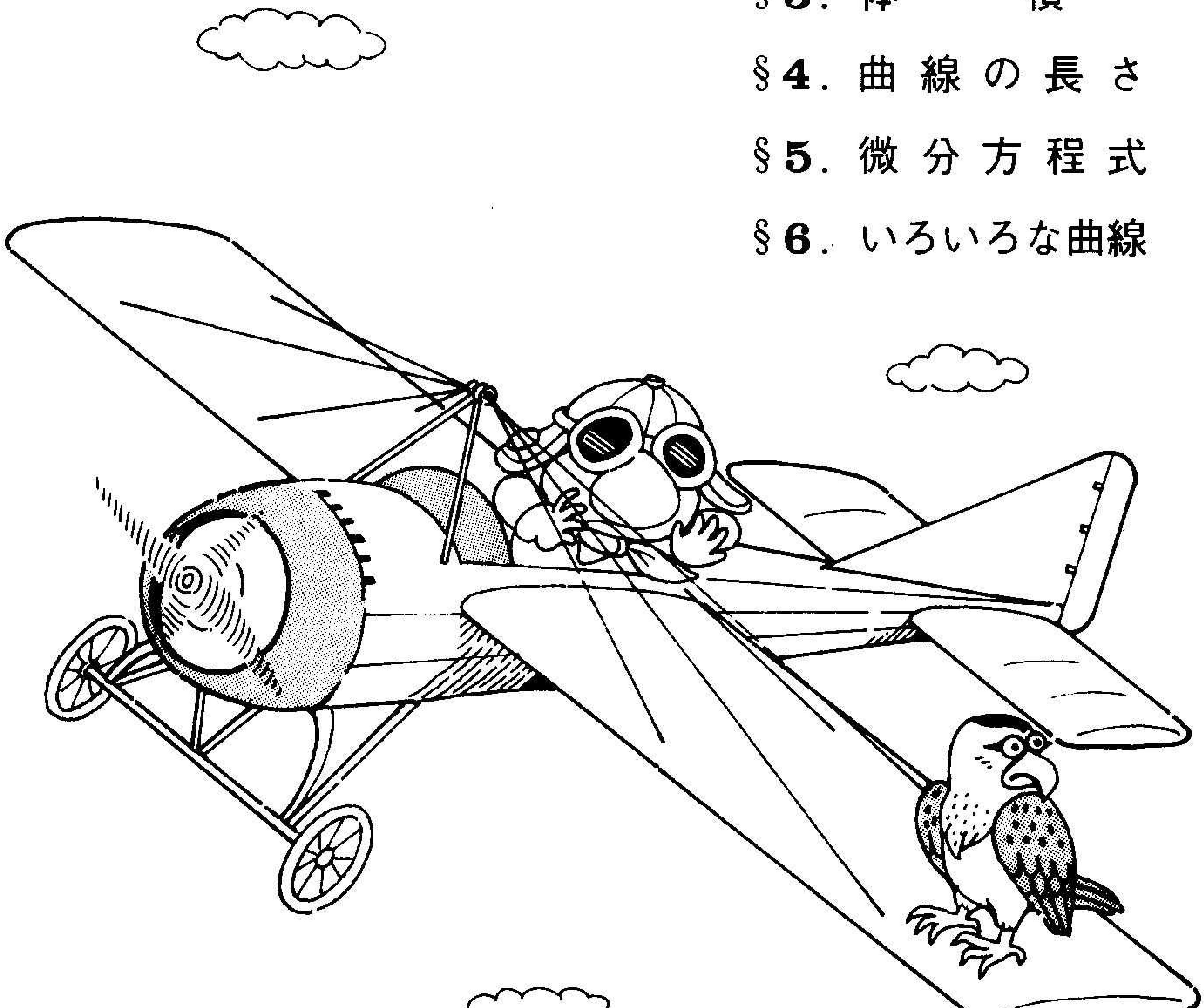
第 5 章

積分法の応用



◑区分求積法とは何か

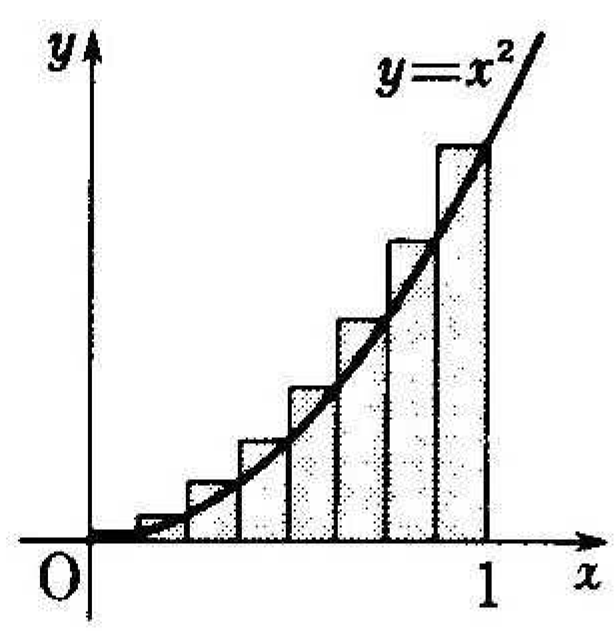
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆区分求積法の考えはギリシアにもあったし，古代中国にもあったらしい。しかし，はじめて系統だてたのはパスカルであった。

◆ **区分求積法** の問題は，ふつう次のような形で出題されます。それは：——

■練習 1. 定義にしたがって $\int_0^1 x^2dx$ を求めよ。　（広島大）

（ヒント） 右の図において，0〜1の間を n 等分してあるとすると，区分する点の座標はそれぞれ



$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots$$
$$\cdots,\ \frac{n-1}{n}$$

となります。したがって，長方形の高さは左のほうから，それぞれ

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

となります。

ゆえに，長方形の面積の和 S_n は

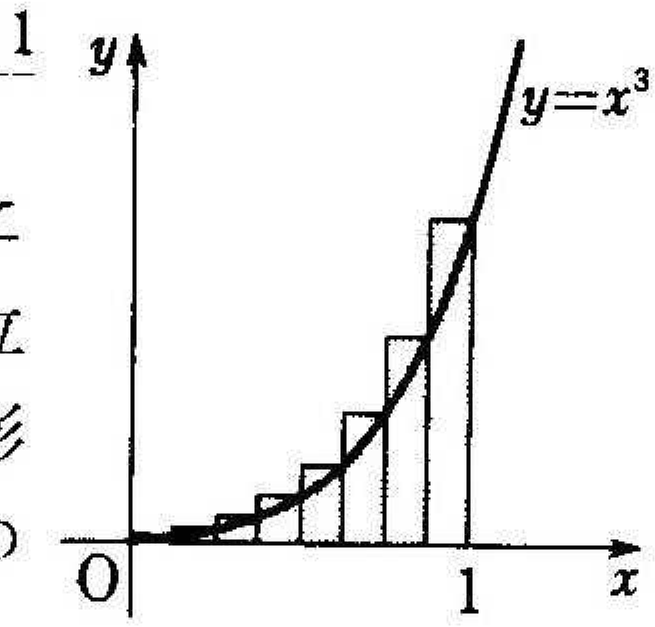
$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$\therefore\ \int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

答 $\frac{1}{3}$

■練習 2. 定義にしたがって $\int_0^1 x^3dx$ を求めよ。　（広島大）

（解） 右下の図に示すように，0〜1の間を n 等分すると，各分点の座標は左のほうから

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots\cdots,\ \frac{n-1}{n}$$



であるから，各分点において x 軸に垂線を立て，図のように長方形を作ると，その面積の和 S_n は

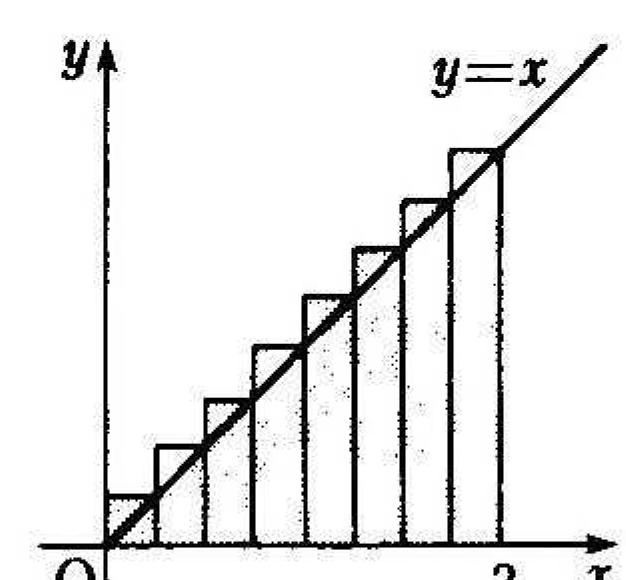
$$S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)$$
$$=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$\therefore\ \int_0^1 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 区分求積法の意味はわかったでしょう。そこで，次に少しめんどうなものをやってみましょう。

■練習 3. 定義にしたがって $\int_0^3 xdx$ を求めよ。

（ヒント） 0〜3の区間を n 等分するもよし，$3n$ 等分するもよし，次には n 等分してみよう。



$$\int_0^3 xdx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\left(\frac{3}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}\right)\cdot2+\left(\frac{3}{n}\right)\cdot3\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\left(\frac{3}{n}\right)n\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^2(1+2+\cdots\cdots+n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{9}{2}$$

練習 4. $\int_a^b x^2dx$ を区分求積法によって求めよ。ただし $a<b$ とする。

(解) $\int_a^b x^2dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{\left(a+\frac{h}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2h}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(a+\frac{nh}{n}\right)^2\right\}$$

ここに $h=b-a$ である。したがって

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{kh}{n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a^2+\frac{2ah}{n}k+\frac{h^2}{n^2}k^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{a^2n+\frac{2ah}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{h^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}h\left\{a^2+ah\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{h^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\left(a^2+ah+\frac{h^2}{3}\right)h$$

$$=\left\{a^2+a(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^2\right\}(b-a)$$

$$=\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)(b-a)$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

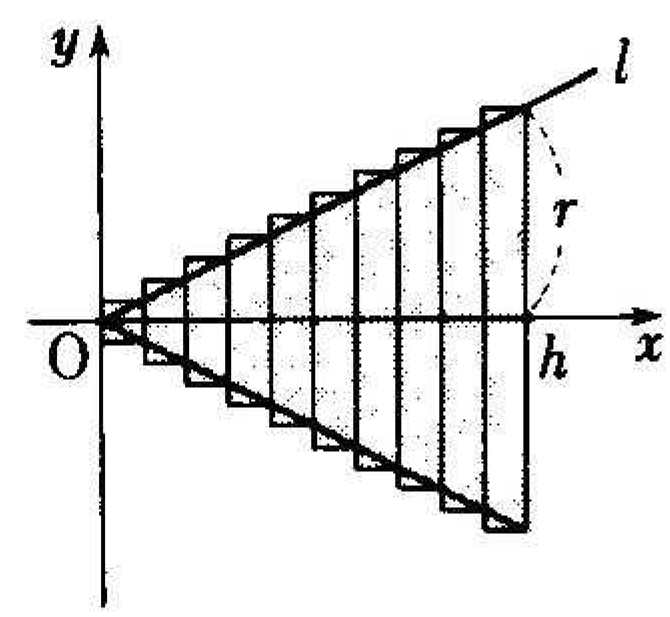
答 $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$

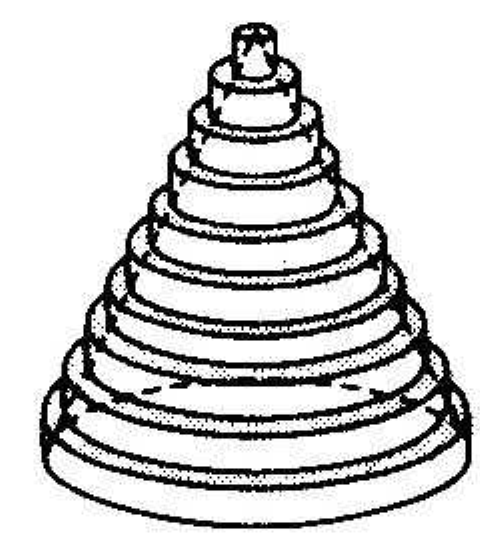
*　　*　　*

◆ 次には，区分求積法で具体的に面積や体積を求める問題を扱ってみませんか。

練習 5. 底面の半径 r，高さ h の直円すいを高さを n 等分するように，底面に平行な平面で切って，うすい円柱の集まりと考える。この円柱の和の極限と考えて，この直円すいの体積を求めよ。　（福岡学芸大）

(ヒント) 右上のような円盤の体積の和 V を求めることがまず問題ですが，軸を x 軸にとり，頂点を原点にとってみると考えやすくなるでしょう。





すなわち，上の図で，原点を通る直線の方程式は

$$y=\frac{r}{h}\cdot x$$

ですから，円盤の体積の和 V は

$$V=\frac{h}{n}\left\{\pi\left(\frac{r}{h}\cdot\frac{h}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{r}{h}\cdot\frac{2h}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\pi\left(\frac{r}{h}\cdot\frac{nh}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{h}{n}\cdot\pi r^2\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^2}$$

$$=h\pi r^2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}\pi hr^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

ゆえに，求める体積は

$$\lim_{n\to\infty}V$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi hr^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi hr^2$$

答 $\frac{1}{3}\pi r^2h$

*　　*　　*

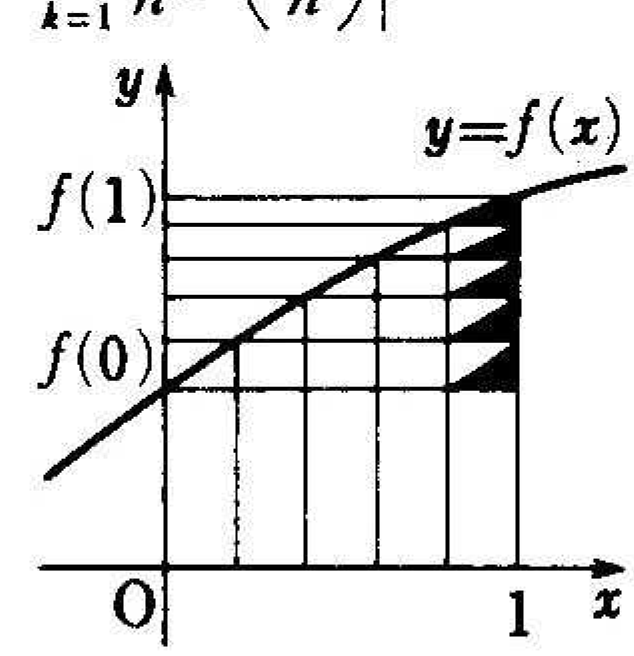
◆ 区分求積法の考え方を適用すると，めんどうな問題が直観的に扱えることが多いものです。例えば，

$f(x)$ が連続な関数で積分できるとき

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\int_0^1 f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}|f(1)-f(0)|$$

であることがわかるでしょう。



右図で考えてみてください。

① 数列の和と積分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆無限数列の和を求めるにも積分法はしばしば有用ですが，ここでは，有限数列の和に対する積分法の応用が目的です。

◆ 数列の和の極限を求めるのに定積分（区分求積法）は有効です。（これについては（☞ p.212）を参照）

ここでは数列の和の入った不等式に定積分を使うことを考えてみましょう。例えば，こんな問題です。

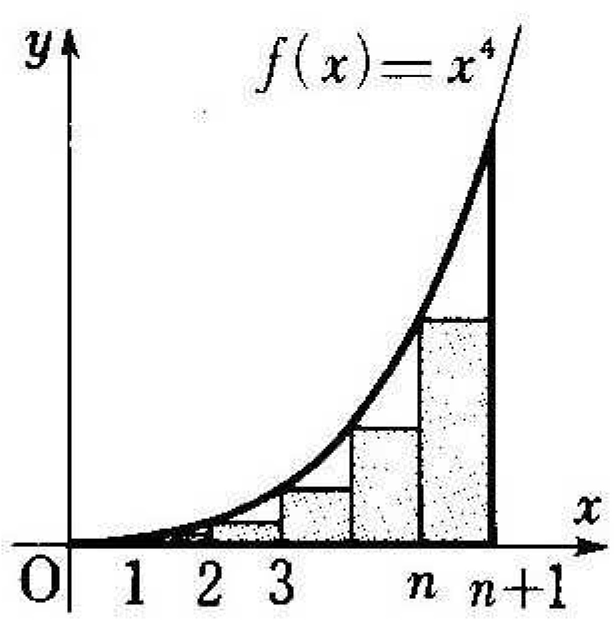
練習 1. $1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4<\dfrac{1}{5}(n+1)^5$

を証明せよ。

ヒント　$f(x)=x^4$ のグラフをかき，右の図に示すように

$x=1, 2, \cdots\cdots, n, n+1$

で垂線を立て，長方形を作ると，その面積は左のほうから



$$1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ \cdots\cdots,\ n^4$$

で，その和は，太い実線で囲まれた面積より小です。

$$\therefore\quad 1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4<\int_0^{n+1}x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{n+1}$$

$$\therefore\quad 1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4<\frac{(n+1)^5}{5}$$

Q. E. D.

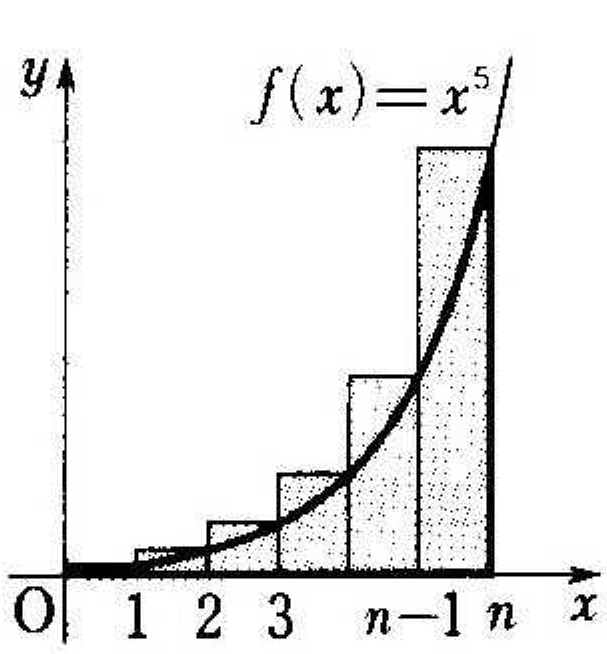
練習 2. $\dfrac{n^6}{6}<1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5$

を証明せよ。

ヒント　$f(x)=x^5$ のグラフをかき，右の図に示すように

$x=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$

で垂線を立て，曲線の外にハミ出すように長方形を作りますと，その面積は左のほうから順に



$$1^5,\ 2^5,\ 3^5,\ \cdots\cdots,\ n^5$$

となり，その和は太い実線が囲んだ面積より大です。

$$\therefore\quad 1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5>\int_0^n x^5dx=\frac{n^6}{6}$$

Q. E. D.

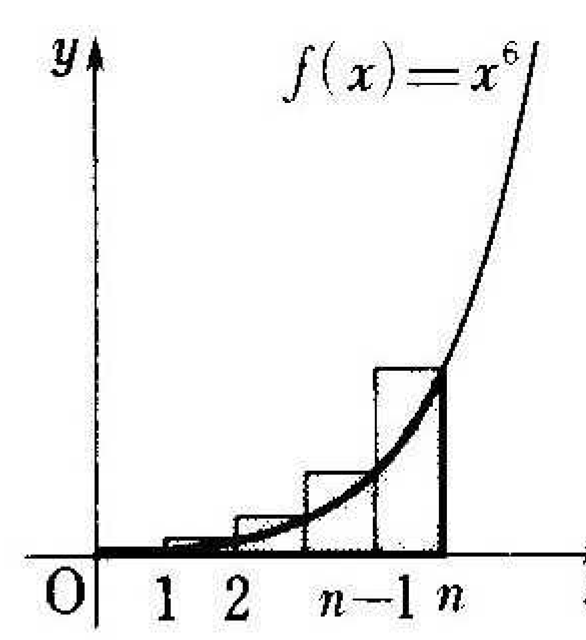
ふつう，上のようなのを2つ組合せて，次のような形で出題されるのです。

練習 3. 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{7}n^7<1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots+n^6<\frac{1}{7}(n+1)^7$$

解　$f(x)=x^6$ のグラフと x 軸および $x=n$ とで囲む面積は，右の図の長方形の面積の和より小である。

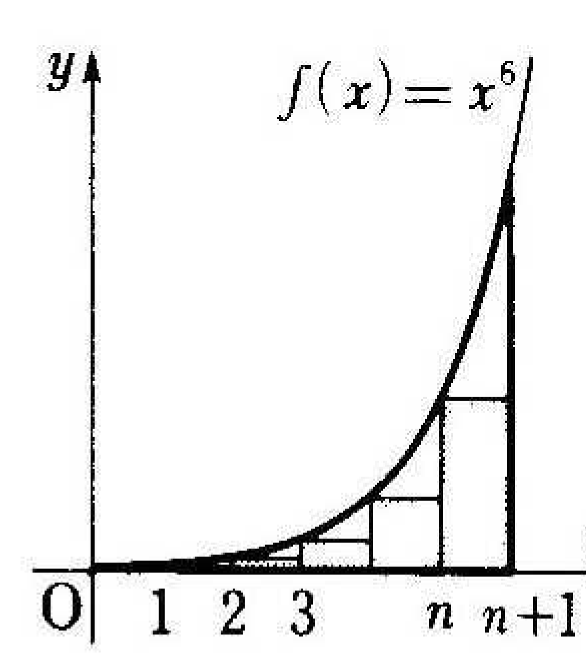
ゆえに



$$\int_0^n x^6dx<1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6$$

$$\therefore\quad \frac{1}{7}n^7<1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6\ \cdots\cdots(1)$$

次に $f(x)=x^6$ のグラフと x 軸および $x=n+1$ とで囲む面積は，右の図の長方形の面積の和より大である。



$$\therefore\quad 1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6<\int_0^{n+1}x^6dx$$

$$\therefore\quad 1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6<\frac{1}{7}(n+1)^7$$

$\cdots\cdots(2)$

①, ②をまとめて

$$\frac{1}{7}n^7<1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6<\frac{1}{7}(n+1)^7$$

Q. E. D.

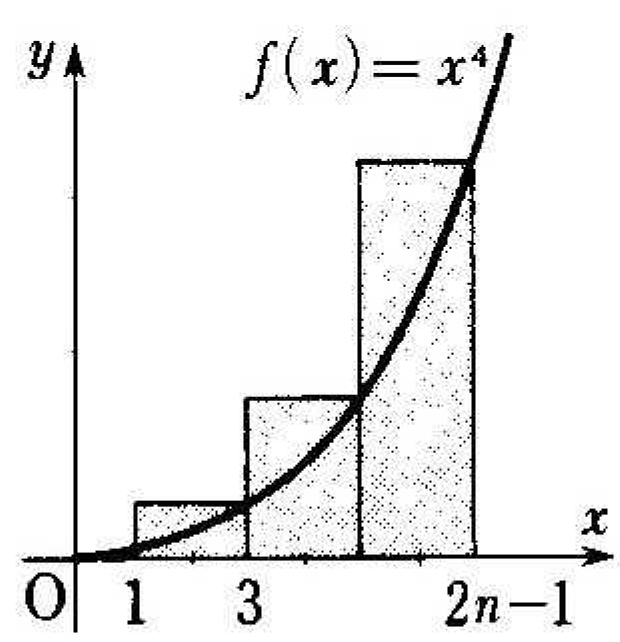
＊　＊　＊

◆ 次には，ややめんどうなものをやってみませんか。

練習 4. 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{10}\{(2n-1)^5+9\}<1^4+3^4+5^4+\cdots\cdots+(2n-1)^4$$

(ヒント) 右の図からわかるように，



$$2\{3^4+5^4+\cdots\cdots+(2n-1)^4\}$$

＝長方形の面積の和

$$>\int_1^{2n-1}x^4dx$$

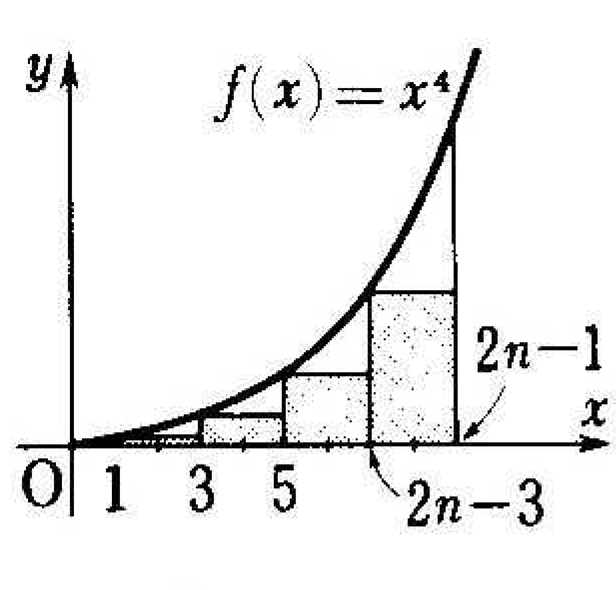
$$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^{2n-1}$$

$$=\frac{1}{5}\{(2n-1)^5-1\}$$

$$\therefore\quad 3^4+5^4+\cdots\cdots+(2n-1)^4>\frac{1}{10}\{(2n-1)^5-1\}$$

$$\therefore\quad 1^4+3^4+\cdots\cdots+(2n-1)^4>\frac{1}{10}\{(2n-1)^5+9\}$$

(注) 右の図から



$$2\{1^4+3^4+\cdots\cdots+(2n-3)^4\}<\int_1^{2n-1}x^4dx=\frac{1}{5}\{(2n-1)^5-1\}$$

$$\therefore\quad 1^4+3^4+\cdots\cdots+(2n-3)^4<\frac{1}{10}\{(2n-1)^5-1\}$$

$$\therefore\quad 1^4+3^4+\cdots\cdots+(2n-3)^4+(2n-1)^4$$

$$<\frac{1}{10}\{(2n-1)^5-1\}+(2n-1)^4$$

$$=\frac{1}{10}\{(2n-1)^5+10(2n-1)^4-1\}\quad\cdots\cdots(*)$$

といった不等式を導くこともできます。もちろん，次のようにしてもよいのです。すなわち，

$$2\{1^4+2^4+\cdots\cdots+(2n-1)^4\}<\int_1^{2n+1}x^4dx=\frac{1}{5}\{(2n+1)^5-1\}$$

から．

$$1^4+2^4+\cdots\cdots+(2n-1)^4<\frac{1}{10}\{(2n+1)^5-1\}$$

が得られます。形はこのほうがいいが，不等式のよさ（この意味わかりますか）からいうと(*)のほうがよいのです。

＊　＊　＊

◆ では，最後にもう 1 つやってみませんか。

練習 5. 閉区間 [0, 1] で連続な関数 $f(x)$ の定積分 $S=\int_0^1 f(x)dx$，和 $A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ および和 $B_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ を考える。

(1) $f(x)$ が単調に増加するならば

$$A_n\geqq S\geqq B_n$$

であることを証明せよ。

(2) $f(x)=x^3$ について，次の各不等式が成立する最小の正の整数 n をそれぞれについて求めよ。

[1] $|A_n-B_n|\leqq\frac{1}{10}$

[2] $|S-A_n|\leqq\frac{1}{10}$

[3] $|S-B_n|\leqq\frac{1}{10}$　　（鳥取大）

(ヒント) (1)はグラフをかいてみるとすぐわかるでしょう。すなわち，閉区間 [0, 1] を n 等分すると

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leqq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

において $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ として辺々相加えるとよい。

(2)では，$A_n=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$，$B_n=\frac{(n-1)^2}{4n^2}$，

