\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(2\vec{c}-\vec{a})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MN}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{MC} /\!/ \overrightarrow{MN}$$

ゆえに，点M, N, Cは1直線上にある。

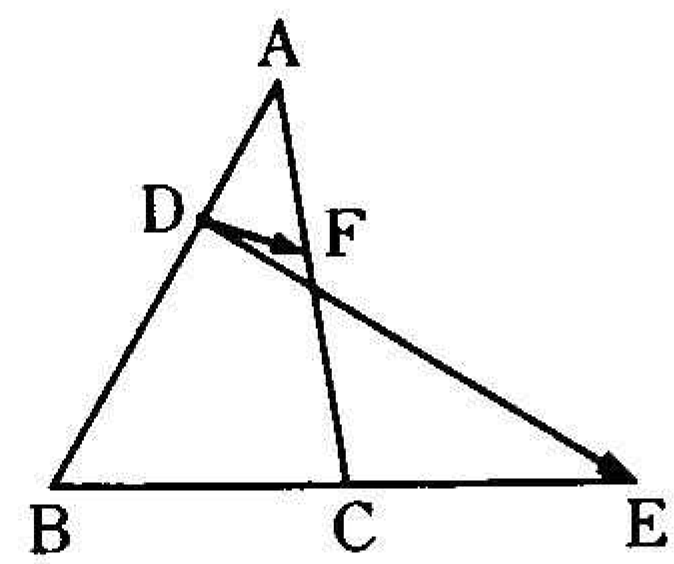
6/6

練習7. △ABC において，AB を 1:2 に内分する点をD，BC を 2:1 に外分する点をE，CA を 1:1 に内分する点をFとするとき，3点D, E, Fは1直線上にあることを示せ。

（解） Aを位置ベクトルの起点とし，

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

とすると



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2\cdot\vec{c}-1\cdot\vec{b}}{2-1}=2\vec{c}-\vec{b}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3\vec{c}-2\vec{b}}{6}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=(2\vec{c}-\vec{b})-\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$=\frac{6\vec{c}-4\vec{b}}{3}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{DF} /\!/ \overrightarrow{DE}$$

ゆえに，3点D, E, Fは1直線上にある。

*　　*　　*

◆ このように平行条件はいろいろと応用の広い条件であるから，よく使えるようにしておきたいものである。そして，これを活用する力を養うには，**ベクトルの起点をいろいろと変えてやってみる** のがよい。

練習6. であれば点Nを起点にとってやってみる。それもできたら次にはベクトルの起点として点Mをとってみる，といったぐあい，にだ!!

内積とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆内積があるなら外積もありそうなものだね。
あっ，ありますよ，ありますとも。ただ，高校ではやりませんねェ。

◆ 2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内積**（ないせき）とは何か？　2つの定義があります。

1つは

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

とするもの。もう1つは成分を使って

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

とし，

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

とするものです。

（注） もちろん，この2つは同じものを表していて，一方から他方を導くことができます。また，内積を表すのに

$\vec{a}\cdot\vec{b}$　とか　$(\vec{a},\ \vec{b})$

を使います。

■練習 1. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の長さがそれぞれ4と5で，なす角が30°のとき $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

（解） $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot5\cos30°$

$$=4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

6/7

■練習 2. △ABC は正三角形で，1辺の長さ4のとき $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

（解） $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は長さが4で，そのなす角は60°ですから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot4\cos60°=4\cdot4\cdot\frac{1}{2}$$

$$=8\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

6/9

■練習 3. 平面上に3点A(1, 2), B(2, 5), C(4, 3) があるとき，$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ を求めよ。

（ヒント） $\overrightarrow{AB}=(1,\ 3)$

$\overrightarrow{AC}=(3,\ 1)$

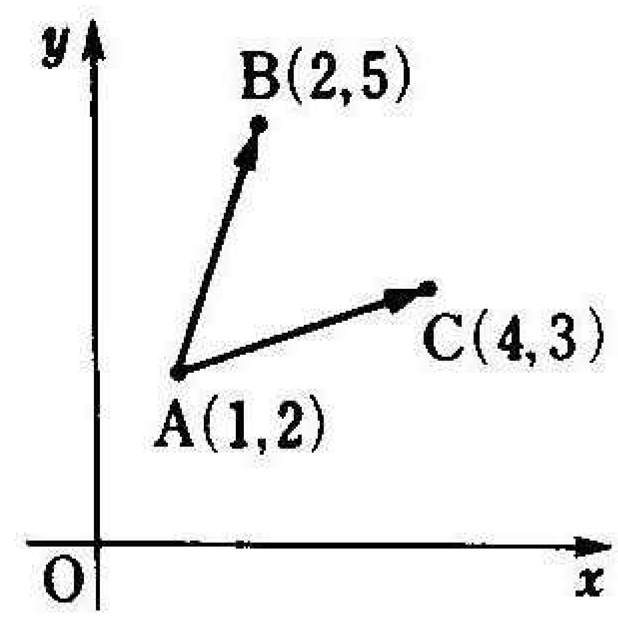
ですから

$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$

$=(1,\ 3)\cdot(3,\ 1)$

$=1\times3+3\times1$

$=3+3=6$　　　……答



■練習 4. 空間に3点 A(1, 4, −1), B(0, 1, 2), C(−1, 4, 3) があるとき，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。

（解） $\overrightarrow{AB}=(-1,\ -3,\ 3)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 4)$　であるから

$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})=(-1,\ -3,\ 3)\cdot(-2,\ 0,\ 4)$

$=2+0+12=14$　　……答

*　　*　　*

◆ 内積の意味はわかったでしょう。

ところで，内積について大切なことが3つあります。第1は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

から

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

となりますから，ベクトルの角に関するものは必ずといっていいくらいこれを使うことです。

第2は **$\vec{a}$，$\vec{b}$ の直交条件** です。

$\vec{a}\perp\vec{b}$ ならば $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

だということです。

第3は **$\vec{a}$ の長さの使い方**，つまり

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$$

だということ。この3つについて，次にやってみましょう。

＊　＊　＊

◆ さて，第1の具体的な練習はこれです。

■練習 5. 平面上の2つのベクトル $\vec{u}=(1,\ -1)$，$\vec{v}=(3,\ x)$ が60°の角をなすように定数 x を定めよ。　（弘前大）

（解）$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,\ -1)\cdot(3,\ x)=3-x$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 60^\circ$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{3^2+x^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{2}}=3-x$$

$$\therefore\quad x=6-3\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 6. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の大きさはそれぞれ1で，この2つのベクトルのなす角が60°であるとき，2つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$-\vec{a}+2\vec{b}$ のなす角を求めよ。　（福島大）

（解）求める角を θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||-\vec{a}+2\vec{b}|}$$

ところが

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=1+1+2\cdot1\cdot1\cos60^\circ=3$$

$$\therefore\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$$

同様にして

$$|-\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b})=-|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=-1+2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad\theta=60^\circ$$

答　60°

＊　＊　＊

◆ 次は，第2の場合です。

■練習 7. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ に対し，$3\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$ を満たし，大きさが等しく，互いに垂直なベクトル $\vec{c}$，$\vec{d}$ を求めよ。　（横浜市大）

（ヒント）もっとも素朴なやり方は

$$\vec{c}=(c_1,\ c_2),\ \vec{d}=(d_1,\ d_2)$$

とすることでしょう。このとき

$$c_1+d_1=0,\ c_2+d_2=8$$

$$c_1{}^2+c_2{}^2=d_1{}^2+d_2{}^2$$

$$c_1d_1+c_2d_2=0$$

ですから，連立させて解けばよいハズ。

答　(4, 4) と (−4, 4)

■練習 8. ベクトル $\vec{p}=(2\sqrt{3},\ 2)$，$\vec{a}=(h,\ a)$，$\vec{b}=(h,\ b)$ について，次のことがわかっている。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{p}$　(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する。

(3)　$|\vec{a}|<|\vec{b}|$

このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を求めよ。　（武蔵大）

（ヒント）成分で各条件を表してみますと

$$2h=2\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots①$$

$$a+b=2\qquad\cdots\cdots②$$

$$h^2+ab=0\qquad\cdots\cdots③$$

$$h^2+a^2<h^2+b^2\qquad\cdots\cdots④$$

①，③より ab の値がわかります。これと②を組み合わせて a，b が求まります。そのうちで④を満足するものを採用するのです。

答　$\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

＊　＊　＊

◆ 次は第3です。すでに，上にも長さの計算は出ていますが，……

■練習 9. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 3)$ で，p，q を実数とし，ベクトル $\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$ を考える。p，q が $p+q=1$ を満たしながら変化するとき，その長さが最小となるときの $\vec{x}$ とその最小値を求めよ。　（北見工大）

（ヒント）$|\vec{x}|^2=(p+2q)^2+(3p-q)^2+(-2p+3q)^2$ で，$p+q=1$ ですから，q を消去すれば p の2次関数となって，……

答　$\left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$，$\frac{\sqrt{14}}{2}$

◎内積の計算法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆内積の定義に2つあり。これを，うまく使えるなら，もう，内積は卒業したといっていいのだが，……

◆ 内積の定義には2つあります。1つは

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

です。もちろん，$|\vec{a}|$ は a の長さを，θ はベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角です。

もう1つは，ベクトルを成分で表したときです。つまり，

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
とするとき
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

です。このように，内積を2つの形で表せるということが，あとでみるように，スゴク役に立つのです。このことは，よくおぼえておいて下さい。そのものの両面を見られるからです。さあ，定義はこれくらいにして，実際の問題に突進するとしようか。

*　*　*

◆ では，まず，これを：——

■練習 1. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の長さがいずれも1で，そのなす角が30°のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(ヒント)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\theta=30°$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos30=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\cdots \text{答}$$

■練習 2. △ABC において，$\overline{\mathrm{AB}}=4$，$\overline{\mathrm{BC}}=5$，$\overline{\mathrm{CA}}=6$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(ヒント)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\angle\mathrm{A}$

ところが

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\overline{\mathrm{AB}}=4,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\overline{\mathrm{CA}}=6$$

で $\cos\angle\mathrm{A}$ は余弦定理で求められましょう。すなわち

$$\cos\angle\mathrm{A}=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4\cdot6\cdot\frac{9}{16}=\frac{27}{2}\quad\cdots\cdots \text{答}$$

次に，成分の場合：——

■練習 3. ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 5)$ のとき $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ。

(解)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,\ 2)\cdot(3,\ 5)$
$=1\cdot3+2\cdot5=3+10=13$　……答

■練習 4. 平面上に点 A(1, 2), B(4, 1), C(5, 3) があるとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(解)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(4,\ 1)$

であるから

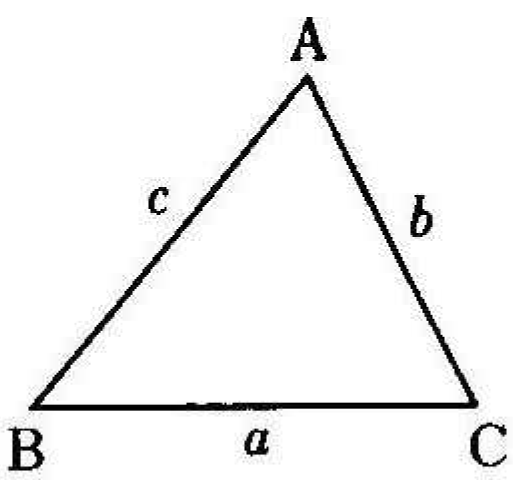
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ -1)\cdot(4,\ 1)$$
$$=12+(-1)$$
$$=11\quad\cdots\cdots \text{答}$$

■練習 5. 内積の定義から余弦定理を導け。

(ヒント)　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

を

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$



から導け，というのです。

さあ，どうする。

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=c,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=b$$

あとは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の計算です。これは

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

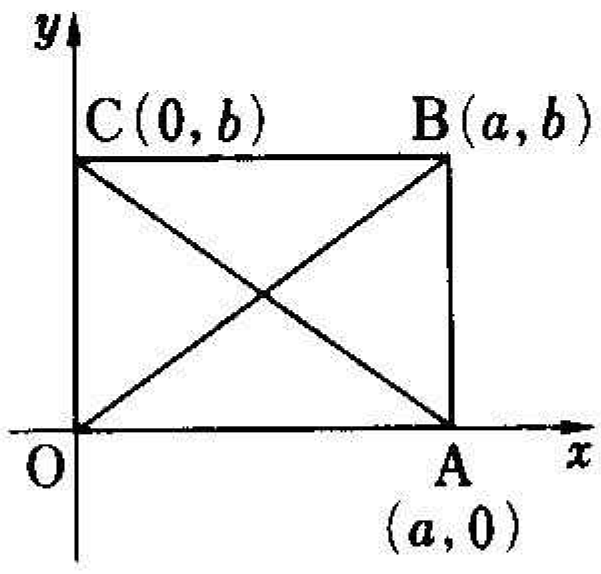
$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$
$$=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

