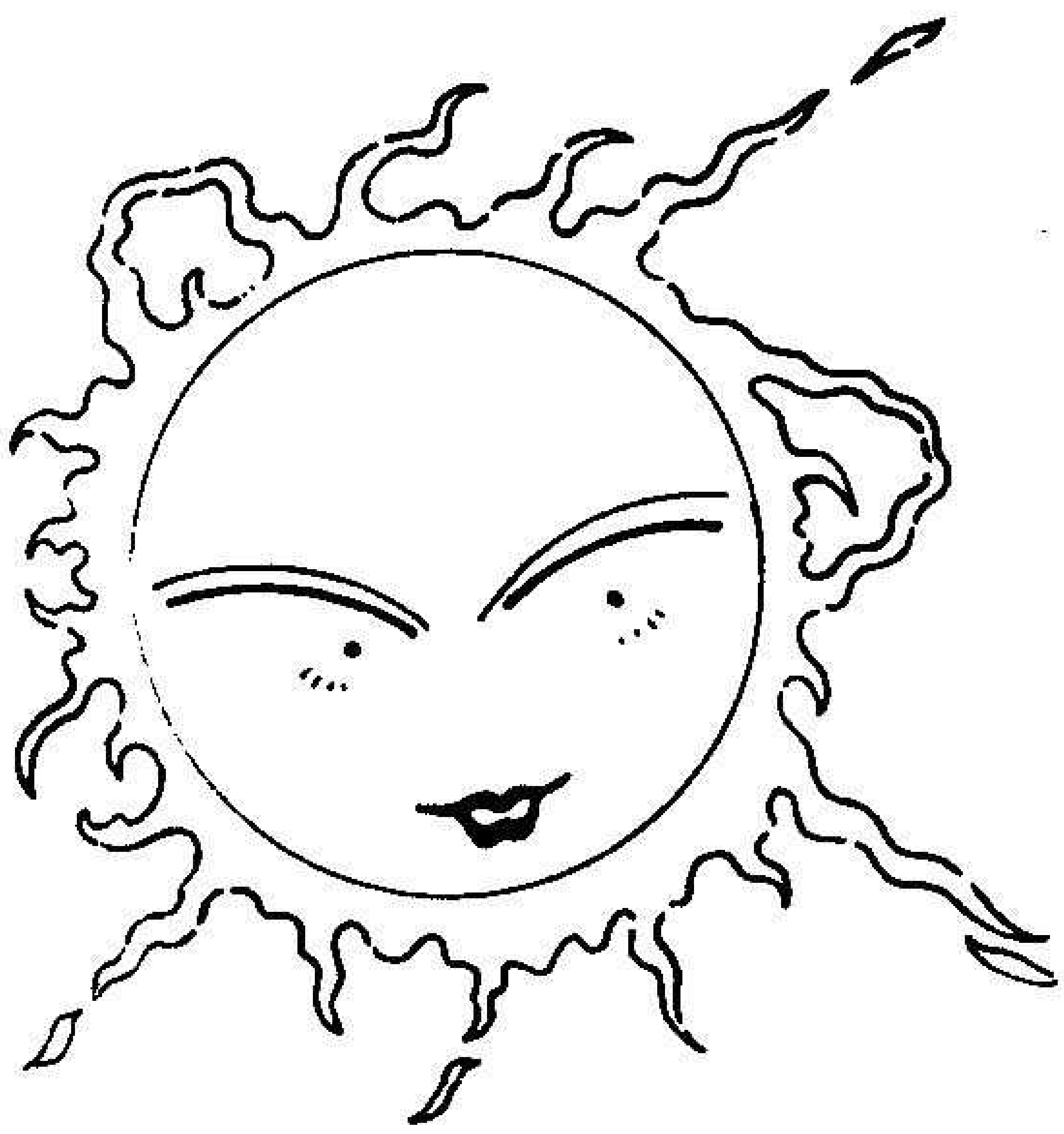
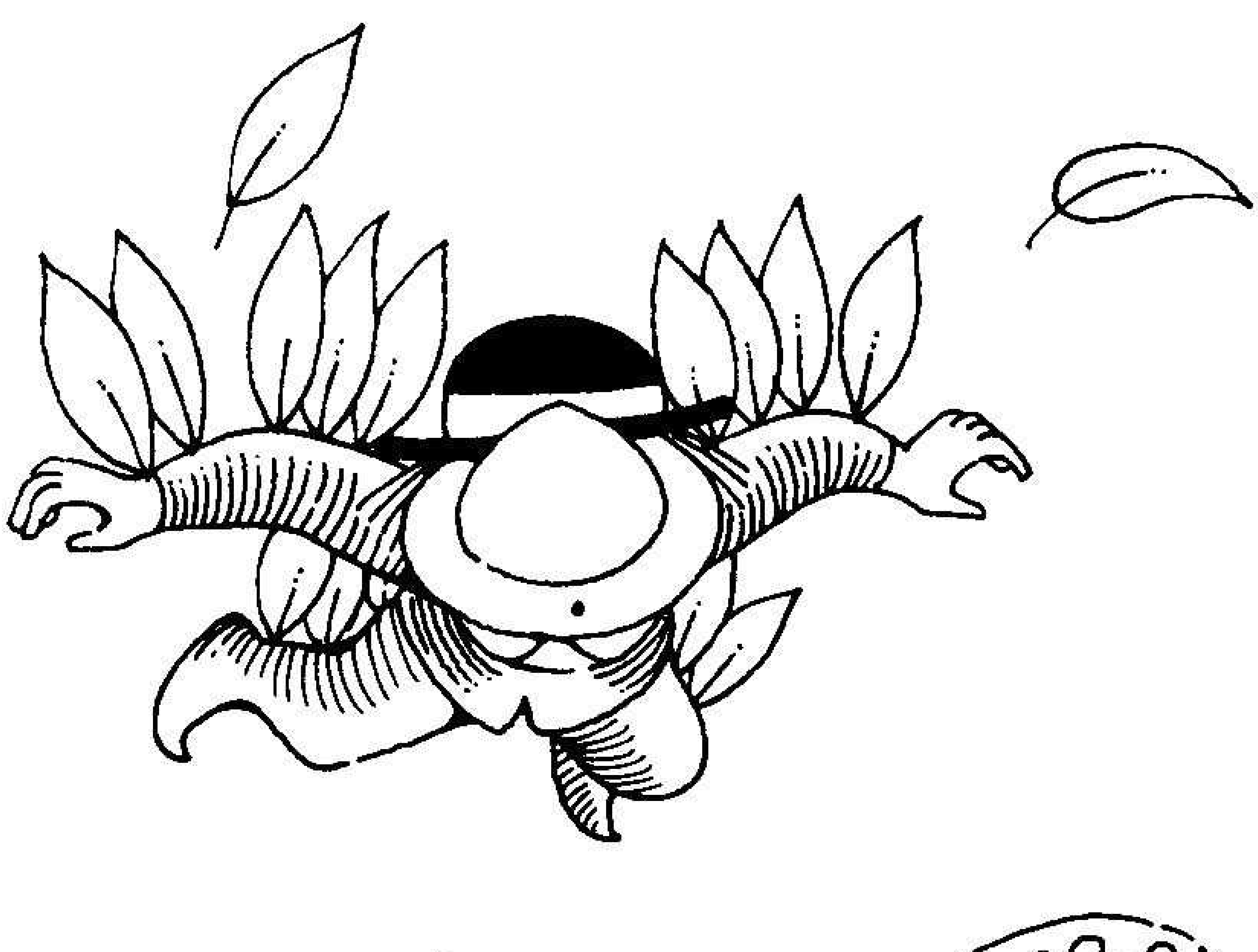
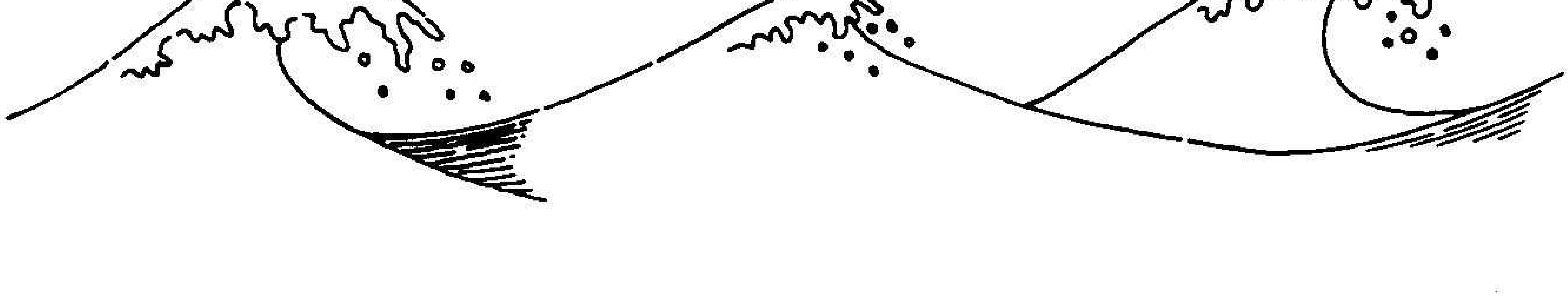
第1章

2次曲線







○放物線の焦点と準線

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆放物線のことは数Ⅰでやってある，ただ，焦点と準線は，代幾ではじめてあらわれたのです。

◆ 代数幾何では放物線の標準形として

$$y^2=4px \quad (p \neq 0)$$

を使います。そして，

焦点は $(p,\ 0)$

準線は $x=-p$

で与えられます。

ところで，放物線は，焦点に至る距離と準線に至る距離の等しい点Pの軌跡なのです。

では，これを：——

4/25

■**練習 1.** 焦点F(1, 0) が準線 $x=-1$ の放物線の方程式を求めよ。

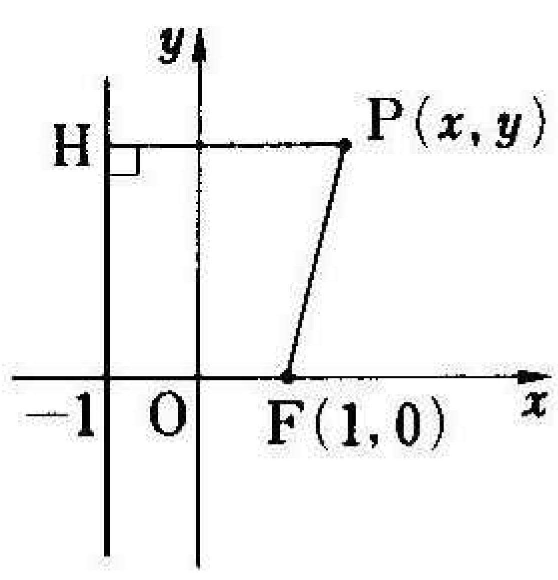
ヒント　定義のとおりやるなら次のようになりましょう。

右の図で

$$\overline{PH}=\overline{PF}$$

$$\therefore \quad |x-(-1)| =\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\therefore \quad |x+1| =\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$



両辺を2乗しますと

$$x^2+2x+1=x^2-2x+1+y^2$$

$$\therefore \quad y^2=4x \qquad \cdots\cdots 答$$

4/25

■**練習 2.** 放物線 $y^2=x$ の焦点と準線を求めよ。

ヒント

$$y^2=x$$

をまず標準の形にかきますと

$$y^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot x$$

これを $y^2=4px$ と比較しますと

$$p=\frac{1}{4}$$

さては，焦点 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$，準線 $x=-\frac{1}{4}$ となります。

*　*　*

◆ では，一歩進んで，やや複雑な場合にいくことにしましょう。

4/25

■**練習 3.** 焦点が点A(1, 1)で，準線が l : $x+y+\sqrt{2}=0$ であるような放物線の方程式をつくれ。

ヒント　軌跡上の点を P$(x,\ y)$ としますと

$$\overline{PA}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

で，Pから l に下ろした垂線の長さは公式により

$$\frac{|x+y+\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+y+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}$$

ですから

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{|x+y+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}$$

両辺を2乗して分母を払いますと

$$2(x^2+y^2-2x-2y+2)$$
$$=x^2+y^2+2+2xy+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y$$
$$\therefore \quad x^2-2xy+y^2-2(2+\sqrt{2})x -2(2+\sqrt{2})y+2=0$$

となります。

4/25

■**練習 4.** $y=x^2+x+1$ の焦点と準線を求めよ。

ヒント　$y=ax^2+bx+c$ は軸が y 軸に平行な放物線を表しますが，これはすべて $y=ax^2$ と合同です。ところが

$$y=ax^2$$

を書きかえると

$$x^2=\frac{1}{a}y$$

つまり　$$x^2=4\cdot\frac{1}{4a}\cdot y$$

ですから，焦点は $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$ で準線は

$y=-\frac{1}{4a}$ で与えられます。そこで，これと

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

と比較して，つまり頂点を基準に考えて

焦点は　$\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}+\frac{1}{4a}\right)$

準線は　$y=c-\frac{b^2}{4a}-\frac{1}{4a}$

とすればよいのです。

さて，本問ならば

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

ですから

焦点は　$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$

準線は　$y=\frac{1}{2}$

となります。

4/25

練習 5. $y^2=4a(x+a)$ の焦点と準線を求めよ。

(ヒント)　$y^2=4a(x+a)$

を書きかえると

$$4ax=y^2-4a^2$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{4a}y^2-a$$

つまり頂点は $(-a,\ 0)$ です。そして

$x=\frac{1}{4a}y^2$ つまり $y^2=4ax$ の焦点は $(a,\ 0)$

なんですから，もとの曲線

$$y^2=4a(x+a)$$

の焦点は　　　$(0,\ 0)$

つまり原点ではありませんか。

準線は $x=-2a$ となります。

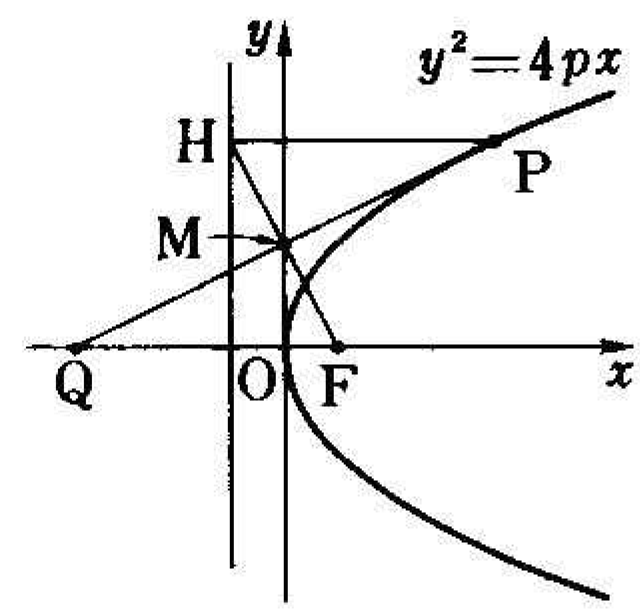
(注)　とはいうものの，上のような考え方はなかなかつかみにくいものです。ともかく，頂点を標準にして焦点がどの方向，どれだけの距離にあるかをくりかえしくりかえしやってみること，それがわかればもはや問題はないのです。

＊　＊　＊

◆　では焦点に関する応用問題をひとつやっておきましょう。それは，これです。

練習 6. 放物線 $y^2=4px$ の焦点をFとする。この放物線上の点Pから準線に垂線 PH を下ろし，線分 FH の中点をMとする。直線 PM と x 軸との交点をQとするとき，FP=FQ であることを示せ。

(ヒント)



Pは $y^2=4px$ 上の点ですからPの座標を $(pt^2,\ 2pt)$ とおくことができます。(ピンとこなかったら代入してみるとわかります。$y=x^2$ 上の点を $(t,\ t^2)$ とおくのとおなじことです)

さて，上のようにして

$$P(pt^2,\ 2pt)$$

とおくと

$$H(-p,\ 2pt)$$

となります。ところが

$$F(p,\ 0)$$

ですから $\overline{HF}$ の中点は $M(0,\ pt)$ です。したがって

PM の方程式は

$$y-pt=\frac{2pt-pt}{pt^2-0}(x-0)$$

つまり

$$y-pt=\frac{1}{t}x$$

です。これと x 軸との交点Qは

$$Q(-pt^2,\ 0)$$

となります。

$$\therefore\quad \overline{FQ}=|p-(-pt^2)|$$
$$=|p+pt^2|$$

また，

$$\overline{FP}=\sqrt{(pt^2-p)^2+(2pt)^2}$$
$$=\sqrt{(pt^2+p)^2}$$
$$=|pt^2+p|$$

Q.E.D.