$S=\frac{1}{4}$ に注意のこと。

(答) （順に）$n=10$，$n=6$，$n=5$

○定積分と有限級数の和

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

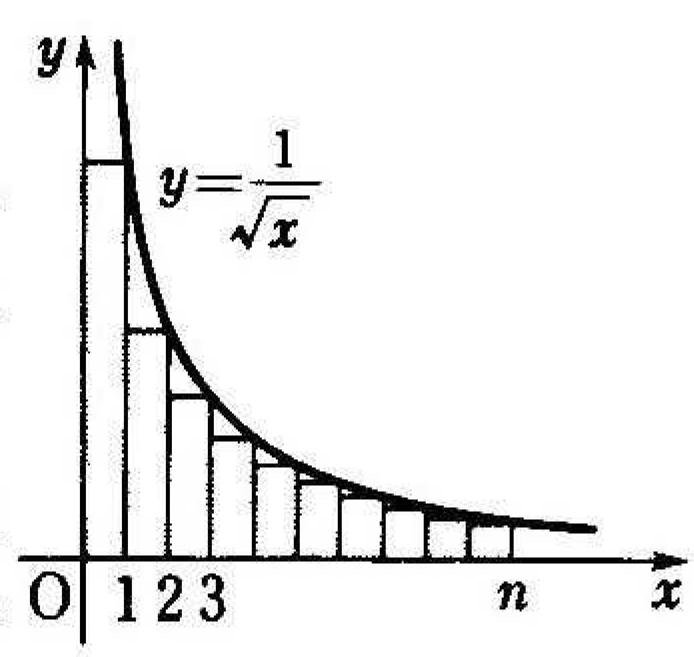
◆有限級数の和の入った不等式を基解で扱うことはかなりめんどうになりがちだった。しかし，微積では統一的に扱えるのです。

◆ 有限級数の和の入った不等式は定積分を使うとうまくいくことが多いもの。では，さっそく，具体例にいきましょう。

練習 1. 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$

ヒント　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$



グラフをかいてみると，右のような曲線になります。$x=1$，2，3，……，n で x 軸に垂線を立て，曲線までの長さを求めると，それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{1}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

となりましょう。そこで，図のような長方形を作ってみますと，その長方形の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{1}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

となるハズ。したがって，その面積の和は

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

となります。これが曲線と $x=n$ と両軸と囲んだ面積より小ですから

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_0^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

となるでしょう。ところが，

$$\int_0^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_0^n x^{-\frac{1}{2}}dx=\Bigl[2\sqrt{x}\Bigr]_0^n$$
$$=2\sqrt{n}$$

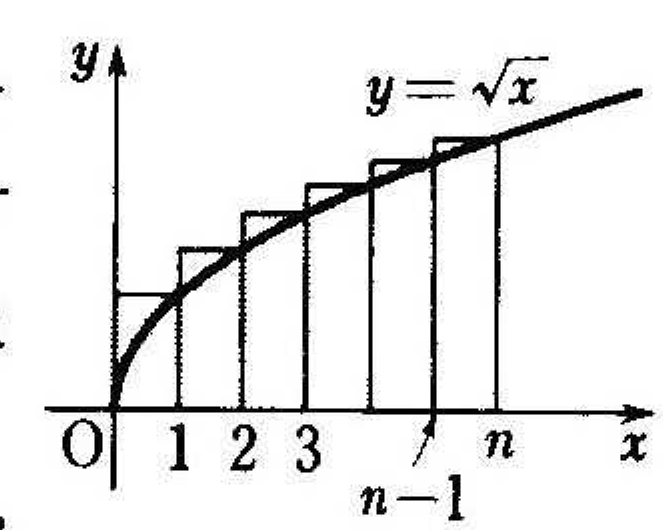
ヤレヤレ，これは困ったことになった。$2\sqrt{n}$ では $2\sqrt{n}-1$ より大ではないか。もう1つ困ったことがある。$x\longrightarrow+0$ のとき $y\longrightarrow\infty$ となることだ。こんな積分は **異常積分**（いじょうせきぶん）といって高校の範囲外なんです。では，どうするか。最初の$\dfrac{1}{\sqrt{1}}$を別に扱ってみるのです。つまり，

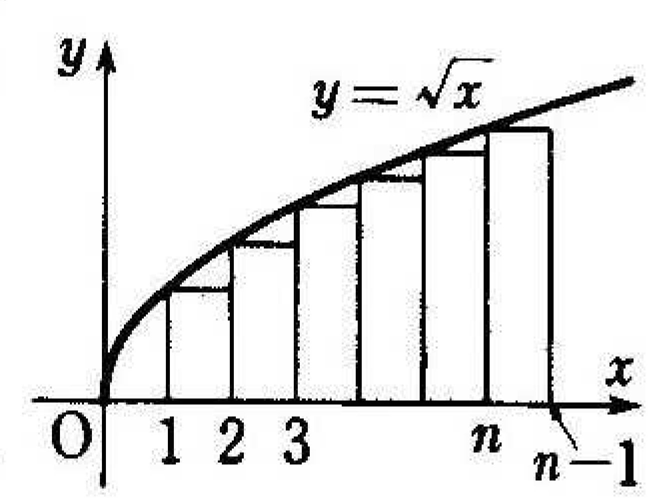
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$=1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$<1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\Bigl[2\sqrt{x}\Bigr]_1^n=2\sqrt{n}-1$$

かくして，解決された。

練習 2. $\dfrac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\cdots\cdots+\sqrt{n}$
$<\dfrac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$

を証明せよ。





解　右の図において $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ は長方形の面積の和に等しく，これは

$$\int_0^n\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\Bigl[x^{\frac{3}{2}}\Bigr]_0^n$$
$$=\frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

より大である。

同様にして右図から

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$$
$$<\int_1^{n+1}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\Bigl[x^{\frac{3}{2}}\Bigr]_1^{n+1}$$
$$=\frac{2}{3}\{(n+1)\sqrt{n+1}-1\}$$
$$<\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

Q. E. D.

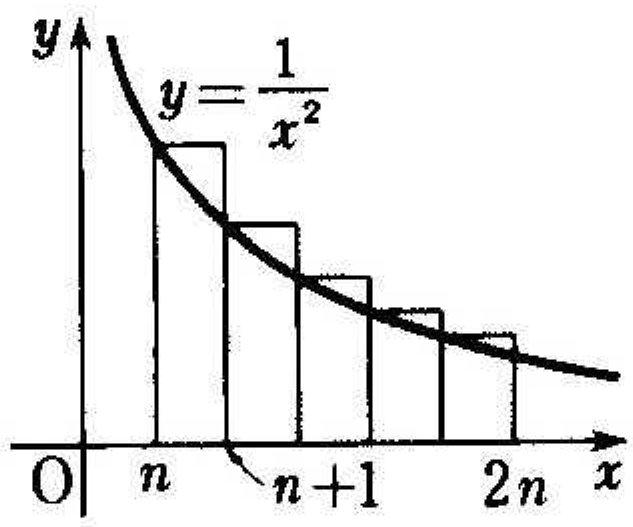
＊　＊　＊

◆ では，ややめんどうな問題を：——

練習 3. 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$
$$<\frac{1}{2n}<\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}$$

（解） 右の図において長方形の面積は左の方から順次



$\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{(n+1)^2}$, …

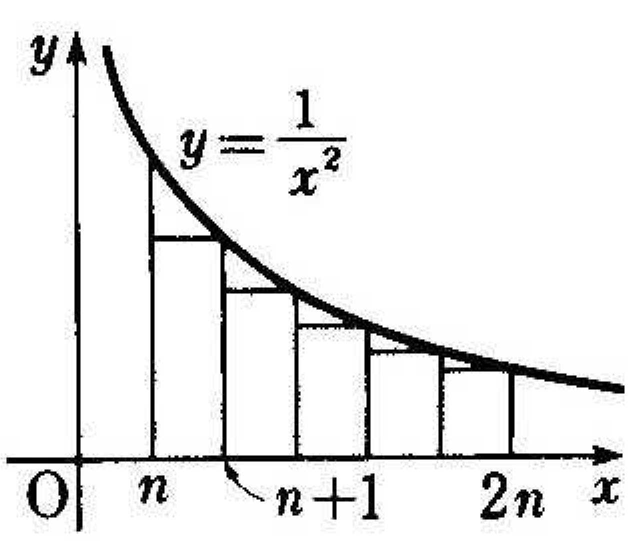
…, $\frac{1}{(2n-1)^2}$

で，その和は $y=\frac{1}{x^2}$ と x 軸および $x=n$, $x=2n$ の囲む面積より大であるから

$$\int_n^{2n}\frac{1}{x^2}dx<\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}$$

しかるに，左辺は $\left[-\frac{1}{x}\right]_n^{2n}=\frac{1}{2n}$ に等しい。ゆえに右半分は成り立つ。

次に，右の図において長方形の面積の和は



$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$

で，これは $y=\frac{1}{x^2}$ と x 軸および $x=n$, $x=2n$ の囲む面積より小であるから，左半分の成り立つことがわかる。 Q. E. D.

（注） グラフを使わないと次のようになります。

$k\leqq x\leqq k+1$ $(k>0)$ のとき

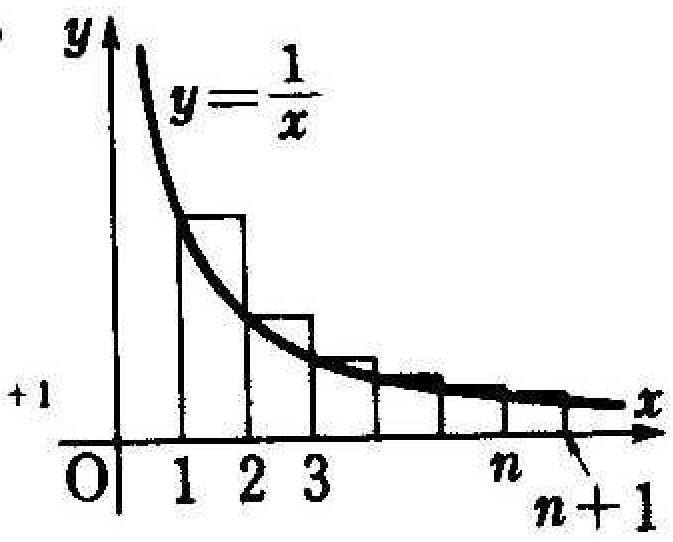
$$\frac{1}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}<\frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。$k=n$, $n+1$, ……, $2n-1$ を代入して辺々相加えるとよい。本質的には同じであるが，このほうがオモオモシイ感じがする，というわけです。なお，これを応用して数列の収束・発散を扱うこともできます。例えば，これです。

練習 4. $S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$

を証明せよ。これを使って $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ は発散することを示せ。

（解） 右の図から明かなように



$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}$$
$$=\log(n+1)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}S_n>\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ は発散する。

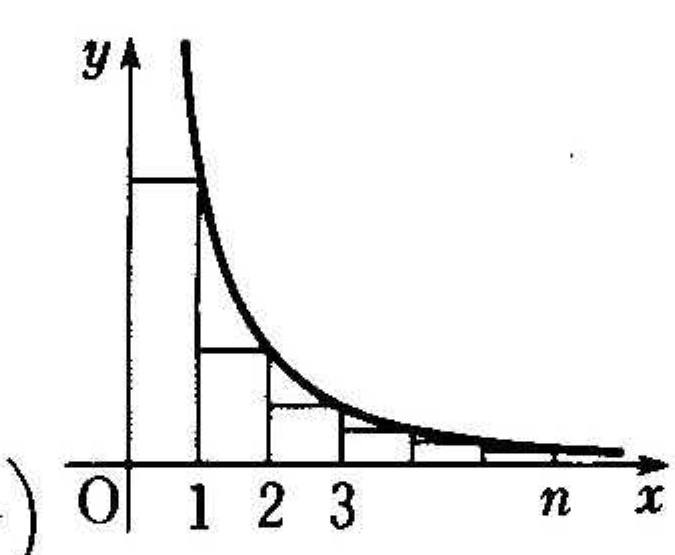
* * *

◆ では，もう1つ注意しておきましょう。

練習 5. 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1$$

（ヒント） 基解でなら



$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1$$

とやってすぐできます。

ところが，積分を応用すればどうなるか？上のグラフから

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<\int_0^n\frac{dx}{x(x+1)}$$

しかし，これは困る。このようなときには

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot2}+\left(\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$<\frac{1}{2}+\int_1^n\frac{dx}{x(x+1)}$$
$$=\frac{1}{2}+\left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^n=\frac{1}{2}+\log\frac{2n}{n+1}$$

となって絶望的!! つまり定積分ではかえってめんどうになったわけ。

◑ 極限への定積分の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆区分求積法によって求められる定積分は少ない。しかし，定積分が完成されて，極限のほうに逆輸入されたのがこれである。

◆ ある種の極限を求める問題には定積分が有効です。それは次のようなものです。

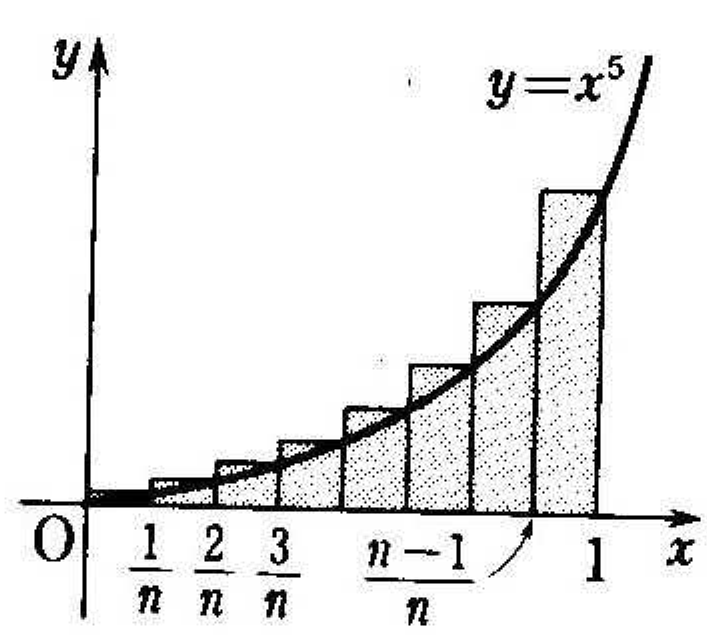
練習 1. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^6}$ を求めよ。

（鳥取大）

ヒント　**区分積分法** を忘れているなら，この機会に軽く復習（☞ p.212）してから次を読んでください。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^6}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}$$

右の図のように $y=x^5$ のグラフをかき，$x=\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，…，$\dfrac{n-1}{n}$，1 から垂線を立てて長方形を作りますと，その面積はそれぞれ



$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^5,\ \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^5,\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^5$$

に等しく，したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^6}=\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{6}$$

となります。

練習 2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$ を求めよ。

（広島大）

解

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots\ 答$$

練習 3. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(2n)^3}{n^4}$ を求めよ。

ヒント　まず，分子の末項がおもしろくない。$(n+n)^3$ としよう。次に，分母の n^4 を $n\cdot n^3$ とし，

$\dfrac{1}{n}$ を前にくくり出す

これもきまったこと。その上で変形して

$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，……，$\dfrac{n}{n}$ の入ったもの

に書きかえるのがコツです。さて，

与式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(n+n)^3}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^3\right\}\qquad\cdots\cdots(*)$$

あとは $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，…… の入っている部分を x でおきかえて 0 から 1 まで積分すればよい!!

$$=\int_0^1(1+x)^3dx\qquad\cdots\cdots(**)$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_0^1=\frac{1}{4}(2^4-1^4)=\frac{15}{4}$$

答　$\dfrac{15}{4}$

注　上の (*) から (**) にいくところは，分点の座標が $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，…… と考えたのが上のやり方ですが，

$$1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{2}{n},\ \cdots\cdots1+\frac{n}{n}$$

と考えると $\int_1^2 x^3dx=\dfrac{15}{4}$ となって楽です。しかし，なれるまでは 0 から 1 まで積分することにきめておくほうが確実です。

＊　＊　＊

◆ では，ややめんどうな問題をやってみませんか。

練習 4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n}{n}+\frac{2n+1}{n}+\cdots\cdots+\frac{3n-1}{n}\right)$

を求めよ。　(九州工大)

ヒント

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n}{n}+\frac{2n+1}{n}+\cdots+\frac{2n+(n-1)}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(2+\frac{0}{n}\right)+\left(2+\frac{1}{n}\right)+\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(2+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$=\int_0^1(2+x)dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

答　$\dfrac{5}{2}$

練習 5. 次の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4)(1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6)}{(1^8+2^8+\cdots\cdots+n^8)(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)}$$

を求めよ。

ヒント　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4}{n^5}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\int_0^1x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

同様にして

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+\cdots\cdots+n^6}{n^7}=\int_0^1x^6dx=\frac{1}{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^8+2^8+\cdots\cdots+n^8}{n^9}=\int_0^1x^8dx=\frac{1}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}=\int_0^1x^2dx=\frac{1}{3}$$

であることを使えばいいだろう。すなわち，

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}\cdot\dfrac{1^6+\cdots+n^6}{n^7}}{\dfrac{1^8+2^8+\cdots+n^8}{n^9}\cdot\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{7}}{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{27}{35}$$

……答

*　*　*

◆ これで，大体のもようはわかったでしょう。次の意地の悪いものを 2 つやって終わりとしましょう。

練習 6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+3^4+\cdots+(2n-1)^4}{n^5}$

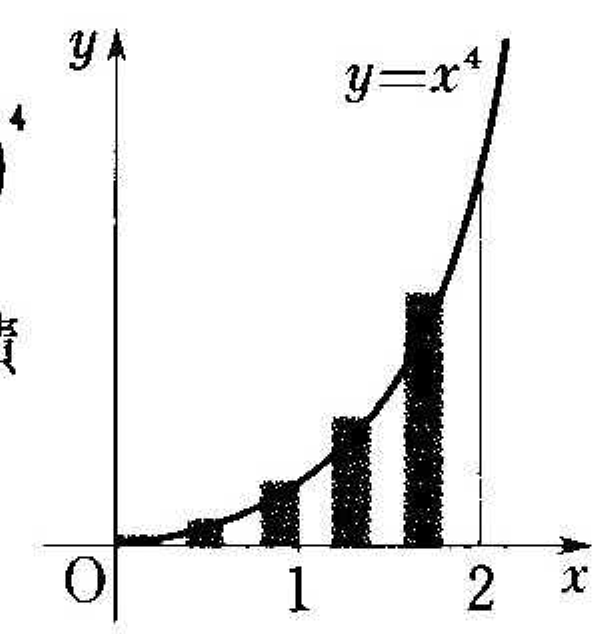
を求めよ。

ヒント　2 つの考え方がありましょう。図示すると次のようになります。

解 1.　与式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^4\right\}$$

つまり，これは，高さ $\left(\dfrac{1}{n}\right)^4$，$\left(\dfrac{3}{n}\right)^4$，…$\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^4$ で幅 $\dfrac{1}{n}$ の長方形の面積の和ですから，



$$与式=\frac{1}{2}\int_0^2x^4dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^5}{5}=\frac{16}{5}$$

……答

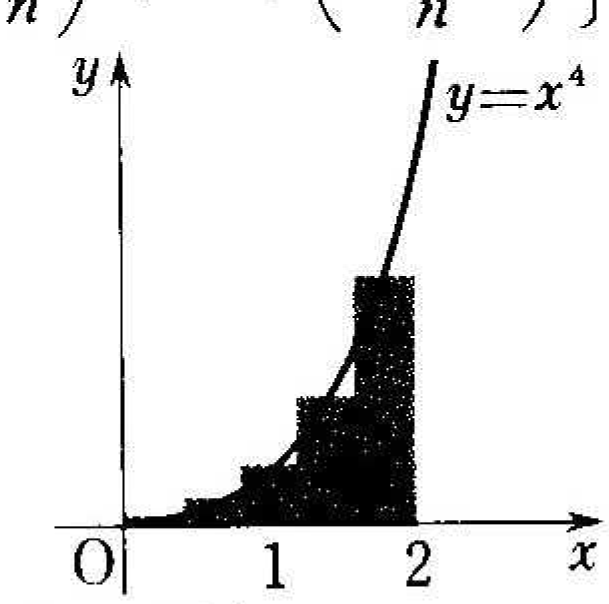
解 2.　本質的には同じことですが，次のように考えることもできます。

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2x^4dx$$

$$=\frac{16}{5}$$



練習 7. 次の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots\cdots+(n-3)^4}{n^5}$$

を求めよ。

ヒント　与式$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}$

$$\frac{\{1^4+2^4+\cdots+n^4\}-\{(n-2)^4+(n-1)^4+n^4\}}{n^5}$$

$$=\int_0^1x^4dx-\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)^4+(n-1)^4+n^4}{n^5}$$

$$=\frac{1}{5}$$

……答

○定積分を使って極限を求めること

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆基解ですすでにやったことではあるが，あまり役に立たなかった。というのも積分できなかったから。しかし，微積ではそれができる。

◆ 定積分を求めるのに無限級数を使って求めることもできますし，逆に，無限級数の和を求めるに定積分を使うこともできます。

さて，前者がいわゆる **区分積分法** です。これについては，すでに p.212 で学んでいます。ここではもっぱら，後者について練習するとしましょう。

■練習 1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^6}$ を求めよ。

（鳥取大）

ヒント まず，何はともあれ

$\dfrac{1}{n}$を前のほうにとり出す

のです。すると，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^5}$$

となります。次に，

$$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)}\ \text{の形}$$

に変形するのです。

解 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^6}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}$$

$$=\int_0^1 x^5dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

答 $\dfrac{1}{6}$

■練習 2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ を求めよ。

解 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right\}$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

■練習 3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$ を求めよ。

解 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots\right.$

$$\left.+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|x+1|\Big]_0^1=\log 2$$

答 $\log 2$

＊　＊　＊

◆ ともあれ，本質的なことは基解でやってあるハズのもの。微積では関数の範囲が広くなっただけのことです。

■練習 4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\right\}$ を求めよ。

解 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)\right.$

$$\left.+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{n}\right)\right\}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=1$$

答 1

注 あるいは次のように考えることもできます。

$$f(x)=\sin x$$

の区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ を n 等分して長方形に分割したとするのです。このときには

$$\text{与式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

となって，少しカンタン!!

＊　＊　＊

◆ 次にはややめんどうなものをやってみませんか。と，いっても，たいしたことはないのですが，……

練習 5. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin^2\frac{\pi k}{4n}$ を求めよ。

(徳島大)

(解) 1.　与式$=\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{4}x\,dx$

$$=\int_0^1\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$$

答　$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$

(解) 2.　与式$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi k}{n}$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$$

(解) 3.　与式$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{\pi}{4}}{n}\sin^2\frac{\frac{\pi k}{4}}{n}$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$$

(注) 上のようにいろいろなやり方があるのですが，まず (解) 1. のやり方を徹底的に理解する，その上で他の方法もマスターする，というのがいいでしょう。では，もう1つ：——

練習 6. $S=\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-k^2}$ を求めよ。

(東京理大)

(解) $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$=\int_0^1\frac{dx}{4-x^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1=\frac{1}{4}\log 3$$

答　$\frac{1}{4}\log 3$

練習 7. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}(\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+2}+\cdots$$
$$\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n)$$

(解) 与式のかっこ内

$$=\frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots$$
$$\cdots+\log(n+n)-n\log n\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\log\frac{n+n}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

∴　与式$=\int_0^1\log(1+x)dx$

$$=\Big[x\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$$

$$=\log 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\log 2-\Big[x-\log|x+1|\Big]_0^1$$

$$=\log 2-(1-\log 2)$$

$$=2\log 2-1$$

答　$2\log 2-1$

(注) このほか若干意地のわるい問題もありますが，本筋は上でつくしています。

*　*　*

◆ 意地のわるい問題のひとつのタイプはこんなものです。

練習 8. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5}{n^k}\quad(k\text{は自然数})$$

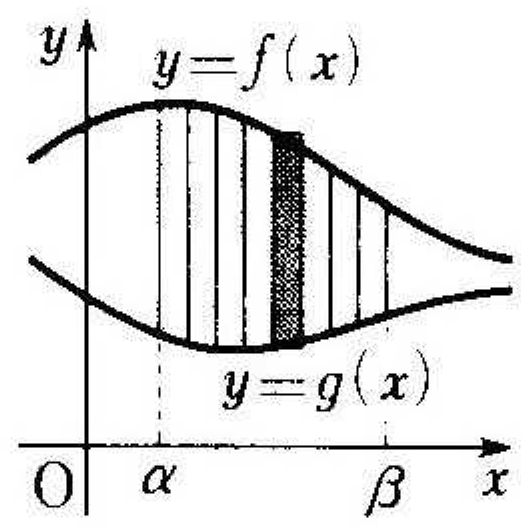
(ヒント) $k=6$ の場合をまずやる。その上で $k\leqq 5$ のときと，$k\geqq 7$ のときとに分けてやってみるとすぐわかるハズ。答はそれぞれ $\frac{1}{6}$，∞，0 となりましょう。

○面積の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈面積を求める場合，微積でも基解と変わることはないのですが，ただ，計算技術において，やや高度なものが出てくるだけです。

◆ 面積を求める際の大切なことは，ほとんど 基解 でやってあるのですから，特に問題はありません。つまり，右の図に示すような領域の面積を求めるには



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$

を計算すればいいのです。

ただ，微 積で新しく出てくるのは，x，y が共にパラメーターで表され，

$$x=f(t),\ y=g(t)\quad (t_1\leqq t\leqq t_2)$$

といった形のときです。このときには

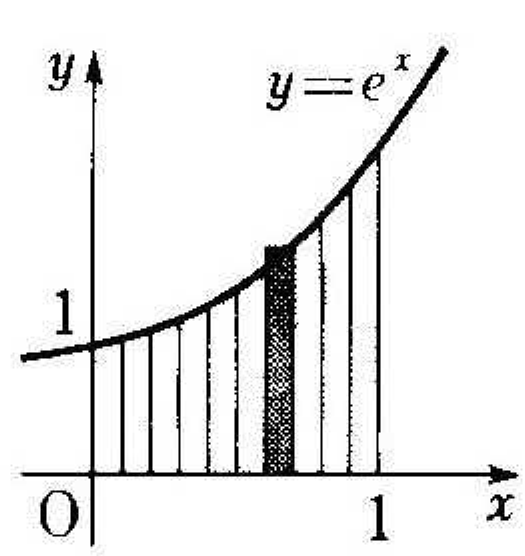
$$S=\int_{f(t_1)}^{f(t_2)}ydx=\int_{\alpha}^{\beta}g(t)f'(t)dt$$

を計算すればいいのです。しかし，実際はこんな公式をオボエルのはムダなこと，そのつど，変数を変換するほうが安全でもあり，ラクでもあるのです。

＊　＊　＊

◆ では，これを：——

■練習 1. $y=e^x$ と x 軸と $x=0$，$x=1$ の囲む面積を求めよ。



（解） $S=\int_0^1 e^x dx$

$=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$

答　$e-1$

■練習 2. $y=1+\sin x$ と $y=\cos x$ の囲む部分の面積を求めよ。ただし，$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$.