（ヤッタ!!）

練習 6. 相異なる2辺の長さが a，b である長方形の対角線のなす角を求めよ。



ヒント　右の図で $\overrightarrow{OB}$ $(a,\ b)$ と $\overrightarrow{AC}(-a,\ b)$ のなす角を求めればよいでしょう。

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{AC}|}$$
$$=\frac{-a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

答　$\cos\theta=\dfrac{a^2\sim b^2}{a^2+b^2}$

*　　*　　*

◆ 次には，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 7. $\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{0}$ でない定ベクトルとし，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ でないとする。ベクトル $\vec{x}=\vec{a}+k\vec{b}$ の大きさが最小になるように実数 k の値を定めよ。このとき，ベクトル $\vec{x}$ はベクトル $\vec{b}$ とどのような関係にあるか。

（関西学院大）

ヒント
$$|\vec{x}|^2=|\vec{a}+k\vec{b}|^2$$
$$=(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}+k\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}k+\vec{b}\cdot\vec{b}k^2$$
$$=|\vec{b}|^2k^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})k+|\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{b}|^2\left\{k+\frac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}k\right\}+|\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{b}|^2\left\{k+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\right\}^2+|\vec{a}|^2-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$$

ゆえに $k=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ のとき，最小値

$$\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{b}|}$$

をとることがわかります。また，このとき

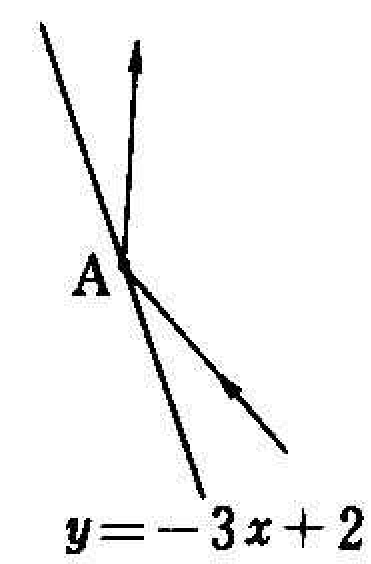
$$\vec{x}=\vec{a}+\left(-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$$

ですから

$$\vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}|\vec{b}|^2=0$$
$$\therefore\quad \vec{b}\perp\vec{x}$$

つまり $\vec{x}$ が $\vec{b}$ に垂直になったとき，長さが最小になるのです。これは，当然でしょう。

練習 8. 直線 l：$y=-3x+2$ 上の点A $(1,\ 5)$ にある光線がベクトル $\vec{a}(-1,\ 2)$ の方向で入射している。反射光線の方程式を求めよ。



ヒント　反射光線の方向のベクトル $\vec{b}$ を求めるには $y=-3x$ 上の点 $(0,\ 0)$ にベクトル $\vec{a}(-1,\ 2)$ の方向で入射したと考えればよいでしょう。

そこで，ベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{c}(-1,\ 3)$ とのなす角が $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が等しいことを考えて

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$|\vec{b}|=|\vec{c}|$ としても差し支えないから

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\therefore\quad (-1,\ 2)\cdot(-1,\ 3)=(-1,\ 2)\cdot(x,\ y)$

$$\therefore\quad -x+2y=1+6=7$$

また　　$x^2+y^2=1+9=10$

これを連立させて解きますと

$$\therefore\quad \begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-\dfrac{9}{5}\\ y=\dfrac{13}{5}\end{cases}$$

この2つの解のうち左の方は $\vec{c}$ と一致しますから，もちろん求めるものではありません。

かくして，求めるものは，点 $(1,\ 5)$ を通り，ベクトル $\left(-\dfrac{9}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$ に平行な直線でその方程式は

$$\frac{x-1}{-\dfrac{9}{5}}=\frac{y-5}{\dfrac{13}{5}}$$

つまり　$13x+9y=58$　となります。

ベクトルの直交条件

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈ベクトルの内積について大切なこと3つあります。曰くアレ，そして曰くソレ，曰く直交条件です。

◆ ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積の定義から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

が成り立つのですから，$\theta=90°$ なら

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

です。また，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ なら

$$\cos\theta=0 \qquad \therefore\quad \theta=90°$$

となりましょう。つまり，

$|\vec{a}|\neq0$, $|\vec{b}|\neq0$ のとき $\vec{a}$, $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$$

となることです。

(注) 直交の定義を拡張して

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき $\vec{a}\perp\vec{b}$

としてある本もあります。この場合には，零ベクトルはすべてのベクトルに垂直ということになります。

*　*　*

◆ では，具体的な問題にいきましょう。

練習 1. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$ と $\vec{b}=(a,\ 1)$ が直交するように a の値を定めよ。

(ヒント)
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ 2)\cdot(a,\ 1)$$
$$=a+2=0$$
$$\therefore\quad a=-2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 2. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(4,\ 3)$ について $(\vec{a}+\vec{b})$ と $(\vec{a}+x\vec{b})$ が垂直となるように定数 x の値を定めよ。

(ヒント) $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 2)+(4,\ 3)=(5,\ 5)$

$\vec{a}+x\vec{b}=(1,\ 2)+x(4,\ 3)$

$=(1+4x,\ 2+3x)$

ですから

$$(5,\ 5)\cdot(1+4x,\ 2+3x)=0$$
$$\therefore\quad 5(1+4x)+5(2+3x)=0$$
$$\therefore\quad 3+7x=0$$
$$\therefore\quad x=-\frac{3}{7} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

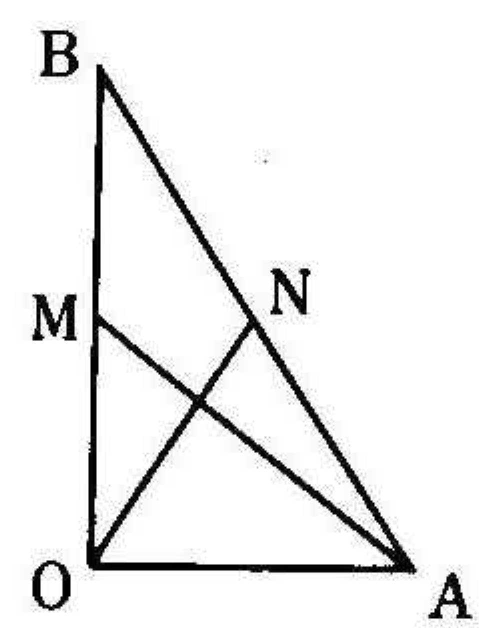
次のようにやってもいいでしょう。

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+x\vec{b})=0$$
$$\therefore\quad |\vec{a}|^2+(1+x)\vec{a}\cdot\vec{b}+x|\vec{b}|^2=0$$
$$\therefore\quad 5+(1+x)\cdot10+x\cdot25=0$$
$$\therefore\quad x=-\frac{15}{35}=-\frac{3}{7}$$

*　*　*

◆ ベクトルの直交条件に関係した問題は，直交することが条件であるものと，直交することが結果である場合とあります。こんな抽象的なことをいってもピンとこないでしょうね。では，これをやってみませんか。

練習 3. 右の図において $\angle AOB=90°$ で，M，N はそれぞれ BO, BA の中点とする。ON⊥AM であるとき OA : OB を求めよ。



(ヒント) これは OB⊥OA と ON⊥AM と直交条件が2つ入っています。さて，どうするか。図形問題で，ベクトルで，というのですから，まず，何はともあれ，原点を，つまりベクトルの起点を選ばなければなりません。どこでもいいが，Oをとるのが妥当でしょう。

そこで，$O(\vec{0})$, $A(\vec{a})$, $B(\vec{a})$ としますと

OA⊥OB より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

また，$M\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$ ですから

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}=\frac{\vec{b}-2\vec{a}}{2}$$

さあ，これで準備完了だ。$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ だから，

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot\frac{\vec{b}-2\vec{a}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|^2)=0$$

$$\therefore\quad |\vec{b}|=\sqrt{2}\,|\vec{a}|$$

$$\therefore\quad OA:OB=|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:\sqrt{2}$$

答　$1:\sqrt{2}$

5/12

練習 4. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$ のとき，$\vec{a}\perp\vec{b}$ を証明せよ。

ヒント　$\vec{a}\perp\vec{b}$ を証明せよ，というのだから内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ を証明すればいいだろう。ところが，ここには $\vec{c}$ がない。さては，与えられた条件から $\vec{c}$ を消去すればいいだろう。

$\vec{c}$ を消去するにはどうする？　いうまでもない。$\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$ を $|\vec{c}|=5$ に代入するのだ。かくて，

$$|-(\vec{a}+\vec{b})|=5$$

$$\therefore\quad |\vec{a}+\vec{b}|=5\qquad \therefore\quad |\vec{a}+\vec{b}|^2=25$$

$$\therefore\quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=25$$

$$\therefore\quad |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=25$$

$$\therefore\quad 3^2+4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=25$$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0\qquad\text{Q. E. D.}$$

実は $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ より $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は三角形を作る。そこでピタゴラスの逆定理からすぐ出るのですが，当面の目的ではありません。

*　　*　　*

◆　では，やや総合的な問題を：——

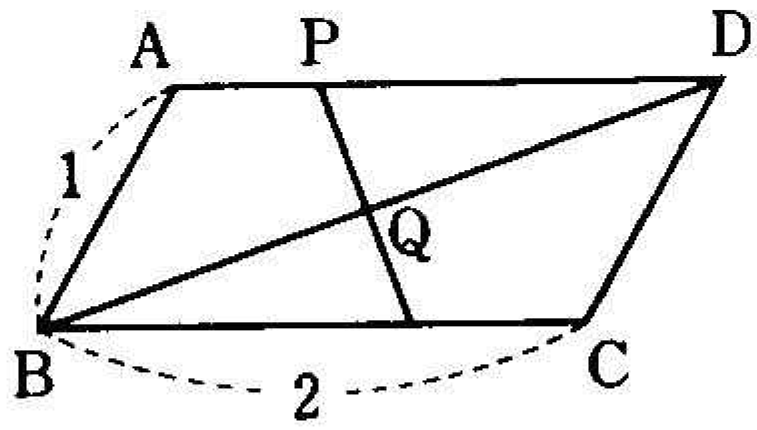
5/12

練習 5. 平行四辺形 ABCD がある。線分 AD を $1:p$ に，線分 BD を $1:q$ に内分する点をそれぞれ P，Q とする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ で表せ。

(2)　線分 AB，BC の長さをそれぞれ 1，2 とし，$\angle ABC=60°$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{BD}$ が直交するための p，q の関係式を求めよ。

（京都工繊大）



ヒント　(1)　何はともあれ，位置ベクトルの起点をきめるべきです。どこでもよいが，点Bをとるのが，まあ，オントウというものでしょう。

Bを起点とし，

$$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{BC}=\vec{c}$$

としますと $\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{c}$ ですから，

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1\cdot(\vec{a}+\vec{c})+p\cdot\vec{a}}{1+p}=\frac{1}{1+p}\{(1+p)\vec{a}+\vec{c}\}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{1+q}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{1+q}(\vec{a}+\vec{c})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}$$

$$=\frac{1}{1+q}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{1+p}\{(1+p)\vec{a}+\vec{c}\}$$

$$=\frac{-q}{1+q}\vec{a}+\frac{p-q}{(1+q)(1+p)}\vec{c}$$

$$=\frac{q}{1+q}\overrightarrow{AB}+\frac{p-q}{(1+q)(1+p)}\overrightarrow{BC}\ \cdots\cdots\ \text{答}$$

となります。

(2)　$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BD}$ となるための条件は

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}$$

$$=\left(\frac{-q}{1+q}\vec{a}+\frac{p-q}{(1+q)(1+p)}\vec{c}\right)\cdot(\vec{a}+\vec{c})=0$$

ここで，　$\vec{a}\cdot\vec{a}=1$，$\vec{c}\cdot\vec{c}=4$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot2\cdot\cos60°=1$$

を用いて上式を変形すると

$$\frac{5}{q}-\frac{7}{p}=2\qquad\cdots\cdots\ \text{答}$$

が得られます。

練習 6. 平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とおく。辺 BC を $(1-p):p$ に内分する点を P，対角線 BD を $(1-q):q$ に内分する点を Q とする。$\overline{AD}=2\overline{AB}$，$\angle BAD=120°$ のとき $AP\perp BC$ $AQ\perp AB$ となるように p，q を定めよ。

（東京商船大）

答　$p=\dfrac{3}{4}$，$q=\dfrac{1}{2}$

○ベクトルの長さの扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルの長さは，ひとたびセンタクをあやまるとスゴクめんどうになるものだ。なんだって，何の選択だい？