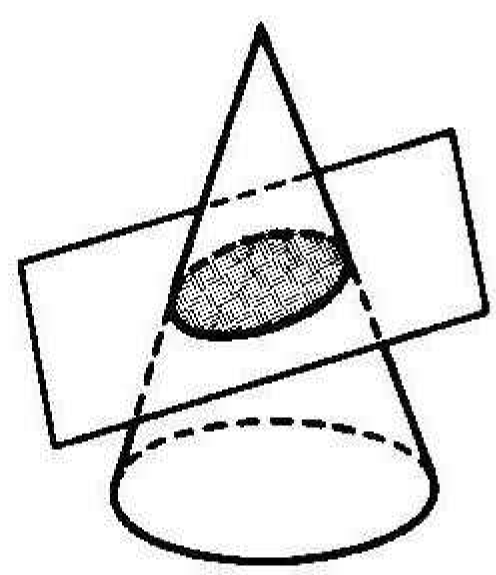
°だ円とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆だ円と書くが，それまでは楕円と書いていました。その前は橢円と書いたのです。そして江戸時代の数学者は……。

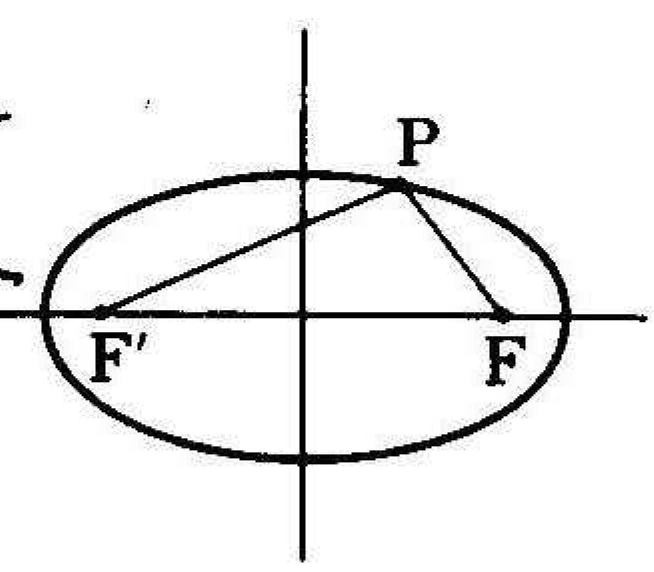
◆ だ円の定義は本によっていろいろちがいがあります。

定義 1. 円すいを平面で斜めに切って得られる切り口の曲線をだ円という。



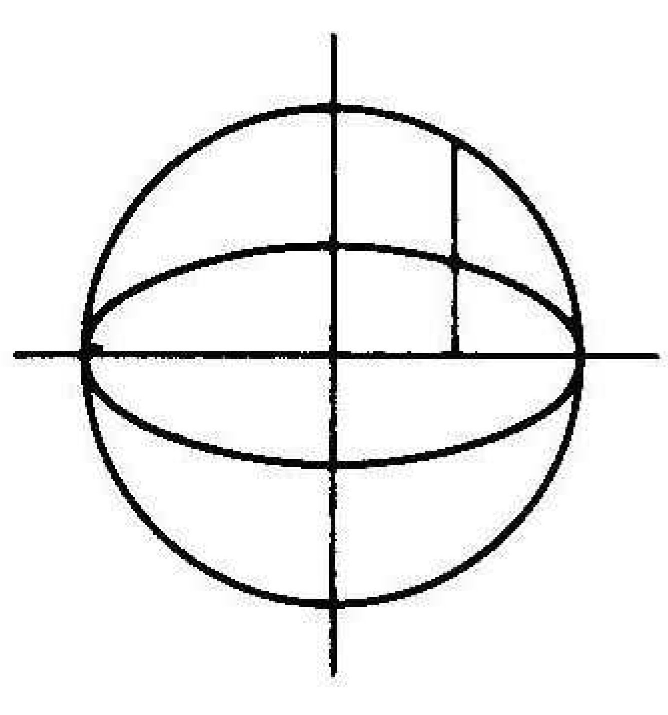
実は切り方によって，円も双曲線も放物線も得られますので，これらを総称して円すい曲線というのです。

定義 2. 2定点か~~らの距離の和が一定~~である点Pの軌跡をだ円といい，その2定点を**焦点**（しょうてん）という。また



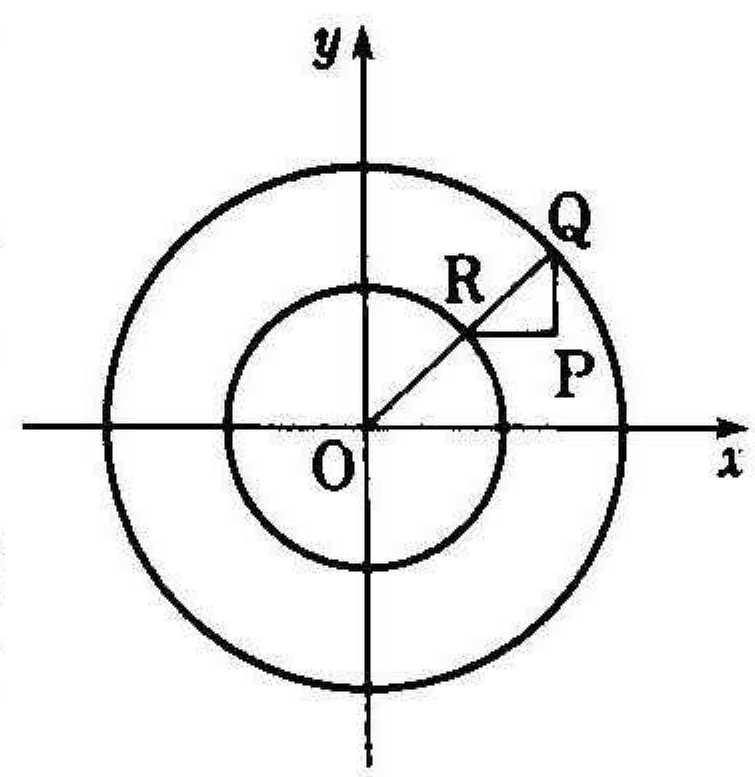
2つの焦点を通る直線を（正確にはこの直線のだ円内にある部分を）**長軸**，長軸の垂直2等分線(だ円内の部分)を **短軸** といいます。

定義 3. 円を1つの直径に垂直な向きに一定の割合で縮小または拡大して得られる図形をだ円という。ふつうはこの性質を利用してだ円を



作図します。すなわち，2つの同心円をかき(右段上の図)，半径ORQを引き，Rを通りx軸に平行にOP，Qを通りy軸に平行にQPを引き，交点をPとします。このようにして多くの点をとり，それを，雲形定木を使ってなめらかに結ぶのです。

時間があったら，ひとつ大きくていねいにかいてみませんか。



定義 4. 直交座標系において方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

のグラフをだ円という。

これらの定義はいずれも一長一短あって，どれがいい，というわけにはいきませんが，ふつう高校では 定義2. または 定義4. を習っているハズです。ここでは定義4. をもとにしてやることにしましょう。

＊　＊　＊

◆ **だ円の描き方**：さっそく練習に入りましょう。

練習 1. 次の方程式の表す曲線のグラフをかけ。

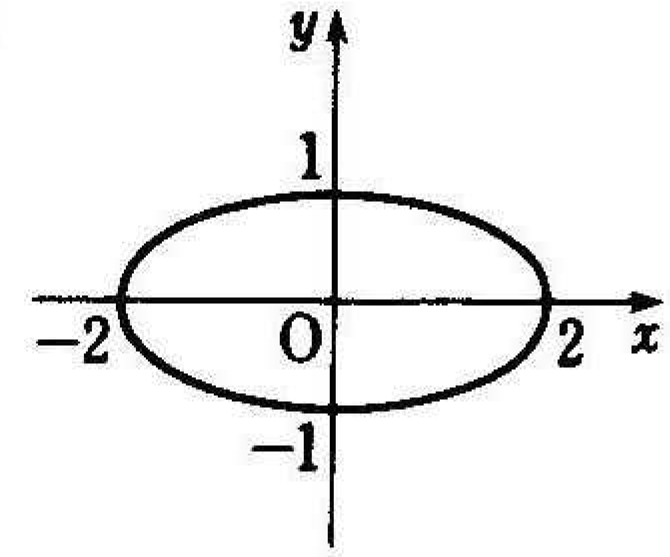
$$x^2+4y^2=4$$

ヒント　両辺を4で割って

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

あるいは

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$



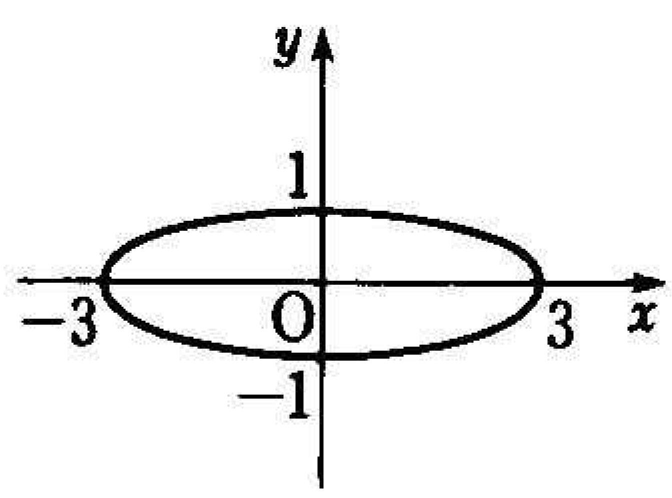
上の (＊) で $a=2$, $b=1$ とおいたものです。座標軸との交点は $(\pm2,\ 0)$, $(0,\ \pm1)$ ですから，この4点を通り，上のようにかけばよいのです。ついでながら曲線をかくときは息をとめてゆっくりかくこと!!

（注）なお，デザインなどで正確にかく必要のあるときは，xにいろいろ値を入れてyを求めてかくか，この場合であれば，原点を中心とし半径1，2の同心円をかいて定義3.で述べた方法でやればいいし，単にだ円であればいい（つまり方程式が与えられていないとき）というのであれば，プラスチックの板からいろいろのだ円形を打ち抜いただ円定木というのも市販されています。なお，鉄製のだ円コンパスも市販されています。ピンで糸の両端をおさえて定義2.のやり方でかくこともできます。

■練習 2. $4x^2+y^2=4$ のグラフをかけ。

（ヒント）長軸がy軸に重なっていることに注意すること。

■練習 3. 右の図に示すだ円の方程式を書け。



（ヒント）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

のような形の方程式です。いうまでもなく，

$$a=3,\ \ b=1$$

にとればいいでしょう。さては：——

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

$$\therefore\ \ x^2+9y^2=9 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◈ 点の軌跡がだ円になるものをいくつかやっておきましょう。

■練習 4. 点 A(1, 0) からの距離と直線 $x=4$ からの距離の比が 1：2 であるような点Pの軌跡の方程式を求めよ。

（ヒント）$\mathrm{PA}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\mathrm{PH}=|x-4|$

したがって

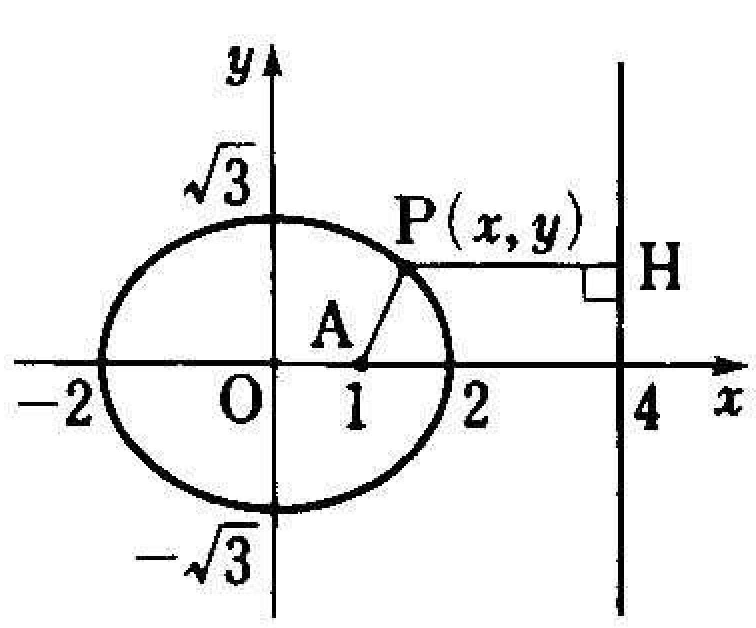
$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$=|x-4|$

ゆえに

$4\{(x-1)^2+y^2\}$

$=(x-4)^2$



$$\therefore\ \ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 5. 2定点 A(2, 0), B(−2, 0) からの距離の和が6であるような点Pの軌跡の方程式を求めよ。

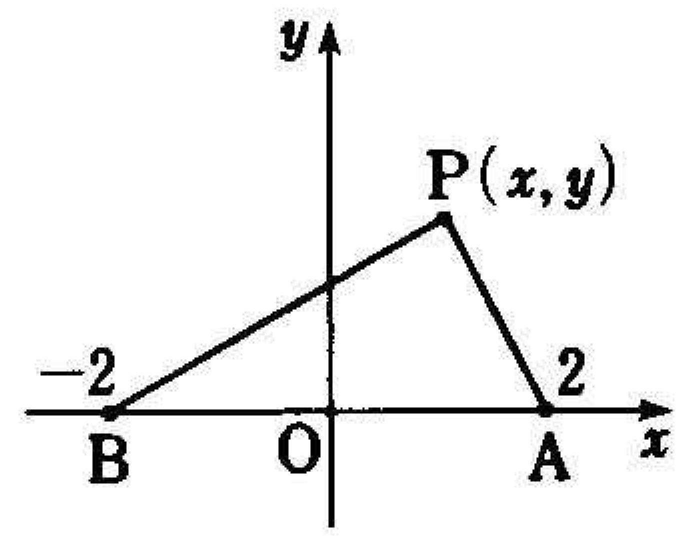
（ヒント）

PA

$=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

PB

$=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$



題意から

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6$$

$$\therefore\ \ \sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

両辺を2乗して

$$x^2+4x+4+y^2$$
$$=36+x^2-4x+4+y^2-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$
$$\therefore\ \ 3\sqrt{(x-2)^2+y^2}=9-2x$$
$$\therefore\ \ 9\{(x-2)^2+y^2\}=(9-2x)^2$$
$$\therefore\ \ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注）上のヒントで2度も2乗していますから，同値性が破れているかもしれない。

しかし，実は最終的結果から

$$-3\leqq x\leqq 3,\ \ -\sqrt{5}\leqq y\leqq\sqrt{5}$$

であることは確か。したがって

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}\leqq\sqrt{5^2+\sqrt{5}^2}=\sqrt{30}<6$$
$$9-2x\geqq 9-2\cdot 3=3$$

であるから2度とも2乗された式の両辺は正。

したがって同値性は保たれていたことがわかるのです。

■練習 6. 長さlの線分ABの両端A，Bがそれぞれx軸上，y軸上を動くとき，ABを 1：2 に内分する点Pの軌跡の方程式を求めよ。

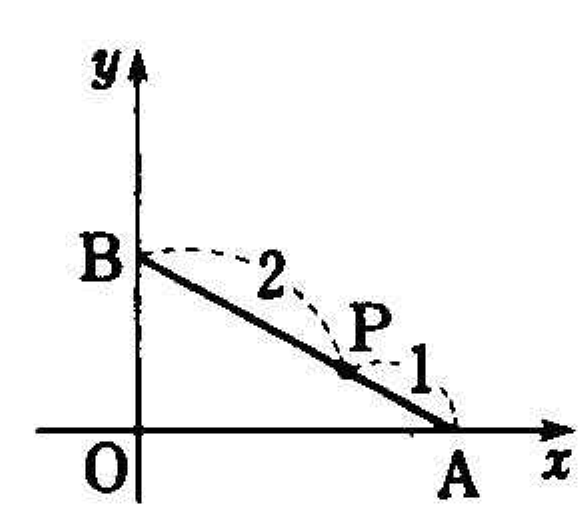
（ヒント）A(a, 0), B(0, b) とすると

P(X, Y) は

$X=\dfrac{2a}{3}$，$Y=\dfrac{b}{3}$

ところが

$a^2+b^2=l^2$



$$\therefore\ \ \left(\frac{3X}{2}\right)^2+(3Y)^2=l^2$$

もういいでしょうね。

○だ円の焦点とは

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆焦点は英語ではフォーカスといいます。そういえばフォーカスという名の雑誌もあったような気がするなあ。

◆　2定点からの距離の和が一定であるような点の軌跡はだ円になります。そして，その2点を**だ円の焦点**というのです。

4/26

■練習 1. 2定点A(2, 0)，B(−2, 0) を焦点とし，かつ，点C(2, 3) を通るだ円の方程式を求めよ。

ヒント　$\overline{AC}=\sqrt{0^2+3^2}=3$

$\overline{BC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\therefore\quad \overline{AC}+\overline{BC}=8$

ですからだ円上の点 P$(x,\ y)$ について

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=8$$
$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=8-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

両辺を平方して

$$x^2+y^2-4x+4=64+x^2+y^2+4x+4-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$
$$\therefore\quad -8x-64=-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$
$$\therefore\quad x+8=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

両辺を平方して

$$x^2+16x+64=4x^2+16x+16+y^2$$
$$\therefore\quad 3x^2+y^2=48$$
$$\therefore\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{48}=1$$

＊　＊　＊

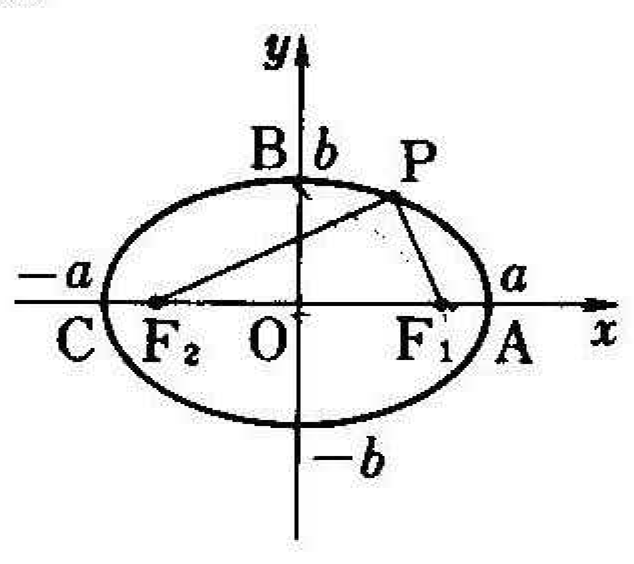
◆　ところで，だ円の一般形を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0)$$

と書きますと焦点の座標は

F$(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

で与えられます。なぜなら，右の図において P は動点として



$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=$一定 l

とおきますと

$$l=\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=\overline{CF_2}+\overline{AF_2}$$
$$=AC=2a$$

また　$l=\overline{BF_1}+\overline{BF_2}=2\overline{BF_1}$

ですから

$$2\overline{BF_1}=2a,\quad \therefore\quad \overline{BF_1}=a$$
$$\therefore\quad \overline{OF_1}=\sqrt{\overline{BF_1}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{a^2-b^2}$$