（ヒント） $1+\sin x=\cos x$ を解けば 0 と $\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore\ S=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{(1+\sin x)-\cos x\}dx$

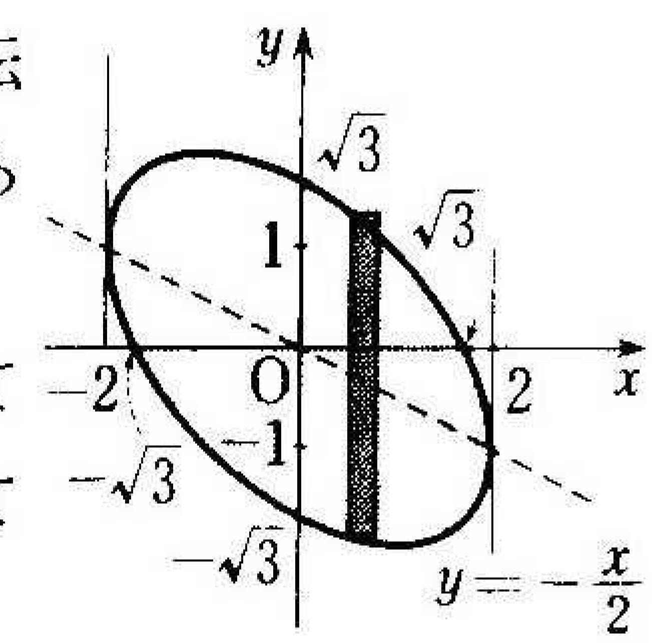
$=\Big[x-\cos x-\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}$

$=\dfrac{3}{2}\pi+2$

答　$2+\dfrac{3}{2}\pi$

■練習 3. $x^2+xy+y^2=3$ の囲む面積を求めよ。

（ヒント） まず，グラフの概形をかかずばなるまい。座標軸を 45° 回転してみると，だ円であることがわかります。しかし，y 軸について解いて合成法でやってもいいでしょう。



（解） $y^2+xy+(x^2-3)=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-x\pm\sqrt{12-3x^2}}{2}$

$=-\dfrac{x}{2}\pm\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}$

ゆえに求める面積を S とすれば

$S=\int_{-2}^{2}\Big\{\Big(-\dfrac{x}{2}+\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}\Big)-\Big(-\dfrac{x}{2}-\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}\Big)\Big\}dx$

$=2\int_{-2}^{2}\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}dx$

$=4\int_0^2\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}dx$

$=2\sqrt{3}\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$

$=2\sqrt{3}\times\dfrac{\pi\cdot 2^2}{4}$

$=2\sqrt{3}\pi$　……答

＊　＊　＊

◆ グラフを正確にかくと，図形がある点や直線について対称であることに気がつく，といったことも大いに役に立つものです。

では，これを：――

練習 4. 2つの曲線

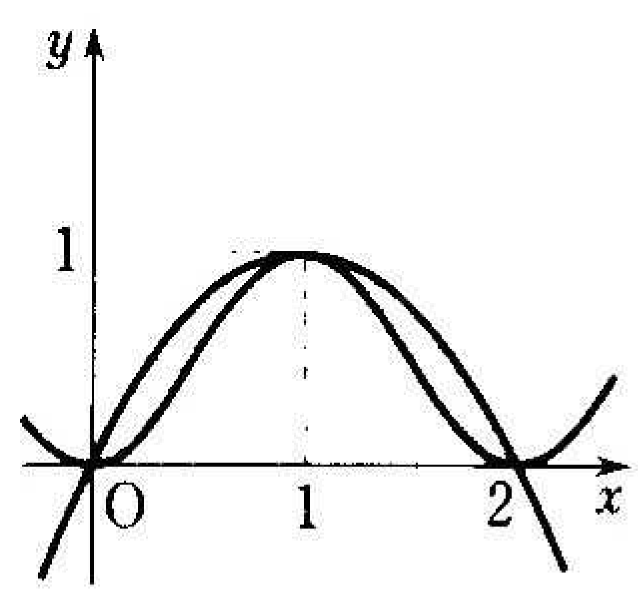
$$y=2x-x^2,\quad y=\sin^2\frac{\pi x}{2}\quad (0\leqq x\leqq 2)$$

の囲む面積を求めよ。（大阪工大）

ヒント 交点を求めようと思って

$$2x-x^2=\sin^2\frac{\pi x}{2}$$

とおいてみても動きがとれません。それよりは，xに値をいれてグラフをかいてみると，



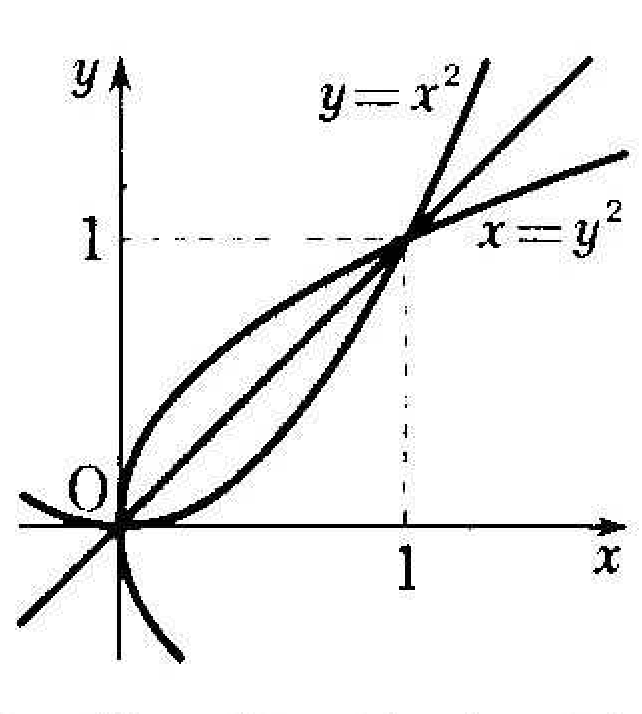
上のようになって共通点は3つ：(0, 0), (1, 1), (2, 0) であることがすぐわかるでしょう。さらに $x=1$ について対称であることもわかります。ここまでくれば問題ありませんね。求める面積は

$$2\int_0^1\left\{(2x-x^2)-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right\}dx$$
$$=2\int_0^1\left(2x-x^2-\frac{1-\cos\pi x}{2}\right)dx$$
$$=\int_0^1(4x-2x^2-1+\cos\pi x)dx$$
$$=\left[2x^2-\frac{2x^3}{3}-x+\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

答 $\dfrac{1}{3}$

練習 5. 2つの放物線 $y=x^2$, $x=y^2$ の囲む面積を求めよ。

ヒント いろいろな考え方がありましょう。$y=x$ について対称ですから，$y=x^2$ と $y=x$ の囲む面積を求めて2倍してもよいし，4点 (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) を頂点とする正方形の面積から $y=x^2$, $y=0$, $x=1$ の囲む面積を2つとり除いたもの，と考えてもよいでしょう。



ここでは後者の方法を採用して

$$S=1-2\int_0^1 x^2dx$$
$$=1-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

答 $\dfrac{1}{3}$

＊　＊　＊

◆ 最後に高次曲線の場合を1つやっておきましょう。

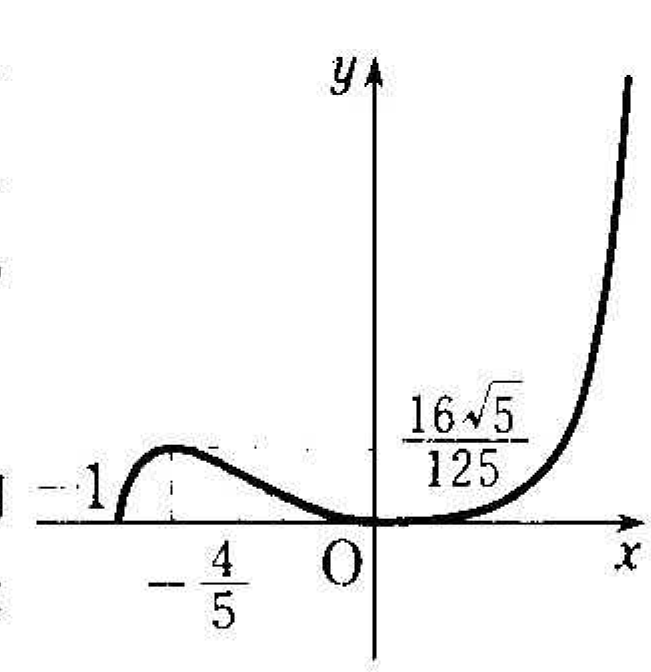
練習 6. $y^2=x^4(x+1)$ の囲む面積を求めよ。（東北大）

解
$$y^2=x^4(x+1)$$
$$\therefore\quad y=\pm x^2\sqrt{x+1}$$

まず $y_1=x^2\sqrt{x+1}$ とおくと

$$y'=2x\sqrt{x+1}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}$$

ゆえに y_1 は $x=-\dfrac{4}{5}$ において，極大値 $\dfrac{16\sqrt{5}}{125}$ をとり，$x=0$ において極小値0をとる。ゆえにその概形は右のようになる。したがって $y^2=x^4(x+1)$ の囲む面積Sは $y_1=x^2\sqrt{x+1}$ とx軸の囲む面積の2倍に等しい。



$$\therefore\quad S=2\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

$\sqrt{x+1}=t$ とおけば

$$x=t^2-1,\quad dx=2tdt$$
$$\therefore\quad S=2\int_0^1(t^2-1)^2\cdot t\cdot 2tdt$$
$$=4\left[\frac{t^7}{7}-2\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{32}{105}$$

……答

接線と面積の融合問題は多い

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆接線と曲線の囲む部分の面積を求める，といった問題は多い。それは，微分法と積分法の接触点でもあるわけだ。

◆ 面積を求める問題には接線との融合問題が意外と多いのです。ここでは，そのような問題に焦点をあてて練習しましょう。

■練習 1. 曲線 $y=e^x$ と，原点からこの曲線へ引いた接線および y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

ヒント　曲線外の定点から引いた接線の方程式を求めるには

曲線上の任意の点における接線を求めて，それが定点を通るようにする

とうまくいくのでしたね。

さて，$y=e^x$ 上の任意の点の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線は

$y-e^t=e^t(x-t)$

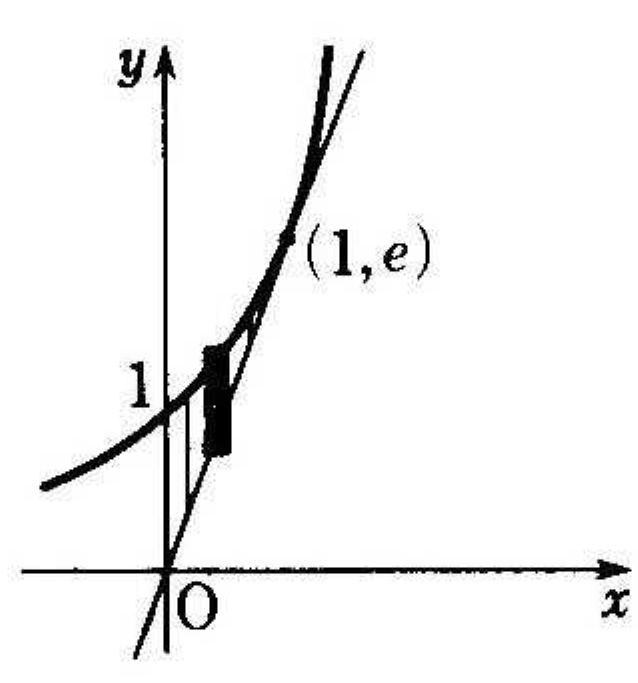
これが原点を通るための条件は

$-e^t=-te^t$

$\therefore\quad t=1$

つまり接線は

$y=ex$



よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$

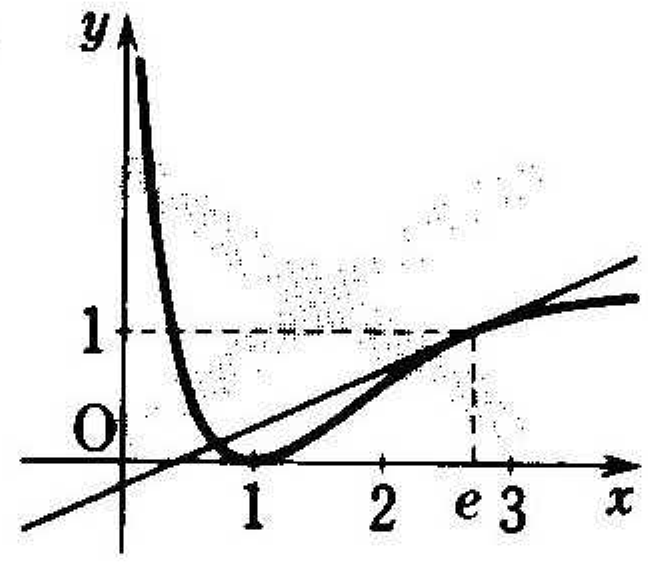
$$=\frac{e}{2}-1$$

……答

■練習 2. $y=(\log x)^2$ と直線 $x=e$ との交点における接線と，この曲線および x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

ヒント　$y=(\log x)^2$ の概形はどうなるか。

$$y'=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$



ですから，$x=1$ で極小値0をとるわけだ。

また，点 $(e,\ 1)$ における接線は

$$y-1=\frac{2}{e}(x-e)$$

つまり

$$y=\frac{2}{e}x-1$$

ここまできても，まだどの部分の面積を求めるのかはっきりしませんね。

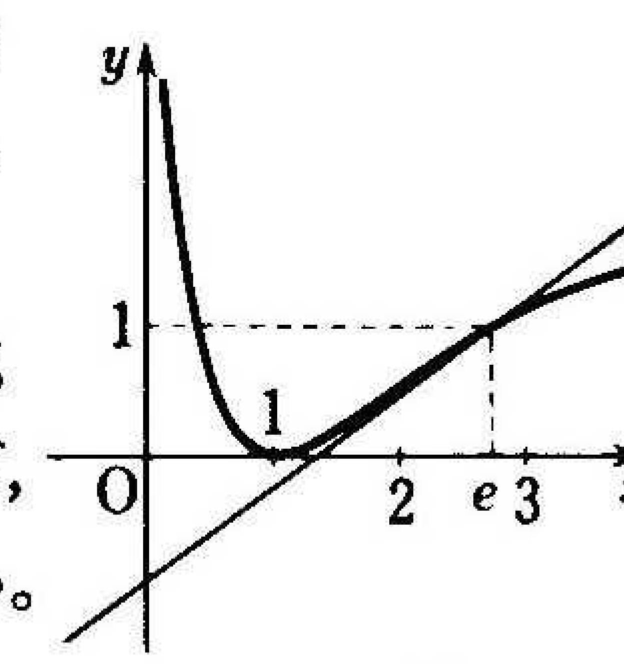
グラフを正確にかかないからなんです。

ここで y'' を求めてみましょう。

$$y''=2\cdot\frac{x\cdot\dfrac{1}{x}-\log x}{x^2}=2\cdot\frac{1-\log x}{x^2}$$

ナルホド，$x=e$ で $y''=0$ だったのだ。そして y'' は $-$ から $+$ に変わるのだ。これではっきりした，右の図のようになるのであった。

かくして，求める部分がわかってしまえば，べつにめんどうはない。

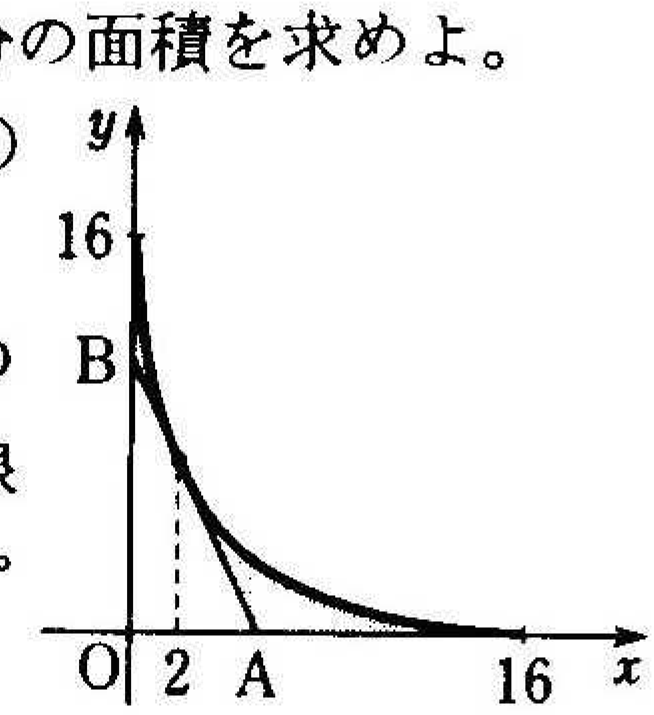


答　$\dfrac{3}{4}e-2$

■練習 3. 曲線の方程式が $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ で表されているとき，x 座標が2である曲線上の点における接線と x 軸と y 軸とそして曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

（和歌山県医大）

ヒント　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ のグラフの概形は右の通りです。実は放物線の一部。（座標軸を45°回転すればわかります）



さて，接線の方程式は

$$y=-(2\sqrt{2}-1)x+(16-4\sqrt{2})$$

となりますから　△ABO＝……

また，曲線と両軸で囲む面積は

$$\int_0^{16}(4-\sqrt{x})^2dx=\cdots\cdots$$

したがって，……

答　$\dfrac{176}{3}-32\sqrt{2}$

*　*　*

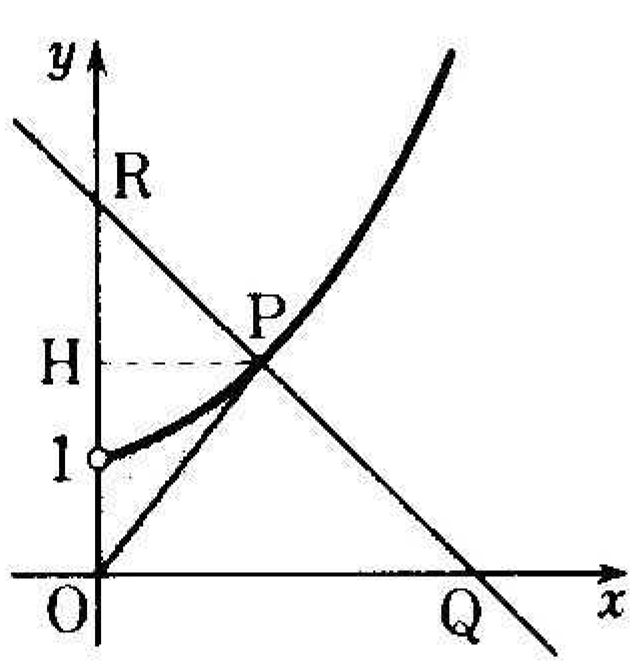
◆ では，やや総合的な問題を：——

練習 4. 曲線 $y=e^{2x}$ $(x>0)$ 上の点Pを通り，傾き -1 の直線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ Q，R とする。

(1) $r=\dfrac{PQ}{PR}$ の最小値を求めよ。

(2) (1)の最小値を与える曲線上の点を P_0 とするとき，P_0 における接線と y 軸および曲線の囲む面積を求めよ。

（東京理大）



解 (1) 点Pの座標を $(t,\ e^{2t})$ とすると，点Pを通り傾き -1 の直線の方程式は

$$y-e^{2t}=(-1)(x-t)$$

である。ゆえに，点Rの y 座標は $e^{2t}+t$ である。

いま，Pから y 軸に下した垂線の足Hとすると

$$r=\frac{PQ}{PR}=\frac{HO}{HR}=\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+t)-e^{2t}}=\frac{e^{2t}}{t}$$

$$\therefore\quad \frac{dr}{dt}=\frac{t\cdot 2e^{2t}-e^{2t}}{t^2}=\frac{e^{2t}(2t-1)}{t^2}$$

ゆえに r の増減表は下のようになる。

t	(0)		$\frac{1}{2}$	
$\frac{dr}{dt}$		$-$	0	$+$
r		↘	$2e$ (極小)	↗

ゆえに，r の最小値は $2e$ である。

(2) 点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},\ e\right)$ における接線の方程式は

$$y-e=2e\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

すなわち

$$y=2ex$$

で，原点を通る。したがって求める面積を S とすれば，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{2x}-2ex)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-ex^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(e-e^0)-e\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}$$

答　(1) $2e$，(2) $\dfrac{1}{4}e-\dfrac{1}{2}$

練習 5. 関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ $(x>0)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

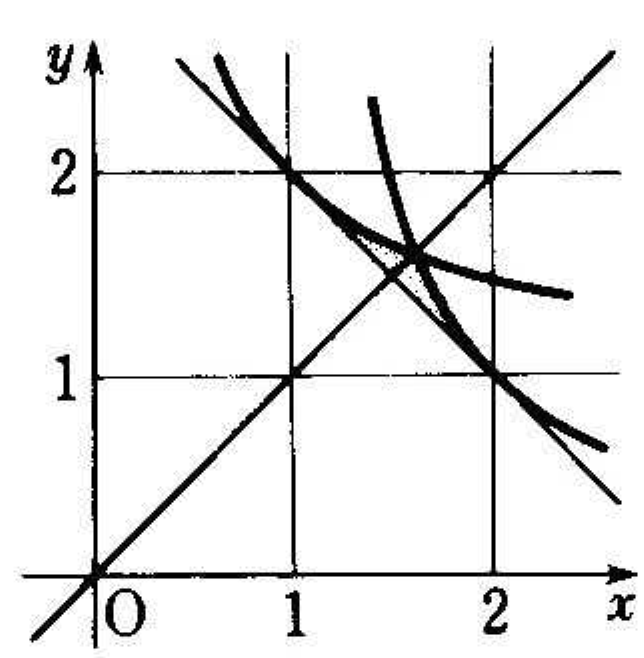
(1) 2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ のいずれにも接する直線の方程式を求めよ。

(2) この直線と $y=f(x)$，$y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

（群馬大）

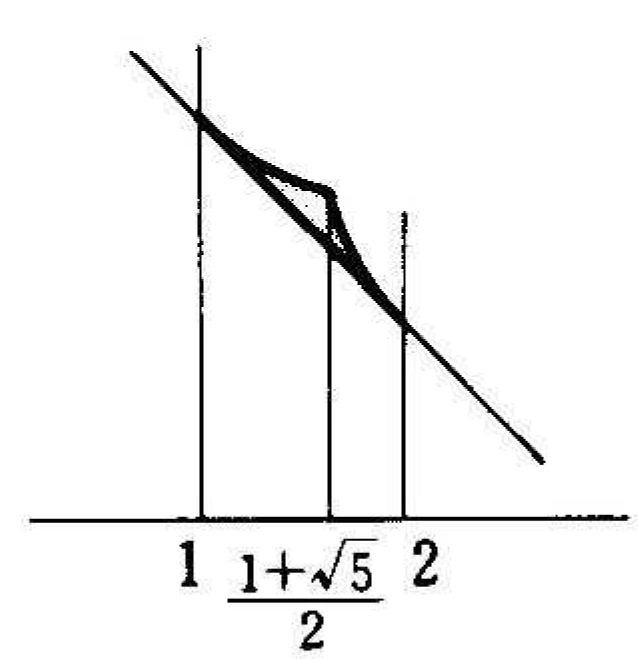
ヒント (1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$

$$\therefore\quad g(x)=\frac{1}{x-1}$$



逆関数 については「数Ⅰ」(☞p.210，212) を参照してください。共通接線を求めにはその傾きが -1 であることに目をつければラクにいく。その結果は $y=-x+3$ です。

(2) 面積を求めるには右のように分割してやるとよい。その結果は次のようだ。



$$\log(3+\sqrt{5})-\log 2-\frac{4-\sqrt{5}}{2}$$

◑面積を分割する問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

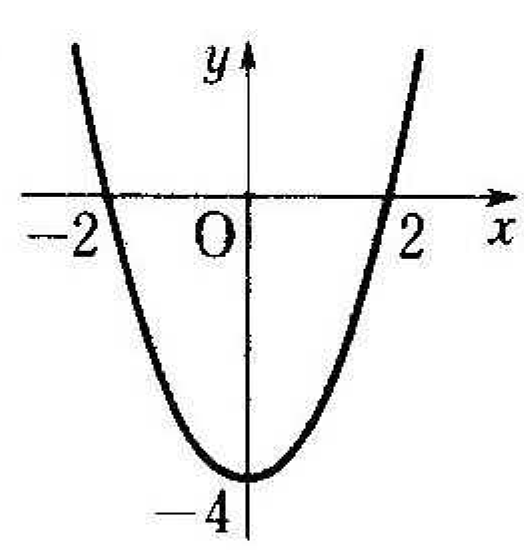
◆面積を分割することは，分割に重点はないのだ。あくまで分割された面積を求めることが主眼なんですよ。

◆　さあ，このセクションでは，面積を分割する問題をマスターしようではないか。

まず，これからだ!!

練習 1. $y=x^2-4$ と x 軸の囲む面積を $y=a(x^2-4)$ で2等分したい。a の値を求めよ。

ヒント　$y=x^2-4$ と x 軸の囲む面積 S は



$$S=2\int_0^2(-x^2+4)dx$$
$$=2\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$$
$$=2\left(-\frac{8}{3}+8\right)=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

です。ところで $y=a(x^2-4)$ と x 軸の囲む面積 S' は

$$S'=2\int_0^2 a(-x^2+4)dx=\cdots\cdots=\frac{32}{3}a$$

そこで

$$\frac{32}{3}a=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}$$
$$\therefore\quad a=\frac{1}{2}$$

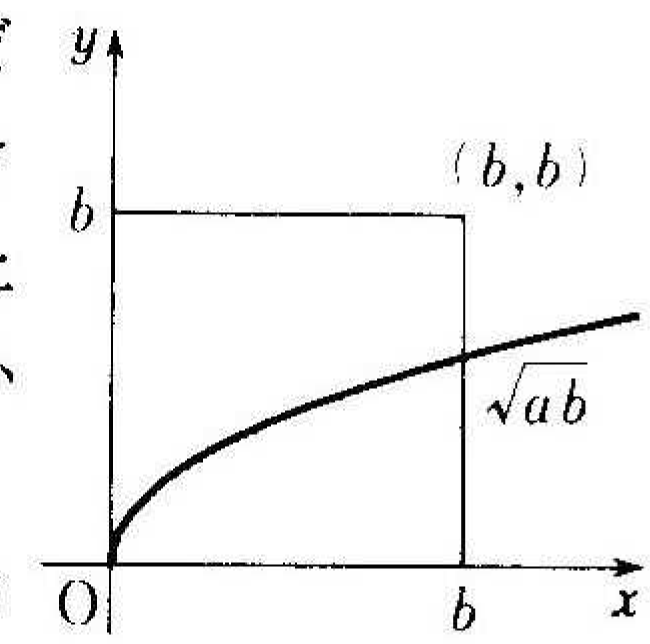
答　$\frac{1}{2}$

注　実は，上のように2回計算する必要はないわけです。なぜなら $a=1$ とおけば前のものになるのですから，……

練習 2. 放物線 $y^2=ax$ が $(0,\ 0)$，$(b,\ 0)$，$(b,\ b)$，$(0,\ b)$ を頂点とする正方形の面積を2等分するように正の定数 a の値を定めよ。ただし，$b>0$ とする。

ヒント　このような問題は，計算する前にまず知っておきたいことがある。それは：——

$y^2=ax$ がちょうど点 $(b,\ b)$ を通るときには明らかに曲線の上にあるほうの面積が小さいですね。だから，求める $y^2=ax$ は，2点 $(b,\ 0)$，$(b,\ b)$ の間を通るにちがいない。つまり，図から



$$\sqrt{ab}<b\qquad\therefore\quad a<b$$

なのだ。

さて，図の陰影部分の面積は

$$S=\int_0^b\sqrt{ax}\,dx=\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^b$$
$$=\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}b\sqrt{b}=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$$

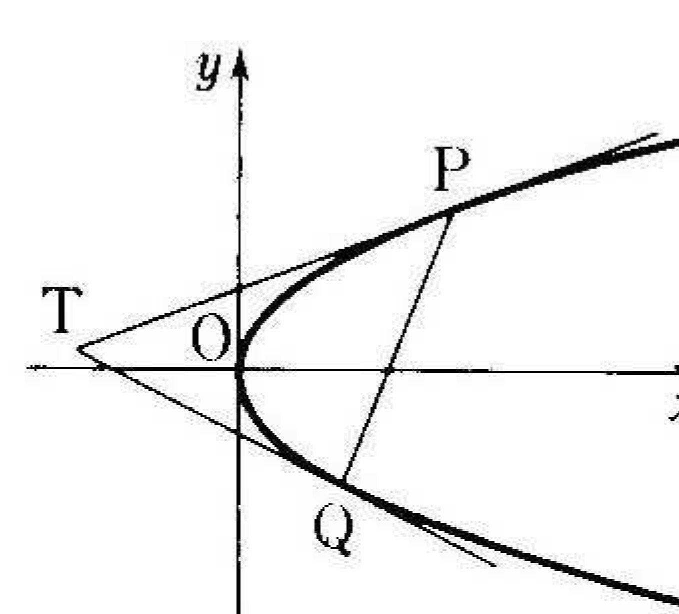
で，これが b^2 の $\frac{1}{2}$ に等しいのですから

$$\frac{2}{3}b\sqrt{ab}=\frac{b^2}{2}\qquad\therefore\quad a=\frac{9}{16}b$$

答　$\frac{9}{16}b$

練習 3. 放物線 $y^2=x$ 上の2点 P，Q における接線の交点をTとするとき，この放物線は △PQT をどのような比に分けるか。

ヒント　これはなかなかの難問です。$y^2=x$ 上の点ですから，$P(p^2,\ p)$，$Q(q^2,\ q)$ としましょう。P，Qにおける接線の方程式は，それぞれ



$$2py-x=p^2$$

および

$$2qy-x=q^2$$

したがって，交点Tは $\left(pq,\ \dfrac{p+q}{2}\right)$ であることがわかります。さて，

$$\triangle PQT=\frac{1}{4}|p-q|^3$$

で与えられます。三角形の面積の求め方については（☞「数Ｉ」p.328）を参照してください。

次に，$\overline{PQ}$ と $\widehat{PQ}$ で囲む面積を求めてみましょう。これは PQ の方程式が

$$y-p=\frac{q-p}{q^2-p^2}(x-p^2)$$

$$\therefore\quad x=(p+q)y-pq$$

であることから

$$\left|\int_q^p[\{(p+q)y-pq\}-y^2]dy\right|$$

$$=\cdots\cdots=\frac{1}{6}|p-q|^3$$

で与えられます。もういいでしょう。

答　2：1

(注) この問題はギリシア時代にアルキメデスによって解かれています。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. $f(x)=x\sqrt{x+a}$ $(a>0)$ とする。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_1，$y=f(x)$，x 軸の正の部分，および直線 $x=a$ とで囲まれた部分の面積を S_2 とする。$S_1:S_2$ は a に無関係であることを示せ。