◆ ベクトル$\vec{a}$の長さ$|\vec{a}|$の扱い方は２つあります。第１は **成分で表す** とき，第２は **内積で表す** とき，です。つまり

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ **なら**

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ **なら**

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

です。また

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ **あるいは** $\vec{a}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

です。

では，具体的な問題にいきましょう。

■練習 1. ベクトル $\boldsymbol{a}=(4,\ 3)$ の長さを求めよ。

（解）　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$　……答

■練習 2. ベクトル $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ k\right)$ の長さが１に等しいとき，kの値を求めよ。

（解）　$|\boldsymbol{a}|^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+k^2=1$

$\therefore\ k^2=\dfrac{7}{9}$　　$\therefore\ k=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　……答

■練習 3. $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$ で，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のなす角が $60°$ のとき $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ を求めよ。

（ヒント）　$\boldsymbol{a}$も$\boldsymbol{b}$も成分が与えられていないのですから，内積を使うにきまっています。

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=3^2+4^2+2\cdot3\cdot4\cdot\cos 60°$$
$$=9+16+12=37$$

$\therefore\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{37}$　……答

（注）　もちろん，これは余弦定理を使ってもできますが，ここではベクトル計算に重点をおいてやることにしましょう。次も同じです。

■練習 4. $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角が $120°$ のとき $2\vec{a}+3\vec{b}$ の長さを求めよ。

（解）　$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4\cdot3^2+9\cdot4^2+12\cdot3\cdot4\cos120°=108$

$\therefore\ |2\vec{a}+3\vec{b}|=6\sqrt{3}$　……答

＊　＊　＊

◆ では，ややめんどうな問題を：——

■練習 5. $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ の最小値を求めよ。ただし $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$ であり，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のなす角をθとする。

（ヒント）　$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})$

$=|\boldsymbol{b}|^2t^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})t+|\boldsymbol{a}|^2$

$=b^2t^2+2(ab\cos\theta)t+a^2$

$=(bt+a\cos\theta)^2+a^2-a^2\cos^2\theta$

$=(bt+a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta$

ゆえに，求める最小値は

$$\sqrt{a^2\sin^2\theta}=a\sin\theta$$

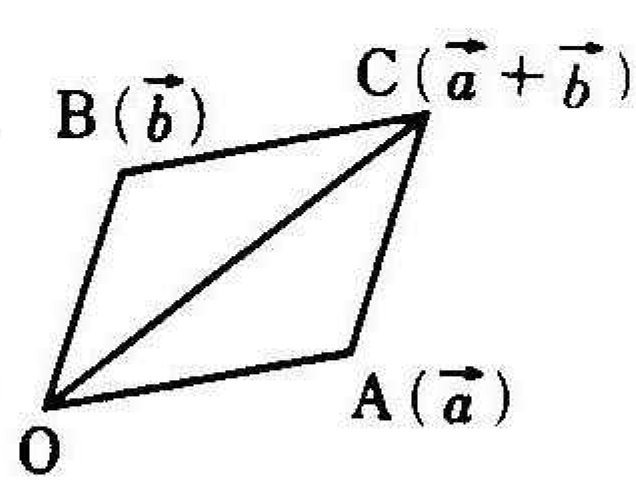
です。（$0\leqq\theta\leqq\pi$ だから，$\sin\theta>0$ に注意）

＊　＊　＊

◆ ベクトルの大きさについて大切な公式があります。それは：——

$$|\vec{a}|\sim|\vec{b}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

です。



証明は幾何学的に考えるともっとも簡単です。すなわち，右の図において，

$$\mathrm{OA}\sim\mathrm{AC}\leqq\mathrm{OC}\leqq\mathrm{OA}+\mathrm{AC}$$

と同じことだからです。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的問題を：——

練習 6. 2つのベクトル $2\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ の大きさが等しく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさも等しいという。このとき，2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。 (杏林大)

ヒント $|2\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+3\vec{b}|$ かつ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ だというのですね。もう扱い方はきまっています。いずれも **2乗してみる** ことだ。そして $|\vec{a}|=|\vec{b}|=l$ とでもおけば，答案の形がきれいになるでしょう。 答 120°

練習 7. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ がある。ここで $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$ とする。実数 t の関数 $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{d}|^2$ はどのような t に対し最小値をとるか。ただし，一般にベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の内積を $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ で表すとき，$\boldsymbol{u}$ の大きさ $|\boldsymbol{u}|$ を $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$ と定義する。 (早大)

ヒント $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{d}|^2$

$$=(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{d})$$
$$=(|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2)t^2+2\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\}t+(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$$
$$=(|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2)\left\{t+\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2}\right\}^2+\cdots$$

からわかるように

$$t=-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2}$$

のとき最小値をとります。…の部分は，キチンと書いてくださいよ。もっとも，t で微分するなら，書く必要もないわけだな。

練習 8. 平面上に2つのベクトル

$$\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \vec{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

$(0<\alpha<\beta<\pi)$ がある。すべての実数 t に対して，2つのベクトル $t\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-t\vec{b}$ の大きさが等しいとき，$\beta-\alpha$ を求めよ。 (芝浦工大)

解 $|t\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-t\vec{b}|$

$$\therefore\ |t\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-t\vec{b}|^2$$
$$\therefore\ |\vec{a}|^2t^2+2(\vec{a},\ \vec{b})t+|\vec{b}|^2$$
$$=|\vec{b}|^2t^2-2(\vec{a},\ \vec{b})t+|\vec{a}|^2$$

ところが $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=1$ であるから

$$4(\vec{a},\ \vec{b})t=0$$

これがすべての t について成り立つための条件は

$$(\vec{a},\ \vec{b})=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\ \sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\cos(\alpha-\beta)=0$$
$$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{\pi}{2} \quad\cdots\cdots 答$$

注 これなどは，ベクトルというよりは，三角関数のほうに抵抗を感じる人が多いでしょうね。

次はどうです。ベクトルよりも，2次方程式に抵抗を感ずるかも。

練習 9. 2次方程式 $x^2+x-1=0$ の2つの解 a, b を成分にもつ，平面上のベクトル $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$ を考える。同じ平面上のベクトル $\boldsymbol{v}=(c,\ d)$ で，$\boldsymbol{u}$ と直交し，長さが1であるものの成分 c, d を2つの解にもつ2次方程式を求めよ。 (京大)

ヒント $x^2+x-1=0$ の2つの解が a, b なんですから，解と係数の関係から

$$a+b=-1 \quad\cdots\cdots①$$
$$ab=-1 \quad\cdots\cdots②$$

$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ ですから，

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(a,\ b)\cdot(c,\ d)$$
$$=ac+bd=0 \quad\cdots\cdots③$$

$|\boldsymbol{v}|=1$ ですから

$$c^2+d^2=1 \quad\cdots\cdots④$$

となります。

ところでほしいのは，c, d を解にもつ2次方程式なんですから，

$$c+d,\ cd$$

を求めればよい。これなら，数Iの方程式の練習だ。途中の計算は省略して

$$c+d=\pm\frac{\sqrt{15}}{3},\ cd=\frac{1}{3}$$

ゆえに，求めるものは

$$3x^2\pm\sqrt{15}x+1=0 \quad\cdots\cdots 答$$

となります。

ベクトルのなす角

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆角を扱うにベクトルはまったく直截簡明（ちょくせつかんめい）ですな。ちょっと気になるのは，内積の定義を使うところだが，……

◆ ベクトルのなす角を扱うのは2つの方法があります。1つは内積を使うもの，もう1つは図形の性質を使うもので，多くは余弦定理を応用することになります。ともあれ，第1からやってみませんか。

練習 1. ベクトル $\boldsymbol{a}(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}(3,\ 1)$ のなす角 θ を求めよ。

ヒント　ベクトルの内積の定義から

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

ところが

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,\ 2)\cdot(3,\ 1)=1\cdot3+2\cdot1=5$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$ ……答

注　ベクトルのなす角はふつう一般角を考えません。だから，特に断ってなくても $0\leqq\theta\leqq\pi$ として扱っていいのです。しかし運動を扱うようなときには，一般角で扱うほうが便利なことが多いのです。

練習 2. ベクトル

$$\boldsymbol{a}(1,\ 2),\ \boldsymbol{b}(2,\ 1)$$

のなす角を求めよ。

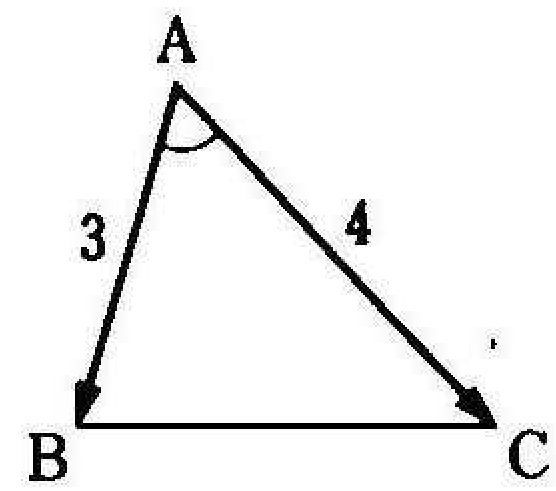
解　内積の定義から

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1\cdot2+2\cdot1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4}{5}$$

答　$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

練習 3. $\triangle$ABC において $\overline{\mathrm{AB}}=3$，$\overline{\mathrm{AC}}=4$，$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角Aを求めよ。



ヒント　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{c}$

としますと

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$$

です。

さて，

$$\cos\angle\mathrm{A}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{3\cdot4}$$

ハテ，困ッタ!!　$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ をどうして求めるのか。それはこれです。

$\mathrm{BC}=|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|$ の両辺を2乗して

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$

$$\therefore\quad \sqrt{13}^2=|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\therefore\quad 13=16+9-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=6$$

$$\therefore\quad \cos\angle\mathrm{A}=\frac{6}{3\cdot4}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$$ ……答

もう気がついたかもしれませんが，これは余弦定理を使ったほうがラクです。つまり

$$\cos\angle\mathrm{A}=\frac{3^2+4^2-\sqrt{13}^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$$

とするのです。このように，ちょっと考え方を変えるとラクになることも多いものです。

練習 4. 三角形 ABC において，

$$\mathrm{A}(1,\ 2),\ \mathrm{B}(2,\ 3),\ \mathrm{C}(3,\ 1)$$

のとき $\angle$A を求めよ。

答　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

◆ では，やや総合的な問題へ：——

練習 5. $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を互いに垂直な単位ベクトルとする。このとき，整数 k をどのようにとっても 2 つのベクトル $k\vec{e_1}+\vec{e_2}$, $\vec{e_1}+k\vec{e_2}$ の作る角は 60°，150° にならないことを示せ。（武蔵工大）

7/13

ヒント　60°とか 150° にとらわれないで，その**作る角を求めよ**，という問題だ，と思ってみることです。

ベクトル ke_1+e_2, e_1+ke_2 のなす角を θ としますと，

$$\cos\theta=\frac{(k\vec{e_1}+\vec{e_2})\cdot(\vec{e_1}+k\vec{e_2})}{|k\vec{e_1}+\vec{e_2}||\vec{e_1}+k\vec{e_2}|}$$

ところが，

$$|k\vec{e_1}+\vec{e_2}|^2=(k\vec{e_1}+\vec{e_2})\cdot(k\vec{e_1}+\vec{e_2})$$
$$=k^2+1$$
$$(\because\quad |\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1,\ \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0)$$

ですし，$|\vec{e_1}+k\vec{e_2}|^2$ も k^2+1 です。また，

$$\text{分子}=k|\vec{e_1}|^2+(k^2+1)\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+k|\vec{e_2}|^2$$
$$=2k$$
$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{2k}{k^2+1}$$

さて，これが $\frac{1}{2}$ になれるかどうか？

$$\frac{2k}{k^2+1}=\frac{1}{2}$$

とおいて変形しますと，

$$k^2-4k+1=0$$
$$\therefore\quad k=2\pm\sqrt{3}$$

ナルホド，k は整数にはならなかった!!