となるからです。

1/26

■練習 2. 長軸の長さ10，短軸の長さ8のだ円の2つの焦点の間隔を求めよ。

ヒント　だ円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0)$$

で考えますと

$$a=5,\ b=4$$

ゆえに焦点は

$$(\pm 3,\ 0)$$

したがって求める間隔は6（=3×2）です。

■練習 3. だ円

4/26

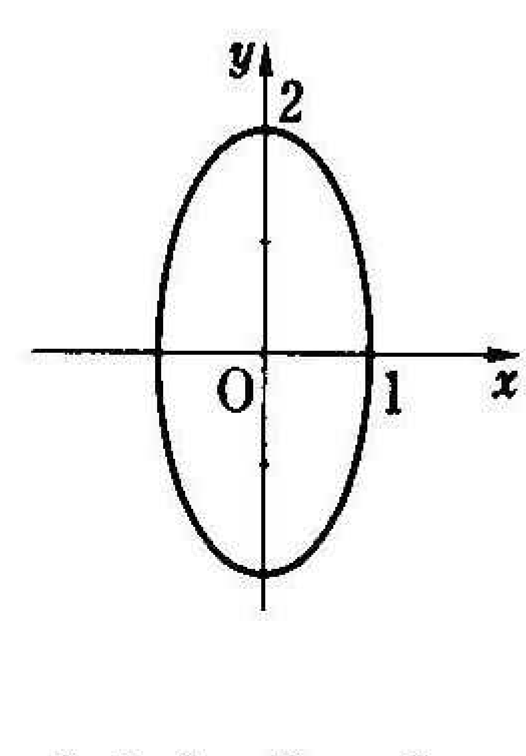
$$4x^2+y^2=4$$

の焦点を求めよ。

ヒント　$x=0$ とおくと $y=\pm 2$

$y=0$ とおくと $x=\pm 1$

このことからだ円の形はすぐかけます。



明らかに長軸の長さは4，短軸の長さは2，焦点は y 軸上にあります。そしてその座標は

$$(0,\ \pm\sqrt{3})$$

であることもわかります。なれれば，グラフをかいてみることもありません。

*　　*　　*

◆ 次にはだ円の中心が原点でない場合を扱ってみましょう。

4/21

■練習 4. だ円

$$x^2+4y^2-4x+24y+36=0$$

の中心，焦点の座標を求めよ。

(ヒント)　$(x^2-4x)+4(y^2+6y)=-36$

$$\therefore\quad (x-2)^2+4(y+3)^2=4$$

$$\therefore\quad \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{1}=1$$

（ココデ，円ノ方程式ヲオモイダセバ，コノダ円ノ中心ガ (2, −3) デアルコトガワカルデショウ）

ゆえに，中心は (2, −3) で，焦点は

$$(2\pm\sqrt{3},\ -3)$$

であることもわかります。ピンとこなかったらグラフをかいてみるといい。

では，もうひとつ。

4/26

■練習 5. だ円

$$x^2+9y^2-2x-54y+73=0$$

の中心，焦点を求めよ。

答　中心 (1, 3)，焦点 $(1\pm2\sqrt{2},\ 3)$

*　　*　　*

◆ では，応用問題をひとつ。

4/26

■練習 6. 2直線　$x+my=2$

$$2mx-y=4$$

の交点の軌跡の方程式を求め，図示せよ。

(ヒント)　交点を $(X,\ Y)$ としますと

$$X+mY=2 \quad \cdots\cdots①$$

$$2mX-Y=4 \quad \cdots\cdots②$$

$Y\neq0$ のとき①より

$$m=\frac{2-X}{Y}$$

これを②に代入して

$$2\cdot\frac{2-X}{Y}\cdot X-Y=4$$

分母を払って変形すれば

$$2X^2+Y^2-4X+4Y=0 \quad (Y\neq0)$$

さらに変形して

$$\frac{(X-1)^2}{3}+\frac{(Y+2)^2}{6}=1 \quad (Y\neq0)$$

次に $Y=0$ のときには①，②より

$$X=2,\ m=1$$

ゆえに点 (2, 0) は軌跡上の点であることがわかります。

以上のことから軌跡の方程式は

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{6}=1$$

$$(x=0,\ y=0 \text{ をのぞく})$$

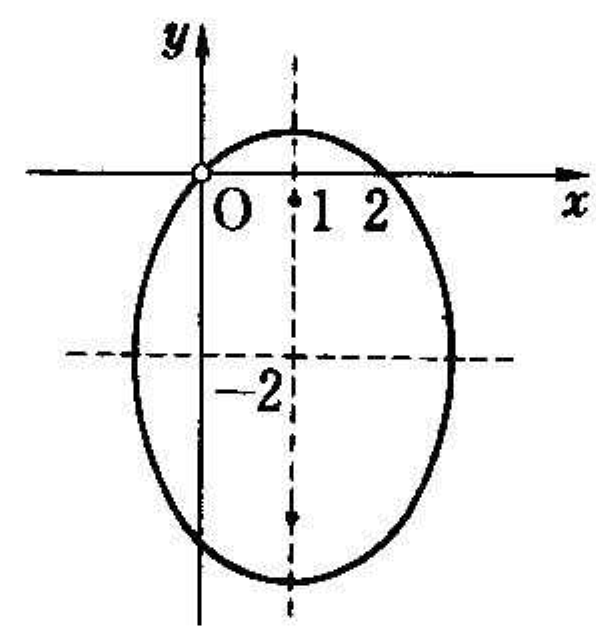
であることがわかります。

そして，この曲線はいうまでもなくだ円で，中心は (1, −2)，焦点は

$$(1,\ -2\pm\sqrt{3})$$

であることもわかりましょう。

なお，グラフをかくには，中心と長軸，短軸の端の点をおさえてやるのが便利です。焦点はこの際役に立ちません。



★ **蛇足**　軌跡がだ円になるのはよいとして，一点だけ除かれるということは，なんとなく不自然な気がしませんか。実はmが $+\infty$ あるいは $-\infty$ になったときに対応する交点がOなのです。しかし，$\pm\infty$ という数はない。さてこそ，O に穴があいたのでした。

*　　*　　*

◆ 焦点を与えただけではだ円がきまらない，つまり，焦点を共有する無数のだ円があります。これを，**共焦だ円**（キョウショウダエン）といいます。例えば：——

■練習 7. だ円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

と焦点を共有し，短軸の長さが上のだ円の長軸に等しいようなだ円の方程式を求めよ。

答　$\dfrac{x^2}{2a^2-b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0)$

◐双曲線の性質

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆双曲線というのはよく小説の題名に出てくる。例えば，ユーモア小説「恋愛双曲線」といったぐあい。

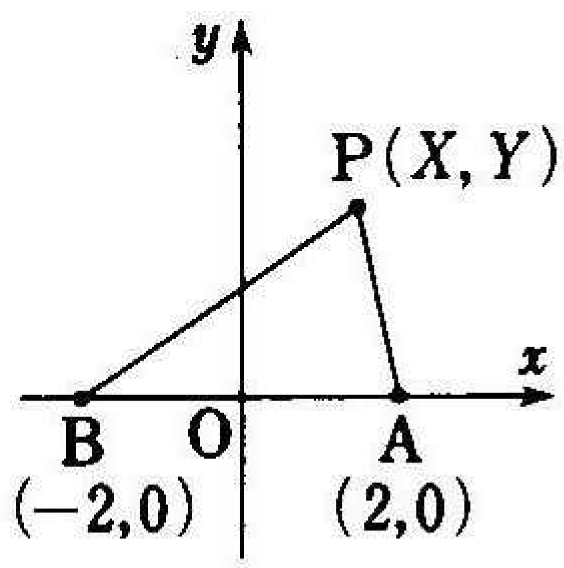
◆ 双曲線は，だ円や放物線ほどなじみでない。というのも，とかく，めんどうになるので敬遠されるのでしょう。しかし，応用上は重要なのです。双曲線の定義でよく使われるのは次の２つです。

(1)　２定点からの距離の差が一定な点の軌跡

(2)　方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される曲線

5/1

■練習 1. ２定点 $A(2,\ 0)$，$B(-2,\ 0)$ からの距離の差が２であるような点Pの軌跡の方程式を求めよ。



ヒント　$PA=\sqrt{(X-2)^2+Y^2}$

$PB=\sqrt{(X+2)^2+Y^2}$

ですから

$$\sqrt{(X-2)^2+Y^2}\sim\sqrt{(X+2)^2+Y^2}=2$$

$$\therefore\quad \sqrt{(X-2)^2+Y^2}-\sqrt{(X+2)^2+Y^2}=\pm2$$

$$\therefore\quad \sqrt{(X-2)^2+Y^2}=\sqrt{(X+2)^2+Y^2}\pm2$$

両辺を２乗すると

$$(X-2)^2+Y^2$$
$$=(X+2)^2+Y^2+4\pm4\sqrt{(X+2)^2+Y^2}$$

$$\therefore\quad -8X-4=\pm4\sqrt{(X+2)^2+Y^2}$$

-4 で割ると

$$2X+1=\mp\sqrt{(X+2)^2+Y^2}$$

両辺を２乗して

$$4X^2+4X+1=X^2+4X+4+Y^2$$

$$\therefore\quad 3X^2-Y^2=3$$

ゆえに求める軌跡の方程式は

$$3x^2-y^2=3$$

である。

（注）　２回も自乗しているから同値性が問題となるところですが，ここでは目をつぶって次へいくとしよう。

5/1

■練習 2. $x^2-y^2=1$ のグラフの概形をかけ。

ヒント　$y=0$ とおくと

$$x^2=1$$

ゆえに，x 軸との交点は $(\pm1,\ 0)$ です。

また，$x=0$ とおくと

$$y^2=-1$$

これを満足する y はない。つまり，y 軸とは交わらないことがわかります。

次に $y=x+a$ との交点を調べてみるとしよう。

そこで，$x^2-y^2=1$ に $y=x+a$ を代入すると

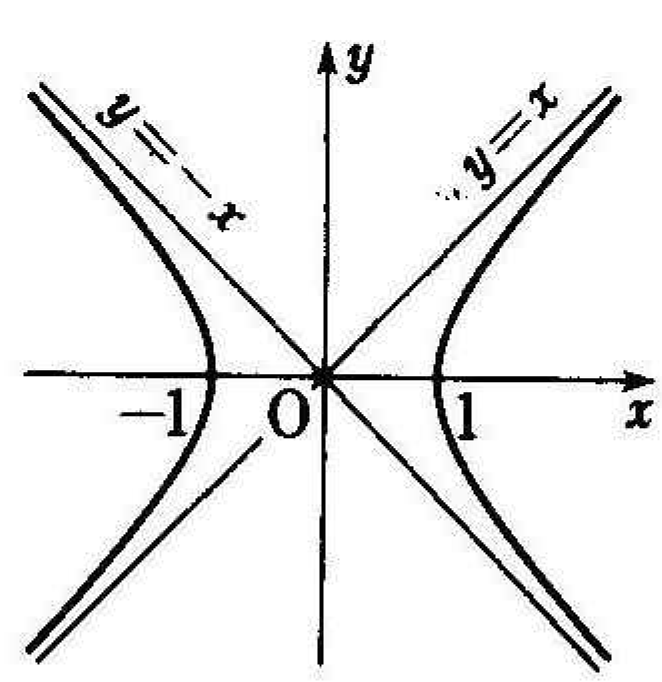
$$x^2-(x+a)^2=1$$

$$\therefore\quad -2ax-a^2=1$$

$a\neq0$ のとき

$$x=\frac{-(a^2+1)}{2a}$$

ゆえに a が０に近づくと x は大きくなり，交点は限りなく遠くにいく。このことから，グラフは下のようになる。



このように曲線がある直線に限りなく接近してゆくとき，この直線を**漸近線**（ぜんきんせん）といいます。

ここで，次のことをオボエテおくと，いろいろな場合に便利です。それは：――

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k,\quad k\neq 0$$

の形の方程式は双曲線を表し，漸近線は

$$ax+by+c=0 \quad と \quad a'x+b'y+c'=0$$

なのです。それでは，次にいくつか例をやってみましょう。

5/1

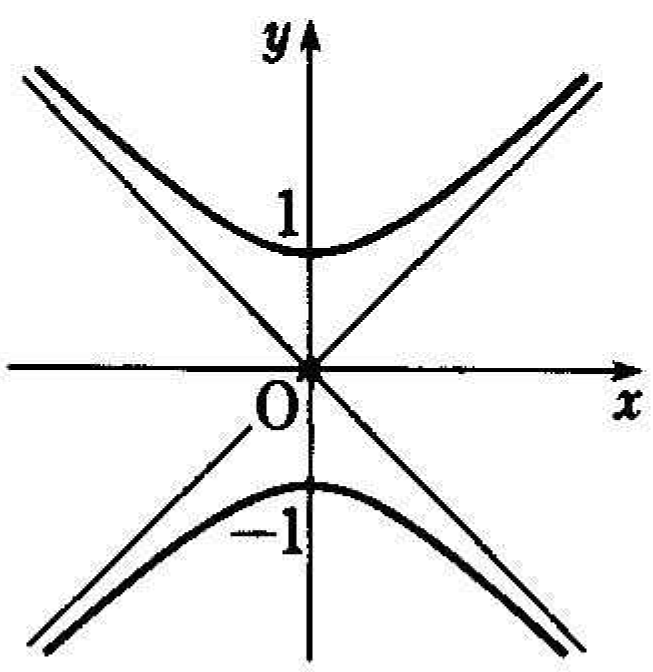
■練習 3. $x^2-y^2=-1$ のグラフをかけ。

ヒント　$(x+y)(x-y)=-1$

と変形されるから，$x+y=0$, $x-y=0$ が漸近線であることがわかります。そして $x=0$ とおくと $y=\pm 1$, つまり

$(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$

を通る。



このことからグラフは右図のようになります。

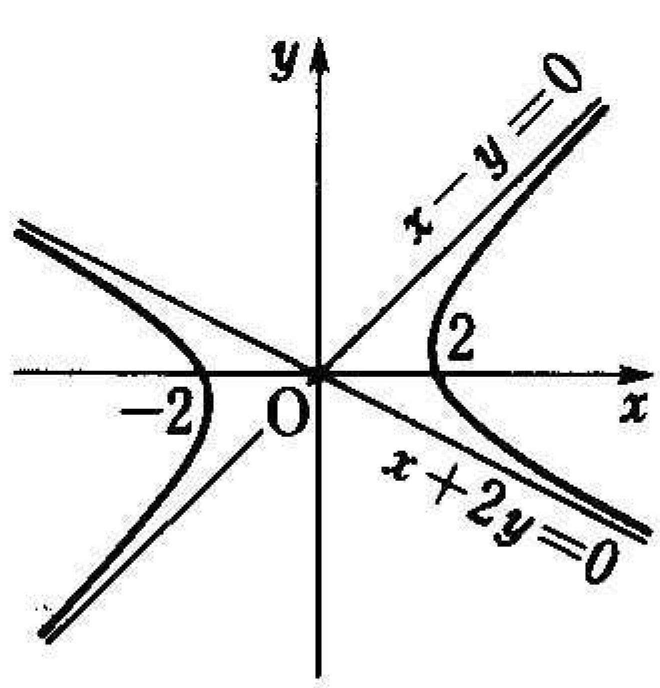
6/1

■練習 4. $x^2+xy-2y^2=4$ のグラフの概形をかけ。

ヒント　与えられた方程式を書きかえて

$$(x+2y)(x-y)=4$$

ゆえに，$x+2y=0$, $x-y=0$ を漸近線とする双曲線です。そして，$y=0$ とおくと $x^2=4$, ゆえに 2 点 $(\pm 2,\ 0)$ を通る。



ところで，なぜこうなるのか気になる人もあるでしょう。次に，その証明の代わりに練習5.〜6. について考えてみましょう。

5/1

■練習 5. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点から 2 つの直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ および $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ に下した垂線の長さの積は一定であることを示せ。

ヒント　双曲線上の点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ としましょう。これから直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ に下した垂線の長さは

$$\frac{\left|\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}$$

で与えられます。(垂線の長さの求め方については (☞数 I p.274) を参照)

また，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から直線

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

に下した垂線の長さは

$$\frac{\left|\dfrac{Y}{a}-\dfrac{X}{b}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}$$

で与えられます。だから，その積は

$$\frac{\left|\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}\cdot\frac{\left|\dfrac{X}{a}-\dfrac{Y}{b}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}=\frac{\left|\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}\right|}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$$

ところが点 $(X,\ Y)$ はこの双曲線上にありますから

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

です。ゆえに，垂線の長さの積は

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

で，一定である。　　　　Q. E. D.

■練習 6. 相交わる 2 直線に下した垂線の長さの積が一定であるような点の軌跡は双曲線であることを示せ。

ヒント　相交わる 2 直線のなす角の 2 等分線 2 つを座標軸にとると，2 直線は

$$y=mx \quad および \quad y=-mx$$

で与えられます。これに点 $(X,\ Y)$ から下した垂線の長さは，それぞれ

$$\frac{|mX-Y|}{\sqrt{m^2+1}},\quad \frac{|mX+Y|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ですから，その積を k とすると

$$\frac{|m^2X^2-Y^2|}{m^2+1}=k$$

$$\therefore\quad m^2X^2-Y^2=\pm k(m^2+1)$$

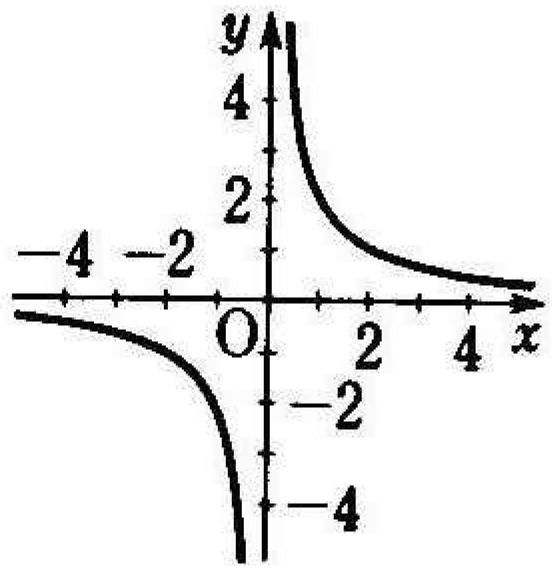
これは双曲線を表す。　　　　Q. E. D.