（都立大）

(解) (1) $y=x\sqrt{x+a}$ $(x\geqq -a)$

$$y'=\sqrt{x+a}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+a}}$$

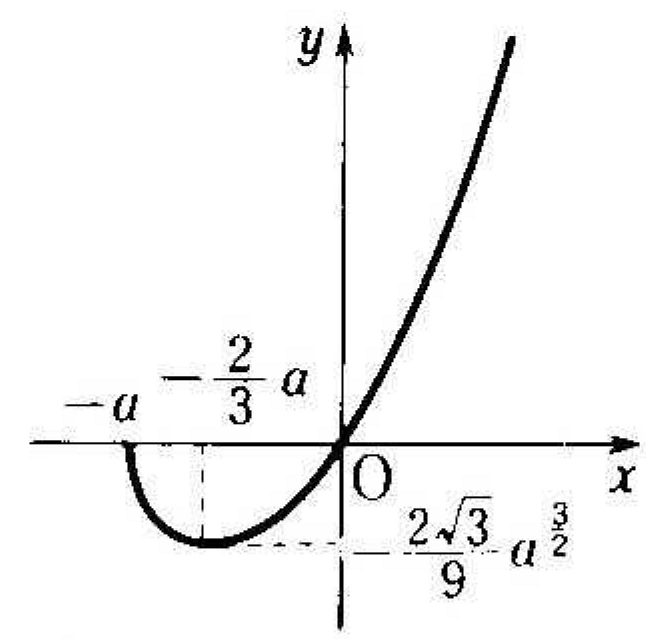
$$=\frac{3x+2a}{2\sqrt{x+a}}$$

ゆえに増減表は次のようになる。

x	$-a$		$-\frac{2}{3}a$	
y'		$-$		$+$
y		↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$ (極小値)	↗

また，　$y''(x)=\dfrac{3x+4a}{4\sqrt{(x+a)^3}}>0$

ゆえに曲線は下に凸で，グラフは右のようになる。



(2) $I=\int x\sqrt{x+a}\,dx$ とおき，$\sqrt{x+a}=t$ とおくと

$$x=t^2-a,\ dx=2tdt$$

$$\therefore\quad I=\int(t^2-a)t\cdot 2tdt$$

$$=2\int(t^4-at^2)dt$$

$$=2\left\{\frac{t^5}{5}-\frac{at^3}{3}\right\}+C$$

$$=\frac{2}{5}(x+a)^2\sqrt{x+a}$$

$$-\frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{x+a}+C$$

ここに C は積分定数である。

(3) S_1，S_2 の面積は

$$S_1=-\int_{-a}^0 f(x)dx$$

$$=-\Big[\frac{2}{5}(x+a^2)\sqrt{x+a}$$

$$-\frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{x+a}\Big]_{-a}^0$$

$$=\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$$

$$S_2=\int_0^a f(x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{5}(x+a)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}a(x+a)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$=\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)a^2\sqrt{a}$$

$$\therefore\quad S_1:S_2=1:(\sqrt{2}+1)$$

したがって，$S_1:S_2$ は a に無関係である。

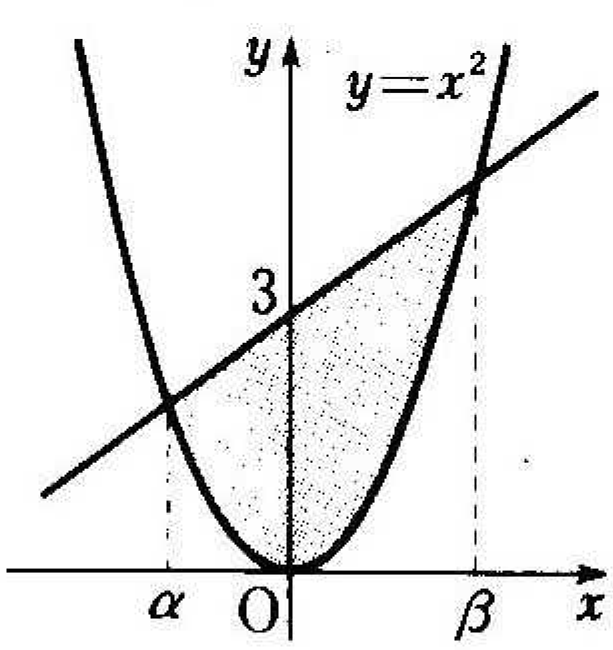
●面積の最大・最小を求める問題

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆面積の最大・最小を求める問題の大部分は面積を求めるところだけがめんどうなのです。最大・最小はつけ足しという感じ。

◆ 面積の最大・最小値を求める問題は割合と多いもの。このセクションでは，そのような問題を練習するのが目的です。では，次の練習1. をやってみませんか。

■練習1. 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+3$ の囲む面積の最小値を求めよ。



ヒント 右の図からわかるように，mの値にかかわらず $y=x^2$ と $y=mx+3$ が2点で交わることは確かです。交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ として，面積をSとしますと，

$$S=\int_\alpha^\beta\{(mx+3)-x^2\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(-x^2+mx+3)dx$$

さて，この積分の仕方はよくマスターしておかなければなりませんよ。ここでは，公式

$$\left|\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx\right|=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

使って手軽にやってしまいましょう。(公式については(☞「基解」p.250))

$$S=\frac{\{m^2-4(-1)\cdot3\}^{\frac{3}{2}}}{6(-1)^2}=\frac{(m^2+12)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

ゆえに $m=0$ のとき，最小値をとり，それは

$$\frac{12^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{12\sqrt{12}}{6}=2\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

です。 答 $4\sqrt{3}$

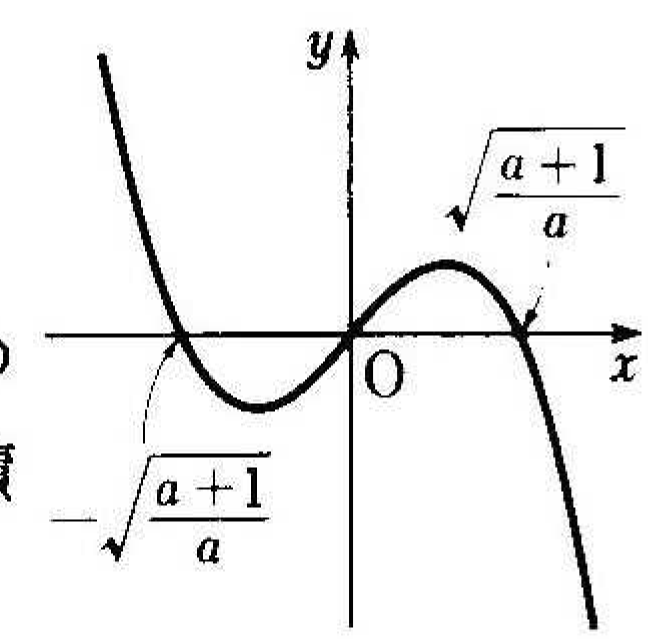
■練習2. 点 (1, 1) を通る3次曲線 $y=-ax^3+bx$ $(a>0)$ と x 軸の正の部分とで囲む面積の最小値を求めよ。

解 $y=-ax^3+bx$ は点 $(1,1)$ を通るから

$1=-a+b$ $\quad\therefore\ b=a+1$

$\therefore\ y=-ax^3+(a+1)x$

これは x 軸と3点 0, $\pm\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ で交わる。

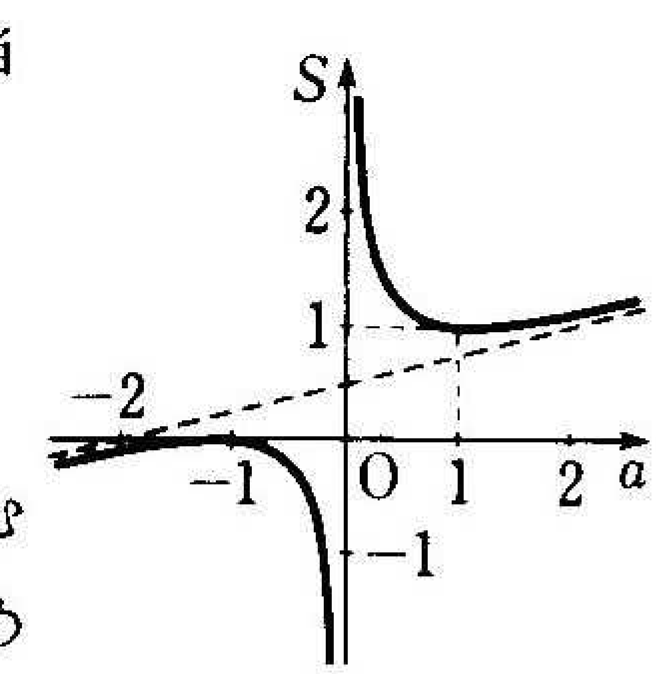


ゆえに，曲線と x 軸の正の部分との囲む面積 Sは

$$S=\int_0^\alpha\{-ax^3+(a+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{ax^4}{4}+\frac{(a+1)x^2}{2}\right]_0^\alpha\quad\left(\alpha=\sqrt{\frac{a+1}{a}}\right)$$
$$=-\frac{a\alpha^4}{4}+\frac{(a+1)\alpha^2}{2}$$
$$=-\frac{a}{4}\left(\frac{a+1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}(a+1)\cdot\frac{a+1}{a}$$
$$=\frac{(a+1)^2}{4a}$$
$$\therefore\ \frac{dS}{da}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a\cdot2(a+1)-(a+1)^2\cdot1}{a^2}$$
$$=\frac{(a+1)(a-1)}{4a^2}$$

$a>0$ であるから，Sは $a=1$ において最小値1をとる。

(注) $S=\dfrac{(a+1)^2}{4a}$ のグラフは下のような双曲線ですから，上の結果も当然です。



■練習3. 放物線 $y=x^2$ と放物線 $y=m(x^2-1)$ の囲む面積の最小値を求めよ。ただし，$m>1$ とする。

答 $2\sqrt{3}$ $\left(m=\dfrac{3}{2}\right)$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を：——

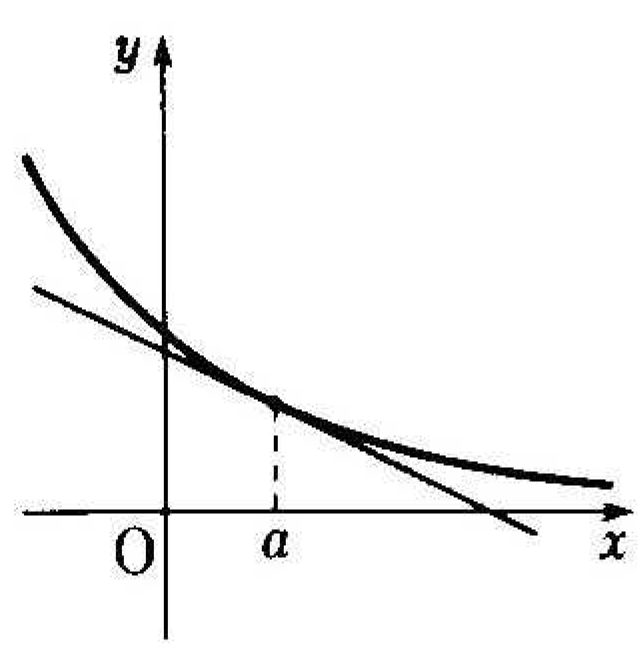
練習 4. 曲線 $y=e^{-x}$ $(x\geqq 0)$ の接線に関して次の問に答えよ。

(1) 接点の x 座標を $x=a$ とするとき，接線の方程式を求めよ。

(2) (1)の接線と x 軸および y 軸が囲む部分の面積を S とするとき，S を a の関数として表せ。

(3) S の最大値を求めよ。　（東海大）

ヒント これは面積とはいうものの，三角形の面積ですから，本質的には接線の練習問題というべきかもしれません。



それはともかく：——

(1)　$y=e^{-x}$　$\therefore$　$y'=-e^{-x}$

ですから，求める接線は

$$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$$

$$\therefore\quad y=-e^{-a}x+(a+1)e^{-a}\quad\cdots\cdots(*)$$

となります。

(2) 接線 (＊) が x 軸，y 軸と交わる点は

$(a+1,\ 0)$ および $(0,\ (a+1)e^{-a})$

ですから

$$S=\frac{1}{2}(a+1)\cdot(a+1)e^{-a}=\frac{1}{2}(a+1)^2e^{-a}$$

(3) $$\frac{dS}{da}=\frac{1}{2}\{-(a+1)^2e^{-a}+2(a+1)e^{-a}\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+1)e^{-a}(a-1)$$

です。題意からもちろん $a>0$ ですから，$a=1$ のとき最大値 $\dfrac{2}{e}$ をとります。

練習 5. 曲線

$$y=\sin x(1-\cos 2x)\quad(0\leqq x\leqq \pi)$$

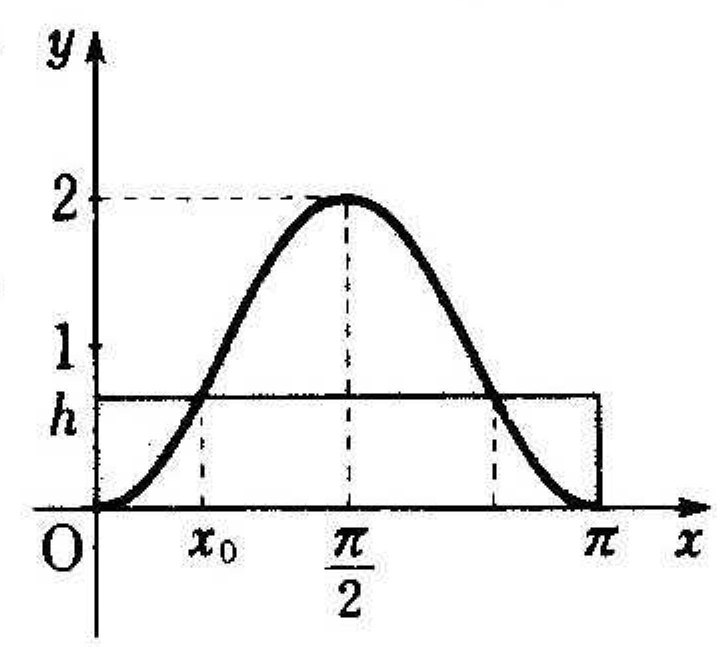
と x 軸で囲まれた図形をAとする。x 軸の $0\leqq x\leqq \pi$ の部分を底辺とする長方形 B を x 軸の上方に作るとき，Aの外側にあるBの部分の面積と，Bの外側になるAの部分の面積の和 S を最小にする B の高さを求め，その最小値を求めよ。　（新潟大）

ヒント $y=\sin x(1-\cos 2x)$ はスゴクめんどうそう。しかし，$\sin x$ で表してみると

$$y=\sin x\{1-(1-2\sin^2 x)\}$$
$$=2\sin^3 x$$

オヤ，オヤ，これはまた，なんと簡単!!

さて，長方形の高さを h としますと，$0<h<2$ としていいでしょう。



$$2\sin^3 x=h$$

を満足する x の値は $[0,\ \pi]$ に 2 つありますが，小さいほうを x_0 としますと

$$S=2\left[\int_0^{x_0}(h-2\sin^3 x)dx+\int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^3 x-h)dx\right]$$

となります。ところが

$$\int(h-2\sin^3 x)dx=hx+2\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$$

$$\therefore\quad S=2\left[2\left(hx_0+2\cos x_0-\frac{2}{3}\cos^3 x_0\right)-\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}h\right]$$

ところが $h=2\sin^3 x_0$ なのですから

$$S=(8x_0-2\pi)\sin^3 x_0-\frac{8}{3}\cos^3 x_0+8\cos x_0-\frac{8}{3}$$

オヤ，コレハマタ，予想に反してめんどうなことになった。しかし，ここが肝心なところだ。

$$\frac{dS}{dx_0}=8\sin^3 x_0+(8x_0-2\pi)\cdot 3\sin^2 x_0\cos x_0$$
$$-8\cos^2 x_0(-\sin x_0)-8\sin x_0$$
$$=3(8x_0-2\pi)\sin^2 x_0\cos x_0$$

ヤレヤレ，三転シテスゴクカンタンニナッタナア。$x_0=\dfrac{\pi}{4}$ で S は最小値をとること，したがって答は高さ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，最小値は

$$\frac{10\sqrt{2}-8}{3}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

⑩ パラメーターで表された図形の面積

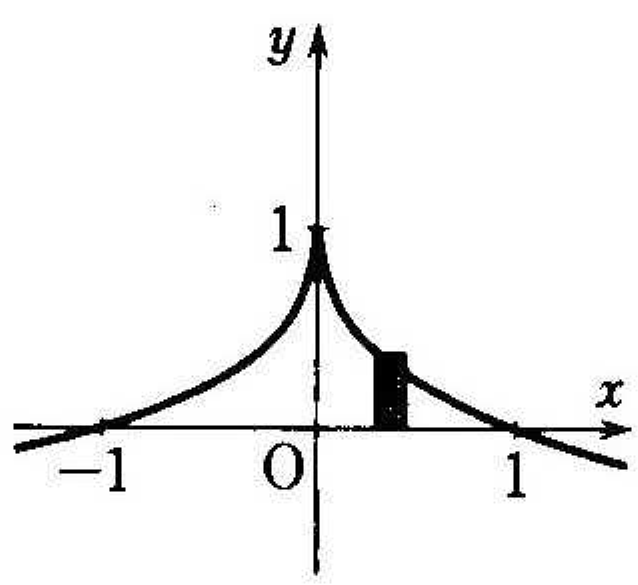
1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

パラメーターを殺して使うとめんどうになるものの典型と知るべし。生かして使ってこそパラさんも働く，というものだ。

◆ このセクションではパラメーターで表された図形の面積を求める練習をするのが目的です。

■練習 1. $x=t^3$, $y=1-t^2$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(ヒント) まず，何はともあれ，曲線のだいたいのグラフを知らなければなりません。t にいろいろな値を入れて，$(x,\ y)$ を求め，それをなめらかに結んでもよいし，t を消去して x, y の関係を求めてグラフをかいてみてもよいでしょう。結果は上のようになり，y 軸について対称です。



よって，求める面積を S とすると

$$S=2\int_0^1 y\,dx$$

となります。ところが

$$y=1-t^2,\quad dx=3t^2dt$$

x	$0\ \cdots\cdots\ 1$
t	$0\ \cdots\cdots\ 1$

ですから

$$S=2\int_0^1(1-t^2)\cdot 3t^2dt$$
$$=6\int_0^1(t^2-t^4)dt$$
$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$
$$=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=6\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$$

答 $\frac{4}{5}$

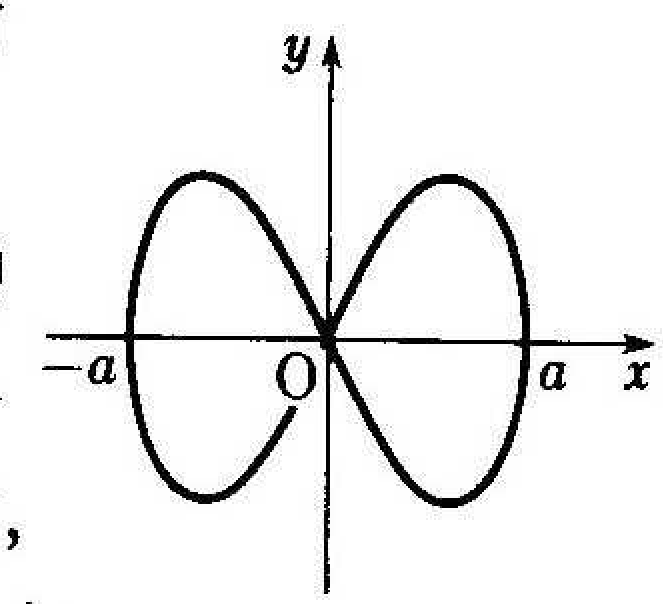
(注) 一般にパラメーターで表されている曲線のグラフの概形を知るためには，パラメーターにいろいろ値を入れて点をプロットするほうがラクです。では，もう1つ：——

■練習 2. 次の曲線の囲む部分の面積を求めよ。

$$x=a\sin t,\quad y=a\sin 2t\quad (a>0)$$

(中央大)

(解) 曲線の概形は右のようになるから第1象限の部分$\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$の面積を求めて4倍すればよい。したがって，求める面積を S とすると



$$S=4\int_0^a y\,dx$$

$$y=a\sin 2t,\quad dx=a\cos t\,dt$$

x	$0\ \cdots\cdots\ a$
t	$0\ \cdots\cdots\ \frac{\pi}{2}$

であるから

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin 2t\cdot a\cos t\,dt$$
$$=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt$$

$\cos t=u$ とおくと

$$=8a^2\int_1^0(-u^2)du$$
$$=-8a^2\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^0$$
$$=\frac{8}{3}a^2$$

答 $\frac{8}{3}a^2$

* * *

◆ では，総合的な問題を練習してみましょう。

練習 3. 曲線 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos^2\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

について，次の問に答えよ。

(1) この曲線上の点で原点に最も近いものを求めよ。

(2) この曲線と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。（愛知教育大）

ヒント (1) 原点から曲線上の1点 (x, y) までの距離を d としますと

$$d^2=x^2+y^2=2\cos^4\theta+\sin^6\theta$$

$\sin^2\theta=t$ とおきますと $0\leqq t\leqq1$ で，

$$d^2=2(1-t)^2+t^3$$
$$=t^3+2t^2-4t+2$$
$$\therefore\ \frac{d(d^2)}{dt}=3t^2+4t-4=(t+2)(3t-2)$$

ゆえに d^2 は $t=\dfrac{2}{3}$ で最小値をとることがわかります。そして，この点は

$$x=\sqrt{2}\cos^2\theta=\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$y=\sin^3\theta=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

ゆえに求める点は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)$ であることがわかります。

(2) さて，本番は面積ですね。グラフの概形は自分でやってみてくださいよ。

求める面積を S としますと，

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}ydx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^3\theta(-2\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\sin^4\theta\cos\theta d\theta$$

そこで $\sin\theta=t$ とおきますと

$$S=\int_0^1 2\sqrt{2}t^4dt=\left[\frac{2\sqrt{2}}{5}t^5\right]_0^1$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$ ……答

練習 4. 曲線 $y=f(x)$ は

$$\begin{cases} x=t-4\sin^2\dfrac{t}{4} \\ y=1-\cos t \end{cases}$$

によって与えられている。

(1) $0\leqq t\leqq3\pi$ の範囲で曲線の増減，極値を調べてグラフの概形をかけ。

(2) $0\leqq t\leqq2\pi$ の範囲で曲線と x 軸とによって囲まれる部分の面積を求めよ。

（大阪市大）

解 (1) $x=t-4\sin^2\dfrac{t}{4}$

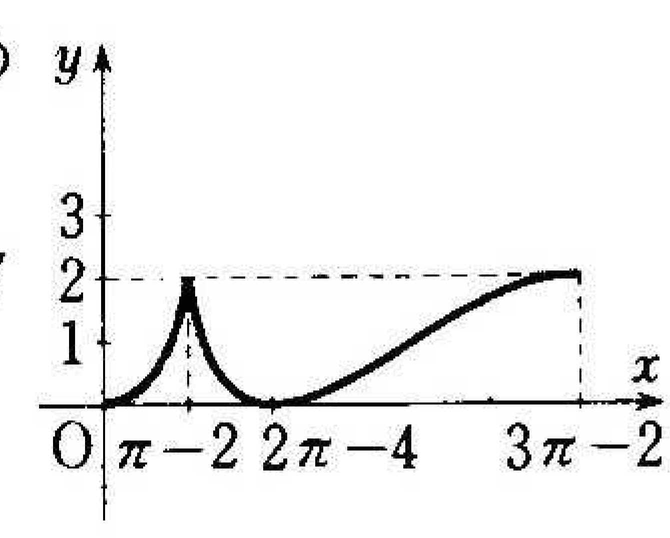
$$=t+2\cos\frac{t}{2}-2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\sin\frac{t}{2}}$$
$$=2\tan\frac{t}{2}\left(1+\sin\frac{t}{2}\right)$$

ゆえに，増減表は下のようである。

t	0		π		2π		3π
$\dfrac{dy}{dx}$	0	+	∞ | $-\infty$	−	0	+	0
y	0	↗	2 max.	↘	0 min.	↗	2
x	0		$\pi-2$		$2\pi-4$		$3\pi-2$

ゆえにグラフは右のようになる。



(2) 求める面積を S とすると，

$$0\leqq x\leqq2\pi-4$$

の範囲でグラフは $x=\pi-2$ について対称であるから

$$S=2\int_0^{\pi-2}ydx$$
$$=2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\left(1-\sin\frac{t}{2}\right)dt$$
$$=2\left[t-\sin t+2\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}t+\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=2\pi-\frac{16}{3}$$ ……答

面積の極限を求める問題

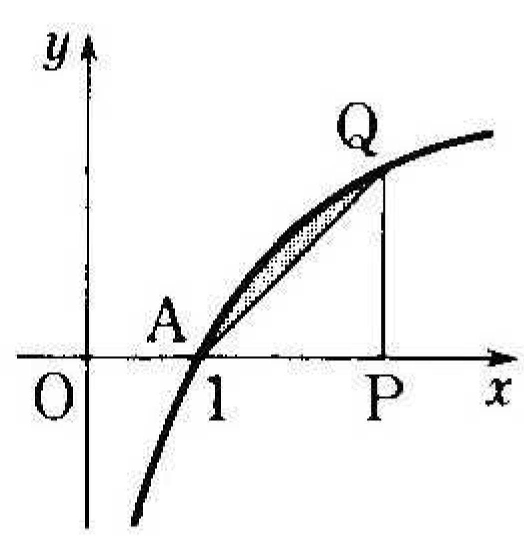
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈面積を計算して，さらに，その極限を求める，というのに難問のあろうハズはない。まさに飲んでかかるべし。

◆ 面積を求めるだけでなく，それを分割したり，極限を求めたり，最大値を求めたり，といった問題が多いのです。ここでは，面積の極限を求めるものを練習しましょう。

■練習 1. 平面上に3点 $A(1,\ 0)$，$P(t,\ 0)$，$Q(t,\ \log t)$ をとる。曲線 $y=\log x$ と線分 AQ とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{\triangle APQ}$ を求めよ。（三重大）

（解） $y=\log x$ と PQ と x 軸とで囲む面積は



$$\left|\int_1^t \log x dx\right|$$
$$=\left|\Big[x\log x\Big]_1^t-\int_1^t x\cdot\frac{1}{x}dx\right|$$
$$=|t\log t-(t-1)|$$
$$=|t\log t-t+1|$$

であり，また

$$\triangle APQ=\frac{1}{2}|t-1|\cdot|\log t|$$

ですから，図からわかるように

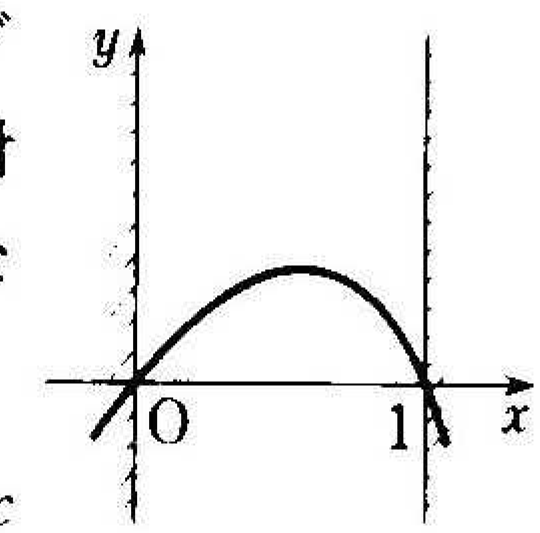
$$S(t)=\left|(t\log t-t+1)-\frac{1}{2}(t-1)\log t\right|$$
$$=\frac{1}{2}|t\log t+\log t-2t+2|$$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{\triangle APQ}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}|t\log t+\log t-2t+2|}{\frac{1}{2}|t\log t-\log t|}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left|1+\frac{1}{t}-\frac{2}{\log t}+\frac{2}{t\log t}\right|}{\left|1-\frac{1}{t}\right|}=\frac{1}{1}=1$$