150°も同じこと。

練習 6. 空間内の 2 つの異なる単位ベクトル $\overrightarrow{OA}=(p,\ q,\ 0)$, $\overrightarrow{OB}=(r,\ s,\ 0)$ が共にベクトル $\overrightarrow{OC}=(1,\ 1,\ 1)$ と $\frac{\pi}{4}$ の角をなすとき，次の問に答えよ。

(1)　$p+q$ と pq の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$\angle AOB=\theta$ の値を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。（九大）

ヒント　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角が $\frac{\pi}{4}$ ですから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\frac{\pi}{4}$$

つまり

$$(p,\ q,\ 0)\cdot(1,\ 1,\ 1)=1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad p+q=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots①$$

$|\overrightarrow{OA}|=1$ から

$$p^2+q^2=1\qquad\cdots\cdots②$$

①，②から，$p+q$, pq が求められます。まったく同様に，

$$r+s=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots③$$
$$r^2+s^2=1\qquad\cdots\cdots④$$

です。ところで　pr+qs

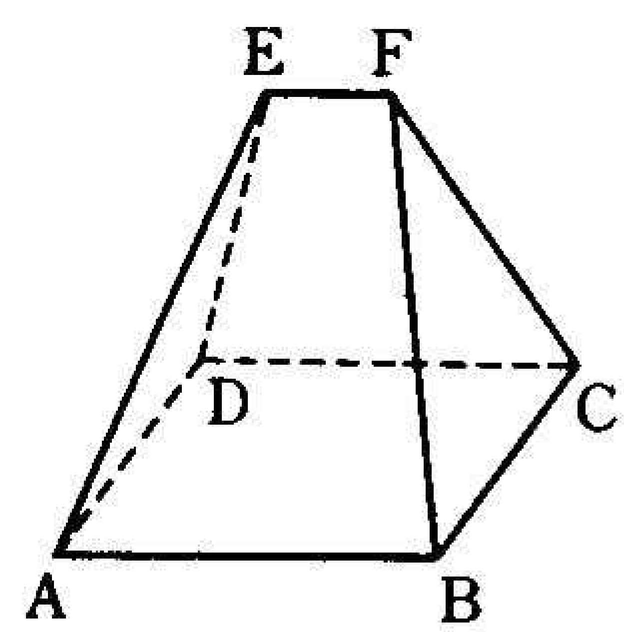
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{\cancel{pq+rs}}{1^2}=\cancel{pq+rs}$$

は上の結果から求められて，θ も……

答　(1)　$p+q=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $pq=\frac{1}{4}$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$

練習 7. 図のような立体図形を考える。3 辺 AB, DC, EF は互いに平行であり，底面 ABCD は長方形である。また，



AB＝9, BC＝8, EF＝3,
EA＝ED＝EB＝FC＝13

とする。このとき，この立体の体積，四角形 ABFE の対角線 AF の長さおよび面積を求めよ。また，$\angle AFC=\alpha$ とするとき，$\cos\alpha$ を求めよ。（東大）

ヒント　ベクトルの問題というほどのものでもありませんが，$\cos\alpha$ を求めるときに，内積を使えば，というわけ。もちろん，余弦定理を使ってもかまいません。

答　（順に）336, 14, $24\sqrt{10}$, $\frac{55}{91}$

図形のベクトル方程式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトル方程式というのは教科書によって扱い方がいろいろで，やや，漠然としている。これは困ったことだ!!

◆ ともあれ，具体的な問題からはじめるとしましょう。

練習1. 点Oを中心とし，半径rの円周上の点をPとする。Oを位置ベクトルの起点にとり，$\overrightarrow{OP}=\vec{x}$ とするとき，$\vec{x}$とrの関係を求めよ。

ヒント $\overline{OP}=r$ であるから $|\vec{x}|=r$ です。これで$\vec{x}$とrの関係が出ました。しかし，$\vec{x}$にはなるべく絶対値をつけたくない。そこで両辺を2乗して

$$|\vec{x}|^2=r^2$$

ところが

$$|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$$

ですから，求める関係式は

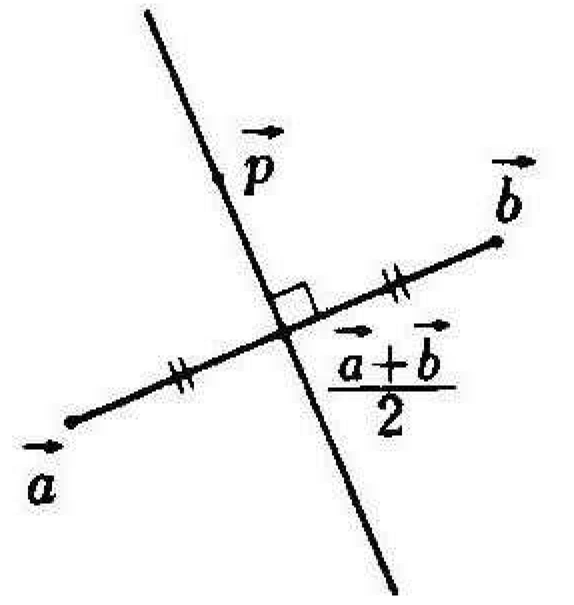
$$\vec{x}\cdot\vec{x}=r^2$$

です。このように点Pの位置ベクトル$\vec{x}$をきめる方程式を点Pの **ベクトル方程式** というのです。では，次を：——

練習2. 2点$\vec{a}$，$\vec{b}$の垂直2等分線のベクトル方程式を求めよ。

ヒント 2点$\vec{a}$，$\vec{b}$というのは，位置ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$で表される2点という意味です。

さて，2点$\vec{a}$，$\vec{b}$の垂直2等分線というのは，ちょっと説明不足だが，2点を結ぶ直線を垂直に2等分する直線のことにちがいない。



ところで，それには2つの大きな性質があります。1つは2点$\vec{a}$，$\vec{b}$の中点を点$\vec{p}$と結ぶと，それは$\vec{a}$，$\vec{b}$を結ぶ直線に垂直であることです。それを式で表してみると

$$\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{p}\right)\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)\ \cdots\cdots(*)$$

これが求めるものです。

もう1つの考えは，点$\vec{p}$が点$\vec{a}$と点$\vec{b}$から等距離にある，ということです。

つまり

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$$

ところで，絶対値は2乗するにきまっています，よ。

$$\therefore\quad |\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{p}-\vec{b}|^2$$

$$\therefore\quad (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

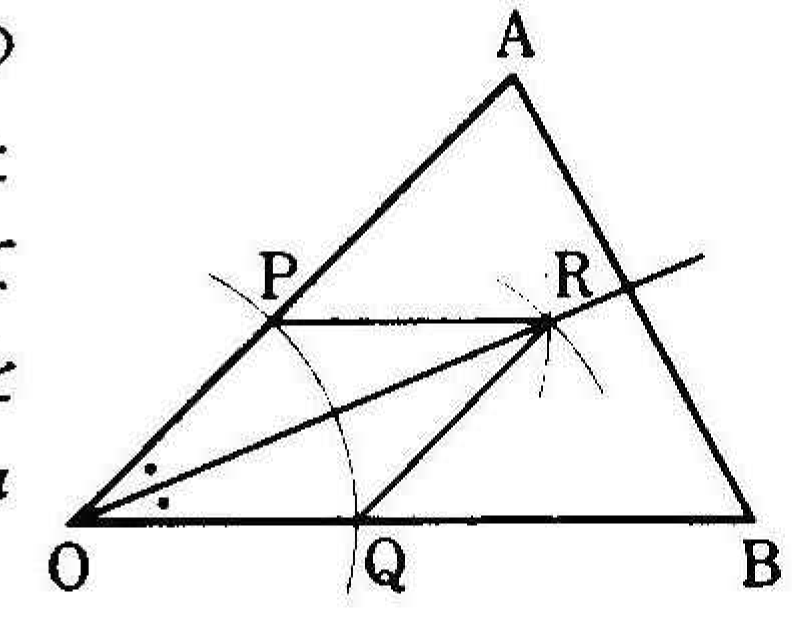
$$\therefore\quad 2(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)$$

なるほど，当然のことながら上の(*)と同じになったではありませんか。

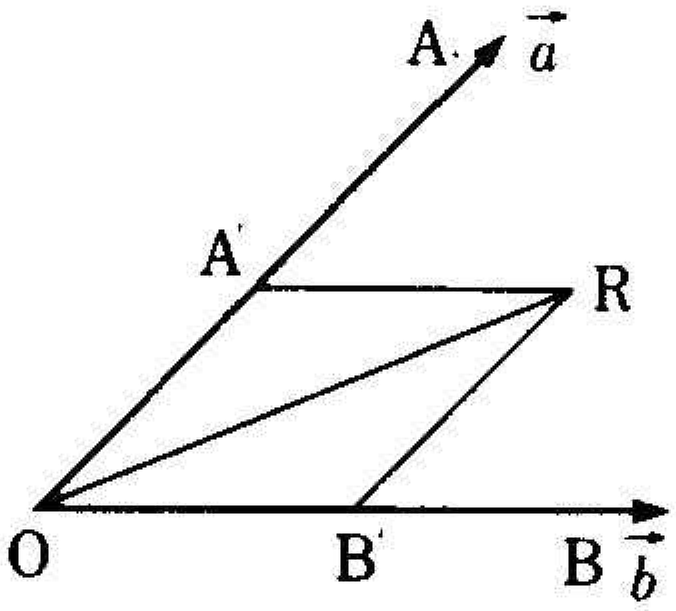
練習3. △AOB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，∠AOB の2等分線のベクトル方程式を求めよ。

ヒント ∠AOB の2等分線を引くときのことを考えてみましょう。Oを中心とし，半径aの円をかいて，



$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ との交点をP，Qとし，P，Qを中心とし同じ半径で円をかき交点をRとすればORこそ求めるもの。さて，次を：——

(解) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はそれぞれ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ にそう単位ベクトルであるから



$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

はひし形RA′OB′の頂点Rを表し，したがって ∠AOB を2等分する。

$$\therefore\quad \vec{p}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

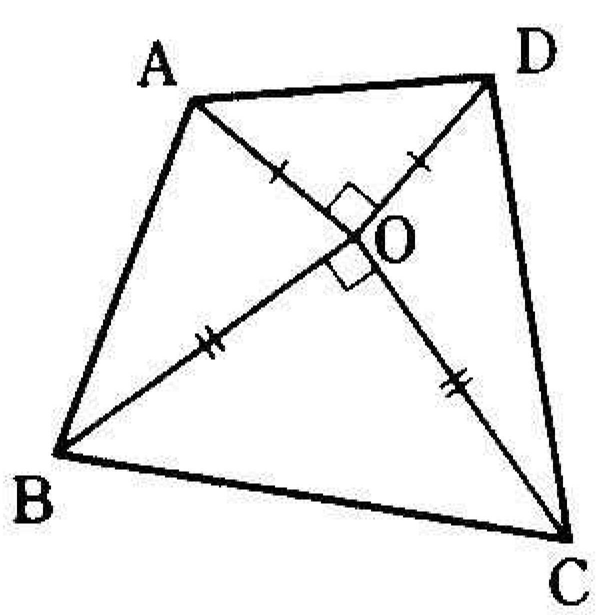
ここにkはパラメーターで $k\geqq 0$ である。

*　*　*

◆ では，次にはやや総合的な問題をとりあげてみましょう。

練習 4. 四辺形 ABCD の内部の点をOとする。$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OD}$ とは大きさが等しく互いに垂直であり，また $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ も大きさが等しく互いに垂直であるとき，$x+y=1$, $0\leqq x\leqq 1$ ならば，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ を満たす点Pはどのような図形上にあるか。　(九州工大)

(ヒント) 夾雑物をとりさってみると，



$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

$(x+y=1,\ 0\leqq x\leqq 1)$

のとき，Pの軌跡を求めよ，ということになるようですね。これなら，

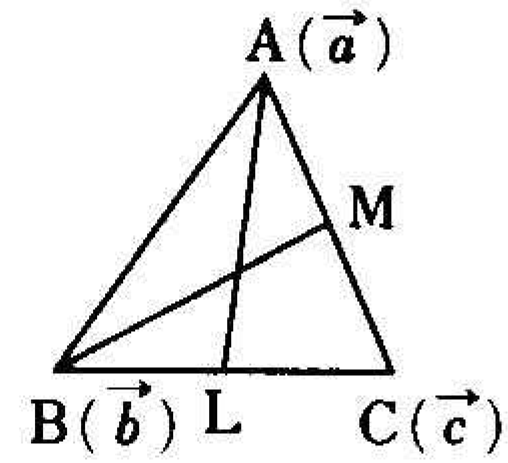
$$\overrightarrow{OP}=\frac{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}}{x+y}\quad (0\leqq x,\ 0\leqq y)$$

なんですから，Pは $\overline{AB}$ を $y:x$ に内分する点，つまり，Pは線分 $\overline{AB}$ (両端を含む) 上を動くのです。

(注) 実は，この問題が九州工大に出たときは(2)として，≪さらに，(1)の $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{CD}$ に垂直であるとき，Pはどのような点か≫というのがついていたのだった。これは辺ABの中点となるのです。しかし，ここの主題ではありません。