① 漸近線の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ゼンキンセンといっても，代幾に現れるのは双曲線の場合だけ，といってよい。それをはっきりつかむことが目的です。

◆　$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフをかいてみると，右の図のようになります。見ればわかるように，この曲線は x 軸と y 軸に限りなく近づきます。このように，



ある曲線がある直線に限りなく近づくとき，この直線を **漸近線** といいます。**ぜんきんせん** と読む。

ところで，代幾の範囲で必要になるのは次の2つだけ，欲をいえば3つ。これを次にやるとしましょう。

＊　＊　＊

◆　第1は x の1次の有理関数のときです。

$$y=\frac{cx+d}{ax+b}$$

ならば，漸近線は2つ。それは

$$x=-\frac{b}{a} \quad \cdots\cdots①$$

$$y=\frac{c}{a} \quad \cdots\cdots②$$

です。①のほうは分母$=0$とおいたものですからオボエやすい。②は x の係数だけ残したもの。では，次の練習1.をやってみませんか。

4/1 **■練習 1.** $y=\dfrac{3}{x}$ の漸近線を書け。

ヒント　$y=\dfrac{3}{x}=\dfrac{0\cdot x+3}{1\cdot x+0}$

ですから　$x=-\dfrac{0}{1}$　と　$y=\dfrac{0}{1}$

つまり　$x=0$　と　$y=0$

つまり，両軸が漸近線です。ふつう，この種のものは説明は不要で，結果だけ要求されていますから，$x=0$ と $y=0$ とだけ書いておけばすむハズ。

■練習 2. $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ の漸近線は何か。

8/1

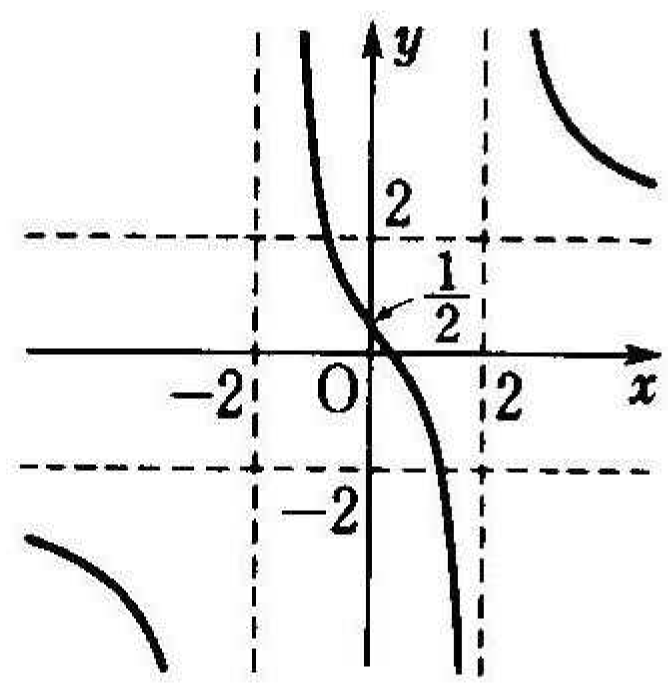
答　$x=2$ と $y=2$

5/1

■練習 3. $y=\dfrac{2x-1}{|x|-2}$ の漸近線を求め，グラフをかけ。

ヒント　$x\geqq 0$ のとき $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ ですから，漸近線は $x=2$ と $y=2$ の2つ。$x<0$ のときには $y=\dfrac{2x-1}{-x-2}$ ですから，漸近線は $x=-2$ と $y=-2$ の2つ。

グラフは右のようになります。1次の有理関数のグラフのかき方については上に説明した通りです。



■練習 4. $y=\dfrac{|x|-2}{x+1}$ の漸近線を求めよ。

ヒント　$x\geqq 0$ では $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ ですから $y=1$ が漸近線です。$x=-1$ はもちろん採用できません($-1<0$ だから)。

$x<0$ では $y=\dfrac{-x-2}{x+1}$ ですから，$y=-1$ が漸近線。もう1つは　$x=-1$

結局，求める漸近線は

$x=1,\ y=1,\ y=-1$　……答

の3つです。ピンとこない人はグラフをていねいにかいてみること。

＊　＊　＊

◆　第2は，分数関数で，分母が1次式，分子が2次式のときです。例えば，これをやってみませんか。

練習 5. $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ のグラフをかけ。

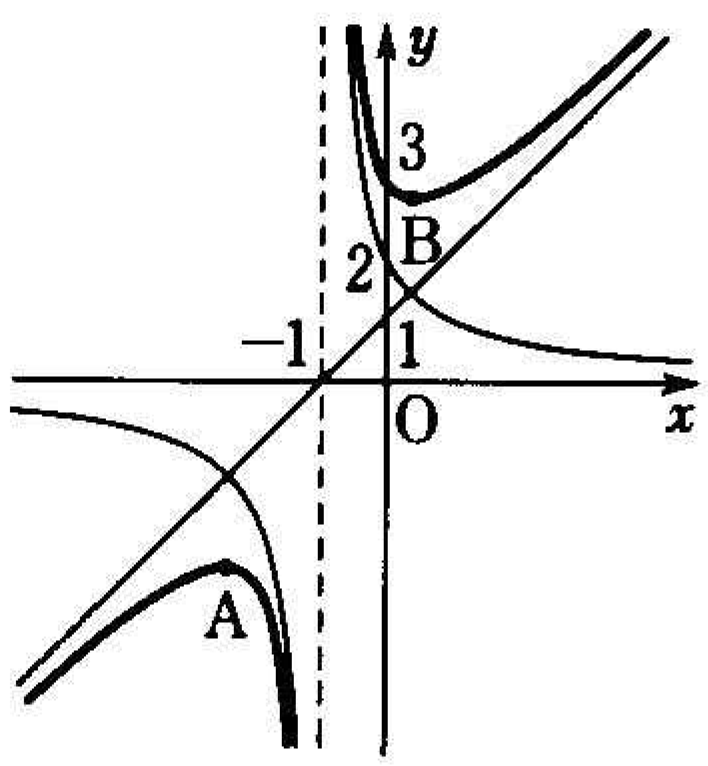
また，漸近線を求めよ。

（ヒント）　$y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}=x+1+\dfrac{2}{x+1}$

グラフをかくには

$$y_1=x+1,\quad y_2=\frac{2}{x+1}$$

のグラフを別々にかいて合成すればいいのです。このグラフからわかるように，この曲線は $y=x+1$ と $x=-1$ に近づきます。



（注）合成して，大体の形はわかりましたが，なるべく，図のA点，B点の座標は押えておきたいところ。そして，それにはxの実数条件を使えばいいのです。つまり，

$$y=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$$

の分母をはらって，xについて整理すると

$$x^2+(2-y)x+(3-y)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

判別式をDとすると

$$D=(2-y)^2-4\cdot1\cdot(3-y)\geqq0$$

$$\therefore\quad y^2-8\geqq0$$

$$\therefore\quad y\geqq2\sqrt{2},\ y\leqq-2\sqrt{2}$$

$y=2\sqrt{2}$ となるのは①に代入して

$$x^2+(2-2\sqrt{2})x+(3-2\sqrt{2})=0$$

$$\therefore\quad \{x+(1-\sqrt{2})\}^2=0$$

$$\therefore\quad x=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$$

のとき，とわかります。$y=-2\sqrt{2}$ となるのは同じようにして $x=-1-\sqrt{2}$ のとき，とわかります。

A点は　$(-1-\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$

B点は　$(-1+\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

といったぐあい。

では，もう1つやってみませんか。

練習 6. $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x-1}$ の漸近線を求めよ。

（解）　$y=\dfrac{x^2+3x+3}{x-1}$

$$\therefore\quad y=x+4+\frac{7}{x-1}$$

ゆえに求める漸近線は　$y=x+4$　と　$x=1$ である。

*　　*　　*

◆ 分母が1次式で分子が2次式のときは上のようにしてできました。では，逆ならばどうでしょうか。

練習 7. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ のグラフの概形をかけ。また漸近線を求めよ。

（ヒント）　$\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

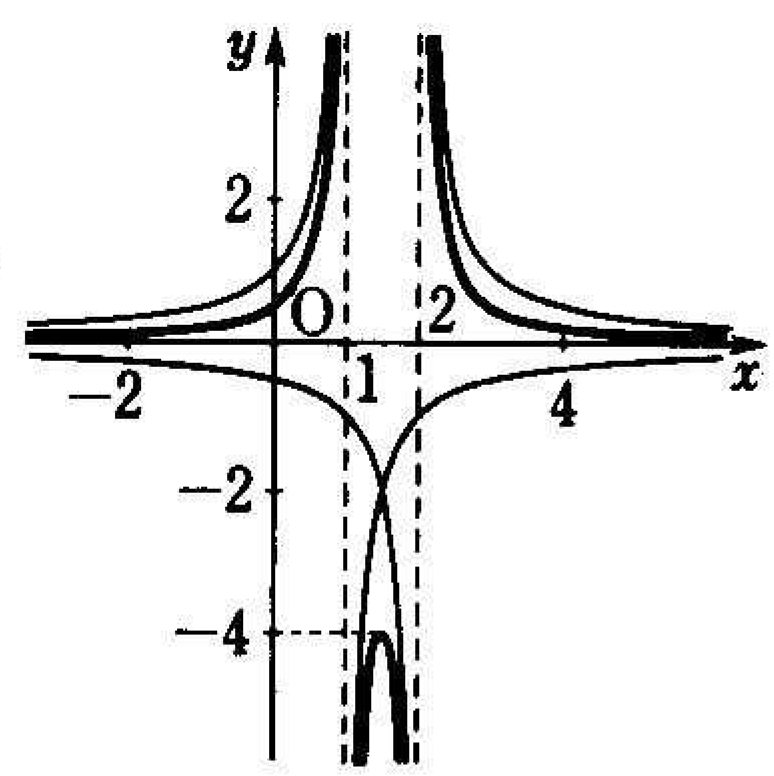
$$=\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x-1}$$

そこで $y_1=\dfrac{1}{x-2}$ と $y_2=\dfrac{-1}{x-1}$ のグラフを別別にかいて合成すればいいだろう。

こうしてグラフをかいてみるとわかるように，漸近線は3つあります。それは

$x=1,\ x=2$

$y=0$



分母が1次式の積に分解できるときは，上のようにしてできます。

練習 8. $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ のグラフの概形をかき，漸近線を求めよ。

（ヒント）　分母をはらって整理すると

$$yx^2+(y-1)x+y=0$$

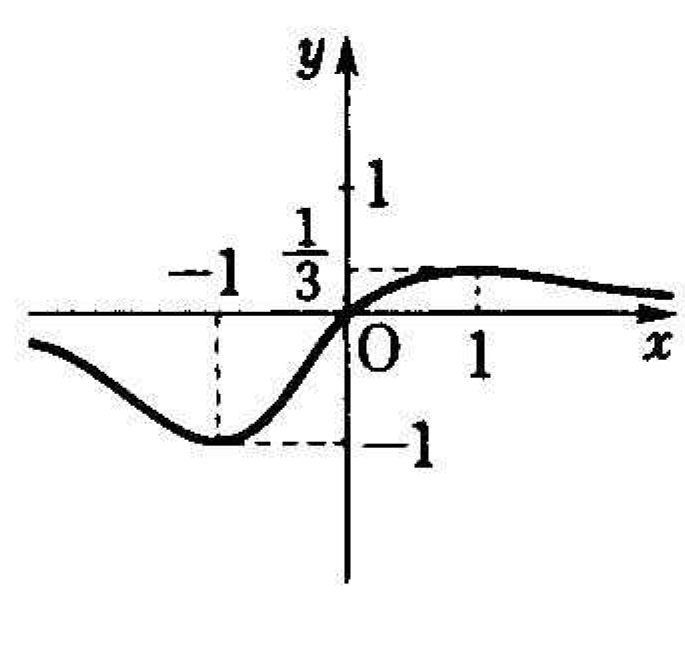
となり，xの実数条件から，

$$(y-1)^2-4y^2\geqq0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}\geqq y\geqq-1$$

これらを参照してグラフをかくと，右の通り。

漸近線は $y=0$ だけです。



○双曲線の焦点では

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆焦点に関する問題はよく出題されます。というのも，焦点の性質こそ2次曲線の花ともいうべきものだからです。

◆　2定点からの距離の差が一定である点の軌跡は双曲線になりますが，その2定点を**双曲線の焦点**といいます。

練習 1. 2定点A(2, 0)，B(−2, 0) を焦点とし，かつ，点C(2, 3) を通る双曲線の方程式を求めよ。

（ヒント）　$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=5$ ですから

$$\overline{AC}\sim\overline{BC}=2$$

20ページの練習1とおなじになります。さては $3x^2-y^2=3$ になるでしょう。

*　*　*

◆　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

の焦点は**F**$(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$で与えられます。

これを次に確めてみましょう。

$P(x,\ y)$，$F_1(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，

$F_2(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

とし，

$$\overline{PF_1}\sim\overline{PF_2}=2a$$

としますと

$$\sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}-\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}\pm 2a$$

両辺を2乗すると

$$x^2+a^2+b^2-2\sqrt{a^2+b^2}x+y^2$$
$$=x^2+a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}x+y^2+4a^2\pm 4a\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}$$

$$\therefore\quad -4\sqrt{a^2+b^2}x-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}x+a^2=\pm a\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2}$$

またもや，両辺を2乗しますと

$$(a^2+b^2)x^2+a^4+2a^2\sqrt{a^2+b^2}x$$
$$=a^2x^2+2a^2\sqrt{a^2+b^2}x+a^2(a^2+b^2)+a^2y^2$$

$$\therefore\quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

ナルホドこれは (*) と一致する!!

練習 2. 双曲線 $x^2-4y^2=4$ の焦点を求めよ。

（解）

$$x^2-4y^2=4$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$$

ゆえに求める焦点は$(\pm\sqrt{5},\ 0)$である。

練習 3. 双曲線 $x^2-4y^2=-4$ の焦点を求めよ。

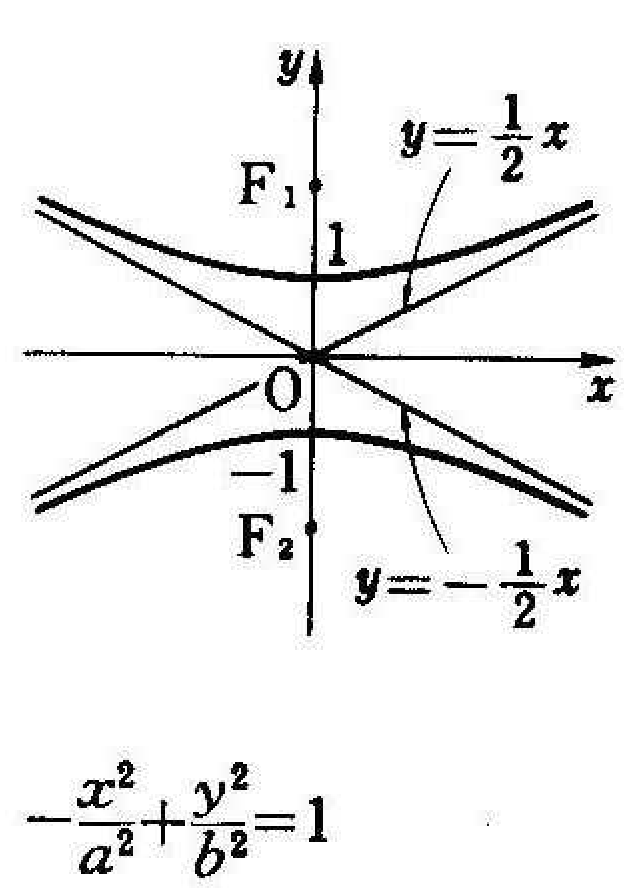
（ヒント）

$$x^2-4y^2=-4$$

の両辺を −4 でわると

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

これは漸近線が $y=\pm\frac{1}{2}x$ でy軸と2点(0, ±1) で交わる双曲線です。



そして，焦点はいうまでもなくy軸上にあって$(0,\ \pm\sqrt{5})$で与えられます。

（注）　2つの双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad と \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とは漸近線を共有していることはいうまでもありません。この2つを互いに**共役（キョウヤク）な双曲線**といいます。

練習 4. 焦点がA(2, 0) とB(−2, 0) で漸近線が $y=\pm\sqrt{3}x$ であるような双曲線の方程式を求めよ。

ヒント　求める双曲線の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$$

としますと，焦点が（±2, 0）であるから

$$\sqrt{a^2+b^2}=2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=4\qquad\cdots\cdots①$$

次に，漸近線は

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

なのですから

$$\frac{b}{a}=\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots②$$

①, ②から a, b を求めればよいでしょう。

さて，②より

$$b=\sqrt{3}a$$

これを①に代入して

$$a^2+3a^2=4$$

$$\therefore\quad a=1\qquad\therefore\quad b=\sqrt{3}$$

ゆえに求める方程式は

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\sqrt{3}^2}=1$$

$$\therefore\quad 3x^2-y^2=3$$

となります。

*　*　*

◆　では，次には原点が中心にならない場合をやってみましょう。

練習 5. $x^2-y^2+x+1=0$ の焦点を求めよ。

ヒント　まず標準の形に書きかえてみましょう。

$$(x^2+x)-y^2=-1$$

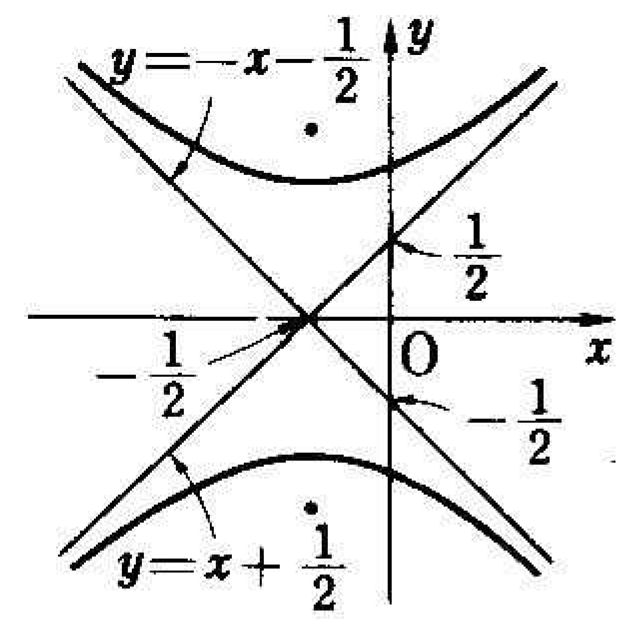
$$\therefore\quad\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad -\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$$

したがって中心は $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ で，漸近線は

$$y=\pm\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

です。グラフをかいてみると右のようになります。



してみると焦点の x 座標はいうまでもなし，$-\frac{1}{2}$ です。そして，y 座標は

$$\pm\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

つまり焦点は

$$\left(-\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

です。

注　東大には $y=\sqrt{x^2+x+1}$ のグラフをかけ，というのが出題されています。これは上のグラフの上半分になるわけです。

練習 6. 2直線 $x+my=2$

$$mx+y=4$$

の交点の軌跡を求めよ。

解　交点をP(X, Y) とすると

$$X+mY=2\qquad\cdots\cdots①$$

$$mX+Y=4\qquad\cdots\cdots②$$

$Y\neq0$ のとき①より

$$m=\frac{2-X}{Y}$$

これを②に代入して変形すれば

$$(X-1)^2-(Y-2)^2=-3\quad(Y\neq0)$$

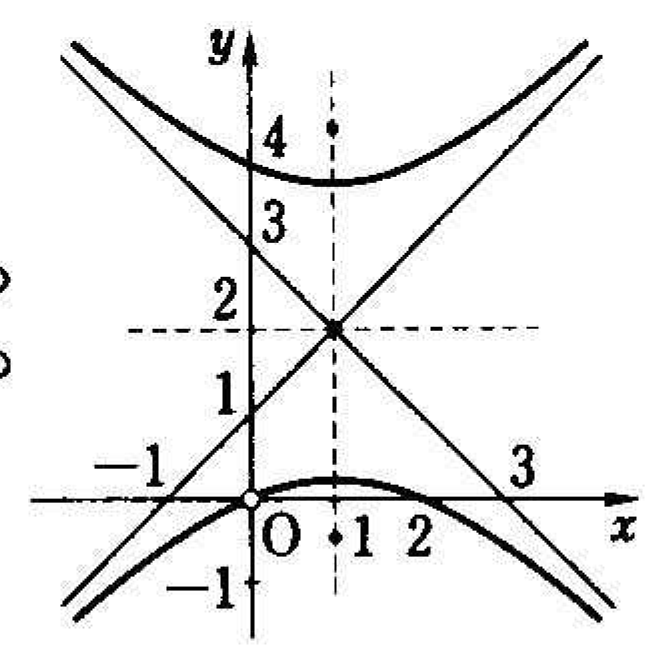
$Y=0$ のとき①, ②より　$X=2$, $m=2$

ゆえに (2, 0) は軌跡上の点である。

したがって求める軌跡は

双曲線 $(x-1)^2-(y-2)^2=-3$

から原点をのぞいたものである。



注　べつに焦点を求める必要はありませんがついでに求めてみますと

$$(1,\ 2\pm\sqrt{6})$$

です。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○媒介変数とは何か

◆バイカイヘンスウ，パラメーターともいう。ここでは媒介変数で表すこと，媒介変数を消去すること，媒介変数を使うことを。

◆ **媒介変数** をうまく使う人は少ない。

ジャマもの扱いにしてすぐ消去しようとばかり努力する。しかも，消去の仕方がまるでわかっていない，という人が多いもの。まず，消去からいこう。

■練習 1. $x=2t$,　$y=t+1$ から t を消去せよ。

ヒント　$y=t+1$ から　$t=y-1$

$\therefore\ x=2(y-1)$

$\therefore\ x-2y+2=0$　……答

5/~

■練習 2. $x=t-1$, $y=t^2+t$ から t を消去せよ。

ヒント　$x=t-1$ から　$t=x+1$

$\therefore\ y=(x+1)^2+(x+1)$

$\therefore\ y=x^2+3x+2$　……答

5/~

■練習 3. $x=t^2+t$, $y=t^2-2t$ から t を消去せよ。

ヒント　$t^2+t=x$　……①

$t^2-2t=y$　……②

①－② より

$$3t=x-y\qquad \therefore\ t=\frac{x-y}{3}$$

これを①に代入して

$$\left(\frac{x-y}{3}\right)^2+\frac{x-y}{3}=x$$

あるいは，展開して

$x^2-2xy+y^2-6x-3y=0$　……答

注　もうちょっと気どってやるなら：――

①×2＋②，①－②より

$$t^2=\frac{2x+y}{3},\quad t=\frac{x-y}{3}$$

$$\therefore\ \frac{2x+y}{3}=\left(\frac{x-y}{3}\right)^2$$

$$\therefore\ x^2-2xy+y^2-6x-3y=0$$

＊　＊　＊

◆ 次はめんどうですよ。

5/~

■練習 4. $x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $y=\dfrac{2t}{t^2+1}$ から t を消去せよ。