（注） $1<t$，$0<t<1$ に分けてやってもいいし，この解のように絶対値で処理してもいいのです。あるいは $t\longrightarrow\infty$ のところが問題なのですから，はじめから $t>1$ の場合だけ扱ってもかまいません。ただ，答案はそのことをハッキリ書いておくべきです。

■練習 2. m を与えられた自然数とし，曲線 $y=x(1-x)^{\frac{2}{m}}$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_m とする。$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_m}{m^2}$ を求めよ。

（解） $y=x(1-x)^{\frac{2}{m}}$ のグラフは，m の自然数値に対してほぼ右の図のようになる。



$$\therefore\ S_m=\int_0^1 x(1-x)^{\frac{2}{m}}dx$$
$$=\left[x\cdot\frac{-1}{\frac{2}{m}+1}(1-x)^{\frac{2}{m}+1}\right]_0^1$$
$$-\int_0^1 1\cdot\frac{-1}{\frac{2}{m}+1}\cdot(1-x)^{\frac{2}{m}+1}dx$$
$$=\frac{m}{m+2}\int_0^1(1-x)^{\frac{m+2}{m}}dx$$
$$=\frac{m}{m+2}\cdot\frac{-1}{\frac{m+2}{m}+1}\left[(1-x)^{\frac{m+2}{m}+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{m}{m+2}\cdot\frac{-m}{2m+2}(-1)$$
$$=\frac{m^2}{2(m+1)(m+2)}$$

$$\therefore\ \frac{S_m}{m^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_m}{m^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

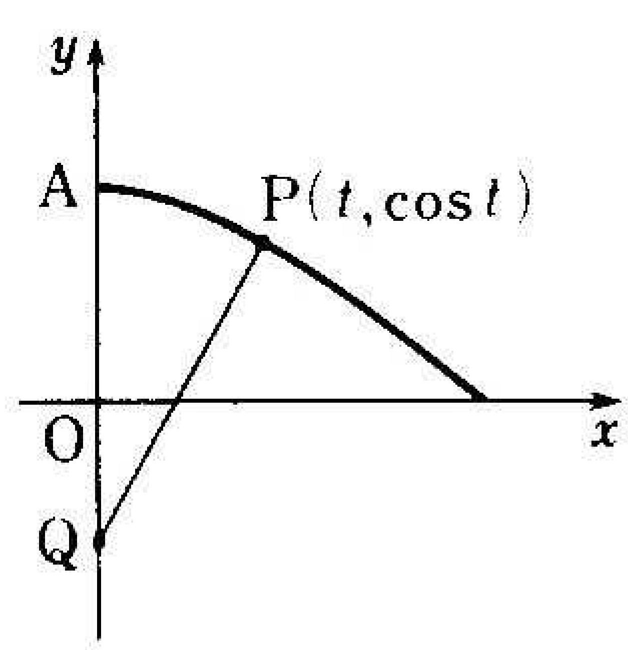
練習 3. 曲線 $y=\cos x$ 上の点 $P(t, \cos t)$, $0<t<\frac{\pi}{2}$ におけるこの曲線の法線（接線に垂直な直線）が y 軸と交わる点をQとするとき，次の問に答えよ。

(1) Qの y 座標は負であることを示せ。

(2) この曲線と y 軸と線分 PQ とによって囲まれる部分の面積を $S(t)$ とするとき，極限値 $\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

（信州大）

ヒント (1) 点Pにおける法線の方程式は



$$y-\cos t=\frac{1}{\sin t}(x-t)$$

つまり

$$y=(x-t)\operatorname{cosec} t+\cos t$$

です。だから，点Qは

$$Q(0,\ -t\operatorname{cosec} t+\cos t)$$

です。つまり，点Qの y 座標は

$$Y=-\frac{t}{\sin t}+\cos t=\frac{-t+\sin t\cos t}{\sin t}$$

$$=\frac{\sin(2t)-(2t)}{2\sin t}$$

ところが $0<\theta$ のとき $\sin\theta<\theta$ でしたね。ここでは $0<t<\frac{\pi}{2}$ であることから

$$\sin 2t<2t,\ 0<\sin t$$

よって，証明された。

(2) 次に $S(t)$ を求めなければなりません。これは

$$S(t)$$

$$=\int_0^t[\cos x-\{(x-t)\operatorname{cosec} t+\cos t\}]dx$$

$$=\left[\sin x-\left(\frac{x^2}{2}-tx\right)\operatorname{cosec} t-x\cos t\right]_0^t$$

$$=\sin t+\frac{t^2}{2\sin t}-t\cos t$$

ですから

$$\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin t}{t}+\frac{t}{2\sin t}-\cos t\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$$

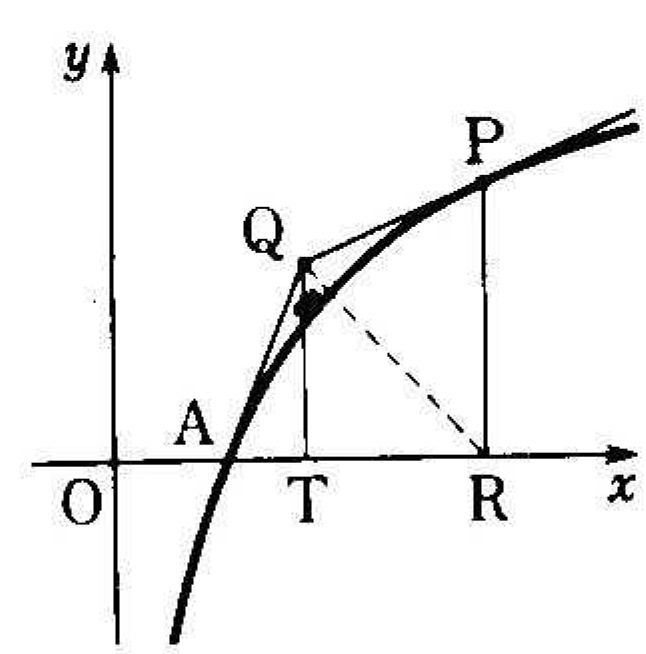
答 $\frac{1}{2}$

練習 4. 曲線 $y=\log x$ 上の定点 A(1, 0) と動点 P とにおける接線の交点を Q とする。また，P, Q から x 軸へ下した垂線の足をそれぞれ R, T とし，この曲線と PR, AR によって囲まれた部分の面積を S, △AQR の面積を S_1, △APT の面積を S_2, とする。

(1) $\frac{S_1}{S}$ の値を求めよ。

(2) Pがこの曲線に沿ってAに近づくとき $\frac{S_2}{S}$ の極限値を求めよ。（京都工繊大）

ヒント どうもこれはゴタゴタしていて，試験場でなら，一読してイヤになるところです。こういうものこそ，各個撃破で行くことが必要です。では：——



$y=\log x$ より $y'=\frac{1}{x}$ ですから

Aにおける接線は

$$y=x-1$$

$P(t,\ \log t)$ における接線は

$$y=\frac{1}{t}x+\log t-1$$

その交点Qは

$$\left(\frac{t\log t}{t-1},\ \frac{t\log t}{t-1}-1\right)$$

$$\therefore\quad S_1=\frac{1}{2}\left|t\log t-t+1\right|$$

$$S=\left|\int_1^t\log x\,dx\right|$$

$$=\left|\Big[x\log x-x\Big]_1^t\right|$$

$$=|t\log t-t+1|=2S_1$$

答 (1)は $\frac{1}{2}$, (2)も $\frac{1}{2}$

体積の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈体積の求め方は基解で終わったのです。ここでは，積分計算のテクニックや公式だけが新しく登場してくるのだ。

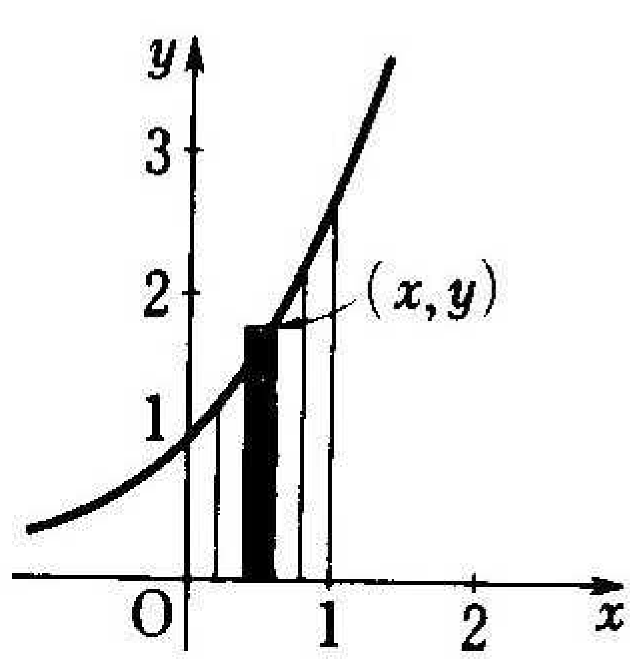
◆ 体積の求め方で大切なことは２つあります。１つは回転体の体積，１つは非回転体の体積を求めることです。とはいっても，本質的にはまったく同じことなんです。ただ，目のつけどころがちがう!!

*　*　*

◆ では，まず **回転体** から：——

回転体の場合には，回転軸に垂直に薄く切ると円盤ができる，その体積の和を求める，というだけのことなんです。では：——

■練習 1. $y=e^x$ と x 軸と２直線 $x=0,\ x=1$ の囲む部分を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。



（ヒント） 大切なことは基解でやってある通りです。ただ，積分する関数が微積だというにすぎません。

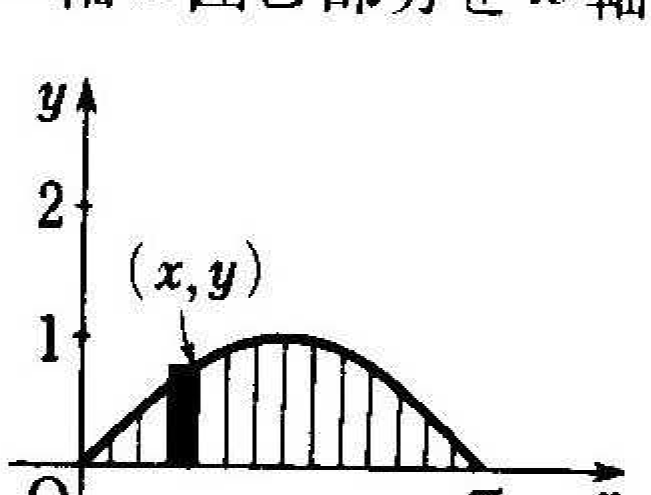
（解） 求める体積を V としますと

$$V=\int_0^1 \pi y^2 dx=\pi\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

答 $\dfrac{\pi}{2}(e^2-1)$

■練習 2. $y=\sin x$ と x 軸の囲む部分を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。ただし，$0\leqq x\leqq \pi$ とする。



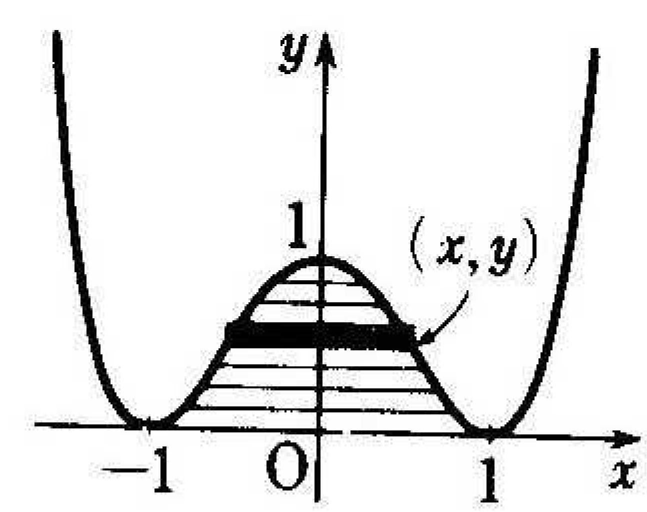
（解） 求める体積を V とすると

$$V=\int_0^\pi \pi y^2 dx$$

$$=\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

■練習 3. $y=(x^2-1)^2$ と x 軸の囲む部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。



（ヒント） まずグラフをかいてみますと右のようです。だから，求める体積 V は

$$V=\int_0^1 \pi x^2 dy$$

となります。この x^2 を y で表す必要があります。それは

$$y=(x^2-1)^2$$

$$\therefore\quad x^2-1=\sqrt{y}$$

$$\therefore\quad x^2=\sqrt{y}+1$$

とうっかりやってはマチガイ!!

$$x^2-1=\pm\sqrt{y}$$

$$\therefore\quad x^2=1\pm\sqrt{y}$$

ところで，y をきめると x^2 は２つきまるのですが，大きいほうが適さない。つまり

$$x^2=1-\sqrt{y}$$

なんです。ここの混乱がスゴク多いもの，注意してください。さて，

$$V=\pi\int_0^1(1-\sqrt{y})dy$$

$$=\pi\left[y-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}$$

答 $\dfrac{\pi}{3}$

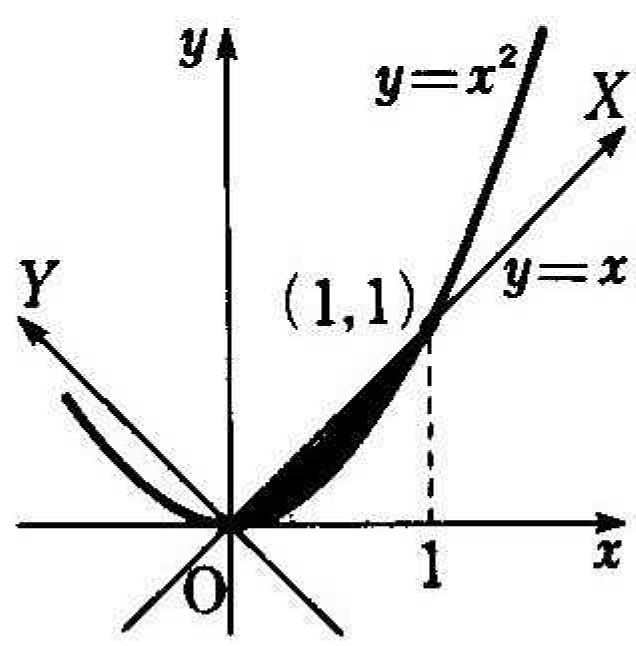
◆ 回転体の変わり種の1つは，座標軸に平行でない直線のまわりに回転するときです。例えば，これです。

練習 4. $y=x^2$ と $y=x$ の囲む部分を直線 $y=x$ のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

ヒント 座標軸を原点のまわりに45°回転しますと，新座標 $(X,\ Y)$ との間に

$x=\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$

なる関係があります。



したがって，$y=x^2$ は

$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}}=\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

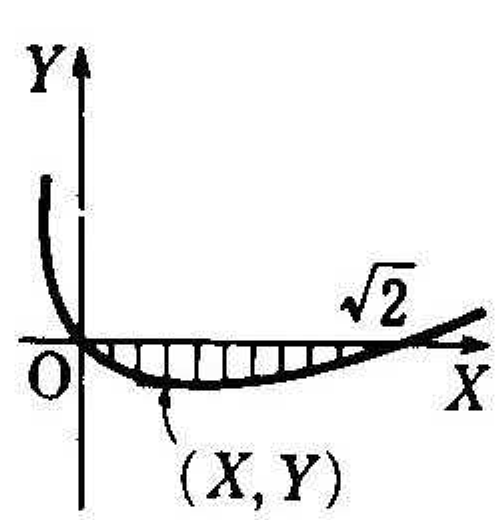
となります。これから Y を求めてみると

$$Y=\frac{(2X+\sqrt{2})\pm\sqrt{8\sqrt{2}X+2}}{2}$$

となりますが，グラフからみてすぐわかるように複号のうち＋はダメ!! つまり

$$Y=\frac{(2X+\sqrt{2})-\sqrt{8\sqrt{2}X+2}}{2}$$

ゆえに求める体積を V としますと



$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi Y^2dX$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}\{(2X+\sqrt{2})-\sqrt{8\sqrt{2}X+2}\}^2dX$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}\{(2X+\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2}X+2)-2(2X+\sqrt{2})\sqrt{8\sqrt{2}X+2}\}dX$$

あとはただヒタスラに計算するだけ。

答 $\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$

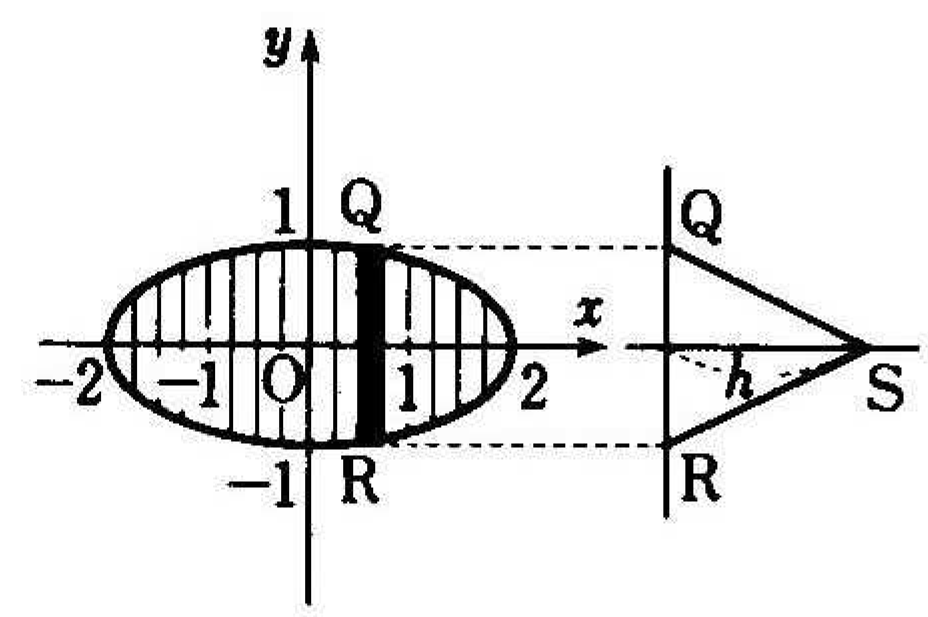
＊　＊　＊

◆ 次は **非回転体** の場合です。この場合にも，要するに適当に細分し，その和を求めるのですが，その際，どのように細分するかで，めんどうにもやさしくもなるのです。では，次をやってみませんか。

練習 5. だ円 $x^2+4y^2=4$ において，y 軸に平行な弦をQRとする。これを底辺として一定の高さ h の二等辺三角形SQRをだ円を含む平面に垂直な平面上に作る。△SQRを x 軸に沿うて動かすとき，その作る立体の体積を求めよ。

ヒント

$$\triangle SQR=\frac{1}{2}\overline{QR}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot h=yh$$



ゆえに求める体積を V とすると

$$V=2\int_0^2 yhdx=2h\int_0^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$$

$$=\pi h$$

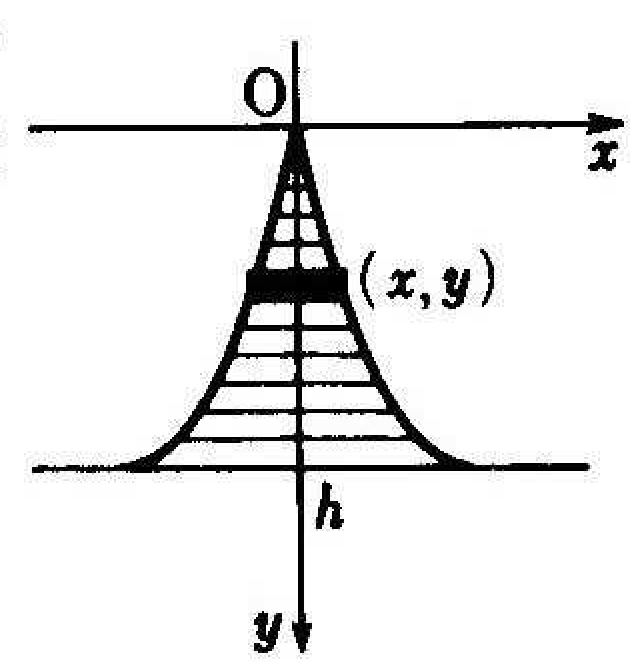
答 πh

注 $2\displaystyle\int_0^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$

は半径2の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ ですから，すぐ求められますが，$x=2\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換してやってもちろんいいのです。

練習 6. 底面が1辺 a の正方形で，底面に平行な平面で切った切り口がいずれも正方形で，その1辺は頂点までの高さの平方に比例するという。この立体の体積を求めよ。ただし，高さは h とする。

ヒント 高さ y のときの切り口の正方形の1辺を x としますと，



$a:x=h^2:y^2$

$\therefore\quad x=\dfrac{ay^2}{h^2}$

$\therefore\quad V=\displaystyle\int_0^h\frac{a^2}{h^4}y^4dy$

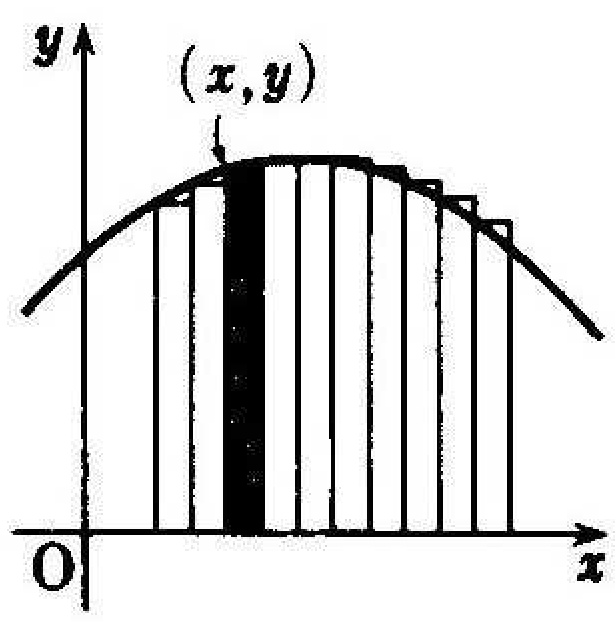
$=\dfrac{a^2h}{5}$ ……答

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

回転体の体積の求め方

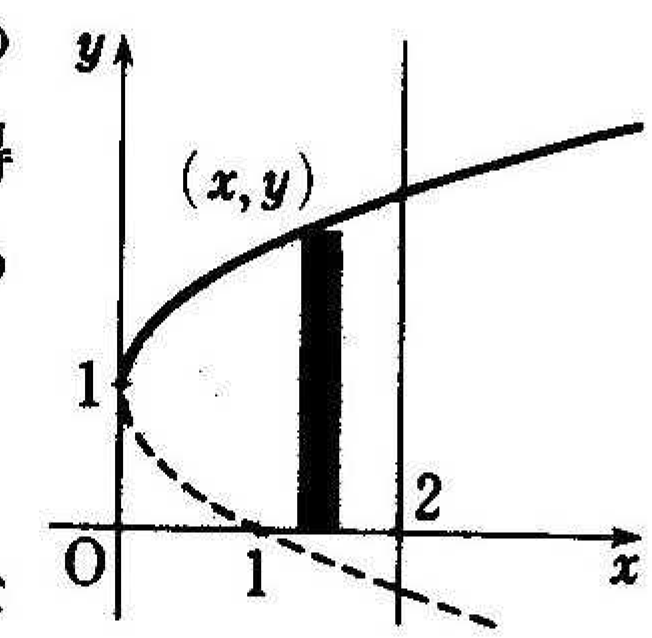
◆回転体の体積の求め方はすでに基解で卒業したことだが，実際の計算は，微積でもやり大学でもやる，というわけだ。

◆ 回転体の体積を求めるには，要するに回転軸に垂直に切って得られる円盤の体積を求めるのでしたね。(☞「基解」p.254)



微積では，積分計算がややめんどうになるだけで，べつにちがいはありません。では，さっそくながら，これを：――

練習 1. $y=1+\sqrt{x}$，$y=0$，$x=0$，$x=2$ の囲む部分を x 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。

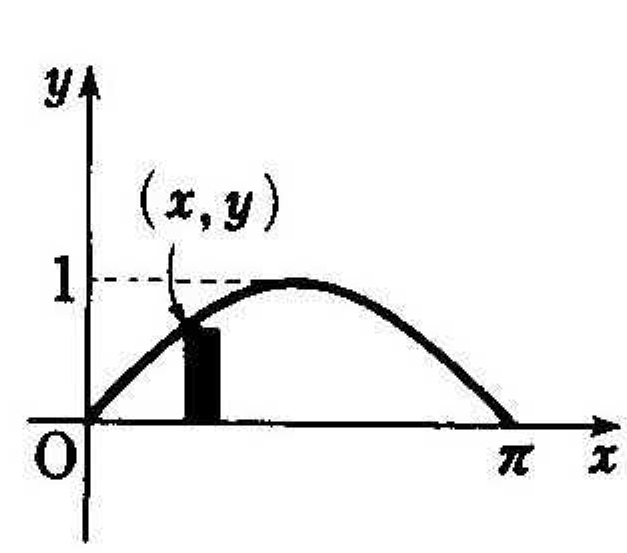


ヒント　$y=1+\sqrt{x}$ のグラフは右のような曲線ですから，求める体積を V とすると，次のようです。

$$V=\int_0^2 \pi y^2 dx=\pi\int_0^2 (1+\sqrt{x})^2 dx$$
$$=\pi\int_0^2 (1+x+2\sqrt{x})dx$$
$$=\pi\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\left(4+\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

練習 2. $y=\sin x$ と x 軸と $x=0$ および $x=\pi$ の囲む部分を x 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。

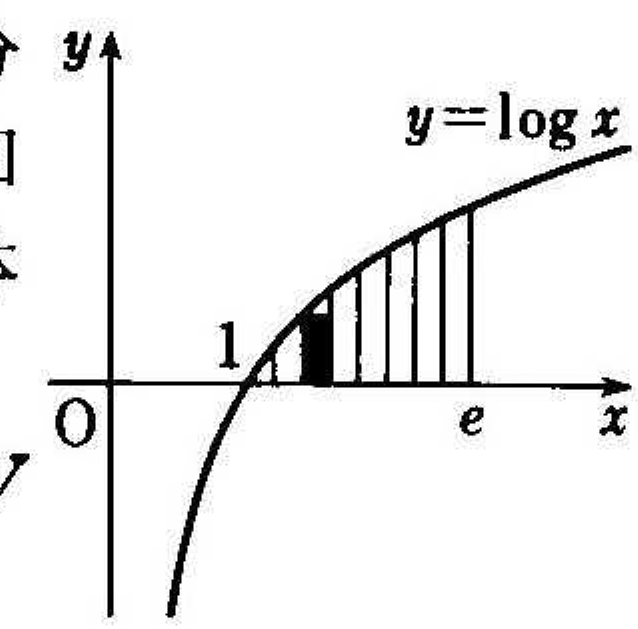
解　求める体積を V とすると，



$$V=\int_0^\pi \pi y^2 dx$$
$$=\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx$$
$$=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\frac{\pi^2}{2}$$

答　$\dfrac{\pi^2}{2}$

練習 3. 曲線 $y=\log x$ と x 軸および $x=e$ で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。



ヒント　求める体積を V としますと，

$$V=\int_1^e \pi y^2 dx=\pi\int_1^e (\log x)^2 dx$$

この積分は **部分積分** を使うのでしたね。

$$=\pi\int_1^e 1\cdot(\log x)^2 dx$$
$$=\pi\left\{\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}dx\right\}$$
$$=\pi\left\{e-2\int_1^e \log x dx\right\}$$
$$=\pi\left[e-2\left\{\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}\right]$$
$$=\pi[e-2\{e-(e-1)\}]$$
$$=\pi(e-2)$$

答　$\pi(e-2)$

＊　＊　＊

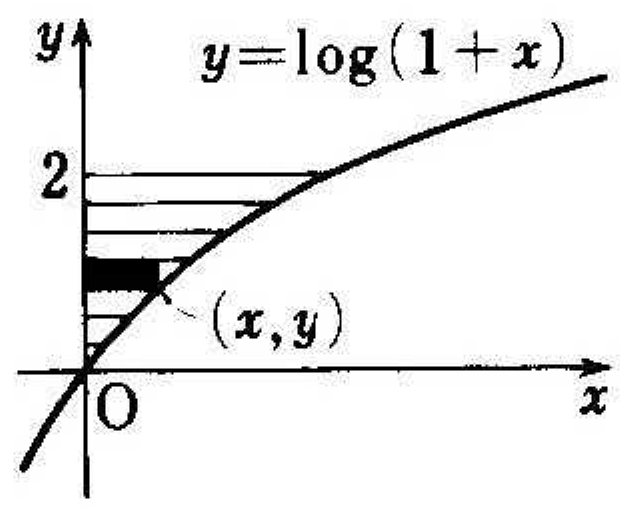
◆ 今度は y 軸のまわりに回転する場合をやってみませんか。では，まずこれを：――