練習 5. △ABC において 3 中線 AL, BM, CN は同一点を通ることを示せ。

(ヒント) $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ としますと



$$L\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

となります。

(チョットご注意：上ノ意味ハ，ドコカニベクトルノ起点$O(\vec{0})$ヲトッタトキ，A，B，Cノ位置ベクトルヲソレゾレ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$トスレバLノ位置ベクトルハ $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ ニナル，トイウコトナノデス)

直線 AL のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\left(\vec{a}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\qquad \cdots\cdots①$$

となります。

同様にして BM のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{b}+s\left(\vec{b}-\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)\qquad \cdots\cdots②$$

となります。①，②の交点は

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

の形にかけるハズ。とすれば

$$\alpha=1+t=-\frac{s}{2}\qquad \cdots\cdots③$$

$$\beta=-\frac{t}{2}=1+s\qquad \cdots\cdots④$$

$$\gamma=-\frac{t}{2}=-\frac{s}{2}\qquad \cdots\cdots⑤$$

となりましょう。⑤より

$$t=s$$

これを④に代入して

$$t=-\frac{2}{3},\quad s=-\frac{2}{3}$$

これは③を満足します。かくして AL, BM の交点は

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

これが CN 上にあることはスグわかる。

この種の問題は，大きく分けて，3つのやり方があります。内分点あるいは外分点の公式を使うやり方，ベクトル方程式を使うやり方，そして，もうひとつは，いわゆる幾何学的やり方なのです。

◑ 点の一致するとき

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆2つの点が一致する条件を座標でやるとかなりゴタゴタします。ところがベクトルではスンナリいく。この美しさ。

◆ ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が平行でないとき

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}\quad(\vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0})$$

ならば

$$\alpha=0,\ \beta=0$$

です。なぜなら $\alpha\neq0$ とすると

$$\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$$

これでは $\vec{a}\parallel\vec{b}$ となって仮定に反するからです。まったくおなじようにして，

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$$

ならば

$$\alpha=\alpha',\ \beta=\beta'$$

となります。

さあ，これがわかったら次の練習へ。

ok

練習 1. △ABC の3辺 BC，CA，AB 上にそれぞれP，Q，Rがあって，

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\vec{0}$$

ならば

$$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{CQ}:\overline{QA}=\overline{AR}:\overline{RB}$$

であることを示せ。

ヒント　A($\vec{0}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とし，

$$\overline{BP}:\overline{PC}=l:1-l$$
$$\overline{CQ}:\overline{QA}=m:1-m$$
$$\overline{AR}:\overline{RB}=n:1-n$$

としますと

$$P(l\vec{c}+(1-l)\vec{b})$$
$$Q((1-m)\vec{c})$$
$$R(n\vec{b})$$

で与えられますから

$$\overrightarrow{AP}=l\vec{c}+(1-l)\vec{b}$$
$$\overrightarrow{BQ}=(1-m)\vec{c}-\vec{b}$$
$$\overrightarrow{CR}=n\vec{b}-\vec{c}$$

となります。したがって，

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}$$
$$=(n-l)\vec{b}+(l-m)\vec{c}=\vec{0}$$

$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$（コレハ $\vec{b}$ ト $\vec{c}$ ガ平行デナイコトヲ表ワス記号デスヨ）ですから

$$n-l=0,\ l-m=0$$
$$\therefore\ l=m=n$$
$$\therefore\ \overline{BP}:\overline{PC}=\overline{CQ}:\overline{QA}=\overline{AR}:\overline{RB}$$

Q.E.D.

*　*　*

◆ では，おなじような問題をもうひとつやってみませんか。

ok

練習 2. △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ3点 P，Q，R をとるとき，△ABC と△PQR の重心が一致するならば

$$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{CQ}:\overline{QA}=\overline{AR}:\overline{RB}$$

であることを示せ。

ヒント　A($\vec{0}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とし，左とおなじく

$$\overline{BP}:\overline{PC}=l:1-l$$
$$\overline{CQ}:\overline{QA}=m:1-m$$
$$\overline{AR}:\overline{RB}=n:1-n$$

としますと

$$P(l\vec{c}+(1-l)\vec{b})$$
$$Q((1-m)\vec{c})$$
$$R(n\vec{b})$$

ですから，△PQR の重心は

$$\frac{1}{3}(l\vec{c}+(1-l)\vec{b}+(1-m)\vec{c}+n\vec{b})$$

これが △ABC の重心

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$$

と一致することから，対応する項の係数を比

較して

$$\vec{b}:\quad \frac{1}{3}(1-l+n)=\frac{1}{3}$$
$$\vec{c}:\quad \frac{1}{3}(l+1-m)=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\quad -l+n=0$$
$$l-m=0$$
$$\therefore\quad l=m=n$$
$$\therefore\quad \overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{CQ}}:\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{RB}}$$

Q.E.D.

* * *

◆ 次には四辺形について扱ってみましょう。まず，これを：——

練習 3. 四辺形 ABCD において，$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{DA}}$ をおなじ比に分つ点をそれぞれP，Q，R，Sとするとき，四辺形 ABCD と四辺形 PQRS の重心は一致することを示せ。

（解） $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$, $\mathrm{C}(\vec{c})$, $\mathrm{D}(\vec{d})$ とし，一定比を $t:1-t$ とすれば

$$\mathrm{P}(t\vec{b}+(1-t)\vec{a})$$
$$\mathrm{Q}(t\vec{c}+(1-t)\vec{b})$$
$$\mathrm{R}(t\vec{d}+(1-t)\vec{c})$$
$$\mathrm{S}(t\vec{a}+(1-t)\vec{d})$$

であるから，四辺形 PQRS の重心は

$$\frac{1}{4}\{(t\vec{b}+(1-t)\vec{a})+(t\vec{c}+(1-t)\vec{b})+(t\vec{d}+(1-t)\vec{c})+(t\vec{a}+(1-t)\vec{d})\}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

これは四辺形 ABCD の重心である。よって証明された。 Q.E.D.

さて，いよいよ，本論です。

練習 4. 四辺形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA 上にP，Q，R，Sをとるとき，四辺形 ABCD の重心と四辺形 PQRS の重心が一致するための条件を求めよ。

（ヒント） これはつまり練習3.の逆命題が成り立つか，というわけです。実は成り立たないのです。それを次に考えてみましょう。

$$\mathrm{A}(\vec{0}),\ \mathrm{B}(\vec{b}),\ \mathrm{C}(\vec{c}),\ \mathrm{D}(\vec{d})$$

とし，

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=p:1-p$$
$$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QC}}=q:1-q$$
$$\overline{\mathrm{CR}}:\overline{\mathrm{RD}}=r:1-r$$
$$\overline{\mathrm{DS}}:\overline{\mathrm{SA}}=s:1-s$$

としますと

$$\mathrm{P}(p\vec{b})$$
$$\mathrm{Q}(q\vec{c}+(1-q)\vec{b})$$
$$\mathrm{R}(r\vec{d}+(1-r)\vec{c})$$
$$\mathrm{S}((1-s)\vec{d})$$

となります。そして，四辺形 PQRS の重心は

$$\frac{1}{4}\{p\vec{b}+(q\vec{c}+(1-q)\vec{b})+(r\vec{d}+(1-r)\vec{c})+(1-s)\vec{d}\}$$

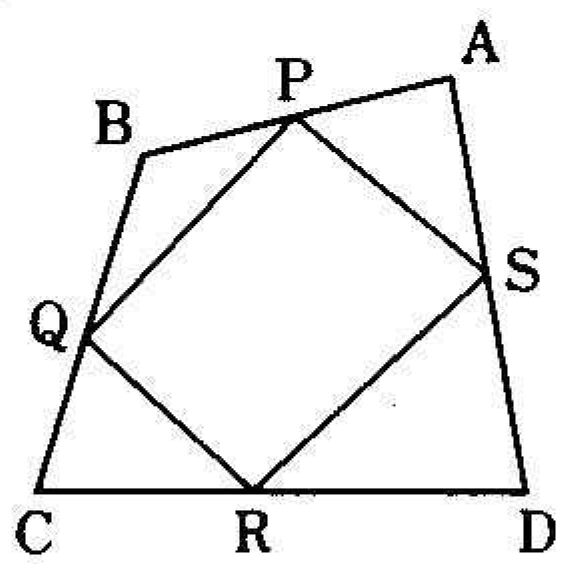
で，これが四辺形 ABCD の重心と一致すれば

$$(1+p-q)\vec{b}+(1+q-r)\vec{c}+(1+r-s)\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$
$$\therefore\quad (p-q)\vec{b}+(q-r)\vec{c}+(r-s)\vec{d}=0\cdots(*)$$

任意の $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ についてこれが成り立つための条件はいうまでもなし。

$$p-q=0,\ q-r=0,\ r-s=0$$
$$\therefore\quad p=q=r=s$$

となります。つまり，任意の四辺形について成立するような p, q, r, s を求めるなら等しくなければなりません。



しかし，(*) を変形すると

$$p\vec{b}+q(\vec{c}-\vec{b})+r(\vec{d}-\vec{c})+s(-\vec{d})=0$$

つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}+\overrightarrow{\mathrm{DS}}=0$$

であればよいのです。そしてこのようなP，Q，R，Sは各四辺形について無数に存在するのです。

（注） なぜ，そのようなP，Q，R，Sが無数にあるかは簡単にわかりますか。考えてみて下さい。

◑ ベクトルと定点通過

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルの定点通過はわりあいめんどうになります。しかし，少しなれると，やはりそれは虚妄であったことを知る。色即是空とかや。

◆　ここではベクトルと定点通過の問題を扱うのですが，座標の場合を一応やってからとりかかるとしましょう。さて，それは：——

練習 1. $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ のとき，直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ は定点を通ることを示せ。

ヒント　a か b を消去すればよいでしょう。

$\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ から $\dfrac{1}{b}=1-\dfrac{4}{a}=\dfrac{a-4}{a}$

$$\therefore\quad b=\frac{a}{a-4}$$

したがって $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ に代入して

$$\frac{x}{a}+\frac{a-4}{a}y=1$$

$$\therefore\quad x+(a-4)y=a$$

$$\therefore\quad (x-4y)+a(y-1)=0$$

そこで，定点を求めるには

$$x-4y=0,\ y-1=0$$

から

$$x=4,\ y=1$$

となります。つまり定点 (4, 1) を通ることがわかりました。

*　*　*

◆　では，いよいよ，本論です。

練習 2. △AOB があるとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満足するすべての p，q に対して2点

$$p\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を通る直線は定点を通ることを示せ。

ヒント　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ としましょう。そうすると2点 $p\vec{a}$，$q\vec{b}$ を通る直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=p\vec{a}+t(p\vec{a}-q\vec{b})\quad\cdots\cdots(*)$$

となります。

ところが $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ から q を求めてみますと

$$q=\frac{p}{p-1}$$

となります。これを (*) に代入して

$$\vec{p}=p\vec{a}+t\left(p\vec{a}-\frac{p}{p-1}\vec{b}\right)$$

$$\therefore\quad \vec{p}=p\left((1+t)\vec{a}-\frac{1}{p-1}t\vec{b}\right)$$

と書けます。

さて，これが p のすべての値に対して定点を通ることを示さなければなりません。（ココデ注意シナケレバナラナイコトハ，p ハ任意ニエラベルノニ対シ，t ハソレニ応ジテキマル数ダトイウコトデス）

そこで，定点を

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

とおいてみますと

$$\alpha=p(1+t)\cdots\cdots①,\quad \beta=-\frac{pt}{p-1}\cdots\cdots②$$

②より t を求め①に代入しますと

$$\alpha=p\left(1-\frac{p-1}{p}\beta\right)$$

$$\therefore\quad (1-\beta)p+(\beta-\alpha)=0$$

これが p の値にかかわらず成り立つのは

$$\alpha=1,\ \beta=1$$

のとき，したがって，(*) は定点 $\vec{a}+\vec{b}$ を通ることがわかったのです。

*　*　*

◆　では，もうひとつ：——

練習 3. 3点O，A，Bが1直線上にないとき，$\dfrac{4}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満足するすべての p，

q に対し，2点 $p\overrightarrow{OA}$, $q\overrightarrow{OB}$ を通る直線は定点を通ることを示せ。

(注) 練習2とおなじことですが，今度は解答の形でかいておきましょう。

(解) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

とおくと，2点 $p\vec{a}$, $q\vec{b}$ を通る直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=p\vec{a}+t(p\vec{a}-q\vec{b})$$

これが定点 $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ を通るとすれば

$$\alpha=p+tp,\ \beta=-tq$$

t を消去すると

$$\alpha=p+\left(-\frac{\beta}{q}\right)p$$

さらに $\dfrac{4}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ から

$$\frac{1}{q}=\frac{p-4}{p}$$

$$\therefore\quad \alpha=p-(p-4)\beta$$

$$\therefore\quad (1-\beta)p+(4\beta-\alpha)=0$$

これは p のすべての値に対して

$$\alpha=4,\ \beta=1$$

によって満足される。ゆえに，定点 $4\vec{a}+\vec{b}$ を通る。　　Q.E.D.