ヒント　$x^2+y^2=\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2t}{t^2+1}\right)^2$

$$=\frac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2}=1$$

とやる人が多いが，まずい。オーソドックスにやること。与式を書きかえて

$(x-1)t^2=-(x+1)$　……①

$yt^2-2t=-y$　……②

①×y－②×$(x-1)$ を作ると

$$2(x-1)t=-2y$$

$x\neq1$ のとき

$$t=\frac{-y}{x-1}$$

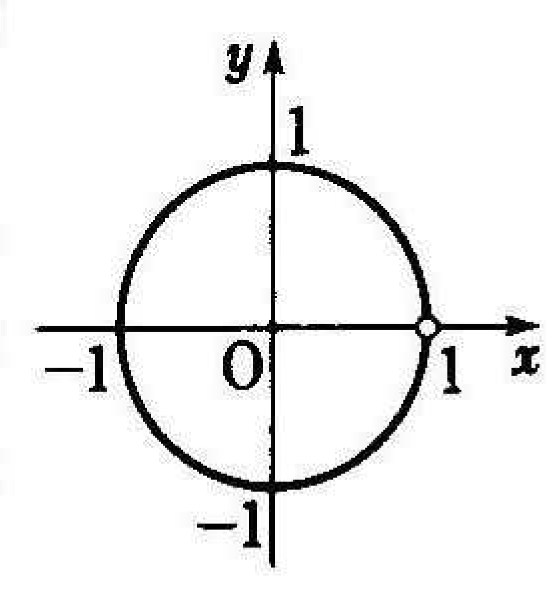
これを①に代入して

$$(x-1)\frac{y^2}{(x-1)^2}=-(x+1)$$

$\therefore\ y^2=-(x^2-1)$

$\therefore\ x^2+y^2=1\quad(x\neq1)$

$x=1$ のとき①は $0=-2$ となって不成立。



いいですか。はじめのように $x^2+y^2=1$ を作ったのでは $x\neq1$ など出てくるスキもないではありませんか。

＊　＊　＊

◆ 次は，パラメーターで表すこと。

■練習 5. 直線 $3x+2y=1$ をパラメーターで表せ。

6/~

(ヒント)　$y=t$ とすると　$x=\dfrac{1-2y}{3}=\dfrac{1-2t}{3}$

つまり

$$x=\frac{-2t+1}{3},\ \ y=t$$

は1つのパラメーター表示です。しかし，これはあまりおもしろくない。

$$3x+2y=1$$

$$\therefore\ \ 3x+2y=3\cdot 1+2\cdot(-1)$$

$$\therefore\ \ 3(x-1)=2(-y-1)$$

$$\therefore\ \ \frac{x-1}{2}=\frac{-y-1}{3}=t$$

とおくと

$$x=2t+1,\ \ y=-3t-1$$

となってこのほうが扱いやすい，ということはおわかりでしょう。

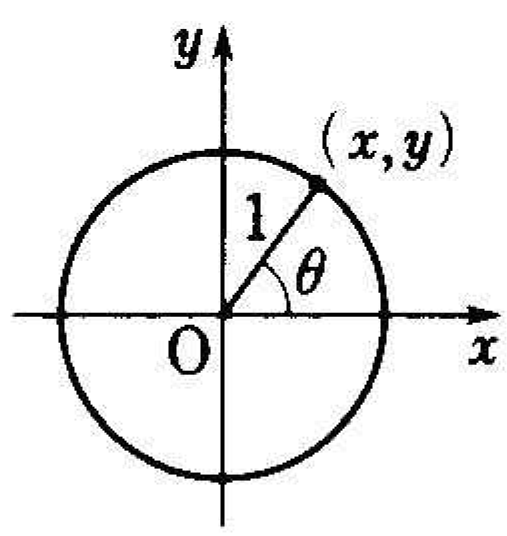
■練習 6. 円 $x^2+y^2=1$ をパラメーターで表せ。

(ヒント)　$\boldsymbol{x=\cos\theta,\ \ y=\sin\theta}$

でもいいし，

$x=\sin\theta,\ \ y=\cos\theta$

でもいいのですが，ふつうは前のほうを使います。というのも，θは，右の図のような角を表すので，使うのに便利なことが多いからです。



■練習 7. 円 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ をパラメーターで表せ。

(ヒント)　$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

と表せますので

$$x-2=2\cos\theta,\ \ y-3=2\sin\theta$$

とおくことができます。

$$\therefore\ \ x=2\cos\theta+2,\ \ y=2\sin\theta+3$$

もちろん，これがただ1つの解というわけではありません。

■練習 8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ をパラメーターで表せ。ただし，$a>0,\ b>0.$

(ヒント)　$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ と書けますから

$\dfrac{x}{a}=\cos\theta,\ \dfrac{y}{b}=\sin\theta$ とおけます。つまり

$$\boldsymbol{x=a\cos\theta,\ \ y=b\sin\theta}$$

です。

■練習 9. $y^2=4px$ をパラメーターで表せ。

(ヒント)　$y=t$ とおきますと

$$x=\frac{t^2}{4p}$$

となりますから，

$$x=\frac{t^2}{4p},\ \ y=t$$

が1つのパラメーターで表示です。しかし，これは分数形であまりおもしろくないですね。そこで，$y=2pt$ とおいてみましょうか。そうすると

$$x=\frac{(2pt)^2}{4p}=pt^2$$

つまり

$$\boldsymbol{x=pt^2,\ \ y=2pt}$$

となって扱いやすくなります。

*　　*　　*

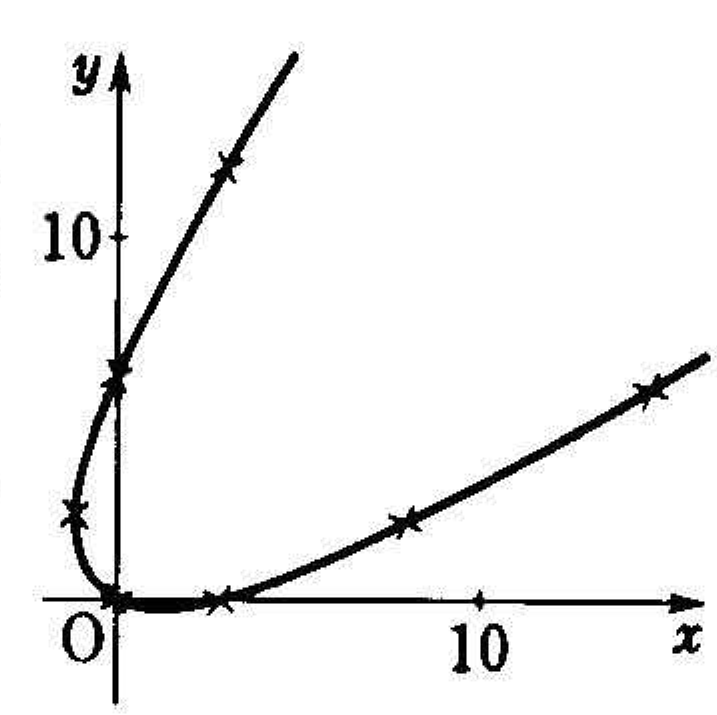
◆ パラメーターで表して役に立つ例はいろいろありますが，例えばグラフをかくときをとりあげてみましょう。

■練習 10. $x=t^2-2t,\ \ y=t^2+t$ のとき，点 $(x,\ y)$ のグラフの概形をかけ。

(ヒント)

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	15	8	3	0	-1	0	3
y	6	2	0	0	2	6	12

そこで各点をプロットしてなめらかにむすんでグラフが得られます。



もっと厳密にやるには：――

t を消去すると

$$x^2-2xy+y^2-3x-6y=0$$

となって，ちょっとめんどうですよ。座標変換が必要になってきます。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

○直交2接線の交点の軌跡

◆2次曲線に関する軌跡の問題も多いのですが，典型的なもののひとつは直交する2接線の交点の軌跡です。

◆ ここでは2次曲線に引いた2接線が直交するような点の軌跡を求める問題を考えるのが目的です。では，まず放物線から：——

4ｋ

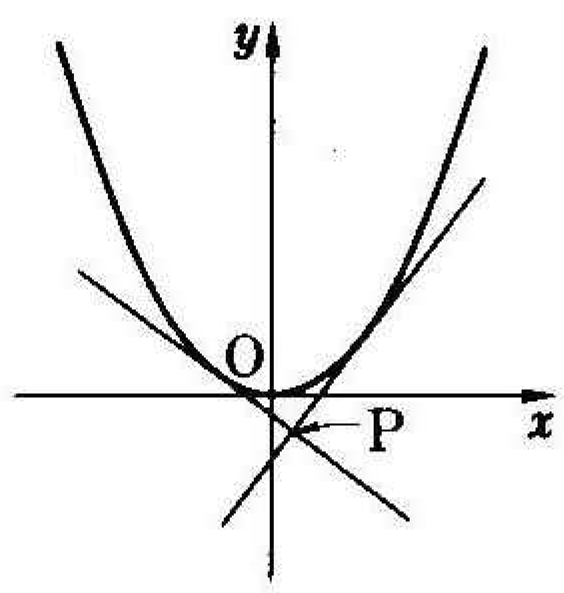
練習 1. 点Pから放物線 $y=x^2$ に引いた接線が直交するとき，点Pの軌跡を求めよ。

ヒント　2つの直線

$$y=m_1x+a_1$$
$$y=m_2x+a_2$$

が直交するための条件は

$$\boldsymbol{m_1m_2=-1}$$



です。これは重要，オボエテおいて下さい。

さて，$P(X,\ Y)$ を通り傾き m の直線の方程式は

$$y-Y=m(x-X)$$

つまり

$$y=mx+(Y-mX) \quad \cdots\cdots①$$

で与えられます。これが

$$y=x^2 \quad \cdots\cdots②$$

と接するための条件は連立方程式①，②が重解をもつための条件とおなじ。そこで，①，②から y を消去して得られる2次方程式

$$x^2-mx-(Y-mX)=0$$

の判別式をDとしますと

$$D=m^2-4\cdot1\cdot\{-(Y-mX)\}=0$$
$$\therefore\quad m^2-4Xm+4Y=0$$

これの2つの解が2つの接線の傾きになるハズ。さては直交条件は

$$m_1m_2=4Y=-1,\ Y=-\frac{1}{4}$$

ゆえに求める軌跡はx軸に平行な直線

$$y=-\frac{1}{4}$$

5ｋ

練習 2. だ円 $x^2+9y^2=9$ にPから引いた接線が直交する。Pの軌跡を求めよ。

ヒント　点Pの座標を $(X,\ Y)$ とすると，Pを通り傾きmの直線は

$$y-Y=m(x-X)$$
$$\therefore\quad y=mx+(Y-mX)$$

これが，だ円 $x^2+9y^2=9$ に接するための条件を求めるにはyを消去してえられるxの2次方程式

$$x^2+9\{mx+(Y-mX)\}^2=9$$

が重解をもつ条件を求めればよい。

さて，上式を変形すると

$$(1+9m^2)x^2+18m(Y-mX)x$$
$$+\{9(Y-mX)^2-9\}=0$$

そこで，判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=\{9m(Y-mX)\}^2$$
$$-(1+9m^2)\{9(Y-mX)^2-9\}$$
$$=0$$

（コレハフクザツダ，タイヘンダ，ト，誰シモオモウノデス。シカシ，ダンコトシテ計算スルト，スゴクカンタンニナルノデス。アルイハ，

$\{9m(Y-mX)\}^2$ ト $(9m^2)\{9(Y-mX)^2\}$

トヒトシイコトニ気ガツクト，スゴクラクニイクノデスガ……）

$$\therefore\quad -9(Y-mX)^2+9+81m^2=0$$
$$\therefore\quad -(Y-mX)^2+1+9m^2=0$$
$$\therefore\quad (9-X^2)m^2+2XYm+(1-Y^2)=0$$

さて，この2つの解m_1，m_2が2接線の傾きを与えるのですから，直交条件から

$$m_1m_2=\frac{1-Y^2}{9-X^2}=-1$$
$$\therefore\quad X^2+Y^2=10$$

ゆえに求める軌跡は円

$$x^2+y^2=10$$

である。

(注)　$(9-X^2)m^2+2XYm+(1-Y^2)=0$ が2次方程式にならないとき，つまり

$$9-X^2=0$$

のときどうするか，と，気になっている人もあるでしょう。実はこのとき接線のひとつがy軸に平行になるためmの値がないのです。だから，その点だけはべつに求めてたしかに円上にあることをいうべきなのです。

*　*　*

◆　さあ，これで放物線とだ円の場合はおわった。次は双曲線に行くとしよう。

■練習 3. 双曲線 $9x^2-y^2=9$ に点Pから引いた接線が直交する。点Pの軌跡を求めよ。

(ヒント)　点Pの座標を $(X,\ Y)$ とするとPを通り傾きmの直線は

$$y-Y=m(x-X)$$

$$\therefore\quad y=mx+(Y-mX)$$

これが双曲線 $9x^2-y^2=9$ に接するための条件は，yを消去して

$$9x^2-\{mx+(Y-mX)\}^2=9$$

$$\therefore\quad (9-m^2)x^2-2m(Y-mX)x-\{(Y-mX)^2+9\}=0$$

そこで判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=\{m(Y-mX)\}^2+(9-m^2)\{(Y-mX)^2+9\}=0$$

$$\therefore\quad 9(Y-mX)^2+81-9m^2=0$$

$$\therefore\quad (Y-mX)^2+9-m^2=0$$

$$\therefore\quad (X^2-1)m^2-2XYm+(Y^2+9)=0$$

したがって，これの2つの解m_1，m_2の積が -1 になる条件を求めればよい。

$$\therefore\quad m_1m_2=\frac{Y^2+9}{X^2-1}=-1$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2=-8$$

オヤオヤ，コレハ何ゴトダ!!　実は，軌跡は存在しないのであった。

*　*　*

◆　**■練習 4.** 有心2次曲線

$$Ax^2+By^2=1$$

に点Pから引いた接線が直交するとき，Pの軌跡を求めよ。ただし，A，Bの少なくとも一方は正で，いずれも0でないとする。

☆　**チョットご注意**　$A,\ B>0$ のときは一般にだ円で，$AB<0$ のときは一般に双曲線を表します。さて

(解)　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通り傾きmの直線は

$$y=mx+(Y-mX)$$

で与えられる。これが

$$Ax^2+By^2=1$$

に接する条件は

$$Ax^2+B\{mx+(Y-mX)\}^2=1$$

したがって

$$(A+Bm^2)x^2+2Bm(Y-mX)x+\{B(Y-mX)^2-1\}=0$$

が重解をもつことである。判別式をDとすると，

$$\frac{D}{4}=\{Bm(Y-mX)\}^2-(A+Bm^2)\{B(Y-mX)^2-1\}=0$$

$$\therefore\quad -AB(Y-mX)^2+A+Bm^2=0$$

$$\therefore\quad (B-ABX^2)m^2+2ABXYm+(A-ABY^2)=0$$

この方程式の2つの解が接線の傾きであるから，直交条件より

$$m_1m_2=\frac{A-ABY^2}{B-ABX^2}=-1$$

$$\therefore\quad A-ABY^2=-B+ABX^2$$

$$\therefore\quad AB(X^2+Y^2)=A+B$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$$

である。ゆえに $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}>0$ のとき軌跡は円 $x^2+y^2=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}$ であるが $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\leqq 0$ のときは存在しない。(オヤ，チョット待テヨ，ドウシテ等号ガツクノダイ!!)