練習 4. $y=\log(1+x)$，$y=2$，y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。

ヒント　まず，何はともあれ，

$$y=\log(1+x)$$

のグラフをかいてみますと，右のようになります。だから，求める体積をVとしますと，



$$V=\int_0^2 \pi x^2 dy$$
$$=\pi\int_0^2 (e^y-1)^2 dy$$
$$=\cdots\cdots$$

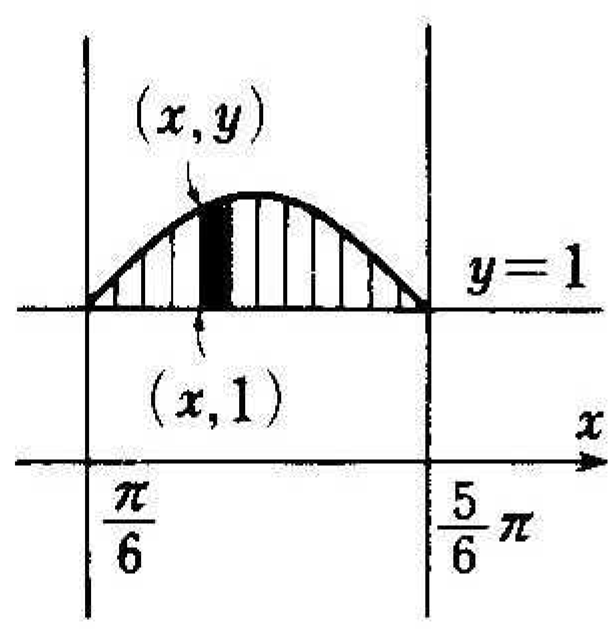
答　$\dfrac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$

(注)　上の解では

$y=\log(1+x)$ から $1+x=e^y$

を使ってあります。念のため。

練習 5. $y=2\sin x$ と $y=1\ \left(\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi\right)$ の囲む部分を $y=1$ のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。



(解)　求める体積をVとしますと，

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(y-1)^2dx$$
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2\sin x-1)^2dx$$
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(4\sin^2x-4\sin x+1)dx$$
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-4\sin x+1\right)dx$$
$$=\pi\Big[3x-\sin 2x+4\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$
$$=(2\pi-3\sqrt{3})\pi \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 微積に特に現れるのはパラメーターで表された場合です。これを次に練習しましょう。まず，これです。

練習 6. $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$ で表される曲線をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。$(a>0)$

(ヒント)　ふつうの回転体の体積の公式から出発すること。そして，その上で変数をθに変えるのです。つまり：――

(解)　求める体積をVとすると

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=2\pi\int_0^a y^2dx$$

$y=a\sin\theta$, $x=a\cos\theta$ ですから

$$dx=-a\sin\theta d\theta$$

$$\therefore\quad V=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin\theta)^2\cdot(-a\sin\theta)d\theta$$
$$=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$$
$$=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\pi a^3\left[-3\cos\theta+\frac{\cos 3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\pi a^3\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

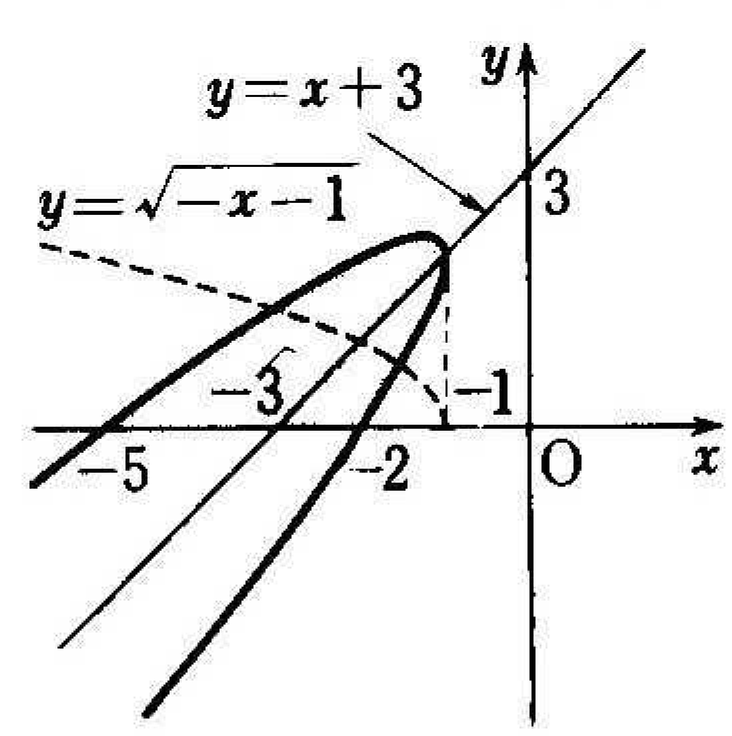
(注)　この立体は半径aの球なのですから，当然のことです。

練習 7. tがすべての実数の範囲を動くとき，$t^2+x+1=0$, $t^2-t+y-2=0$ を満足するx, yを座標とする点$(x,\ y)$の描く曲線と，x軸とで囲まれた部分をx軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　（秋田大）

(ヒント)　まず曲線の概形を求めたい。tを消去してみると，

$y=x+3\pm\sqrt{-x-1}$

となりますから，グラフをかいてみると右のようです。よって求める体積Vは



$$V=\pi\int_{-5}^{-1}(x+3+\sqrt{-x-1})^2dx$$
$$-\pi\int_{-2}^{-1}(x+3-\sqrt{-x-1})^2dx=\frac{81}{10}\pi$$

(注)　上の計算中，$\int(x+3)\sqrt{-x-1}dx$ の積分では $\sqrt{-x-1}=t$ と置換するとよい。いずれにしても計算はめんどうになる。必ずやりとげるファイトが必要だ。

◐ 非回転体の体積

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈非回転体の扱い方はめんどうだ。なぜか。その形をうまくとらえられないからなんです。なぜそうなるか。これこそ大問題だネ。

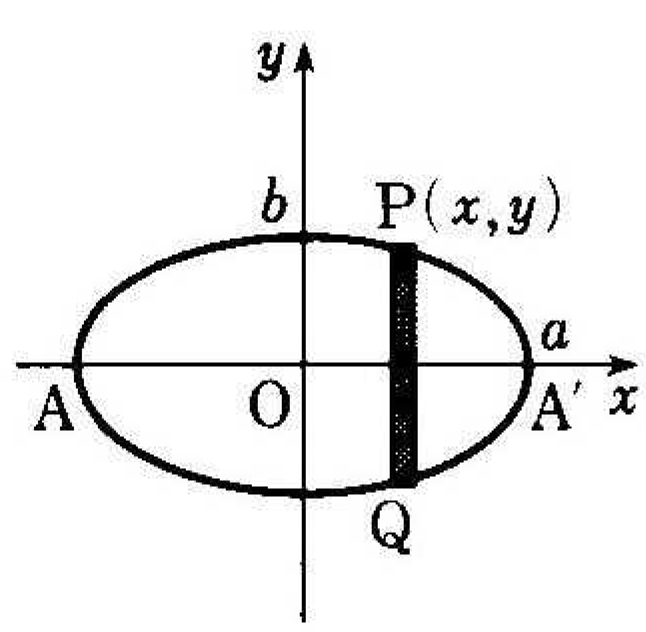
◆ 回転体に比べて，非回転体の体積を求めるのはめんどうです。というのも，その形のイメージがつかめないからです。だから，非回転体の体積を求める問題では，その形態のイメージをつかむことに重点をおくべきです。では，ともあれ，これを：——

■練習1. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の長軸 AA′ に垂直な弦 PQ を1辺とする正方形をこのだ円の面に垂直に作る。弦 PQ の中点が AA′ の上を A′ から A まで動くとき，このような正方形の描く立体図形の体積を求めよ。

ヒント x軸に垂直に薄く切ると正方形の板ができて，その体積は

$(2y)^2dx$

ですから，求める体積 V は



$$V=2\int_0^a(2y)^2dx=8\int_0^a y^2dx$$

ところが $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$\therefore\quad V=8\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{8b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{16}{3}ab^2$$

答 $\dfrac{16}{3}ab^2$

■練習2. だ円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の囲む立体の体積を求めよ。ただし，a, b, $c>0$.

解 平面 $x=x_0$ による切り口はだ円で，その方程式は

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0{}^2}{a^2}$$

すなわち

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{x_0{}^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{x_0{}^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

であるから，その面積は

$$\pi\left(b\sqrt{1-\frac{x_0{}^2}{a^2}}\right)\left(c\sqrt{1-\frac{x_0{}^2}{a^2}}\right)$$

$$=\pi bc\left(1-\frac{x_0{}^2}{a^2}\right)$$

である。ゆえに，求める体積は

$$V=2\int_0^a\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi abc$$

答 $\dfrac{4}{3}\pi abc$

注 特に $a=b=c=R$ ならば $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ となる。これは球の体積にほかならない!!

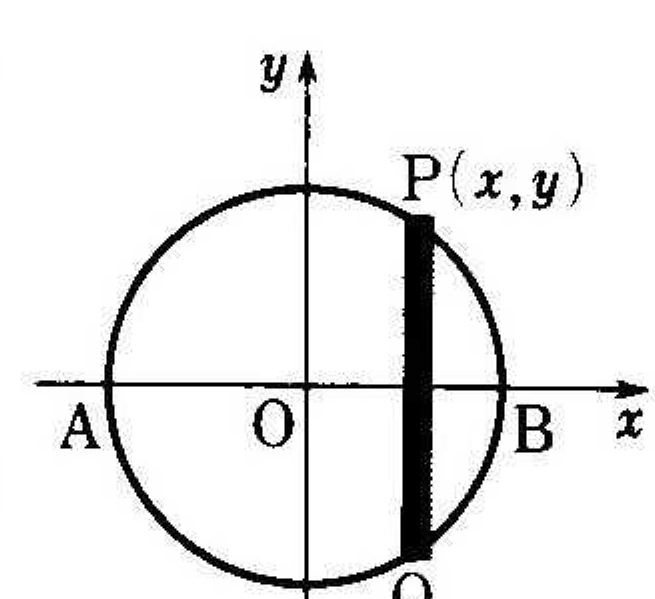
■練習3. 半径 a の円の直径 AB に垂直な弦 PQ を1辺とし，高さ一定 h の二等辺三角形 PQR をこの円に垂直に作る。PQ が動いてできる立体の体積を求めよ。

ヒント 求める体積 V は

$$V=2\int_0^a\frac{1}{2}(2y)hdx$$

$$=2h\int_0^a ydx$$

ところが $y=\sqrt{a^2-x^2}$ ですから



$$V=2h\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=2h\cdot\frac{\pi a^2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\pi ha^2$$

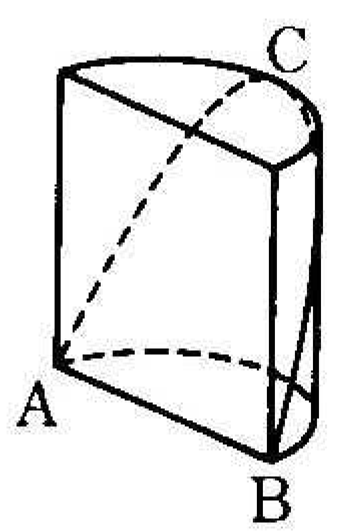
答 $\dfrac{1}{2}\pi ha^2$

*　*　*

◆ 非回転体の中には，立体のイメージがつかめなくて困るものも少なくありません。そのようなときには，座標面に平行な面による切り口を考えてみるとうまくいくことが多いものです。では，ひとつやってみませんか。

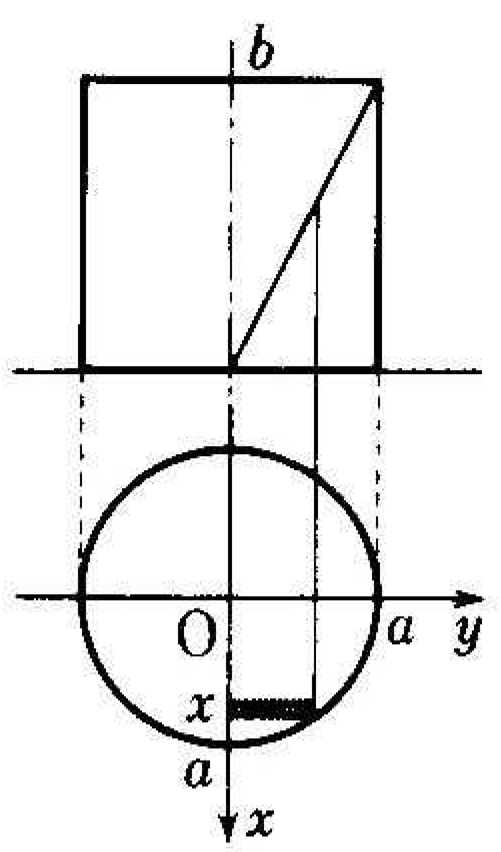
練習 4. 半径 a，高さ b の直円柱をその軸を含む平面で切って得られる半円柱がある。一端の半円の直径を AB，他端の半円の弧の中点をCとして，AB を含みCを通る平面でこの半円柱を2つに分かつとき，その2つの部分の体積の比を求めよ。

（名古屋市大）



ヒント　2つの部分に記号をつけておくと説明が書きやすいでしょう。そこで，2つの部分のうち，軸を含む方を V_1，他を V_2 としようか。

V_2 を求めるため，右下のような投影図をかいてみると便利でしょう。つまり，AB に垂直な平面で切った切り口は，



底辺の長さ $\sqrt{a^2-x^2}$

高さ $\dfrac{b}{a}\times\sqrt{a^2-x^2}$

の直角三角形であることがわかります。

$$\therefore\quad V_2=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{b}{a}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=\frac{2}{3}a^2b$$

また，

$$V_1=\text{半円柱の体積}-V_2$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2b-\frac{2}{3}a^2b$$

$$\therefore\quad V_1:V_2=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}$$

$$=(3\pi-4):4$$

答　$(3\pi-4):4$

練習 5. (1) 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の区間 $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

(2) a を $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ なる定数とする。$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なる x に対し，座標平面上の2点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(x,\ \sin ax)$ を結ぶ線分 AB を1辺とし，この平面に垂直な正三角形（$x=0$ のときは点となる）をつねにこの平面に対し同じ側に作る。x が0から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変わるとき，これらの正三角形の作る立体の体積 $V(a)$ を求めよ。

(3) a が $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$V(a)$ の最大値を求めよ。　（北大）

ヒント (1)　$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$=\frac{x-\tan x}{x^2}\cdot\cos x<0$$

より $f(x)$ は単調減少で，したがって $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 $\dfrac{2}{\pi}$ をとります。$\left(\because\ 0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}\ \text{で}\ \sin x<x<\tan x\right)$

(2)　$V(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2ax\,dx$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2ax}{2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\pi-\frac{\sin\pi a}{a}\right)$$

(3)　$\pi a=x$ とおきかえて(1)を使えばいいでしょう。すなわち

$$\frac{\sin\pi a}{a}=\pi\frac{\sin x}{x}\geqq\pi\cdot\frac{2}{\pi}=2$$

$$\left(\text{等号は}\ a=\frac{1}{2}\ \text{のとき}\right)$$

したがって，$V(a)$ の最大値は

$$\frac{\sqrt{3}(\pi-2)}{16}$$

となります。

●体積と最大·最小

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆体積の最大・最小を求めることは多くの場合応用上の意味もある。入試によく出るのも当然であろうか。

◆ 体積計算の練習のひとつとして，ここでは体積の最大・最小の問題を練習することにしましょう。

練習 1. 区間 $0\leqq x\leqq 1$ で曲線

$$y=\sin\pi x-a(x^2-x)$$

と x 軸とで囲まれる部分を，x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を最小にする a の値を求めよ。 (慶大)

解 $y^2=\{\sin\pi x-a(x^2-x)\}^2$

$$=\sin^2\pi x+2a(x-x^2)\sin\pi x+a^2(x^2-x)^2$$

ところが

$$I_1=\int_0^1\sin^2\pi x\,dx=\int_0^1\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\int_0^1(x-x^2)\sin\pi x\,dx$$

$$=\left[-(x-x^2)\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1(1-2x)\cos\pi x\,dx$$

$$=0+\frac{1}{\pi}\left[(1-2x)\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\sin\pi x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1=\frac{4}{\pi^3}$$

$$I_3=\int_0^1(x^2-x)^2dx$$

$$=\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)dx=\frac{1}{30}$$

ゆえに，

$$V=\pi\int_0^1y^2dx=\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{8a}{\pi^3}+\frac{a^2}{30}\right)$$

$$=\frac{\pi}{30}a^2+\frac{8}{\pi^2}a+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{dV}{da}=\frac{\pi}{15}a+\frac{8}{\pi^2}=\frac{\pi}{15}\left(a+\frac{120}{\pi^3}\right)$$

であるから $a=-\dfrac{120}{\pi^3}$ のとき最小値をとる。

答 $a=-\dfrac{120}{\pi^3}$

注 $y=\sin\pi x-a(x^2-x)$ が x 軸と交わるかどうかとか，符号がどうか，などを吟味する必要はまったくありません。面積を求めるときと混同しないように注意してください。

練習 2. (1) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 上の x 座標が α $(0<\alpha<1)$ である点における接線の方程式を求めよ。

(2) 上の接線と x 軸，y 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を最大にする α の値を求めよ。

ヒント (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より

$$y=(1-\sqrt{x})^2$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=2(1-\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

ゆえに $x=\alpha$ における接線の方程式は

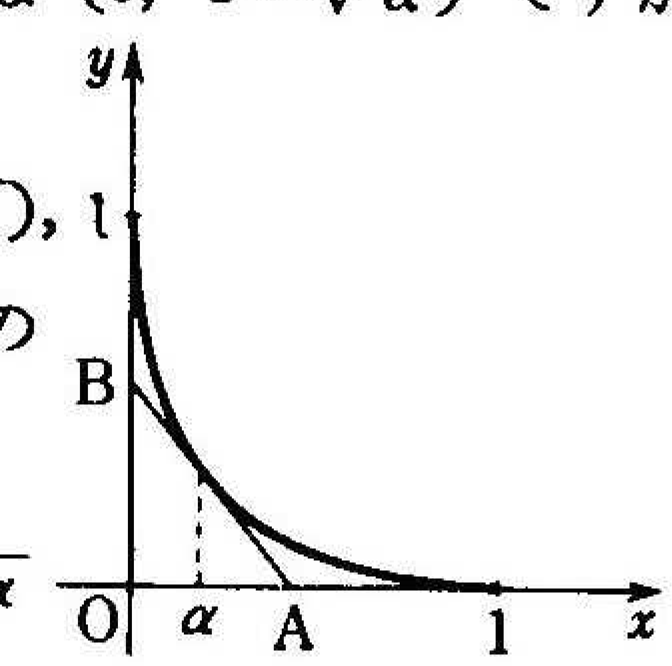
$$y-(1-\sqrt{\alpha})^2=-\frac{1-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}(x-\alpha)$$

すなわち

$$y=\left(1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)x+(1-\sqrt{\alpha})\quad\cdots\cdots\text{答}$$

となります。

(2) 上の接線が x 軸と交わる点は $(\sqrt{\alpha},\ 0)$，y 軸と交わる点は $(0,\ 1-\sqrt{\alpha})$ ですから，求める体積 V は，底面の半径 $(1-\sqrt{\alpha})$，高さ $\sqrt{\alpha}$ の円すいの体積に等しく



$$V=\frac{\pi}{3}(1-\sqrt{\alpha})^2\sqrt{\alpha}$$

となります。これを最大にするαは$\dfrac{1}{9}$です。

答　$\dfrac{1}{9}$

*　*　*

◆ この種の問題は当然総合的なものが主となるわけですが，次のものなども，その色彩がいよいよ強いと申せましょう。

練習 3. 2つの曲線

$$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots①$$

$$x=ay^2-1 \quad \left(a>\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots②$$

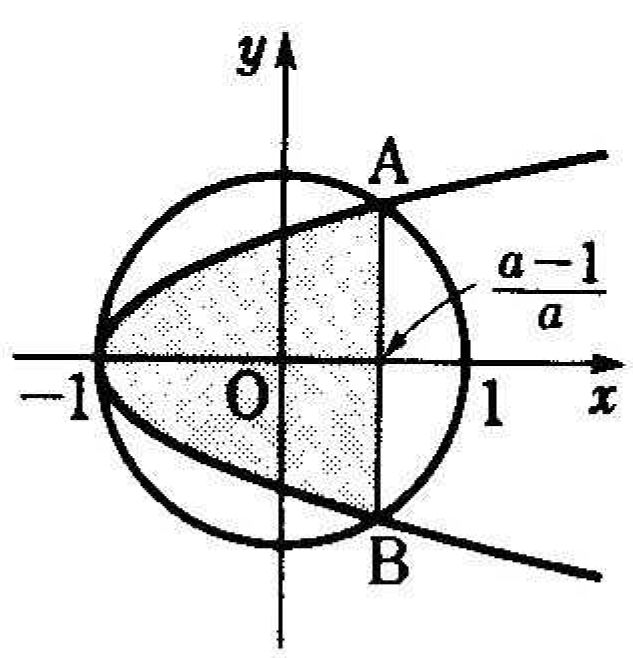
のx軸に垂直な共通弦をABとする。ABと曲線②によって囲まれる図形をx軸のまわりに回転してできる回転体について，次の問に答えよ。

(1) この回転体の体積をaで表せ。

(2) aがいろいろの値をとって変わるとき，この立体の体積の最大値を求めよ。

（佐賀大）

ヒント 何はともあれグラフをかいてみると右のようになります。そこで交点のx座標が必要になります。



$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=ay^2-1 \end{cases}$$

を連立させて，解いてみましょう。第2式よりy^2を求めて

$$y^2=\frac{x+1}{a}$$

これを第1式に代入して

$$x^2+\frac{x+1}{a}=1$$

これを解いて交点のx座標は$\dfrac{a-1}{a}$となります。さて：——

(1) 求める回転体の体積をVとしますと

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}} y^2dx=\pi\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}}\frac{x+1}{a}dx$$

$$=\pi\left[\frac{(x+1)^2}{2a}\right]_{-1}^{\frac{a-1}{a}}=\frac{\pi(2a-1)^2}{2a^3}$$

となります。ふつうは体積を求める部分がめんどうで，最大・最小の部分はごく簡単なものですが，これは逆。これからがめんどう。

(2) $V=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(2a-1)^2}{a^3}$

ですから

$$f(a)=\frac{(2a-1)^2}{a^3}$$

とおきますと，

$$f'(a)=\frac{4(2a-1)a^3-3a^2(2a-1)^2}{a^6}$$

$$=-\frac{(2a-1)(2a-3)}{a^4}$$

増減表を作ってみますと，下の通り。

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$		$\frac{3}{2}$	
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		↗	極大	↘

ゆえに$a=\dfrac{3}{2}$のとき$f(a)$したがってVは極大かつ最大になりましょう。そして，その最大値は$\dfrac{16\pi}{27}$となります。

練習 4. 曲線$y=(x-1)^2$ $(-1<x<1)$上の2つの動点P，Qのx座標の差は1であるとする。弧PQ，y軸およびP，Qからy軸に下した2つの垂線によって囲まれた2つの部分からなる図形を，y軸のまわりに1回転してできる立体の体積の最小値を求めよ。

（岡山大）

ヒント P，Qのうちx座標の小さいほうをtとしますと，$\sqrt{y}=-(x-1)$に注意して，体積Vは

$$V=\pi\int_{t^2}^{(t-1)^2}(1-\sqrt{y})^2dy$$

$$=\pi\left(\frac{1}{6}-t^2-2t^3\right)$$

これからVの最小値は$\dfrac{7}{54}\pi$となります。

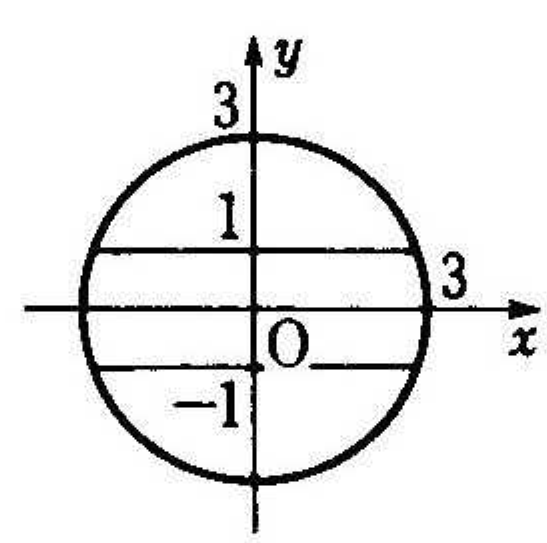
○体積を分割する問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆面積を分割する問題が多いのですが，体積を分割するものは少ない。というのも，とかく方程式を解くのがめんどうになるからデス。

◆ このセクションでは，体積の分割をエサにして，体積計算の練習をするのが目的です。では，さっそくながら，これです。

■練習 1. 球の1つの直径を3等分する点を通り，この直径に垂直な平面を作ると，球の体積はどのように分割されるか。



ヒント 半径3の球について考えてもさしつかえありませんね。

さて，xy 平面上で，原点を中心とし，半径3の円を y 軸のまわりに回転して得る球の体積を平面 $y=1$，$y=-1$ で分割することを考えてみましょう。

上のほうから，体積を V，V'，V としてよいわけですから

$$V=\int_1^3 \pi x^2 dy=\pi\int_1^3(3^2-y^2)dy$$
$$=\pi\left[9y-\frac{y^3}{3}\right]_1^3=\frac{28}{3}\pi$$

球の体積は $\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=36\pi$ ですから

$$V'=36\pi-\frac{28}{3}\pi\times2=\frac{52}{3}\pi$$

$$\therefore\quad V:V':V=\frac{28}{3}\pi:\frac{52}{3}\pi:\frac{28}{3}\pi$$
$$=7:13:7$$

答 $7:13:7$

ということになります。

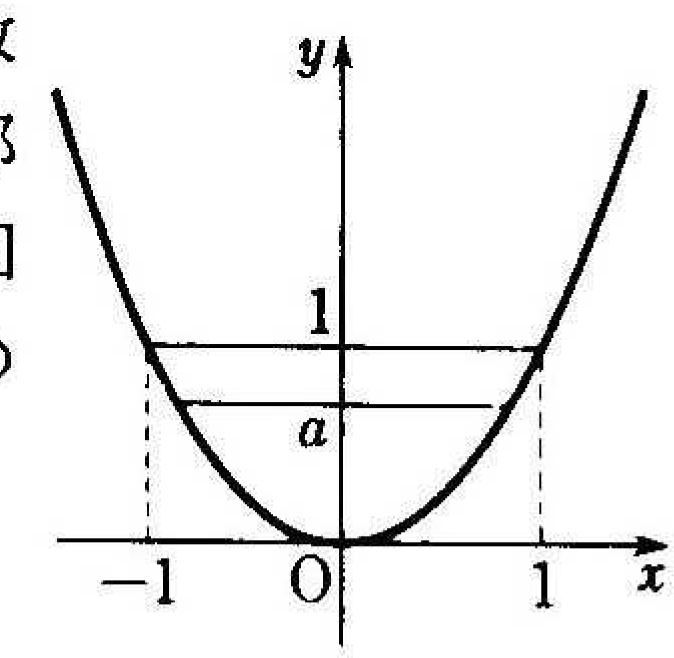
注 マトモに V' を計算しますと，

$$V'=2\int_0^1\pi x^2dy=2\pi\int_0^1(9-y^2)dy=\frac{52}{3}\pi$$

となります。

■練習 2. 放物線 $y=x^2$ と $y=1$ の囲む部分を y 軸のまわりに回転して得る立体を，平面 $y=a$ で2等分したい。定数 a の値を求めよ。