くどいが，もうひとつやってみませんか。

練習 4. 3点O，A，Bが1直線上にないとき，$\dfrac{3}{p}+\dfrac{1}{2q}=1$ を満足するすべての p, q に対し，2点 $p\overrightarrow{OA}$, $(3q)\overrightarrow{OB}$ を通る直線は定点を通ることを示せ。

(ヒント) こんどは発想法を変えて次のように考えてみましょう。

$$\frac{3}{p}+\frac{1}{2q}=1$$

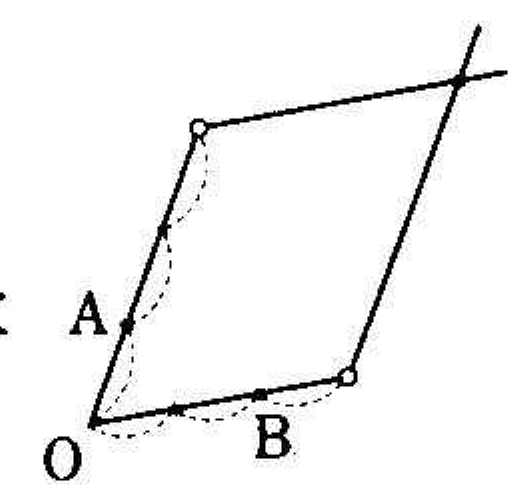
において，p が無限に大きくなると $\dfrac{1}{2q}$ は1に近づくハズ。したがって q は $\dfrac{1}{2}$ に近づくハズです。つまり，このとき $p\overrightarrow{OA}$, $(3q)\overrightarrow{OB}$ という2点は，半直線 OA の無限に遠くの点と $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ という点になるハズ。つまり，問題がウソでなければ，点 $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ を通り OA に平行な直線は定点を通るハズです。

また，q が無限に大きくなると，$\dfrac{3}{p}$ は1に近づくハズ，したがって p は3に近づくハズ，だから，点 $3\overrightarrow{OA}$ を通り OB に平行な直線は定点を通るにちがいない。

してみると定点は

$$3\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$$

にちがいない。こうして次のような解になります。



(解) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

とすると定点は

$$\mathrm{T}\left(3\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)$$

である。なんとなれば

$$p\overrightarrow{OA}=p\vec{a}\ \text{を}\ \mathrm{A}'$$
$$3q\overrightarrow{OB}=3q\vec{b}\ \text{を}\ \mathrm{B}'$$

とすると

$$\overrightarrow{A'T}=\left(3\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)-p\vec{a}$$
$$=(3-p)\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{A'B'}=3q\vec{b}-p\vec{a}$$
$$=\frac{3p}{2(p-3)}\vec{b}-p\vec{a}$$
$$=\frac{p}{p-3}\left\{(3-p)\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right\}$$
$$=\frac{p}{p-3}\overrightarrow{A'T}$$

ゆえに A′B′ は点Tを通る。

Q.E.D.

うーん，なんという高踏（高等にあらず）さ。

◆ それにしても，大抵の問題は，ベクトル的扱い方と座標を使う扱い方には，完全な平行性，ないし，ホンヤク性があります。ところが，定点通過にはそれがないようにみえる，これは，ハテ，どうしたわけであろう。

（三角形の）垂心の扱い方

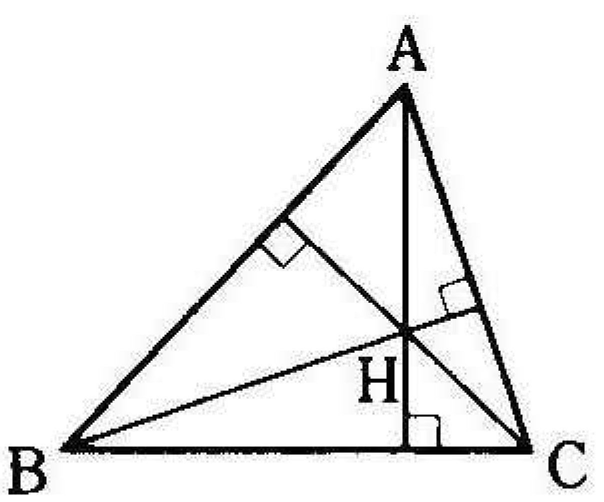
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆垂心の入った問題はとかくめんどうになりがちです。というのも，重心や外心にみられる対称性がないからです。

◆　三角形 ABC の各頂点から対辺に下した垂線は同一点を通ります。この点を **垂心**（すいしん）といいます。この垂心に関係した諸問題を主としてベクトルの応用として扱うのがここの目的です。

1/8

練習 1. △ABC の 3 つの頂点から対辺に下した垂線は同一点を通ることを示せ。



（ヒント）B，C から対辺に下した垂線の交点を H とし，AH⊥BC を証明すればいいハズ。

さて，4 点 A，B，C，H の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{h}$ としますと

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})=0 \qquad \cdots\cdots②$$

ところで証明したいのは $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ ですからベクトルで表すと

$$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{a})=0 \qquad \cdots\cdots③$$

です。①，②を使って③を証明すればいいわけですね。

①，②，③をバラバラにしてみると

$$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0 \qquad \cdots\cdots①'$$

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=0 \qquad \cdots\cdots②'$$

$$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{h}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0 \qquad \cdots\cdots③'$$

となります。ナルホド①′から②′を引くと③′になるのです。

これを答案としてまとめることはキミにやってもらうとしよう。なお，1 つの頂点，例えばAをベクトルの起点にとると，もう少し見やすくなります。

1/

練習 2. 三角形 ABC の外心を位置ベクトルの起点にとり，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ とするとき，垂心 H の位置ベクトル $\overrightarrow{OH}$ は $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ で与えられることを示せ。

（ヒント）AH⊥BC，BH⊥CA，CH⊥AB が証明できればいいでしょう。しかも，3 つやるほどのこともない。1 つできれば，他は同様，というわけだ。

（解）三角形の垂心は 1 つしかないから，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ で表される点 K が垂心になることを証明すれば十分である。さて，

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=\{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}\}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$

$$=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$$

ところが，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}|$はいずれも外接円の半径に等しいから，上の値は 0 に等しい。

$$\therefore\quad \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{BC}$$

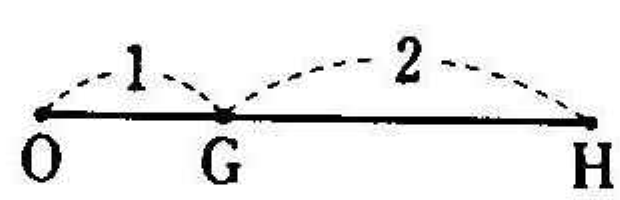
同様にして

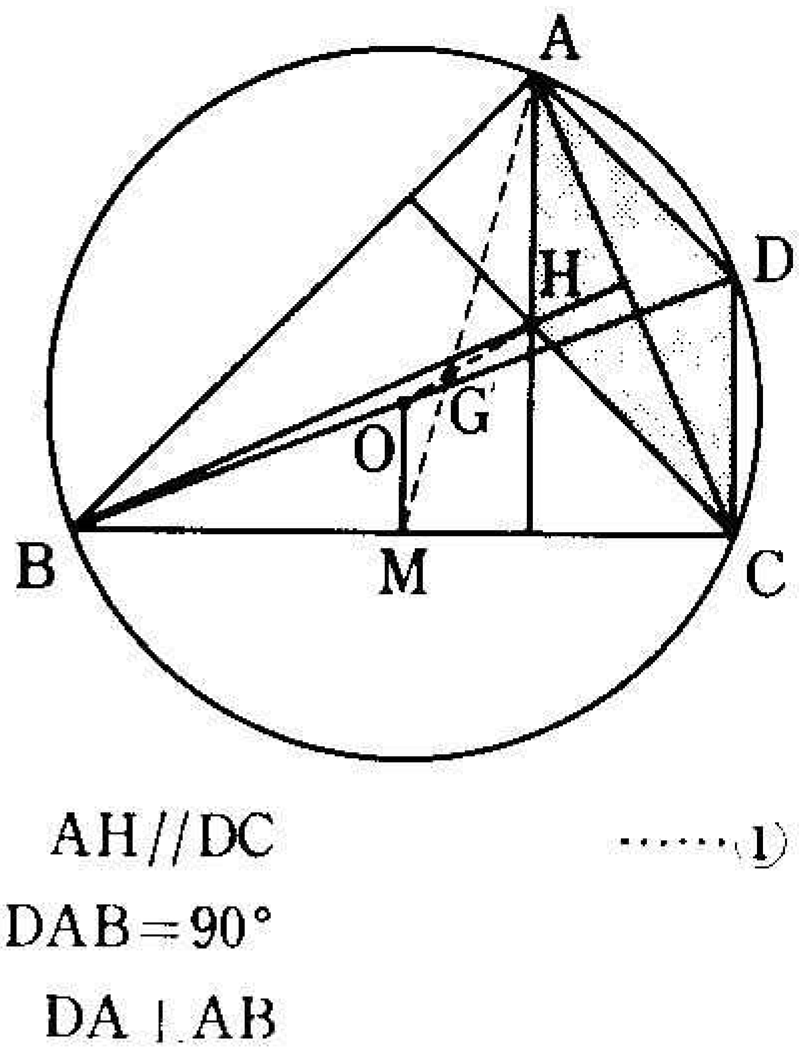
$$\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{CA}$$

ゆえに，点 K$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ は垂心である。

よって証明された。

（注）重心Gは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$ で与えられますから，上の結果はOGを 2 倍に延長した点が垂心であることを示しています。したがってまた，三角形の外心，重心，垂心は一直線上にあることが証明されたことにもなります。このことは，ベクトルを使わないでも次のように証明できます。（この証明をムリにオボエルことはありませんよ）





右の図において，Hは垂心，Oは外心です。いま直径 BD を引くと

$\angle DCB=90°$

$\therefore$ $DC\perp BC$

また

$AH\perp BC$

$\therefore$ $AH/\!/DC$　　……①

次に　$\angle DAB=90°$

$\therefore$ $DA\perp AB$

また　$CH\perp AB$

$\therefore$ $CH/\!/DA$　　……②

①と②から四辺形 AHCD は平行四辺形であることがわかります。

$\therefore$ $AH=DC$

ところが，△BCD において BC の中点をMとしますと

$OM\perp BC$　　$\therefore$ $OM/\!/DC$

したがって，

$$OM=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AH$$

そこで，AM と OH との交点を G′ としますと，△AG′H∽△MG′O ですから

$AG':G'M=AH:OM=2:1$

ゆえに G′ は実は重心だったのです。しかも G′ は OH を 1：2 に分けることもわかります。

*　　*　　*

◆ 次に，垂心に関係したやや総合的な問題をとりあげてみましょう。

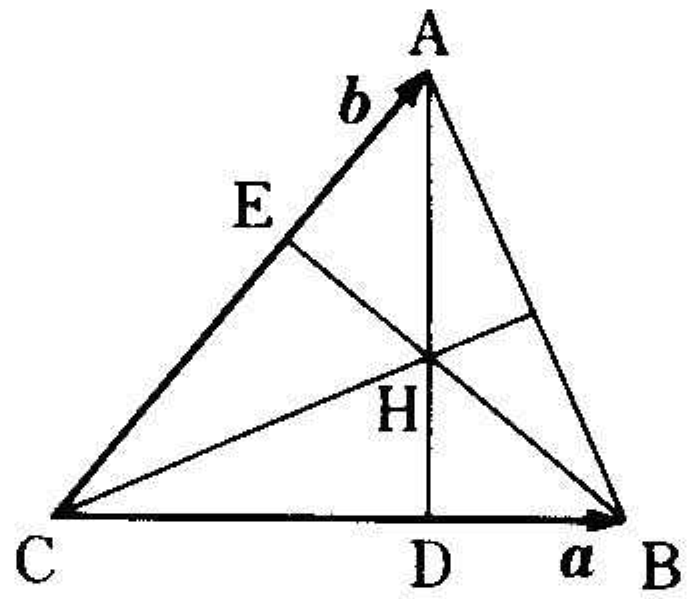
練習 3. 三角形 ABC の頂点 A，B より対辺に下した垂線の足をそれぞれ D，E とし，直線 AD，BE の交点をHとする。ベクトル $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ で表すとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{CD}=x\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CE}=y\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CH}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ を満たす実数 x，y，u，v を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を用いて表せ。

(2) (1)における u，v を三角形 ABC の角，辺の長さ，面積を用いて表せ。

（名古屋工大）

ヒント　右図で，



$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos C=|\boldsymbol{a}|\overline{CD}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{CD}=\frac{\overline{CD}}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}$$