○平行弦の中点の軌跡

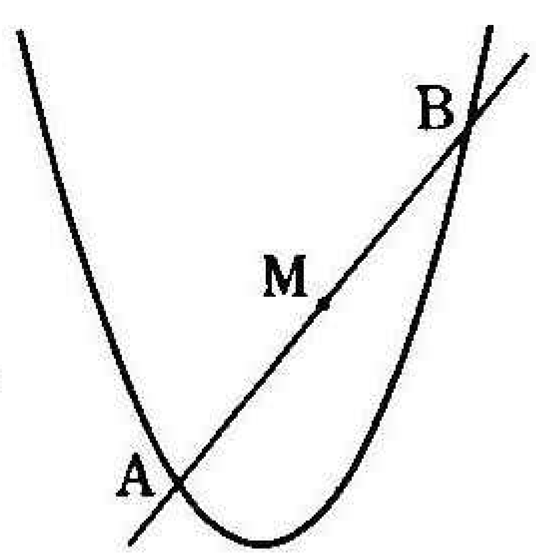
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆2次曲線の平行な弦の中点の軌跡の使い方をマスターしておくことは大切です。そこには重要なテクニックが活躍するからだ。

◆　2次曲線の平行な弦の中点の軌跡を求めるのが目標です。この種の扱い方はよくつかんでおいて下さい。

では，まず，放物線から：——

練習 1. $y=x^2$ と $y=2x+a$ が2点A，Bで交わるとき，$\overline{\mathrm{AB}}$ の中点Mの軌跡を求めよ。



ヒント　$y=x^2$ ……①

$y=2x+a$……②

①，②より y を消去しますと

$$x^2-2x-a=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が得られます。この2つの解がAとBの x 座標ですから，これらを α，β としますと

$$\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha+a),\ \mathrm{B}(\beta,\ 2\beta+a)$$

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-a$$

となります。したがって，$\overline{\mathrm{AB}}$ の中点をM$(X,\ Y)$ としますと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\therefore\quad X=1$$

ゆえに，求める軌跡は y 軸に平行な直線

$$x=1$$

である。

しかし，実はこの直線が全部いいわけではありません。AB と放物線が2点で交わる条件，つまり(*)が異なる2つの実数解をもつ条件が必要だったのです。それは，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1^2+a>0$$

$$\therefore\quad a>-1 \quad \cdots\cdots(**)$$

これをどう扱うか，こんなところが難しい点です。

さて，

$$Y=\frac{(2\alpha+a)+(2\beta+a)}{2}$$

$$=(\alpha+\beta)+a$$

$$=2+a$$

ですから　$a=Y-2$

これを(**)に代入して

$$Y-2>-1$$

$$\therefore\quad Y>1$$

つまり軌跡は $x=1$ $(y>1)$ であることがわかったのです。

◆　では，だ円にいきましょう。

練習 2. だ円 $x^2+4y^2=4$ と直線 l：$y=3x+a$ が2点A，Bで交わるとき，$\overline{\mathrm{AB}}$ の中点Mの軌跡を求めよ。

ヒント　$x^2+4y^2=4$ ……①

$y=3x+a$ ……②

②を①に代入して

$$x^2+4(3x+a)^2=4$$

$$\therefore\quad 37x^2+24ax+(4a^2-4)=0\cdots\cdots③$$

これの2つの解がA，Bの x 座標 α，β なのです。

さて，$\alpha+\beta=-\dfrac{24a}{37}$，$\alpha\beta=\dfrac{4a^2-4}{37}$

またMの座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{12}{37}a \quad \cdots\cdots④$$

また $(X,\ Y)$ が②上にあることから

$$Y=3X+a \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤から a を消去して

$$Y=-\frac{1}{12}X$$

さらに③が異なる実数解をもつ条件から判

別式をDとしますと

$$\frac{D}{4}=144a^2-37(4a^2-4)>0$$

$$-\sqrt{37}<a<\sqrt{37}$$

これと④から

$$-\frac{12}{\sqrt{37}}<X<\frac{12}{\sqrt{37}}$$

やれやれ，これでおわった。軌跡は

$$y=-\frac{1}{12}x \quad \left(-\frac{12}{\sqrt{37}}<x<\frac{12}{\sqrt{37}}\right)$$

なのであった。

*　*　*

◆ 次は双曲線の場合です。べつにだ円の場合とちがいはありません。

練習 3. $x^2-4y^2=4$ と直線 $y=x+a$ が2点A，Bで交わるとき，線分$\overline{AB}$の中点の軌跡を求めよ。

(解) $x^2-4y^2=4$ と $y=x+a$ が2点で交わるための条件を求めるためにyを消去して

$$x^2-4(x+a)^2=4$$

$$\therefore\ 3x^2+8ax+(4+4a^2)=0 \cdots\cdots ①$$

この判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(4a)^2-3(4+4a^2)$$

$$=4a^2-12>0$$

$$\therefore\ |a|>\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

さて $\overline{AB}$ の中点を M(X，Y)，①の2根をα，βとすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{8a}{3}\right)=-\frac{4}{3}a \cdots\cdots ③$$

また，M(X，Y) は直線 $y=x+a$ 上になるから

$$Y=X+a \qquad \cdots\cdots ④$$

よって求める軌跡は③，④から a を消去して

$$Y=\frac{1}{4}X$$

ただし，②，③より

$$|X|>\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

で与えられる。

答 $y=\frac{1}{4}x \quad \left(|x|>\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

*　*　*

◆ 中点でなく3等分点の場合もまったくおなじように扱えるでしょう。例えば：——

練習 4. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+a$ が2点A，Bで交わるとき，$\overline{AB}$ の3等分点の軌跡の方程式を求めよ。

(ヒント) yを消去して

$$x^2-x-a=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

この判別式をDとしますと交わるためには

$$D=1^2+4a>0$$

$$a>-\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

が条件です。

ところで，①の2根をα，βとしますと

$$\alpha+\beta=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\alpha\beta=-a \qquad \cdots\cdots ④$$

さて，$\overline{AB}$ の3等分点を N(X，Y) としますと

$$X=\frac{2\alpha+\beta}{3} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$Y=X+a \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となります。(**チョットご注意!!** $X=\frac{2\alpha+\beta}{3}$ の他に $X=\frac{\alpha+2\beta}{3}$ を考える必要はありません。交点のどちらがAでもBでもかまわないのですから)

さて②，③，④，⑤，⑥からX，Yの関係を求めればよいわけ。③，⑤をα，βについてといて④に代入し，それを⑦とするなら⑦と⑥で a を消去するとX，Yの関係が得られ，さらに②，⑦から（X，Y）の存在範囲の条件がでてくるわけです。

さあ，この続きはキミがやってみるのだ。今スグですよ。

上の場合，中点のときとちがって $a>-\frac{1}{4}$ を使ってないようですね。これは，ハテ，どうしたわけでしょう。その理由は⑤にあるのだ!!キミ，気がつきましたか？

○ 2次曲線の接線の公式

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆ムリにオボエル必要はありませんよ。少し，ムリにオボエルとスゴク便利なことが多いのです。オヤ，コレデハ少シ変ダ。

◆ だ円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線は

$$\boldsymbol{\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1}$$

です。双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線は

$$\boldsymbol{\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}=1}$$

です。そして，放物線 $y^2=4px$ 上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線は

$$\boldsymbol{2px-\beta y+2p\alpha=0}$$

です。実をいうと，この公式をおぼえるうまい規則があるのです。2次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線を求めるには

x^2 の代りに　αx

xy の代りに　$\frac{\alpha y+\beta x}{2}$

y^2 の代りに　βy

x の代りに　$\frac{x+\alpha}{2}$

y の代りに　$\frac{y+\beta}{2}$

をおきかえればよいのです。こういっただけではピンとこないかも知れません。ともかく実例を：——

■練習 1. 円 $x^2+y^2-2x=0$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線を，公式によって求めよ。

(ヒント) x^2 を $1x$ でおきかえ，y^2 を $1y$ でおきかえ，x を $\frac{x+1}{2}$ でおきかえればよいのです。それは：

$$1x+1y-2\cdot\frac{x+1}{2}=0$$

$$\therefore\quad x+y-x-1=0$$

$$\therefore\quad y=1 \qquad \cdots\cdots 答$$

です。

■練習 2. だ円 $x^2+4y^2-2x+y=0$ 上の点 $(0,\ 0)$ における接線を求めよ。

(ヒント) x^2 を $0x$

y^2 を $0y$

x を $\frac{x+0}{2}$

y を $\frac{y+0}{2}$

でおきかえて

$$0x+4\cdot 0y-2\cdot\frac{x+0}{2}+\frac{y+0}{2}=0$$

つまり

$$-2x+y=0$$

答　$y=2x$

■練習 3. 双曲線 $x^2-4y^2+3x+4y-4=0$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(解) 接線の公式より

$$1x-4\cdot 1\cdot y+3\cdot\frac{x+1}{2}+4\cdot\frac{y+1}{2}-4=0$$

で与えられる。これを変形すれば

$$5x-4y-1=0 \qquad \cdots\cdots 答$$

*　　*　　*

◆ では，これらの公式の応用例をやってみましょう。

■練習 4. 点 $(3,\ 3)$ から単位円に引いた接線の接点の x 座標を求めよ。

(ヒント) 接線の方程式をまともに求めてやるこ

ともできないわけではありませんが，上の公式を使う方がグット楽です。接点を $(\alpha,\ \beta)$ とすると，接線は

$$\alpha x+\beta y=1$$

これが点 $(3,\ 3)$ を通るのですから

$$3\alpha+3\beta=1 \qquad \cdots\cdots①$$

他方，点 $(\alpha,\ \beta)$ は単位円上にありますから

$$\alpha^2+\beta^2=1 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②から α を求めればよいでしょう。

さて，①より

$$\beta=-\alpha+\frac{1}{3}$$

これを②に代入して

$$\alpha^2+\left(-\alpha+\frac{1}{3}\right)^2=1$$

これをといて

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6} \qquad \cdots\cdots 答$$

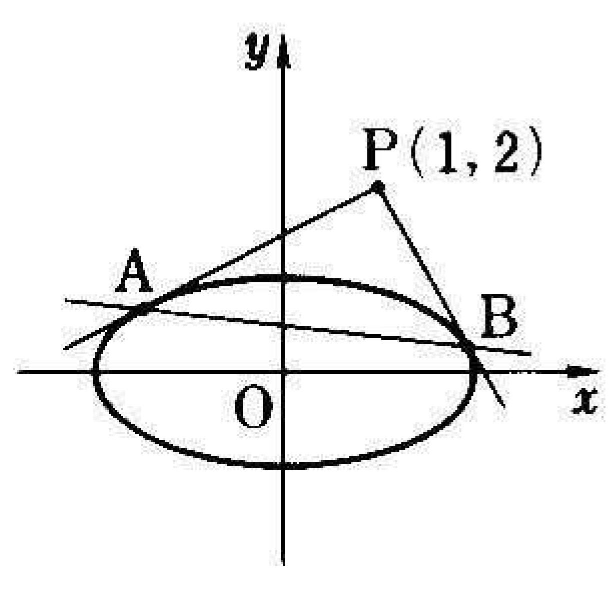
4/1

■練習 5. 点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ からだ円 $x^2+4y^2=4$ に引いた接線の接点をA，Bとするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

（ヒント） 接点の座標を $(\alpha,\ \beta)$ における接線は

$$\alpha x+4\beta y=4$$

です。これが点P $(1,\ 2)$ を通るための条件は



$$\alpha\cdot 1+4\cdot\beta\cdot 2=4$$

$$\therefore\quad \alpha+8\beta=4 \qquad \cdots\cdots(*)$$

となります。ところが，$(*)$は点 $(\alpha,\ \beta)$ が直線 $x+8y=4$ 上にあることを示しています。つまり，直線 $x+8y=4$ は接点を通るハズ。

さあ，いいですか。上の解答で接点とだけいって，AともBともいわなかったのですから，上のことは直線 $x+8y=4$ が2つの接点を通ることを示しています。

よって，求める直線は

$$x+8y=4$$

であることがわかった。

5/1

■練習 6. 双曲線 $4x^2-y^2=1$ 上の点Pにおける接線と2本の漸近線との交点をQ，Rとするとき，$\triangle$OQR の面積を求めよ。

（解） $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とすると，点Pにおける接線の方程式は

$$4\alpha x-\beta y=1 \qquad \cdots\cdots①$$

である。また，漸近線は

$$y=2x \qquad \cdots\cdots②$$

と

$$y=-2x \qquad \cdots\cdots③$$

である。

①，②の交点は①，②から x，y を求めて

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2(2\alpha-\beta)},\ \frac{1}{2\alpha-\beta}\right) \quad \cdots\cdots④$$

また①，③の交点Rは

$$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2(2\alpha+\beta)},\ -\frac{1}{2\alpha+\beta}\right) \cdots\cdots⑤$$

で与えられる。Oはもちろん $(0,\ 0)$ で，したがって三角形 OQR の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2(2\alpha-\beta)}\cdot\left(-\frac{1}{2\alpha+\beta}\right)-\frac{1}{2(2\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{2\alpha-\beta}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4\alpha^2-\beta^2}\right|$$

ところが $4\alpha^2-\beta^2=1$ であるから，求める面積は $\frac{1}{2}$ である。

答 $\frac{1}{2}$

（注） 3点 $(u,\ u')$，$(v,\ v')$，$(0,\ 0)$ を頂点とする三角形の面積は，右のようにして

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \times & \\ u & & u' \\ & \times & \\ v & & v' \\ & \times & \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}|0u'+uv'+v0-u0-vu'-0v'|$$

$$=\frac{1}{2}|uv'-u'v|$$

で与えられます。上の解答はこれを使いました。

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

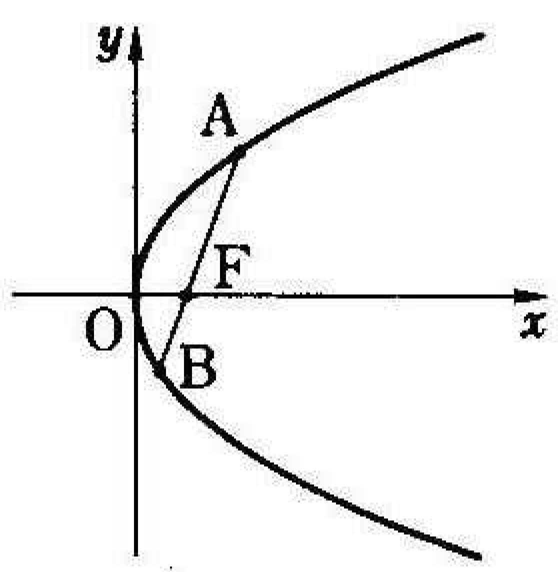
① 2次曲線の弦の長さの扱い方

◆放物線やだ円や双曲線の弦の長さを求める計算はよくものにしておかなければなりません。と，いうのも……

◆ 弦の長さの計算は円や放物線の場合には数Ⅰでもやったことなのですが，ここでは2次曲線について，一般的に扱うことにしましょう。では，まず，放物線から：――

8/15

練習 1. 放物線 $y^2=4x$ の焦点Fを通る弦ABの傾きをmとするとき，弦ABの長さを求めよ。



ヒント　$y^2=4\cdot 1\cdot x$ の焦点は F(1, 0) ですから AB の方程式は

$$y-0=m(x-1)$$

$$\therefore\quad y=mx-m \quad \cdots ①$$

これと $y^2=4x$ とからxを消去しますと

$$y=m\cdot\frac{y^2}{4}-m$$

つまり

$$my^2-4y-4m=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

となります。そこでA，Bのy座標をα，βとしますと

$$\mathrm{A}\left(\frac{\alpha}{m}+1,\ \alpha\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{\beta}{m}+1,\ \beta\right)$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AB}}^2=\left\{\left(\frac{\alpha}{m}+1\right)-\left(\frac{\beta}{m}+1\right)\right\}^2+(\alpha-\beta)^2$$

$$=\frac{1}{m^2}(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$$

$$=\frac{1}{m^2}(1+m^2)(\alpha-\beta)^2$$

ところが(*)の2つの解がα，βなんですから

$$\alpha+\beta=\frac{4}{m},\quad \alpha\beta=-4$$

$$\therefore\quad (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\frac{16}{m^2}+16=\frac{16(m^2+1)}{m^2}$$

で与えられます。

したがって

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\frac{1}{m^2}(m^2+1)\cdot\frac{16(m^2+1)}{m^2}$$

$$=\frac{16(m^2+1)^2}{m^4}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AB}}=\frac{4(m^2+1)}{m^2} \quad \cdots\cdots 答$$

注　上の解で，①から，$y=m(x-1)$，これを $y^2=4x$ に代入してもちろんいいのですが，ここでは2乗するのをさけて $x=\frac{y^2}{4}$ を①に代入したのです。

*　*　*

◆ では，だ円の場合をやってみましょう。

8/15

練習 2. 直線 $y=x-1$ がだ円

$$4x^2+9y^2=36$$

から切りとられる弦の長さを求めよ。

ヒント　交点をA(α, $\alpha-1$)，B(β, $\beta-1$) としますと

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+\{(\alpha-1)-(\beta-1)\}^2$$

$$=2(\alpha-\beta)^2$$

$$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\} \quad \cdots\cdots(*)$$

ところで，$y=x-1$ を $4x^2+9y^2=36$ に代入しますと

$$4x^2+9(x-1)^2-36=0$$

$$\therefore\quad 13x^2-18x-27=0$$

これの2つの解がα，βなのですから

$$\alpha+\beta=\frac{18}{13},\quad \alpha\beta=-\frac{27}{13} \quad \cdots\cdots(**)$$

そこで (*)，(**) から

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=2\left\{\left(\frac{18}{13}\right)^2+4\cdot\frac{27}{13}\right\}$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{AB}}=\frac{24\sqrt{6}}{13} \quad \cdots\cdots 答$$

となります。

◆ 双曲線でもおなじです。では次をやってみませんか。

9

練習 3. 双曲線 $C: x^2-y^2=1$ が直線 l: $y=mx+n$ から切りとる線分の長さを求めよ。

(ヒント)　$x^2-y^2=1$ ……①

$y=mx+n$ ……②

交点A，Bについて

$$x^2-(mx+n)^2-1=0$$

$\therefore$　$(1-m^2)x^2-2mnx-(n^2+1)=0$ …③

$m=\pm1$ のときには l はCの漸近線に平行となりますので2点では交わりません。

そこで $m\neq\pm1$ のときを考えますと③の2つの解を α，β として

$$\alpha+\beta=\frac{2mn}{1-m^2}\cdots④,\quad \alpha\beta=\frac{-(n^2+1)}{1-m^2}\cdots⑤$$

となります。

そして $A(\alpha,\ m\alpha+n)$，$B(\beta,\ m\beta+n)$ となりますから

$$\overline{AB}^2=(\alpha-\beta)^2+m^2(\alpha-\beta)^2$$
$$=(1+m^2)(\alpha-\beta)^2$$
$$=(1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

ここで④，⑤を使って

$$=(1+m^2)\left\{\frac{4m^2n^2}{(1-m^2)^2}-\frac{-4(n^2+1)}{1-m^2}\right\}$$
$$=(1+m^2)\frac{4(n^2-m^2+1)}{(1-m^2)^2}$$
$$\therefore\quad \overline{AB}=\sqrt{1+m^2}\frac{2\sqrt{n^2-m^2+1}}{1\sim m^2}$$
$$=2\frac{\sqrt{1+m^2}}{1\sim m^2}\sqrt{n^2-m^2+1}$$

となります。$n^2-m^2+1\leqq0$ のときには2点で交わらないのです。結局答えとしては

(答)　$m^2=1$ または $n^2-m^2+1\leqq0$ のとき弦は存在しない。

$m^2\neq1$ かつ $n^2-m^2+1>0$ のとき，弦の長さは $2\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{1\sim m^2}\sqrt{n^2-m^2+1}$