解 直線 $y=a$ と放物線 $y=x^2$ の囲む部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を V とすると



$$V=\int_0^a\pi x^2dy$$
$$=\pi\int_0^a ydy=\frac{\pi}{2}a^2$$

ゆえに $y=1$ と $y=x^2$ の囲む部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積は $a=1$ とおき $\frac{\pi}{2}$ で与えられます。さては，

$$\frac{\pi}{2}a^2\times2=\frac{\pi}{2}$$

より，a を求めて，$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ が求める値でしょう。

答 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

*　*　*

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。

■練習 3. 空間で，$z=0$，$y^2=x+1$ ……①
および $z=0$，$(x-2)^2+2y^2=5$ ……② が与えられている。このとき，

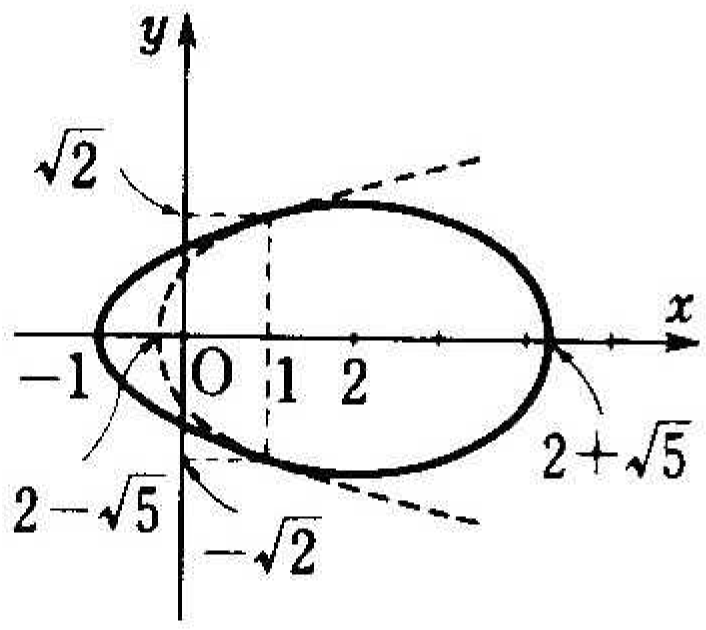
$x\leqq1$ では①；$x\geqq1$ では②

で表される曲線を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を平面 $x=1$ はどのような比に分けるか。

ヒント まず，この曲線が xy 平面上にあることは明らかですから，そのグラフをかいてみましょう。

$$y^2=x+1 \qquad \cdots\cdots①$$
$$(x-2)^2+2y^2=5 \qquad \cdots\cdots②$$

①と②から y を消去しますと



$$(x-2)^2+2(x+1)=5$$
$$\therefore\quad (x-1)^2=0$$
$$\therefore\quad x=1$$

ですから，①，②は点 $(1,\ \sqrt{2})$ で図のように接していることがわかります。

$x=1$ の左側の部分の体積 V_1 は

$$V_1=\pi\int_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}=2\pi$$

$x=1$ の右側の部分の体積 V_2 は

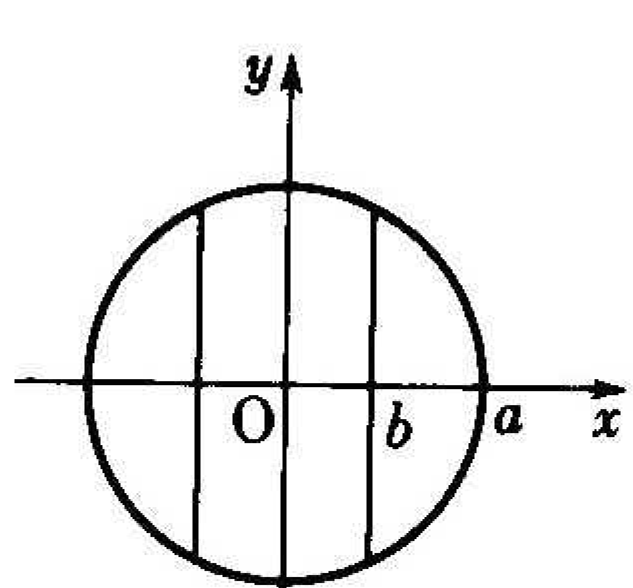
$$V_2=\pi\int_{1}^{2+\sqrt{5}}y^2dx=\pi\int_{1}^{2+\sqrt{5}}\frac{5-(x-2)^2}{2}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[5x-\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{1}^{2+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{7+5\sqrt{5}}{3}\pi$$

$$\therefore\quad V_1:V_2=2\pi:\frac{7+5\sqrt{5}}{3}\pi=6:7+5\sqrt{5}$$

答 $6:7+5\sqrt{5}$

練習 4. 半径 a の球から，中心からの距離 b の平行 2 平面で切りとった円板状の部分の体積が球の体積の半分に等しいとき，a と b の比の値を小数第 1 位まで正しく求めよ。

ヒント 平行 2 平面で切りとった部分の体積を V としますと，



$$V=2\int_0^b\pi y^2dx$$
$$=2\pi\int_0^b(a^2-x^2)dx$$
$$=2\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^b$$
$$=\frac{2\pi}{3}(3a^2b-b^3)$$

ところが球の体積は $\frac{4\pi}{3}a^3$ なのですから，

$$\frac{2\pi}{3}(3a^2b-b^3)\times2=\frac{4}{3}\pi a^3$$
$$\therefore\quad a^3-3a^2b+b^3=0$$

あるいは

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}\right)^2+1=0$$

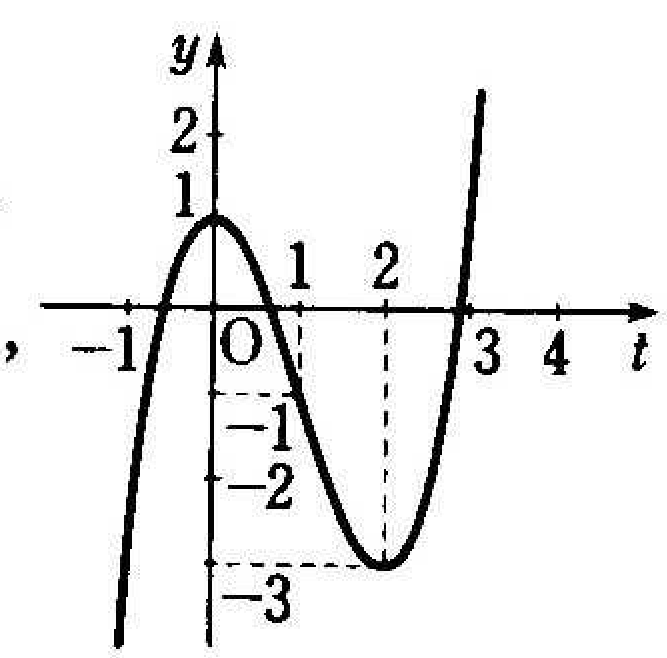
$\frac{a}{b}=t$ とおきますと

$$f(t)=t^3-3t^2+1=0$$
$$f'(t)=3t^2-6t$$

となります。あとは，この 3 次方程式の実数解を小数以下第 1 位まで求めなければなりません。

さて：——

$f(t)$ のグラフは右のようになりますから，正の実数解が 2 と 3 の間にあることは確かなようです。



$t=3$ に対応する点 (3, 1) における $f(t)$ の接線は，流通座標を $(X,\ Y)$ として

$$Y-1=9(X-3)$$

これが横軸と交わる点は $\left(\frac{26}{9},\ 0\right)$ ですから近似解は 2.9 となりましょう。（☞ p.156）

そこで，2.9 の近所で $f(t)$ の符号を調べてみますと

$$f(2.9)=0.159>0$$
$$f(2.8)=-0.568<0$$

となります。つまり $\frac{a}{b}$ の値は 2.8 より大で 2.9 より小であることがわかります。

答 2.8

注 「小数第 1 位まで**正しく求めよ**」というのは，**小数第 1 位まで求め，あとは切り捨てる** ことです。おマチガイなく!!

パラメーターで表された図形の体積

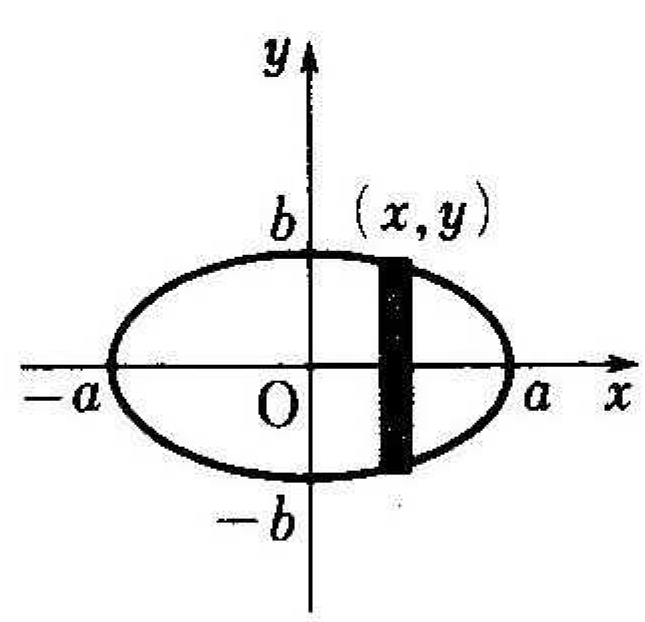
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

parameter とは何か。para-+meter なり。では para- とは何か。ギリシア語から出ていて，そして，幸にも説明する余白なし!!

◆ このセクションでは，図形の方程式がパラメーターで表されているときの体積の求め方を学ぶことにしましょう。では，さっそく具体的な問題へ。

練習 1. だ円 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転して得る立体の体積を求めよ。ここに，$a,\ b$ は正の定数で，θ は媒介変数である。

ヒント $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ のグラフは下のようになります。そして，$\theta=0\sim\dfrac{\pi}{2}$ に対して，第1象限の弧を描くことがわかります。



さて，x 軸に垂直に薄く切ると円盤ができて，その体積を合計すればいい，のですから，体積 V は

$$V=2\int_0^a \pi y^2 dx$$

で表され，ここで

$$y=b\sin\theta,\quad dx=-a\sin\theta d\theta$$

で，$x=0$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$x=a$ のとき $\theta=0$ なのですから

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (b\sin\theta)^2(-a\sin\theta)d\theta$$

$$=2\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$$

ところが $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ ですから

$$\sin^3\theta=\frac{1}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)$$

$$\therefore\quad V=2\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)d\theta$$

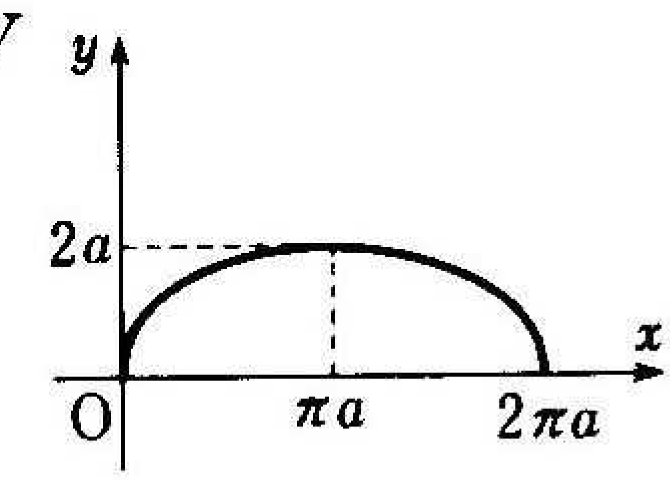
$$=\frac{1}{2}\pi ab^2\left[-3\cos\theta+\frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\pi ab^2\left[3-\frac{1}{3}\right]=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

答 $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$

練習 2. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

解 求める体積を V とすると



$$V=\int_0^{2\pi a}\pi y^2 dx$$

ところが

$$y=a(1-\cos t)$$
$$dx=a(1-\cos t)dt$$

x	$0 \cdots\cdots 2\pi a$
t	$0 \cdots\cdots 2\pi$

であるから

$$V=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt$$

$$=5\pi^2 a^3 \quad\cdots\cdots 答$$

注 $(1-\cos t)^3$ の積分は展開して次数を下げるとよいでしょう。

*　*　*

◆ では総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. 空間において，$a>0$ に対して，集合 $E=\{(\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ a\cos\beta)\}$ $0\leqq\alpha<2\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi\}$ を考える。

(1) E と yz 平面の交わりはどんな曲線か。

(2) $-a \leqq t \leqq a$ なる t に対して，点 $(0,\ 0,\ t)$ を通り xy 平面に平行な平面が E によって切りとられる部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) Eで囲まれる部分の体積を求めよ。

（弘前大）

(解)
$$x=\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots①$$
$$y=\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots②$$
$$z=a\cos\beta \qquad \cdots\cdots③$$

とおくと

$$x^2+y^2=\sin^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\sin^2\beta$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+\frac{z^2}{a^2}=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$$

ゆえに，Eは曲面

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{a^2}=1$$

である。

(1) yz 平面との交わりを求めるには

$$x=0$$

とおいて得られる，だ円

$$y^2+\frac{z^2}{a^2}=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

である。

(2) 平面 $z=t$ によるEの切り口は

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{a^2}=1$$

において，$z=t$ とおいて

$$x^2+y^2=1-\frac{t^2}{a^2}=\frac{a^2-t^2}{a^2}$$

であるから，切り口の面積は

$$S(t)=\frac{\pi(a^2-t^2)}{a^2} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

で与えられる。

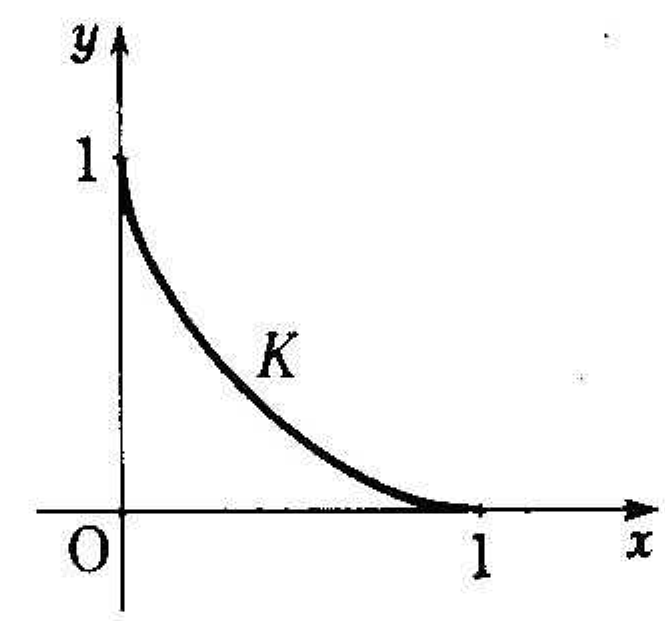
(3) Eで囲まれた体積をVとすると

$$V=\int_{-a}^{a}S(t)dt$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{\pi(a^2-t^2)}{a^2}dt$$
$$=\frac{2\pi}{a^2}\int_0^a(a^2-t^2)dt$$
$$=\frac{2\pi}{a^2}\left[a^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^a=\frac{4\pi}{3}a \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 4. 曲線 $x=\sin^3\theta$, $y=\cos^3\theta$ の示す曲線Kとx軸およびy軸が囲む部分をx軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$.　　（上智大）

(ヒント)　$x=\sin^3\theta$, $y=\cos^3\theta$ ですから

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$



このグラフはだいたい右のようです。

さて，求める体積をVとしますと

$$V=\int_0^1\pi y^2dx$$

ところが $dx=3\sin^2\theta\cos\theta d\theta$ ですから，

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\cos^3\theta)^2(3\sin^2\theta\cos\theta)d\theta$$
$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^3\sin^2\theta\cos\theta d\theta$$

ここで $\sin\theta=t$ とおきますと

$$\cos\theta d\theta=dt$$

ですから

$$V=3\pi\int_0^1(1-t^2)^3t^2dt$$
$$=3\pi\int_0^1(-t^8+3t^6-3t^4+t^2)dt$$
$$=3\pi\left[-\frac{t^9}{9}+\frac{3}{7}t^7-\frac{3}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{16}{105}\pi$$

$\boxed{答}$　$\dfrac{16}{105}\pi$

(注)　もちろん，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ から出発して求めても結構です。ファイトのあるキミはやってみませんか。もちろん，同じ結果が得られなければだめですよ。

*　　*　　*

◆ ここでいくつかの例をやってわかったように，パラメーターを追い出そうとばかり努力してはいけません。パラメーター表示のままでうまく使いこなすことが必要です。

しかし，パラメーターを消去することによってスゴク簡単になることもあります，よ。

●体積と極限の融合問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆体積を求めるだけでもたいへんなのに，それの極限とあっては，やる前から気おくれする向きもあろうが，それはイケマセン。

◆ 体積と極限の融合問題といってもべつに変わったことはありませんが，体積の計算練習のひとつの側面をやっておくのが目的です。では，ともかくやってみませんか。

練習 1. $0<a<b$ のとき $a^2\leqq y\leqq x^3\leqq b^2$ を満たす点 $(x,\ y)$ のつくる図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V とする。

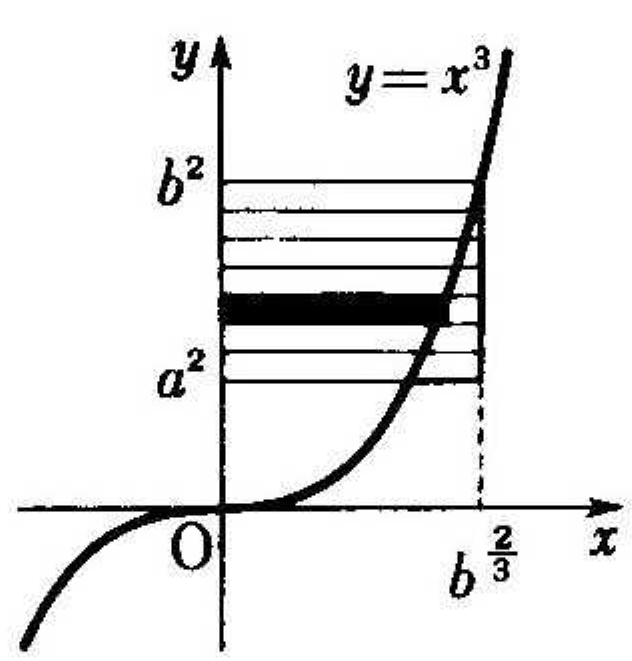
(1) V を a, b で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{V}{b-a}$ を求めよ。（早大）

（解） (1) $y=x^3$ であるから

$$x=y^{\frac{1}{3}}$$

ゆえに，求める体積 V は



$$V=\pi(b^{\frac{2}{3}})^2(b^2-a^2)-\pi\int_{a^2}^{b^2}x^2dy$$

$$=\pi\left\{b^{\frac{4}{3}}(b^2-a^2)-\int_{a^2}^{b^2}y^{\frac{2}{3}}dy\right\}$$

$$=\pi\left\{b^{\frac{4}{3}}(b^2-a^2)-\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_{a^2}^{b^2}\right\}$$

$$=\pi\left\{b^{\frac{4}{3}}(b^2-a^2)-\frac{3}{5}(b^{\frac{10}{3}}-a^{\frac{10}{3}})\right\}$$

……答

(2) $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{V}{b-a}$

$$=\pi\left\{\lim_{b\to a}b^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}-\frac{3}{5}\lim_{b\to a}\frac{b^{\frac{10}{3}}-a^{\frac{10}{3}}}{b-a}\right\}$$

$$=\pi\left\{\lim_{b\to a}b^{\frac{4}{3}}(b+a)\right.$$

$$\left.-\frac{3}{5}\lim_{b\to a}\frac{b^{\frac{9}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{8}{3}}+\cdots\cdots+a^{\frac{9}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\right\}$$

$$=\pi\left(a^{\frac{4}{3}}\cdot 2a-\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}a^{\frac{7}{3}}\right)=0$$

……答

（注） 第2項の極限は **微分係数の定義** を使えば少しラクになります。つまり

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)$$

ですから

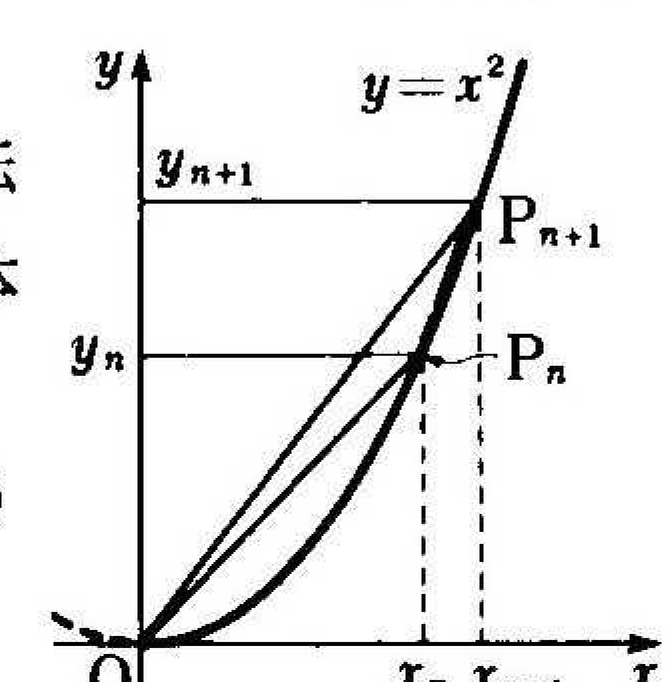
$$\lim_{b\to a}\frac{b^{\frac{10}{3}}-a^{\frac{10}{3}}}{b-a}=[(b^{\frac{10}{3}})']_{b=a}$$

$$=\left[\frac{10}{3}b^{\frac{7}{3}}\right]_{b=a}=\frac{10}{3}a^{\frac{7}{3}}$$

となりましょう。

練習 2. 曲線 $y=x^2$ の上に点列 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$, ……, $P_n(x_n,\ y_n)$, ……を $x_1=\sqrt{2}$, $x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_n<\cdots\cdots$ となるようにとり，それらと原点Oを結ぶ部分 OP_1, OP_2, ……, OP_n, ……と曲線の弧とで囲まれる図形 OP_1P_2, OP_2P_3, ……, ……, OP_nP_{n+1}, ……を y 軸のまわりにそれぞれ回転して得られる立体の体積をすべて半径1の半球の体積に等しくするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\sum_{k=l}^{n}x_k$ を求めよ。ただし，l は正の整数とする。（名古屋工大）

（ヒント） 図形 OP_nP_{n+1} を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を V_n としますと，右の図からわかるように，



$$V_n=\pi\int_{y_n}^{y_{n+1}}x^2dy$$

$$+\frac{1}{3}\pi{x_n}^2y_n-\frac{1}{3}\pi{x_{n+1}}^2y_{n+1}$$

$$=\pi\int_{y_n}^{y_{n+1}}ydy+\frac{1}{3}\pi{x_n}^2y_n$$

$$-\frac{1}{3}\pi x_{n+1}{}^2 y_{n+1}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{\pi}{6}(y_{n+1}{}^2-y_n{}^2)$$

これが半径1の半球の体積に等しいというのですから

$$\frac{\pi}{6}(y_{n+1}{}^2-y_n{}^2)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3$$

$$\therefore\quad y_{n+1}{}^2-y_n{}^2=4,\quad y_1{}^2=4$$

つまり数列 $\{y_n{}^2\}$ は初項 4, 公差 4 の等差数列ですから

$$y_n{}^2=4n$$

$$\therefore\quad x_n=\sqrt{y_n}=\sqrt{2}\sqrt[4]{n}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\sum_{k=1}^{n}x_k=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{k}{n}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt[4]{x}\,dx=\frac{4}{5}\sqrt{2}$$

(極限と定積分の関係については (☞p.218) を参照してください)

また,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l-1}\sqrt[4]{\frac{k}{n}}=0$$

です。(これがよくわからなかったら $l=3$, $l=4$ のときをやってみればよい)

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\sum_{k=l}^{n}x_k=\frac{4}{5}\sqrt{2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

(注) 蛇足ながら:—

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4}{n^5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\int_0^1x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

ですね。ところで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^4+8^4+9^4+\cdots\cdots+n^4}{n^5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4)-(1^4+\cdots\cdots+6^4)}{n^5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1^4+\cdots\cdots+6^4}{n^5}\right]$$

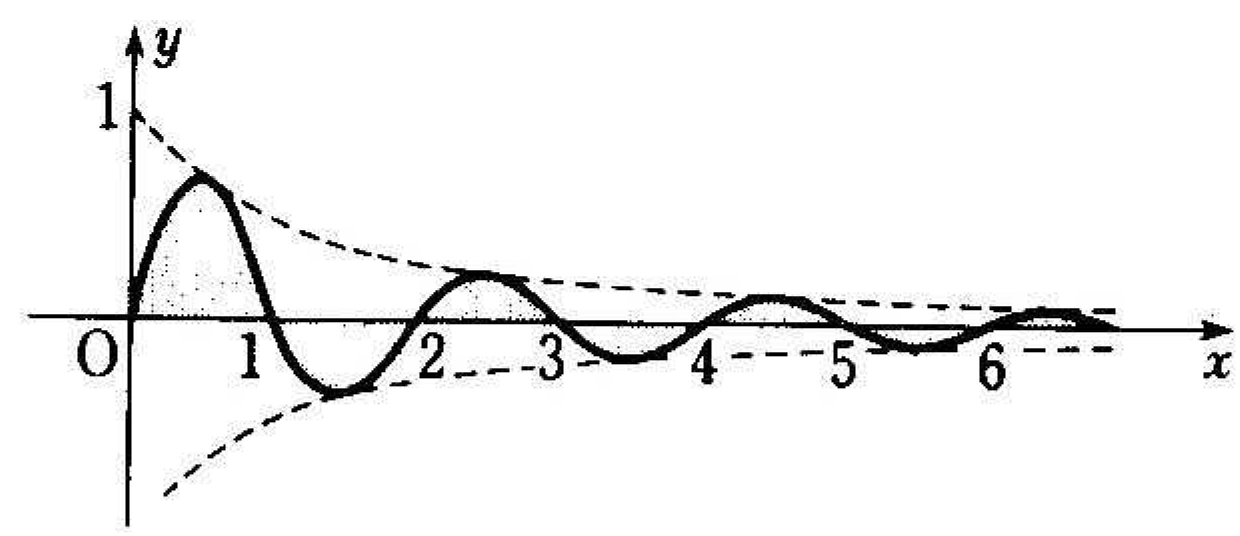
$$=\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}$$

です。これとまったく同じ計算ですから,イヤガラズにやってみてください。

* * *

練習 3. $y=e^{-x}\sin\pi x\ (x\geqq0)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して得る立体の総和を求めよ。

(ヒント)



体積をVとしますと,上の図に示す無限個の部分をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積の総和となりましょう。面積のときとちがって,個々に分ける必要はありません。なぜなら $0\leqq x\leqq n$ について

$$V=\int_0^n\pi|y|^2dx=\pi\int_0^n y^2dx$$

ですから,yの符号によって分ける必要がないからです。

(解) 求める体積をVとすると

$$V=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\pi|y|^2dx=\pi\lim_{n\to\infty}\int_0^n y^2dx$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-2x}\sin^2\pi x\,dx$$

しかるに

$$\int_0^n e^{-2x}\sin^2\pi x\,dx$$

$$=\int_0^n e^{-2x}\frac{1-\cos2\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^n e^{-2x}dx-\int_0^n e^{-2x}\cos2\pi x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(\pi^2+1)}\left[\pi\sin2\pi x-\cos2\pi x\right]_0^n\right\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4(\pi^2+1)}(1-e^{-2n})$$

$$\therefore\quad V=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{4(\pi^2+1)}(1-e^{-2n})$$

$$=\frac{\pi^3}{4(\pi^2+1)}$$

答 $\dfrac{\pi^3}{4(\pi^2+1)}$

* * *

① 曲線の長さの求め方

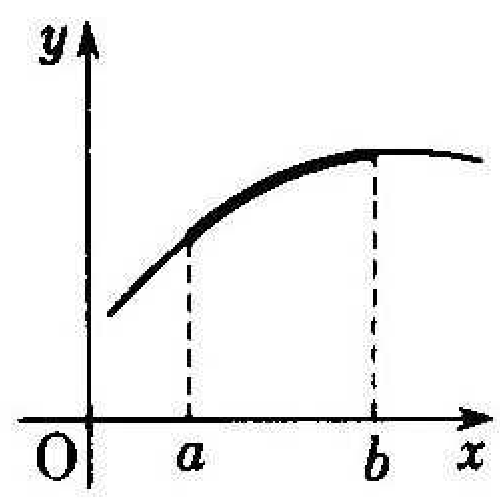
1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆曲線の上をたどっていくと長さが出るような器械が発明されたら，こんなめんどうな計算はやらないですむだろう!!???