同様にして　$y=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$

ところで $BH\perp CA$ ですから $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}&=(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}\\&=(u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=u(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+v|\boldsymbol{b}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

これが 0 に等しいから

$$u(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+v|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\qquad\cdots\cdots①$$

同様にして $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ から

$$u|\boldsymbol{a}|^2+v(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\qquad\cdots\cdots②$$

ですから，①，②を連立させて解いて

$$u=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}))}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

$$v=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}))}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

が得られます。

(2)　$\cos C=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

ですから，

$$u=\frac{\cos C\left(\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}-\cos C\right)}{1-\cos^2 C}=\frac{\cos C(|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|\cos C)}{|\boldsymbol{a}|\sin^2 C}$$

ところが

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin C$$

ですから，

$$u=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|^2\cos C(|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|\cos C)}{4S^2}$$

同様にして

$$v=\frac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|\cos C(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\cos C)}{4S^2}$$

○三角形の五心

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆五心は重心，内心，外心，垂心，傍心をいいます。三角形がふたごころをもつハズもなし，いわんや五つごころをもつべき由もなし。

◆　ここでは三角形の五心に関係した問題を扱ってみましょう。すでに重心（☞p.50）や内心について扱ってありますが，ここでは総合的にやるのが目的です。

まず，これから：——

■練習 1. △ABC 内に点Pがあって

$$l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}\quad\cdots\cdots①$$

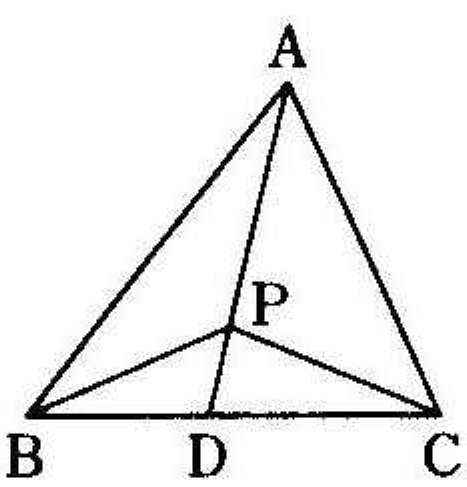
ならば

$$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB$$
$$=l:m:n$$

であることを示せ。

（解）①より

$$-\frac{l}{m+n}\overrightarrow{PA}$$
$$=\frac{m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}}{m+n}$$



ゆえに $\overline{BC}$ を $n:m$ に内分する点をDとすれば

$$-\frac{l}{l+m}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}$$

ゆえにPは AD 上にある。

いまB，Cから AD に下ろした垂線の足を B′, C′ とすると

$$\triangle ABP:\triangle ACP$$
$$=BB':CC'=BD:DC$$
$$=n:m$$

同様にして

$$\triangle PBC:\triangle PCA=l:m$$

Q.E.D.

■練習 2. △ABC 内に点Pがあって

$$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB$$
$$=l:m:n$$

ならば

$$l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

であることを示せ。

（解）AP の延長が BC と交わる点を D とするとし，B，Cから AD に下ろした垂線の足をそれぞれ B′, C′ とすると

$$BD:DC=BB':CC'$$
$$=\triangle ABP:\triangle ACP$$
$$=n:m$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{PD}=\frac{m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}}{m+n}\quad\cdots\cdots①$$

また　$\triangle PBD=\dfrac{n}{m+n}\triangle PBC$

$$\therefore\quad \triangle PBD:\triangle ABP$$
$$=\frac{n}{m+n}\triangle PBC:\triangle ABP$$
$$=\frac{n}{m+n}l:n=l:m+n$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PA}\cdot\frac{l}{m+n}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より

$$l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

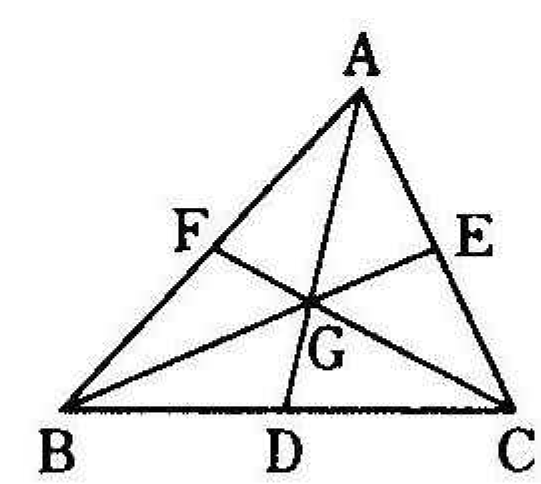
Q.E.D.

*　*　*

◆　さて，上の練習2を活用するとしましょう。

■練習 3. △ABC において $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とするとき重心を求めよ。

（ヒント）重心を $G(\vec{g})$ としますと



$$\triangle GBC=\triangle GCA$$
$$=\triangle GAB$$

は明らかです。

$$\therefore\quad \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

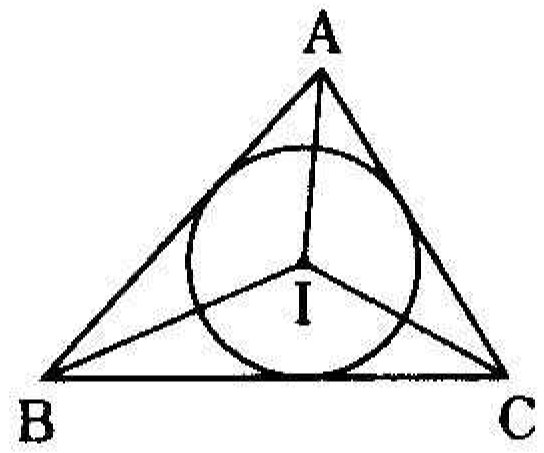
$$\therefore\quad \vec{a}-\vec{g}+\vec{b}-\vec{g}+\vec{c}-\vec{g}=\vec{0}$$

これから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\qquad\cdots\cdots 答$$

■練習 4. △ABC においてA$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$ とするとき内心を求めよ。

ヒント　内心をI$(\vec{i})$ とし内接円の半径を r としますと



$$\triangle\mathrm{IBC}=\frac{1}{2}ar$$

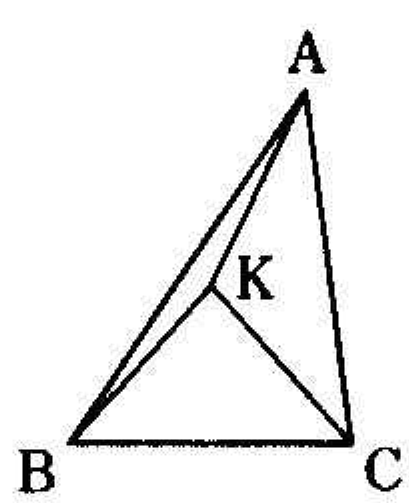
$$\triangle\mathrm{ICA}=\frac{1}{2}br$$

$$\triangle\mathrm{IAB}=\frac{1}{2}cr$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{IBC}:\triangle\mathrm{ICA}:\triangle\mathrm{IAB}$$
$$=a:b:c$$
$$\therefore\quad a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$$
$$\therefore\quad a(\vec{a}-\vec{i})+b(\vec{b}-\vec{i})+c(\vec{c}-\vec{i})=\vec{0}$$
$$\therefore\quad \vec{i}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}\qquad\cdots\cdots 答$$

■練習 5. △ABC においてA$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=5$, $\overline{\mathrm{AB}}=6$ のとき外心を求めよ。

ヒント　外心をK$(\vec{k})$ としますと，Kは三角形の内部にあることは確かです。そして



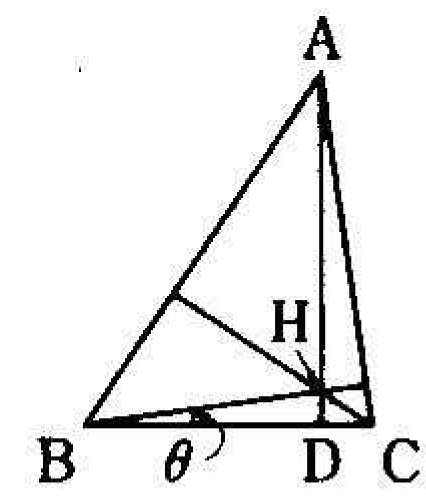
$$\triangle\mathrm{KBC}=\frac{1}{2}R^2\sin\mathrm{BKC}=\frac{1}{2}R^2\sin 2A$$
$$=R^2\sin A\cos A$$
$$=R^2\cdot\frac{a}{2R}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{R}{4bc}a(b^2+c^2-a^2)$$

他も同様です。ここに R はもちろん外接円の半径です。

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{KBC}:\triangle\mathrm{KCA}:\triangle\mathrm{KAB}$$
$$=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)$$
$$=16:15:4$$
$$\therefore\quad 16\overrightarrow{\mathrm{KA}}+15\overrightarrow{\mathrm{KB}}+4\overrightarrow{\mathrm{KC}}=\vec{0}$$
$$\therefore\quad 16(\vec{a}-\vec{k})+15(\vec{b}-\vec{k})+4(\vec{c}-\vec{k})=0$$
$$\therefore\quad \vec{k}=\frac{16\vec{a}+15\vec{b}+4\vec{c}}{35}\qquad\cdots\cdots 答$$

■練習 6. △ABC においてA$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=5$, $\overline{\mathrm{AB}}=6$ のとき垂心を求めよ。

ヒント　垂心 $(\vec{h})$ が△ABC の内部にあることは明らかです。さて，AH と BC の交点をDとしますと，右の図において



$$\overline{\mathrm{HD}}=\overline{\mathrm{BD}}\tan\theta$$
$$=\overline{\mathrm{AB}}\cos B\cdot\cot C$$
$$=\frac{c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\dfrac{c}{2R}}$$
$$=\frac{R(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2bc}$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{HBC}$$
$$=\frac{1}{4}\frac{R}{abc}(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$

他も同様ですから

$$\triangle\mathrm{HBC}:\triangle\mathrm{HCA}:\triangle\mathrm{HAB}$$
$$=3:5:27$$
$$\therefore\quad 3\overrightarrow{\mathrm{HA}}+5\overrightarrow{\mathrm{HB}}+27\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{0}$$
$$\therefore\quad 3(\vec{a}-\vec{h})+5(\vec{b}-\vec{h})+27(\vec{c}-\vec{h})=0$$
$$\therefore\quad \vec{h}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}+27\vec{c}}{35}\qquad\cdots\cdots 答$$

*　　*　　*

◆ 傍心は三角形の外部にあるから，使えない，とはいうものの，実は面積に正負を考えるとか，ちょっと練習1，2を変えることによって，三角形の外部にあるときも，おなじようにしてやれるのですが，ここでは省略することにしましょう。

ともあれ，このようにして，いろいろなものをまとめて扱うことができるものなのです。

○メネラウスの定理

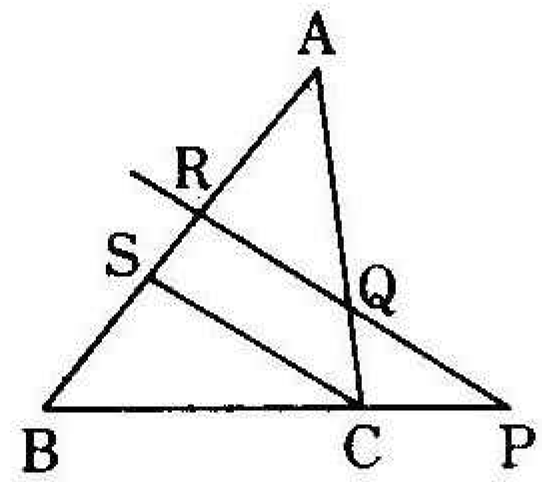
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ギリシャの数学者メネラウスの定理はまさに数学的美の典型です。キミ，これをいとうことなかれ。

◆ **メネラウスの定理**とは次のような定理です。ムリにおぼえる必要はありませんが，おぼえているとスゴク便利です。

直線BC，CA，AB上に各々頂点以外の点P，Q，Rをとるとき，
３点P，Q，Rが１直線上にあるならば

$$\mathbf{\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1}$$



である。

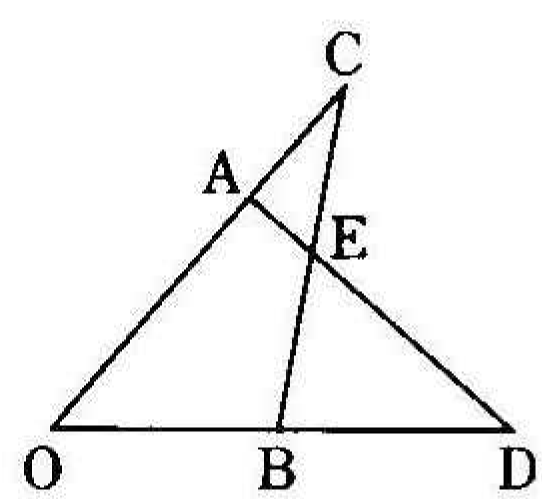
証明はカンタン。CからPQに平行線を引き，ABとの交点をSとしますと

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BR}{RS}\cdot\frac{SR}{RA}=1$$