となります。

*　*　*

◆ ではちょっとした応用的な問題をやってみましょう。

練習 4. 2次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\cdots(*)$$

と，原点を通る直線 $y=mx$ が2点A，Bで交わるとき，線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ。

(解)　$y=mx$ を $(*)$ に代入して

$$ax^2+2hmx^2+bm^2x^2+2gx+2fmx+c=0$$
$$\therefore\quad (a+2hm+bm^2)x^2+2(g+fm)x+c=0\quad\cdots\cdots①$$

①の2つの実数解を α，β とすると

$$A(\alpha,\ m\alpha),\ B(\beta,\ m\beta)$$

とおくことができ

$$\overline{AB}^2=(\alpha-\beta)^2+(m\alpha-m\beta)^2$$
$$=(1+m^2)(\alpha-\beta)^2$$
$$=(1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

しかるに①より

$$\alpha+\beta=\frac{-2(g+fm)}{a+2hm+bm^2}$$
$$\alpha\beta=\frac{c}{a+2hm+bm^2}$$
$$\therefore\quad \overline{AB}^2=(1+m^2)\left\{\frac{4(g+fm)^2}{(a+2hm+bm^2)^2}-\frac{4c}{a+2hm+bm^2}\right\}$$
$$=(1+m^2)\times\frac{4\{(g^2-ac)+2(gf-ch)m+(f^2-bc)m^2\}}{(a+2hm+bm^2)^2}$$
$$\therefore\quad \overline{AB}=\frac{2\sqrt{1+m^2}}{|a+2hm+bm^2|}\times\sqrt{(g^2-ac)+2(gf-ch)m+(f^2-bc)m^2}$$

となる。

(注)　見かけのめんどうさにもかかわらず，わりあいカンタンでした。ともあれ，こうしていくつかやってみるとわかるように，x座標を α，β と与えたとき，y座標は交点が直線上にあることから求める，これがコツです。

ちょっと考えると，交点なのですから，どちらを使おうともおなじではないか，という気がするのですが，そこには天地ショウジョウの差があるのです。

◯ 2次曲線と定点通過

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ 2次曲線に関連して定点通過の扱い方をマスターしよう。ひとたび混乱すればシュウシュウがつかなくなるのだ。

◆ $f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$ が定点$(\alpha,\ \beta)$を通るとしますと，kの値にかかわらず

$$f(\alpha,\ \beta)+kg(\alpha,\ \beta)=0 \cdots\cdots(*)$$

が成り立つハズです。いいかえれば$(*)$はkについての恒等式です。そのための条件は

$$\boldsymbol{f(\alpha,\ \beta)=0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{g(\alpha,\ \beta)=0} \cdots\cdots(**)$$

です。いいかえれば，連立方程式$(**)$の実数解が定点を与えるのです。では，さっそくながら：——

＊　＊　＊

◆ まず放物線からやってみよう。

練習 1. $y^2=4px$ の頂点Oを通る直交2弦を OP，OQ とするとき，PQ は定点を通ることを示せ。

ヒント　点P，Qの座標を

$$\mathrm{P}(pt^2,\ 2pt),\ \mathrm{Q}(ps^2,\ 2ps)$$

とすれば

$$\mathrm{OP}\ の傾き=\frac{2pt}{pt^2}=\frac{2}{t}$$

$$\mathrm{OQ}\ の傾き=\frac{2ps}{ps^2}=\frac{2}{s}$$

$\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ であるから

$$\frac{2}{t}\times\frac{2}{s}=-1$$

$$\therefore\quad ts=-4 \qquad \cdots\cdots①$$

次に，P，Qを通る直線の方程式は

$$y-2pt=\frac{2pt-2ps}{pt^2-ps^2}(x-pt^2)$$

$$\therefore\quad y-2pt=\frac{2}{t+s}(x-pt^2)$$

$$\therefore\quad 2x-(t+s)y+2pts=0$$

サテ，ドウスルカ，オーソドックスニハ，①ヨリ $s=-\dfrac{4}{t}$，コレヲ代入スルト

$$2x-\left(t-\frac{4}{t}\right)y-8p=0$$

$t-\dfrac{4}{t}=k$ とおくと

$$2x-ky-8p=0$$

kのついたのとつかないのとに分けて

$$(2x-8p)-ky=0$$

そこで

$$2x-8p=0\ かつ\ y=0$$

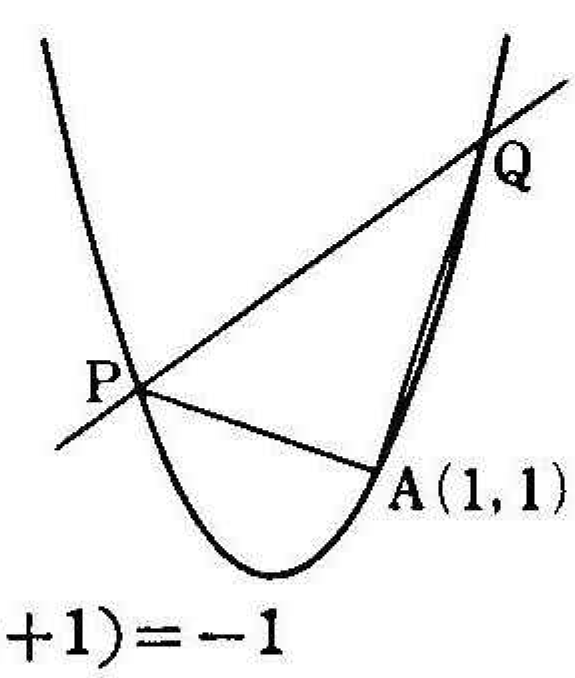
から定点$(4p,\ 0)$を通ることがわかった。

しかし，実際上はここまでやらないでも，$ts=-4$ より

$$2x-\left(t-\frac{4}{t}\right)y-8p=0$$

これはtの値にかかわらず定点$(4p,\ 0)$を通る，といえばいいでしょう。ではもうひとつ。

練習 2. $y=x^2$ 上の定点 A(1, 1) から直交2弦 AP，AQ を引けば PQ は定点を通ることを示せ。



解　$\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ とすると $\mathrm{AP}\perp\mathrm{AQ}$ から

$$\frac{t^2-1}{t-1}\cdot\frac{s^2-1}{s-1}=-1$$

$$\therefore\quad (t+1)(s+1)=-1$$

$$\therefore\quad ts+t+s+2=0 \quad \cdots\cdots①$$

また PQ の方程式は

$$y-t^2=\frac{t^2-s^2}{t-s}(x-t)$$

$$\therefore\quad y-t^2=(t+s)(x-t)$$

$$\therefore\quad (t+s)x-y-st=0 \quad \cdots\cdots②$$

①より $st=-(t+s)-2$，これを②に代入すると

$$(t+s)x-y+(t+s)+2=0$$

$$\therefore\quad (t+s)(x+1)-(y-2)=0$$

ゆえに定点

$$(-1,\ 2)$$

を通る。

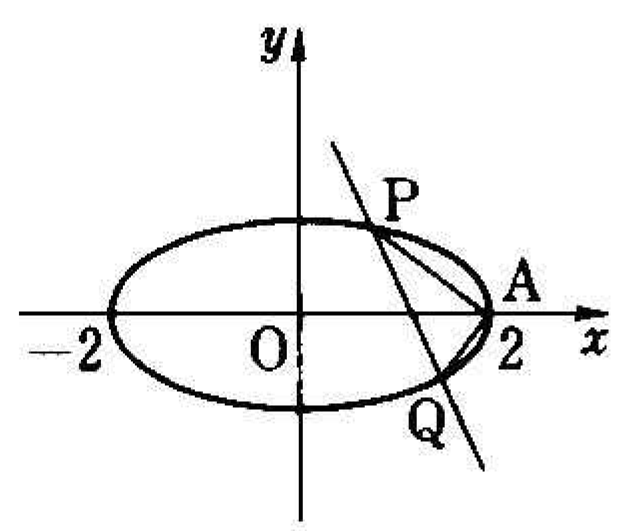
Q.E.D.

*　*　*

◆ 次にだ円に行くとしよう。

練習 3. だ円 $x^2+4y^2=4$ 上の定点A(2, 0) から直交2弦 AP, AQ を引けば PQ は定点を通ることを示せ。

ヒント 直線 AP, AQ の傾きをそれぞれm, $-\dfrac{1}{m}$ としますと,



AP の方程式は

$$y-0=m(x-2)\quad \cdots\cdots①$$

これをだ円の方程式に代入して

$$x^2+4m^2(x-2)^2-4=0$$

$$\therefore\quad (1+4m^2)x^2-16m^2x+(16m^2-4)=0$$

$$\therefore\quad (x-2)\{(1+4m^2)x-(8m^2-2)\}=0$$

ゆえにPのx座標は

$$x=\frac{8m^2-2}{1+4m^2}\ (x\fallingdotseq 2)$$

Pのy座標を求めるには①から求めるのがよいでしょう。つまり

$$y=\frac{-4m}{1+4m^2}$$

したがって

$$\mathrm{P}\left(\frac{8m^2-2}{1+4m^2},\ \frac{-4m}{1+4m^2}\right)$$

さて，次にQだ。しかし，これはムリに求めることもない。上の結果でmの代りに$-\dfrac{1}{m}$を入れればよいのだから，すぐ求められて,

$$\mathrm{Q}\left(\frac{8-2m^2}{m^2+4},\ \frac{4m}{m^2+4}\right)$$

となります。

そこで直線 PQ の方程式は

$$y-\frac{-4m}{1+4m^2}=\frac{\dfrac{-4m}{1+4m^2}-\dfrac{4m}{m^2+4}}{\dfrac{8m^2-2}{1+4m^2}-\dfrac{8-2m^2}{m^2+4}}\left(x-\frac{8m^2-2}{1+4m^2}\right)$$

となります。ここで $y=0$ とおいて，x軸との交点を求めてみますと

$$x=\frac{6}{5}$$

となります。つまり，x軸との交点が定点

$$\left(\frac{6}{5},\ 0\right)$$

なのです。

チョット待ッテ下サイヨ，ドウンテx軸トノ交点ヲ求メタノデス！　とキミはどなるかも知れません。それは図形の対称性から考えて定点がx軸上にあることは明らかだからです。

*　*　*

◆ では，もうひとつ。双曲線から，だ。

練習 4. $C:xy=1$ 上の点 A(1, 1) を通り直交2直線を引きCと交わる点をP，Qとするとき，PQ は定点を通るか。

ヒント AP の傾きをmとしますと，AP の方程式は

$$y=mx+(1-m)$$

で与えられます。これとCとの交点は

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{m},\ -m\right)$$

となります。まったく同様にして

$$\mathrm{Q}\left(m,\ \frac{1}{m}\right)$$

したがって PQ の方程式は

$$y=x+\left(\frac{1}{m}-m\right)$$

さあ，キミ，どうだ。実は平行直線がでてくる。定点を通るハズがない。

かくして，PQ が定点を通らないことがわかった。

*　*　*

○ 2次曲線に関する最大・最小問題では

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆2次曲線に関係した最大・最小問題は計算だおれになること多し。これこそ，2次曲線の演習場です。

◆　2次曲線に関係した最大・最小の問題を当ってみましょう。相加平均と相乗平均の関係や，コーシー・シュワルツの不等式など数Iのテクニックが活用されることが多いものです。

5/23

練習 1. だ円 $x^2+4y^2=4$ の接線が両軸と囲む部分の面積の最小値を求めよ。

ヒント　だ円 $x^2+4y^2=4$ 上の点 $T(\alpha,\ \beta)$ における接線は

$$\alpha x+4\beta y=4$$

で与えられます。したがって，x，y 軸との交点は

$$A\left(\frac{4}{\alpha},\ 0\right),\ B\left(0,\ \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{2}{|\alpha\beta|}\cdots\cdots①$$

ところが α，β はだ円上の点ですから

$$\alpha^2+4\beta^2=4\qquad\cdots\cdots②$$

だから②の条件の下で①の最小値を求めればよいのでしょう。α，β は正にも負にもなりますが α^2，$4\beta^2$ は正ですから，この相加・相乗平均をとって

$$\frac{\alpha^2+4\beta^2}{2}\geqq\sqrt{\alpha^2\cdot4\beta^2}$$

$$\therefore\quad 2\geqq2|\alpha\beta|$$

$$\therefore\quad |\alpha\beta|\leqq1\qquad\cdots\cdots③$$

①，③より

$$\triangle ABC\geqq2$$

ゆえに求める面積の最小値は2である。そして，そのとき

$$\alpha^2=4\beta^2=2$$

ゆえに接点は $\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となります。ただし，複号はあらゆる組合せをとって，4通りになります。

5/い

練習 2. だ円 $x^2+4y^2=4$ の接線が両軸によって切りとられる線分の長さの最小値を求めよ。

ヒント　だ円 $x^2+4y^2=4$ 上の点 $T(\alpha,\ \beta)$ における接線は

$$\alpha x+4\beta y=4$$

で与えられますから，x，y 軸との交点は左とおなじく

$$A\left(\frac{4}{\alpha},\ 0\right),\ B\left(0,\ \frac{1}{\beta}\right)$$

となります。そこで

$$\overline{AB}^2=\left(\frac{4}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\qquad\cdots\cdots①$$

ところが，これも左とおなじく

$$\alpha^2+4\beta^2=4\qquad\cdots\cdots②$$

という関係があるのですから，コーシー・シュワルツの不等式を使いますと

$$\{\alpha^2+(2\beta)^2\}\cdot\left\{\left(\frac{4}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right\}\geqq(4+2)^2$$

$$\therefore\quad 4\overline{AB}^2\geqq6^2$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2\geqq9$$

$$\therefore\quad \overline{AB}\geqq3$$

したがって $\overline{AB}$ の最小値は3です。そして，そのとき，つまり等号が成り立つのは

$$\frac{\alpha}{\frac{4}{\alpha}}=\frac{2\beta}{\frac{1}{\beta}}\quad のときですから$$

$$\alpha^2=8\beta^2\qquad\cdots\cdots③$$

②，③より接点は $\left(\pm2\sqrt{\dfrac{2}{3}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ です。

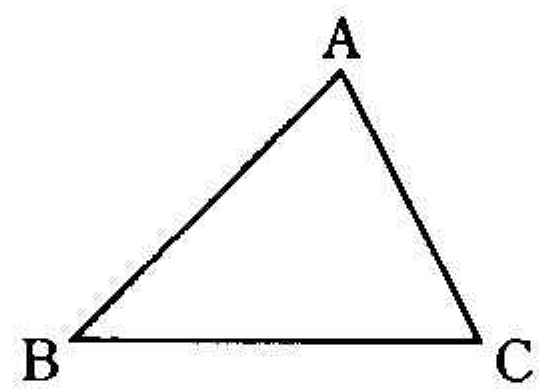
複号はあらゆる組合せをとりますから，結局4組あります。

*　*　*

◆ だ円の性質を使うと簡単に求められる最大・最小問題もあります。例えば：——

練習 3. $\triangle ABC$ において $\overline{BC}=$一定 a，$\overline{AB}+\overline{AC}=$一定 l のとき，$\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ。

(ヒント) $\overline{AB}+\overline{AC}=l$ ですから，Aの軌跡はB，Cを焦点とし，長軸の長さが l のだ円です。



一方 $\triangle ABC$ の面積は，底辺が一定なのですから，Aから，$\overline{BC}$ に下ろした垂線の長さが最大のとき，最大になるハズ。

つまり，Aがだ円の短軸の端に来たときに最大となります。そして，その高さはだ円の性質から

$$\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{2}$$

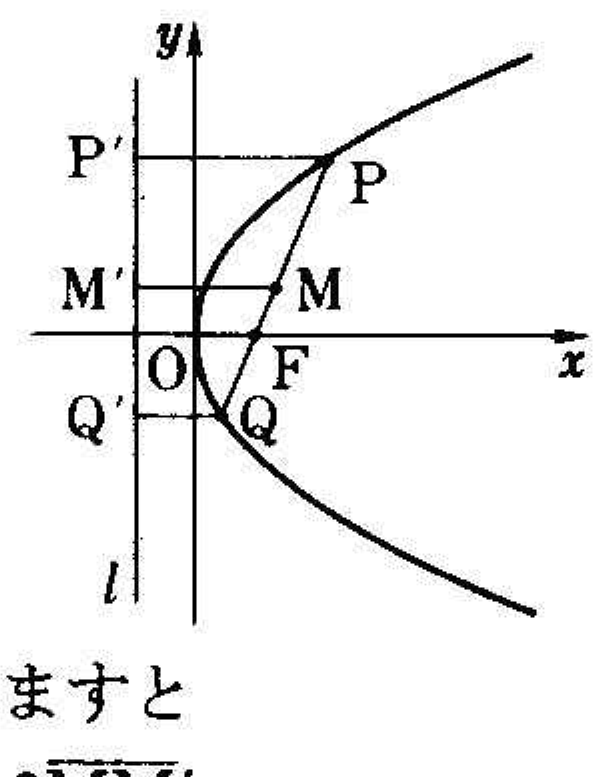
したがって面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{2}=\frac{1}{4}a\sqrt{l^2-a^2}$$

で与えられます。

練習 4. 放物線 $y^2=4x$ の焦点Fを通る弦 PQ の長さの最小値を求めよ。

(ヒント) 右の図で l を放物線の準線としますと



$$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{FQ}$$
$$=\overline{PP'}+\overline{QQ'}$$

いま $\overline{PQ}$ の中点を M とし，Mから l に下ろした垂線の足を M′ としますと

$$\overline{PP'}+\overline{QQ'}=2\overline{MM'}$$
$$\therefore\quad \overline{PQ}=2\overline{MM'}$$

ところが $\overline{MM'}$ が最小になるのはMがFに重なるとき，いいかえると，PQ$\perp x$軸のときですから，$\overline{MM'}$の最小値は $2\overline{OF}=2$ となります。つまり $\overline{PQ}$ の最小値は4です。

ところで，これを計算でやればどうなるでしょうか。

PQ の傾きをmとしますと

$$\overline{PQ}=\frac{4(m^2+1)}{m^2}$$
$$=4\left(1+\frac{1}{m^2}\right)>4$$

$\overline{PQ}\perp x$軸のときmは存在しませんが，$\overline{PQ}$の長さは明らかに4．

$$\therefore\quad \overline{PQ}\geqq 4$$

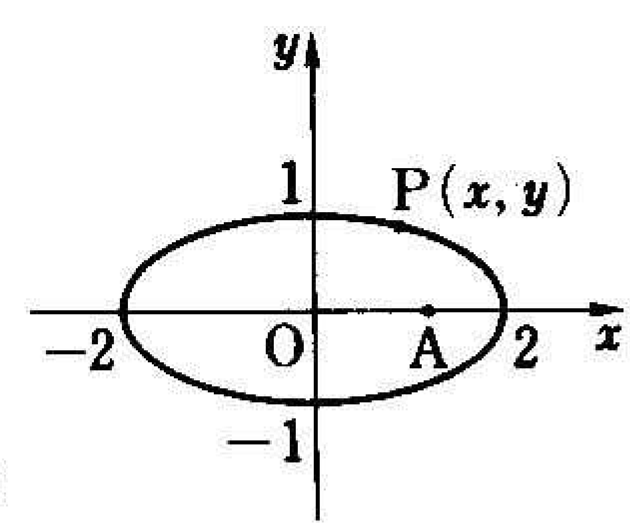
となるのです。（うっかり，最小値なし，などといわないようご用心）

*　*　*

◆ 最後にもうひとつ：

練習 5. だ円 $x^2+4y^2=4$ 上の動点Pと定点 A$(a,\ 0)$ との距離の最小値を求めよ。

(ヒント)



$$\overline{AP}^2=(x-a)^2+y^2$$
$$=x^2-2ax+a^2+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}x^2-2ax+(a^2+1)$$
$$=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+\left(1-\frac{a^2}{3}\right)$$

ところが $-2\leqq x\leqq 2$ であるから

$-2\leqq\frac{4}{3}a\leqq 2$ したがって $-\frac{3}{2}\leqq a\leqq\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{1-\frac{a^2}{3}}$ となりますが，$2<\frac{4}{3}|a|$ したがって $|a|>\frac{3}{2}$ のときには最小値は $|a-2|$ となります。しかし，これらはだ円の姿を借りてはいるものの本質的には数Iの条件付最大・最小問題に他ならないのです。

*　*　*

◆ ここで扱った問題は大なり，小なり，難問のうちです。しかし，その本質はすべて数Iにあることがおわかりでしょう。それなのに数Iはマアマアだが，代幾は不得意で，などという人の如何に多きことか!!