となるからです。

ところで，ここには，このベクトルへの応用に重点をおいて考えてみましょう。

練習１. O，A，Bが１直線上にないとき $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$\overline{OA}$ を３：１に外分する点をC，$\overline{OB}$ を２：１に外分する点をDとし，AD，BCの交点をEとする。$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。



ヒント　△COBを直線AEDで切ったとしますと，メネラウスの定理により

$$\frac{CA}{AO}\cdot\frac{OD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{BE}{EC}=1$$

$$\therefore\ BE=EC$$

ところが $C\left(\frac{3}{2}\vec{a}\right)$，$B(\vec{b})$ ですから

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

となります。

おなじメネラウスの定理を使うのでも次のように扱うことができます。

△AODをBCで切ったと考えて

$$\frac{AC}{CO}\cdot\frac{OB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{DE}{EA}=1$$

$$\therefore\ DE:EA=3:1$$

ところが

$$D(2\vec{b}),\ A(\vec{a})$$

ゆえに $\overrightarrow{OE}=\dfrac{3\cdot\vec{a}+1\cdot 2\vec{b}}{3+1}$

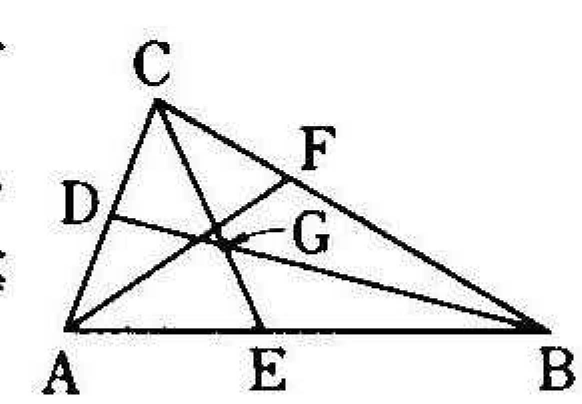
$$=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

当然のことながらおなじ結果が得られました。

練習２. △ABCにおいて，$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$ であり，$\overline{CA}$ を１：１に，$\overline{AB}$ を２：３に内分する点をそれぞれ，D，E　∠BACの２等分線が辺BCと交わる点をF，BDとCEの交点をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

ヒント　$A(\vec{0})$ としますと，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ です。

そして∠BACの２等分線がAFですから



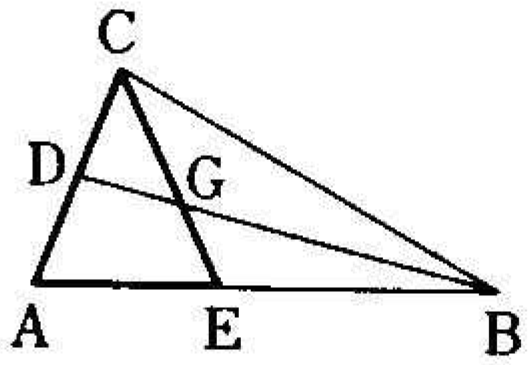
$$\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{1}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AF}=\frac{2\cdot\vec{c}+1\cdot\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$

となります。

また，$D\left(\dfrac{\vec{c}}{2}\right)$，$E\left(\dfrac{2\vec{b}}{5}\right)$ で与えられます。

△ACE を直線 BGD で切ったと考えますとメネラウスの定理により



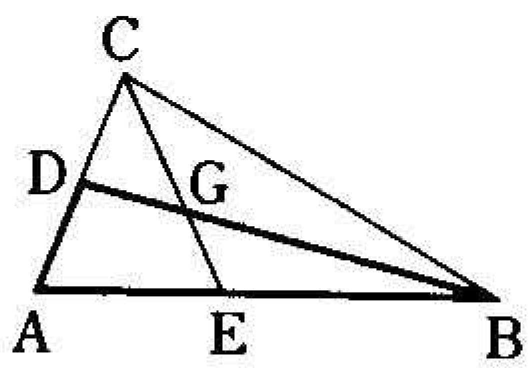
$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EG}{GC}=1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{EG}{GC}=1$$

$$\therefore\quad EG:GC=3:5$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AG}=\frac{3\cdot\vec{c}+5\cdot\dfrac{2\vec{b}}{5}}{3+5}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{8}$$

もちろん，△ABD を直線 CE で切ったと考えてもできます。このときは



$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DC}{CA}=1$$

$$\therefore\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{BG}{GD}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\quad BG:GD=3:1$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AG}=\frac{3\cdot\dfrac{\vec{c}}{2}+1\cdot\vec{b}}{3+1}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{8}$$

となります。

こうしてみるといかに便利かよくわかるでしょう。

*　*　*

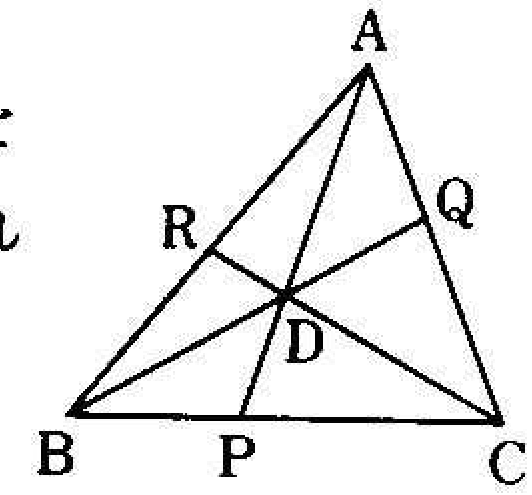
◆ メネラウスの定理に似た定理に**チエバの定理**というのがあります。それは次のような定理です。なお，チエバはイタリーの数学者です。

直線 BC, CA, AB 上に各々頂点以外の点P，Q，Rをとるとき，AP, BQ, CR が同一点を通るならば

$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}\qquad\cdots\cdots(*)$$

である。

証明はカンタンです。



B，Cから AP に垂線を下ろし，その足をそれぞれ B′，C′ としますと

$$\triangle ABD:\triangle ACD=BB':CC'=BP:PC$$

$$\therefore\quad \frac{BP}{PC}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}\qquad\cdots\cdots①$$

同様にして

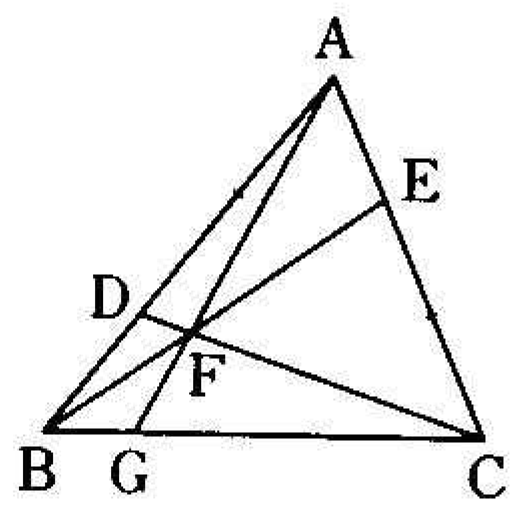
$$\frac{CQ}{QA}=\frac{\triangle BDC}{\triangle BDA}\qquad\cdots\cdots②$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle ADC}{\triangle BDC}\qquad\cdots\cdots③$$

①×②×③を作ると (*) がでてきます。

では，ひとつだけ：——

練習 3. △ABC において $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とし，AB, CA を 2：1 に内分する点をそれぞれ D，E とする。BE, CD の交点をFとし，AF と BC の交点をGとするときGを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。



ヒント　チエバの定理により

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

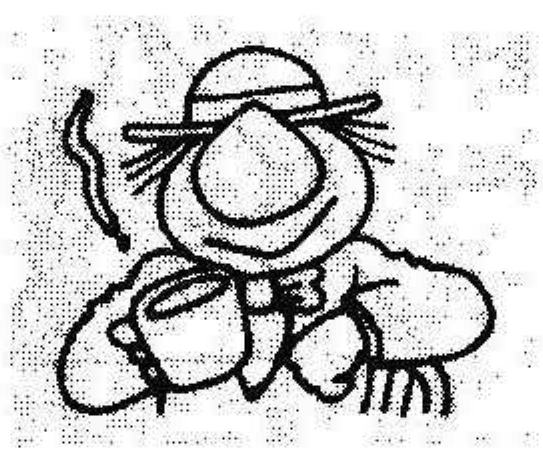
$$\therefore\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\therefore\quad BG:GC=1:4$$

ゆえに $G\left(\dfrac{4\vec{b}+\vec{c}}{5}\right)$ です。

メネラウスは遠くギリシヤの数学者ですがチエバは5世紀のイタリーの数学者です。

なお，チエバ (Ceva) は人によって，いろいろよみます。ツエバという人あり，シエバという人あり。さまざまなれど，まったくおなじ人です。キミ，迷うことなかれ。それにもまして，メネラウスの定理との同一性が気になりませんか。

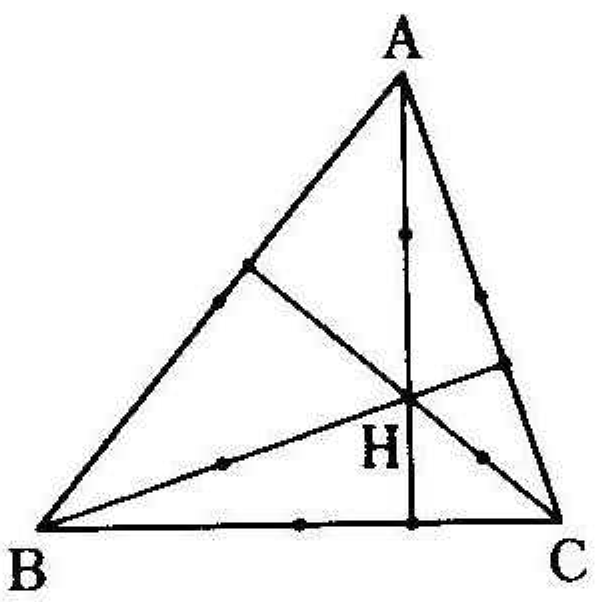


九点円と蛇足

◆九点円（キュウテンエン）という名前は知っている必要もない。しかし，9点が同一円周上にある証明は出題されているのです。

◆ 三角形の3辺の中点，各頂点より対辺に下ろした垂線の足，および各頂点と垂心を結ぶ線分の中点，これら9個の点は同一円周上にあります。この円を**九点円**といいます。

証明はべつにめんどうなし。



外心を$O(\vec{0})$とし，
$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$
としますと
$H(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$
となります。

なぜなら $H(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ としますと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=(\vec{c}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

ところが，$|\vec{b}|$，$|\vec{c}|$は外接円の半径ですから等しい。

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$\therefore\quad AH\perp BC$$

同様にして

$$BH\perp CA,\ CH\perp AB$$

となるからです。

また，$\overrightarrow{BC}$ の中点をMとしますと

$$M\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

$\overline{AH}$ の中点をNとしますと

$$N=\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

Aから BC に下ろした垂線の足Kも$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表すことができますが，ここではそれは省略します。

さて，これらの点はすべて点 $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$ つまり OH の中点Pから $\dfrac{R}{2}$（Rは外接円の半径）の距離にあるのです。

なぜなら，

$$\overline{PN}=\left|\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}|}{2}=\frac{R}{2}$$

$$\overline{PM}=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\left|-\frac{\vec{a}}{2}\right|=\frac{R}{2}$$

いよいよ残ったのはKですが

$$M\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right),\ P\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right),$$

$$N\left(\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

から，Pは直角三角形 NMK の斜辺NMの中点であることがわかります。

$$\therefore\quad \overline{PN}=\overline{PM}=\overline{PK}$$

これでブジ終了。

ところで，この九点円はいろいろおもしろい性質があります。その有名なものは九点円が内接円に接する，というのです。これを**フォイエルバッハの定理**といいます。

＊　＊　＊

◆ なお，フォイエルバッハの定理の証明は80通りくらいあるそうですが，そのうち70くらいは日本の沢山勇三郎先生が解いたのだということです。その主なものは，岩波書店から≪沢山勇三郎全集≫がでていますからみることができます。

オレは，とおもう人は，ひとつ挑戦してみませんか。

なお，今は絶版ですから，図書館にでもでかけてみるしか仕方がありません。念のため。

＊　＊　＊