2次曲線と領域

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆2次曲線の関係した領域の問題もいろいろあります。ここで，ひとつ，アタマをまとめておくとしようではないか。

◆ $y>x^2$ を満足する領域を求めるには，まず境界線をかく。それは他でもなく，$y=x^2$ です。では $y=x^2$ を境としてどっち側なのか，それをしらべるには例えば点 (0, 1) を入れてみるのです。そうすると

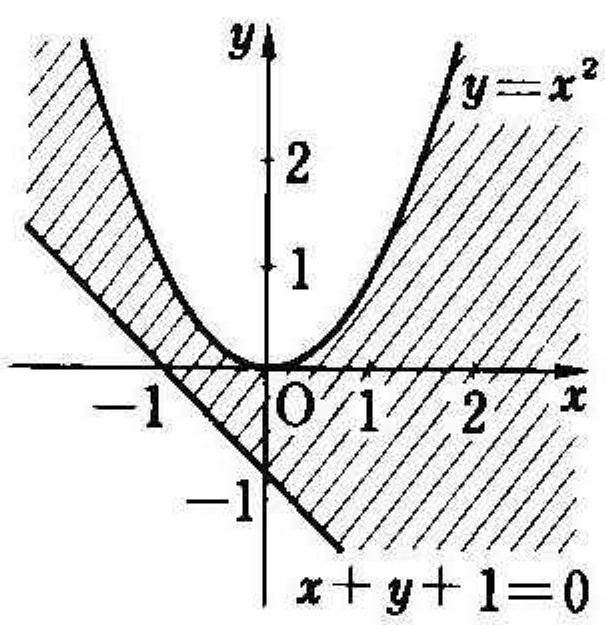
$$1>0^2$$

でたしかに成り立つ。つまり $y=x^2$ を境として点 (0, 1) のある側なのです。

さあ，わかったら次をやってみませんか。

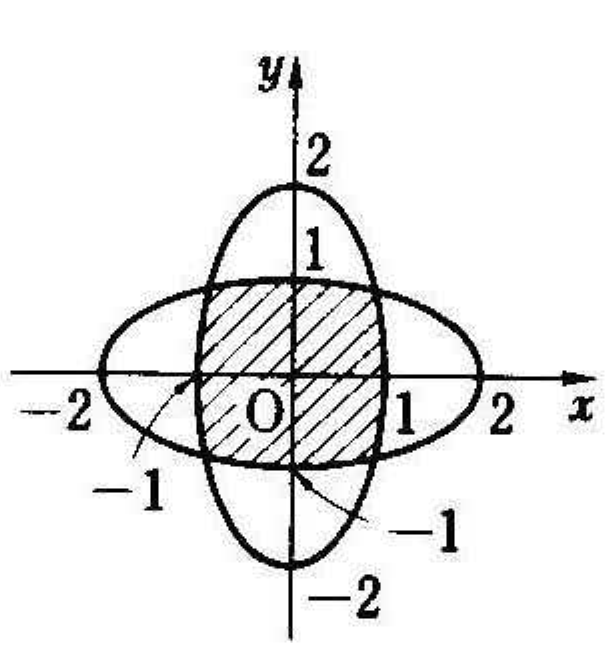
練習 1. $y<x^2$ かつ $y>-x-1$ を満足する領域を求めよ。

ヒント $y<x^2$ を満足する範囲は $y=x^2$ の下側で，$y>-x-1$ を満足する領域は $y=-x-1$ の上側ですから，右の図の斜線を引いた部分になります。境界線は含まない。



練習 2. $\{x^2+4y^2\leqq 4$ かつ $4x^2+y^2\leqq 4\}$ の領域を求めよ。

ヒント いうまでもなく，右の図の斜線を引いた部分です。もちろん境界線上の点を含みます。



どうです。わかったでしょう。そこで，やや，めんどうな問題にいくとしましょう。

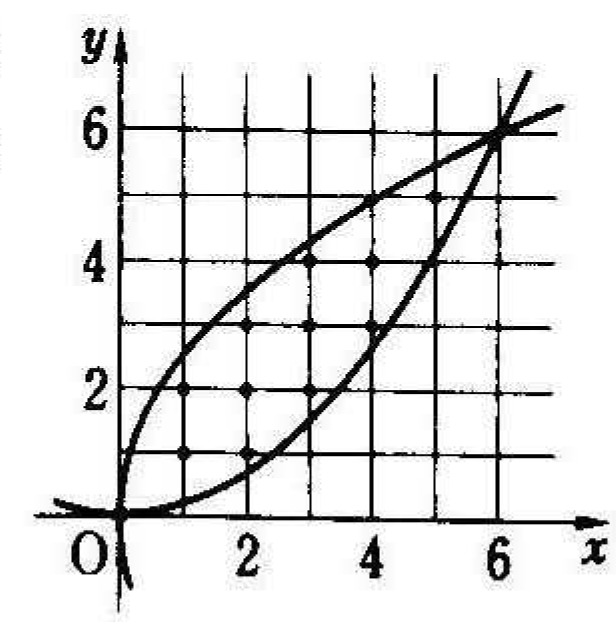
* * *

◆ では，これを：——

練習 3. $6y\geqq x^2$, $6x\geqq y^2$ を満足する整数解を求めよ。

ヒント 2つの不等式を満足する領域を求めてみましょう。

2つの不等式を満足する領域は右の図に示すように放物線



$$y=\frac{x^2}{6}$$

と
$$x=\frac{y^2}{6}$$

の囲む部分です。そして，その中にある格子点（座標が整数である点）をしらべてみると

$(x, y)=(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1)$
$(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)$
$(3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)$
$(6, 6)$

が求められます。

* * *

◆ では，やや，めんどうな問題をやってみませんか。

練習 4. $x+y<\sqrt{x^2+y^2-1}$ を満足する領域を求めよ。

ヒント 根号の中は負になれませんから

$$x^2+y^2\geqq 1 \qquad \cdots\cdots①$$

がまず必要です。

次に $x+y<0$ ならもちろん成り立ちます。

次に $x+y\geqq 0$ なら，

$$x+y<\sqrt{x^2+y^2-1}$$

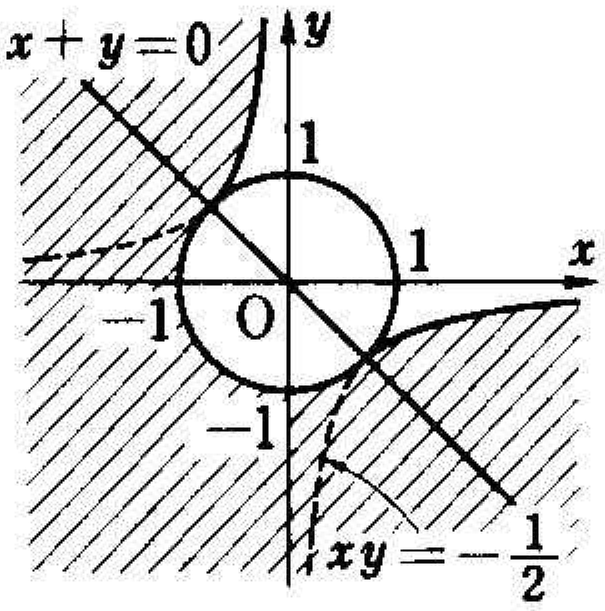
の両辺を平方して

$$x^2+2xy+y^2<x^2+y^2-1$$
$$\therefore\ 2xy<-1$$

これは双曲線 $xy=-\frac{1}{2}$ を境界線とする部分です。かくて，次のような結果が得られ

ます。

すなわち，右の図で斜線を引いた部分です。ただし，境界線上の点を含みません。これをちょっと変えると次のようにスゴクめんどうになります。



5/24

練習 5. $x+y \leqq \sqrt{1-x^2-y^2}$ を満足する領域を求めよ。

ヒント　まず，何はともあれ

$$x^2+y^2 \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

が必要です。その上で，

$$x+y<0 \quad \cdots\cdots ②$$

はもちろん満足します。

$x+y \geqq 0$ のときには

$$x+y \leqq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

の両辺を2乗して

$$x^2+2xy+y^2 \leqq 1-x^2-y^2$$

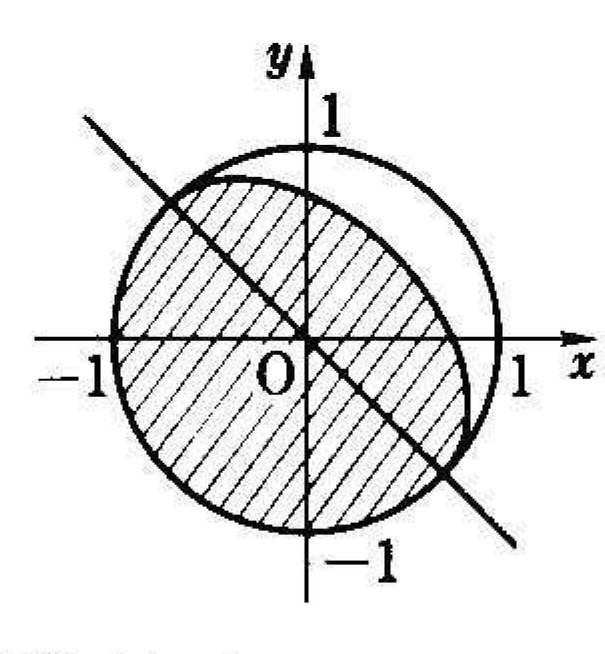
$$\therefore \quad x^2+xy+y^2 \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

これは困ったぞ。しかし，

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$$

のグラフはかけなければなりません。座標軸を45°回転すればだ円であることがわかります。しかし，ここででは深入りしないことにしましょう。結果は右のようになります。

境界線上の点を含みます。これができればまず，2次曲線の領域に関するかぎり，卒業です。



では，次には，総合的な問題をやってみませんか。

*　*　*

5/25

練習 6. $y=x^2$ と $y=\frac{1}{4}x^2-1$ の上にそれぞれ点P，Qをとるとき，線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の中点の存在範囲を求めよ。

ヒント　$\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}\left(s,\ \frac{s^2}{4}-1\right)$ としましょう。また，$\overline{\mathrm{PQ}}$ の中点を $\mathrm{M}(X,\ Y)$ としますと

$$X=\frac{t+s}{2}\cdots\cdots ①,\quad Y=\frac{t^2+\frac{s^2}{4}-1}{2}\cdots\cdots ②$$

となります。さあ，キミ，欲しいのはなんです？　いうまでもなく，X，Y の関係なんですよ。ジャマモノは t と s だね。では t と s を消去すればいいにちがいない。

①より　$s=2X-t \quad \cdots\cdots ①'$

また②より

$$8Y=4t^2+s^2-4 \quad \cdots\cdots ②'$$

①′を②′に代入して

$$8Y=4t^2+(2X-t)^2-4$$

$$\therefore \quad 5t^2-4Xt+(4X^2-8Y-4)=0 \quad \cdots ③$$

さあ，どうする。

それは t の実数条件を使うのです。つまり，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2X)^2-5(4X^2-8Y-4) \geqq 0$$

$$\therefore \quad Y \geqq \frac{2}{5}X^2-\frac{1}{2}$$

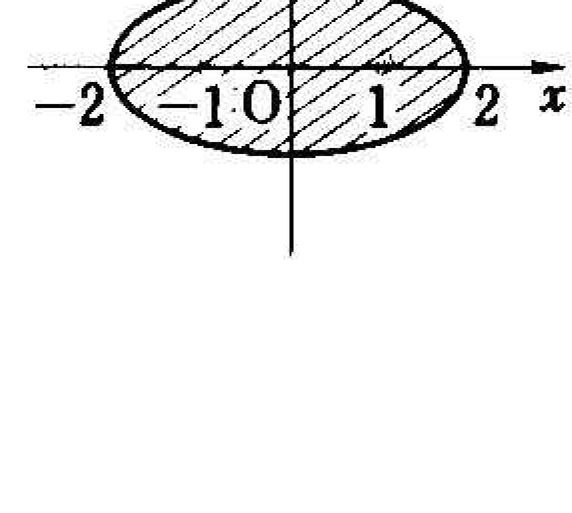
ゆえに，点Mは領域 $y \geqq \frac{2}{5}x^2-\frac{1}{2}$ にあることがわかった!!

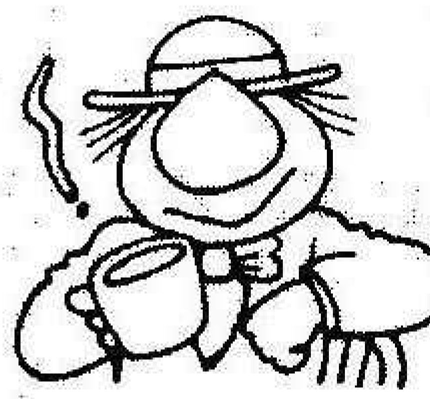
*　*　*

◆　2次関数の領域とてとくに変ることはありませんが，とかくめんどうな問題と道づれになることの多いのは致し方のないところです。では最後にこれをやってみませんか。

練習 7. 2定点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ が与えられているとき，$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}<4$ を満足する領域を求めよ。

ヒント　もはやいうまでもないでしょう。答えはA，Bを焦点とし長軸の長さ4，短軸の長さ$\boxed{}$のだ円の内部なのです。





2次曲線の定義と蛇足

◆2次曲線はもともと円すい曲線といったもの，それは円すいを平面で切った切り口として表れたからです。しかし，こんな見方もある!!

◆　定点Fとこれを通らない直線 l が与えられているとき，動点Pから l へ下ろした垂線を PH とし，

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=e \quad (\text{正の定数})$$

のとき，点Pの軌跡は

$e=1$ のとき放物線

$e<1$ のときだ円

$e>1$ のとき双曲線

となるのです。そして，

l を準線，Fを焦点，e を離心率

というのです。では，これを：——

■練習 1. 焦点 $\mathrm{F}(-3,\ 0)$，準線 $l：x=3$，離心率 e の2次曲線の方程式を求めよ。

ヒント　$\mathrm{P}(x,\ y)$ として

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$\overline{\mathrm{PH}}=|x-3|$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}{|x-3|}=e$$

$$\therefore\quad x^2+6x+9+y^2=e^2(x^2-6x+9)$$

$$\therefore\quad (1-e^2)x^2+y^2+6(1+e^2)x+9(1-e^2)=0$$

ところで $e=1$ としてみますと

$$y^2+12x=0$$

$$\therefore\quad y^2=-12x$$

いうまでもなく，放物線です。

次に $e=\sqrt{2}$ としてみますと

$$-x^2+y^2+18x-9=0$$

$$(x-9)^2-y^2=72$$

これは中心 $(9,\ 0)$ の双曲線です。

$e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ としてみますと

$$x^2+2y^2+18x+9=0$$

つまり

$$(x+9)^2+2y^2=72$$

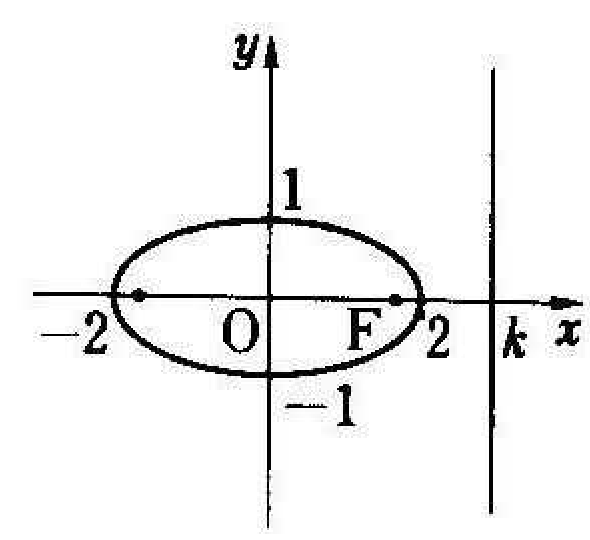
これは中心 $(-9,\ 0)$ のだ円です。

*　　*　　*

◆　このようにして，準線をもつのは放物線だけではなかったのです。しかも，だ円や双曲線は1つの曲線について2組の準線と焦点をもつのです。では，これを：——

■練習 2. だ円 $x^2+4y^2=4$ の焦点と準線を求めよ。

ヒント　右の図で焦点Fは $(\sqrt{3},\ 0)$ です。動点Pが $(-2,\ 0)$ に来たときを考えてみますと



$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{3}-(-2)$$

$$=2+\sqrt{3}$$

Pから準線に下ろした垂線の長さ

$$\overline{\mathrm{PH}}=k-(-2)=k+2$$

$$\therefore\quad e=\frac{2+\sqrt{3}}{k+2}$$

次にPが $(2,\ 0)$ に来たときを考えて同様にして

$$e=\frac{2-\sqrt{3}}{k-2}$$

上の2式から

$$\frac{2+\sqrt{3}}{k+2}=\frac{2-\sqrt{3}}{k-2}\qquad \therefore\quad k=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

つまり準線は　$x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ で離心率は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だったのです。もはやいうまでもなし。もう1組は $\mathrm{F}(-\sqrt{3},\ 0)$ と $x=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ なのです。