◆ 曲線の長さを求める公式は2つあります。第1は曲線の方程式が $y=f(x)$ で与えられたときです。このときは，

$x=a$ から $x=b$ までの長さは，$b>a$ として

$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$



で与えられます。では，例によって，練習1.にいくとしましょう。

練習1. 曲線 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の弧の長さを求めよ。

(解) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\therefore$ $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$\therefore\ S=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

答 $\frac{e^2-1}{2e}$

練習2. 曲線 $y=x\sqrt{x}$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の長さを求めよ。

(解) $y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore\ y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ S=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^2\sqrt{x+\frac{4}{9}}dx$$

$\sqrt{x+\frac{4}{9}}=t$ とおくと

$$x+\frac{4}{9}=t^2\quad\therefore\quad dx=2tdt$$

$$\therefore\ S=\frac{3}{2}\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{22}}{3}}t\cdot 2tdt=\Big[t^3\Big]_{\frac{2}{3}}^{\frac{\sqrt{22}}{3}}$$

$$=\frac{22\sqrt{22}}{27}-\frac{8}{27}$$

$$=\frac{2}{27}(11\sqrt{21}-4)$$ ……答

* * *

◆ 曲線の長さを求める第2の公式は，曲線の方程式がパラメーターで表されたときです。このときには

$t=a$ から $t=b$ までの長さは
$x=x(t)$，$y=y(t)$ として

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

で与えられます。では，何はともあれ，これをやってみませんか。

練習3. $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ で表される曲線の，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ における長さを求めよ。

(解) $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ ですから，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta,\ \frac{dy}{dt}=\cos\theta$$

$$\therefore\ S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

答 $\frac{\pi}{2}$

(注) この曲線はいうまでもなく円です。そして $\theta=0\sim\frac{\pi}{2}$ ですから，第1象限の部分，さては四分円の弧の長さ，とわかります。

* * *

◆ では，総合的な問題にいきましょう。

練習 4. xy 平面において，曲線 $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ の上に点 $\mathrm{P}(\alpha-\sin\alpha,\ 1-\cos\alpha)$ をとり（ただし，$0<\alpha<2\pi$），Pにおける接線にPで垂直に交わる直線を引き，その直線と x 軸との交点をNとする。

(1) 原点Oから点Pまでの弧の長さを α で表せ。

(2) 線分 PN の長さを α の式で表せ。

(3) 弧 $\overset{\frown}{\mathrm{OP}}$ と線分 PN の長さが一致するとき，その長さはいくらか。

（東京理大）

（解） (1) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

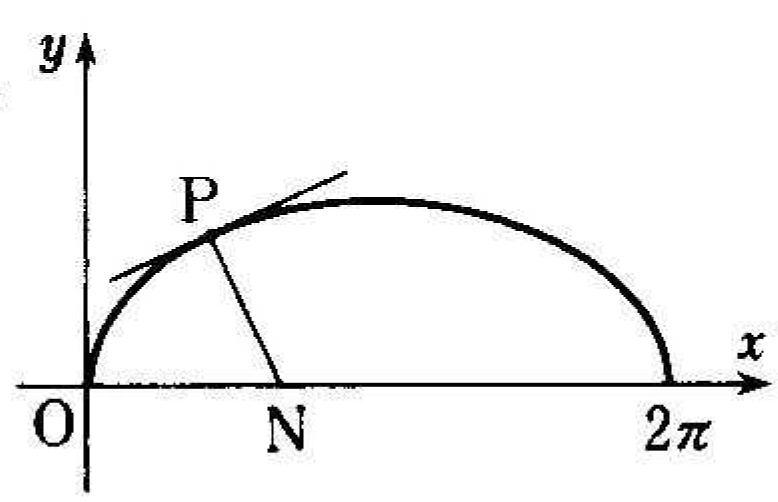
であるから

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=(1-\cos t)^2+\sin^2 t$$

$$=2(1-\cos t)$$

$$=2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2$$



$0<t<2\pi$ であるから，求める長さは

$$\int_0^{\alpha}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\alpha}$$

$$=4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\quad\cdots\cdots\text{答}$$

(2) Pにおける接線の傾き：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$$

であるから，Pにおける法線 PN の傾きは $-\tan\dfrac{\alpha}{2}$，したがって

$$\mathrm{PN}:\ y-(1-\cos\alpha)$$

$$=-\tan\frac{\alpha}{2}\{x-(\alpha-\sin\alpha)\}$$

上式で $y=0$ とおいて，Nの座標を求めると

$$\mathrm{N}=(\alpha,\ 0)$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{PN}}=\sqrt{(-\sin\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{OP}}=\mathrm{PN}$ より

$$4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}$$

平方して

$$\left\{2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad 4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$$

ゆえに求める長さは $\dfrac{8}{5}$ である。

練習 5. 曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の2点A，Bを両端とするこの曲線の弧の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表すことにする。P_0，Qはこの曲線上の点で，その x 座標がそれぞれ 0，1 であるものとする。P_0，Qを両端とするこの曲線の弧の上に，P_0 からQに向かって次次に点 P_1，P_2，……，P_{n-1} をとって，$\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=\overset{\frown}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}}$ となるようにする。P_0，P_1，……，P_{n-1} の y 座標をそれぞれ y_0，y_1，……，y_{n-1} として，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k{}^2$$

の値を求めよ。　　（東京理大）

（ヒント） $\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k}=\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}}\cdot\dfrac{k}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$

なる関係があります。P_k の x 座標を x_k としますと

$$\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k}=\frac{1}{2}(e^{x_k}-e^{-x})$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}}=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$$

ですから，これらを上の関係に代入して y_k が求められます。

答 $\dfrac{e^4+10e^2+1}{12e^2}$

*　*　*

① パラメーターで表された曲線の長さ

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

パラメーターのひとつの特徴は困難を分割できることだ。それにつけても，デカルトの慧眼(けいがん)には驚くばかりだなあ。

◆ 曲線の方程式が

$$x=f(t),\ y=g(t)\quad (\alpha\leqq t\leqq\beta)$$

で与えられたとき，その長さ s は

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$$

で与えられます。

では，さっそくながら，具体例を：——

■練習 1. $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $a>0$
$0\leqq\theta<2\pi$ の長さを求めよ。

(解)
$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}d\theta$$

$$=a\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=a\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}=2\pi a$$

答　$2\pi a$

■練習 2. 点Pの座標 x, y がパラメーター t の関数として

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$$

で表されるとき，$t=0\sim\pi$ における長さ s を求めよ。

(解)
$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$$

$$\therefore\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-\cos t)^2+(\sin t)^2$$

$$=2-2\cos t=2(1-\cos t)=4\sin^2\frac{t}{2}$$

$0\leqq t\leqq\pi$ において $\sin\frac{t}{2}\geqq0$ であるから

$$s=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=2\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi=-4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos0\right)$$

$$=4$$

答　4

■練習 3. 次の曲線の長さを求めよ。

$$x=\cos(2t^3-9t^2+12t)$$
$$y=\sin(2t^3-9t^2+12t)$$

ただし，$0\leqq t\leqq3$.　（横浜市大）

(解)　$2t^3-9t^2+12t=f(t)$

とおけば，

$$x=\cos f(t),\ y=\sin f(t)$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-\sin f(t)\cdot f'(t)$$

$$\frac{dy}{dt}=\cos f(t)\cdot f'(t)$$

$$\therefore\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(f'(t))^2$$

ゆえに，求める長さを s とすると

$$s=\int_0^3\sqrt{\{f'(t)\}^2}dt=\int_0^3|f'(t)|dt$$

$$=\int_0^3|6t^2-18t+12|dt$$

しかるに

$$6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$$

$$\therefore\ s=\int_0^1f(t)dt-\int_1^2f(t)dt+\int_2^3f(t)dt$$

$$=11$$

答　11

(注) 点 $P(x,\ y)$ は単位円周上を動いているのですが，等速運動ではありません。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

■練習 4. xy 平面上の点 $(x,\ y)$ と，uv 平面上の点 $(u,\ v)$ との座標の間に，次の対

応関係がある。

$$u=e^x\cos y,\ \ v=e^x\sin y$$

xy 平面上の3点 O(0, 0), A(1, 0), $\mathrm{B}\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$ を頂点とする三角形 OAB を，上の対応関係によって uv 平面上にうつしてできる図形Pの全周の長さを求めよ。

（埼玉大）

（解）　$u=e^x\cos y,\ \ v=e^x\sin y$

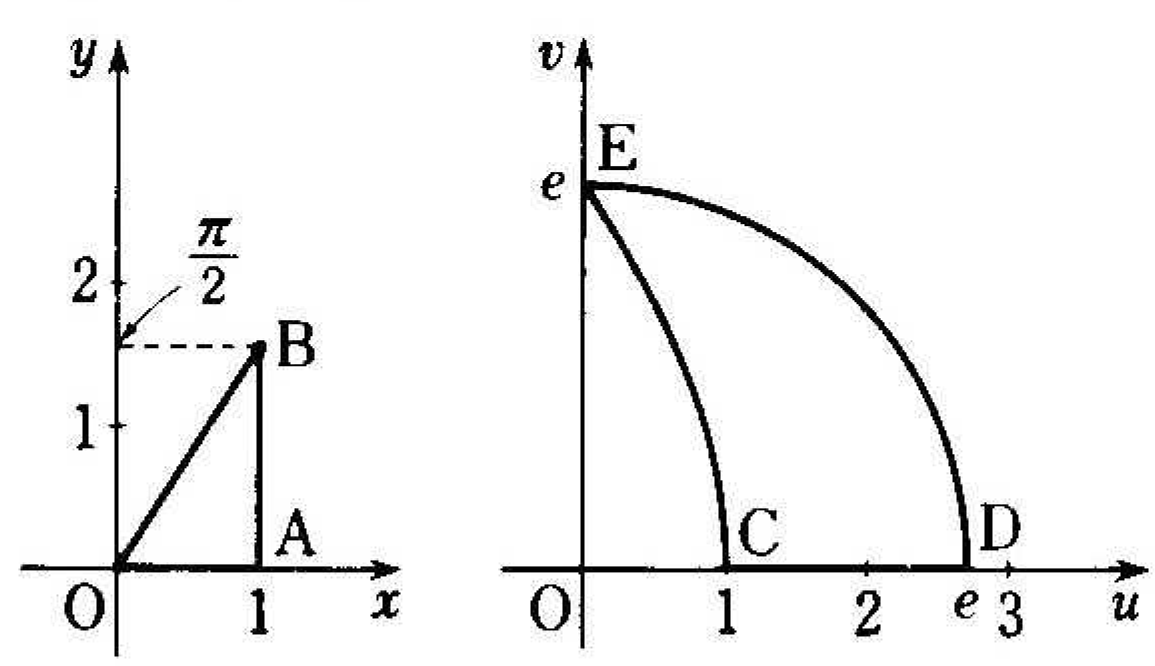
より

$$u^2+v^2=e^{2x},\ \ \frac{v}{u}=\tan y$$

いま，点 $(x,\ y)$ が線分 OA 上を動くとき，$y=0,\ 0\leqq x\leqq 1$ であるから

$$v=0,\ \ 1\leqq u\leqq e$$

したがって，点 $(u,\ v)$ は線分 CD 上を動く。ここに，点C, Dはそれぞれ (1, 0), $(e,\ 0)$ である。



次に，点 $(x,\ y)$ が線分 AB 上を動くとき，$x=1,\ 0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから

$$u^2+v^2=e^2,\ \ 0\leqq\frac{v}{u}<\infty$$

したがって，点 $(u,\ v)$ は円弧 DE を動く。ただし，D$(0,\ e)$ である。

次に，点 $(x,\ y)$ が線分 OB 上を動くときは点 $(u,\ v)$ は曲線の弧 DC 上を動く。ただし，

$$u=e^x\cos\frac{\pi x}{2},\ \ v=e^x\sin\frac{\pi x}{2}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

したがって，x をパラメーターとして

$$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{e^{2x}+\frac{\pi^2}{4}e^{2x}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}(e-1)$$

また，$\overline{\mathrm{CD}}=e-1,\ \overset{\frown}{\mathrm{DE}}=\frac{\pi e}{2}$

であるから，図形Pの全周の長さは

$$\left(1+\frac{\pi}{2}\right)e-1+\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}(e-1)\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

練習 5. xy 平面上で，点 A(1, 0) を出発し，各時刻 $t\ (\geqq 0)$ で

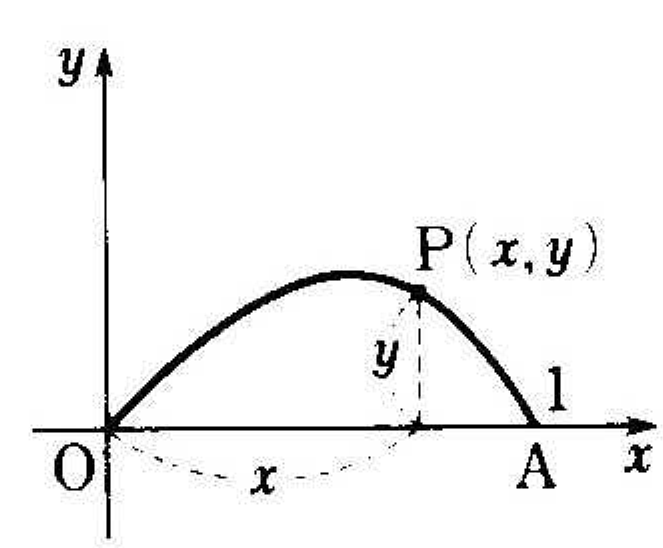
$$\overline{\mathrm{OP}}=1-at^2,\ \ \angle\mathrm{AOP}=\sqrt{a}\,t$$

を満たしながら原点Oまで運動する点Pがある（a は正の定数)。動点Pが点Aから原点Oにいたる道のり（Pの描く曲線の長さ）を求めよ。

（名古屋工大）

（ヒント）　点Pの座標を $(x,\ y)$ としますと，

$$x=\overline{\mathrm{OP}}\cos\angle\mathrm{AOP}$$
$$=(1-at^2)\cos(\sqrt{a}\,t)$$
$$y=\overline{\mathrm{OP}}\sin\angle\mathrm{AOP}$$
$$=(1-at^2)\sin(\sqrt{a}\,t)$$



点PがOにあるときは

$$\overline{\mathrm{OP}}=0\quad\therefore\ 1-at^2=0\quad\therefore\ t=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

また，PがAにあるときには $t=0$ である。ゆえに，求める道のりを s とすると

$$s=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

で，ここに

$$\frac{dx}{dt}=(1-at^2)(-\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\,t)$$
$$\qquad+(-2at)\cos\sqrt{a}\,t$$
$$\frac{dy}{dt}=(1-at^2)(\sqrt{a}\cos\sqrt{a}\,t)$$
$$\qquad+(-2at)\sin\sqrt{a}\,t$$

$$\therefore\quad s=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\sqrt{a}(1+at^2)dt$$

$$=\sqrt{a}\left[t+\frac{at^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{4}{3}$$

$\boxed{答}$　$\frac{4}{3}$

道のりの求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆道のりと曲線の長さとを混同してはいけませんよ。道のりには動きがあるが，長さには静寂がある。

◆ 時刻tにおける動点の位置xが$x(t)$で与えられると，速度vは

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

で与えられ，したがって，道のりは

$$x(t)=\int_0^t v(t)dt$$

で与えられます。また，

時刻aからbまでの道のりは

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

で与えられます。

*　*　*

◆ では，具体的な問題をやってみましょう。

練習 1. 時刻tにおける速さが

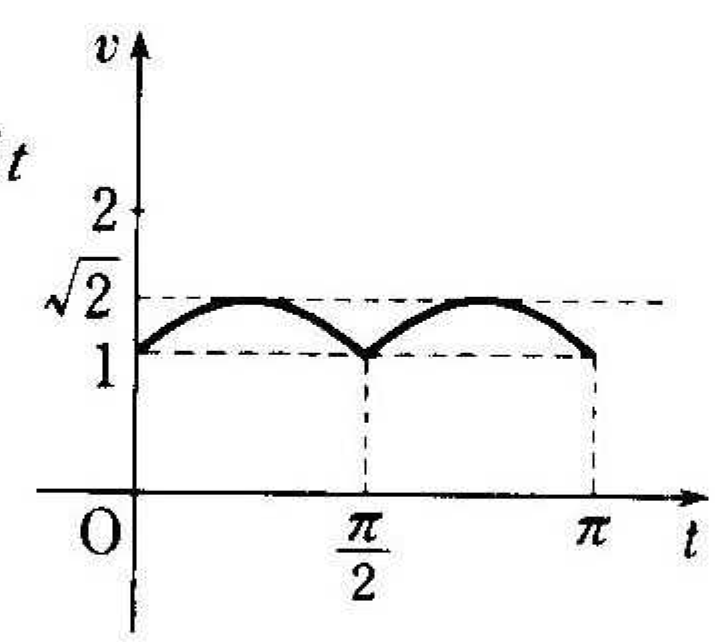
$$v=|\sin t|+|\cos t|$$

で，直線上を動く点がある。$t=0$から$t=\pi$までの道のりを求めよ。

（解） 求める道のりをLとすると

$$L=\int_0^\pi |\sin t|+|\cos t|dt$$

$f(t)=|\sin t|+|\cos t|$のグラフは右のようであるから，



$$L=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+\cos t)dt$$

$$=\Big[-\cos t+\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

答　2

練習 2. 直線運動する点Pの時刻tにおける速度が$v=\sqrt{t+1}$で与えられるとき，$t=3$から$t=8$までの道のりを求めよ。

（ヒント） $v=\sqrt{t+1}>0$ですから，絶対値をとるほどのこともありません。

（解） 求める道のりをLとすると

$$L=\int_3^8\sqrt{t+1}dt=\int_3^8(t+1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{2}{3}\Big[(t+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_3^8=\frac{2}{3}\{9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\}$$

$$=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}$$

答　$\frac{38}{3}$

*　*　*

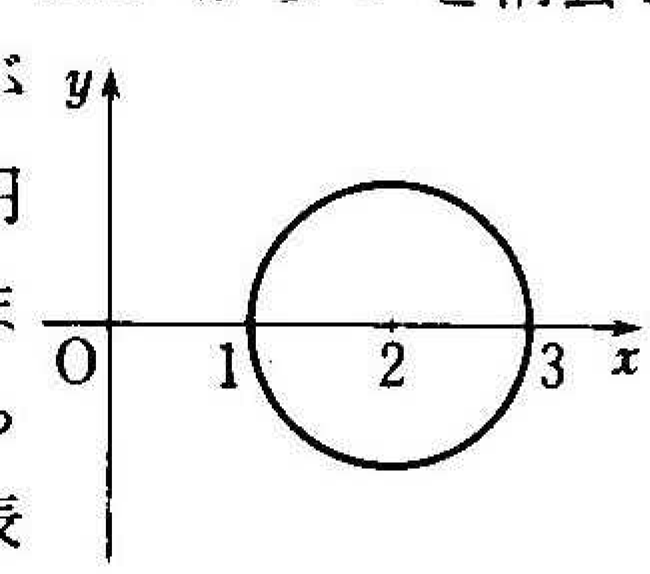
◆ 曲線運動の場合は **径路の長さ** を計算する問題に帰着します。もちろん，同じ径路をもどることもありますが，その場合は分割して加えるだけのことです。では，これを！

練習 3. x-y平面上を物体Pが運動している。その座標x，yは，時刻tの関数として次のように与えられている。

$$x=2-\cos t,\quad y=\sin t$$

$t=0$から$t=\pi$までの道のりを求めよ。

（ヒント） まず径路を求めてみましょう。それには，$x=2-\cos t$，$y=\sin t$からtを消去して$(x-2)^2+y^2=1$が得られて右のような円であることがわかります。さて，tが0からπまで変化すると，表



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	1	2	3
y	0	1	0

からわかるように，Pは点(1, 0)から円周上を時計まわりにまわって点(3, 0)までゆ

くことがわかります。したがって道のりは π です。

[答]　π

ところで，これを積分を使ってやるなら次のようになりましょう。

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

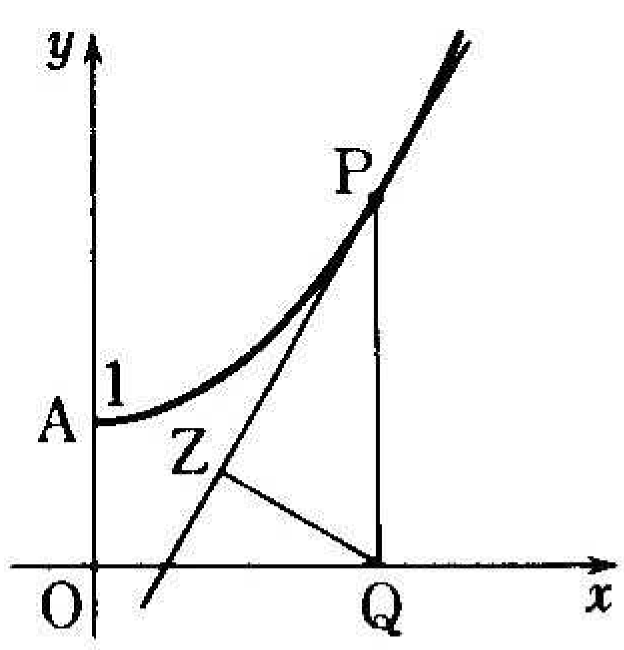
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}dt=[t]_0^{\pi}=\pi$$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ において，点 (0, 1) をAとし，第1象限にあるこの曲線上の任意の点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とする。さらにPから x 軸に下した垂線と x 軸との交点をQとする。



(1) この曲線の弧 AP の長さを l とし，線分 OA，弧 AP，線分 PQ，線分 QO に囲まれた部分の面積を S とする。(O は原点) このとき $l=S$ を示せ。

(2) Pにおける曲線の接線と，これにQから下した垂線との交点をZとする。このとき線分 QZ の長さを求めよ。

（京都産業大）

（解） (1) 弧 AP の長さは

$$l=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx$$

ところが $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ であるから

$$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+(y')^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y$$

$$\therefore\quad l=\int_0^a y\,dx=S$$

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は曲線上の点であるから

$$b=\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

また，Pにおける接線の傾きは

$$(y')_{x=a}=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})$$

で，接線の方程式は

$$y-b=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})(x-a)\quad\cdots\cdots①$$

である。ゆえに，点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ から①に下した垂線の長さは

$$\mathrm{QZ}=\frac{\left|\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})(a-a)+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})\right|}{\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})\right\}^2+1}}$$

$$=1$$

である。

（注） 直線 $ax+by+c=0$ に点 $(\alpha,\ \beta)$ から下した垂線の長さ l は

$$l=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることを使ったのです。この公式については，「数 I」(☞ p.274) を参照してください。

練習 5. 時刻 t における動点Pの位置ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos^3 t,\ 2\sin^2 t)$ で表されるとき，$t=0$ から $t=\frac{\pi}{2}$ までにPの動いた道のりを求めよ。

（宮崎医大）

（ヒント） $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$

とすると

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dx}{dt}=4\sin t\cos t$$

ゆえに，道のりを l とすると

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{9\cos^2 t+16}\,dt$$

$$=\cdots\cdots=\frac{61}{27}$$

[答]　$\frac{61}{27}$

⑪ 水量や水面の面積の扱い方

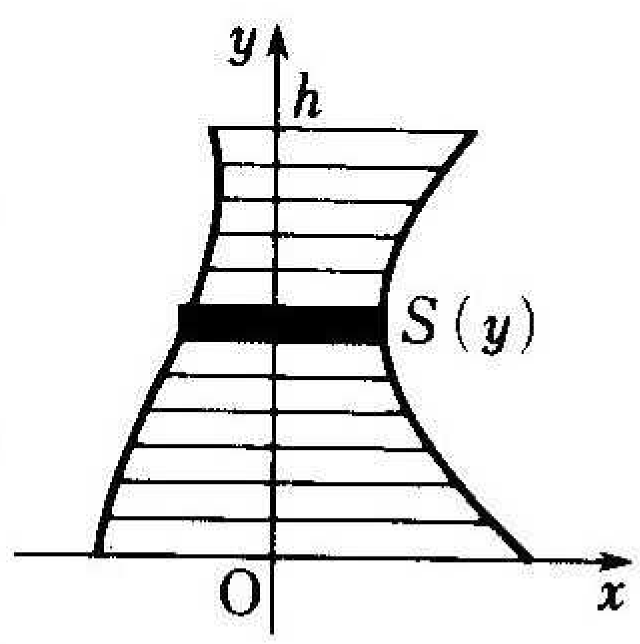
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈とかく，水量の問題はイヤガラレル!!　というのも積分で表されるものの変化が中心となるからであろう。

◆ 容器に入れた水の量や水面の面積に関係した問題は，要するに

体積の時間変化に関する問題

になります。その点で，単なる体積計算よりもめんどうになるわけです。



さて，右はある容器に水を入れたもようを示しています。断面積Sはyの関数ですから，水量Vは

$$V(y)=\int_0^y S(y)dy \qquad \cdots\cdots(*)$$

で与えられます。

両辺をyで微分しますと

$$\frac{dV}{dy}=S \qquad \cdots\cdots(**)$$

とも書けます。

また，水を入れる場合は V, S, y いずれも時間tの関数として与えられますから，(*)の両辺をtで微分して

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^y S(y)dy$$

つまり

$$\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^y S(y)dy$$

あるいは

$$v\frac{dV}{dy}=\frac{d}{dt}\int_0^y S(y)dy \quad \cdots\cdots(***)$$

とも書けます。ここにvは水面の上がる速さです。

*　*　*

◆ では，具体的な問題をやってみましょう。

練習 1. ある容器に，体積Vの水を入れると，水の深さが$\sqrt{V}$になる。この容器に，水の深さがhになるまで水を入れるとき，その水面の面積を求めよ。

(ヒント) 深さがyのときの体積 $V(y)$ は題意から

$$V(y)=y^2$$

で与えられます。ゆえに断面積を $S(y)$ とすると

$$y^2=V(y)=\int_0^y S(y)dy$$

両辺をyで微分しますと

$$2y=S(y)$$

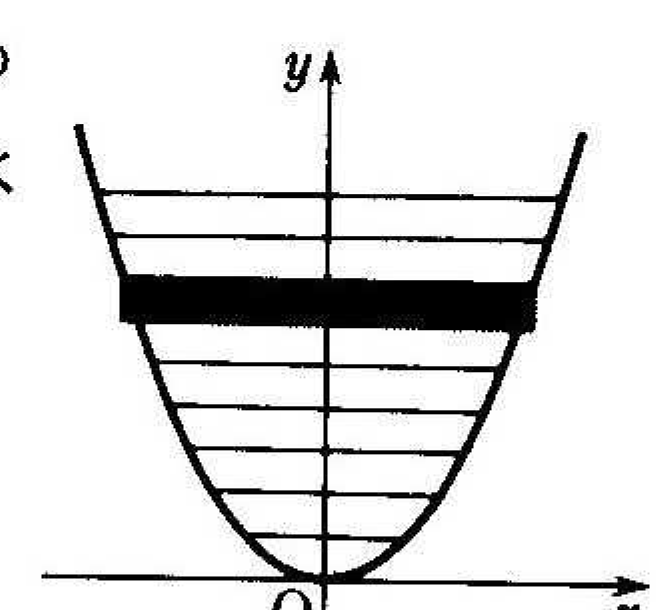
となりましょう。ところがわれわれがほしいのは $y=h$ のときのSの値ですから

$$S(h)=2h \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

となるわけです。

練習 2. 放物線$y=x^2$をy軸のまわりに回転してできる曲面を内面とする容器がある。毎秒50πの割合で注水するとき，100秒後の水面の上昇速度を求めよ。

(解) t秒後の水面の高さをyとすると，水量は



$$\int_0^y \pi x^2dy$$

$$=\pi\int_0^y ydy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y=\frac{\pi}{2}y^2$$

一方，これは$50\pi t$に等しいから

$$50\pi t=\frac{\pi}{2}y^2$$

$$\therefore \quad y=10\sqrt{t}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=10\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{5}{\sqrt{t}}$$

ゆえに $t=100$ における水面の上昇速度は $5/\sqrt{100}=0.5/\mathrm{sec}$ である。

*　*　*

◆ では，もう1つ：——

練習 3. $y=x+\sin x$ の，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転して得られる曲面を内面とする容器を考える。(長さの単位は cm とする)

(1) 容積を求めよ。

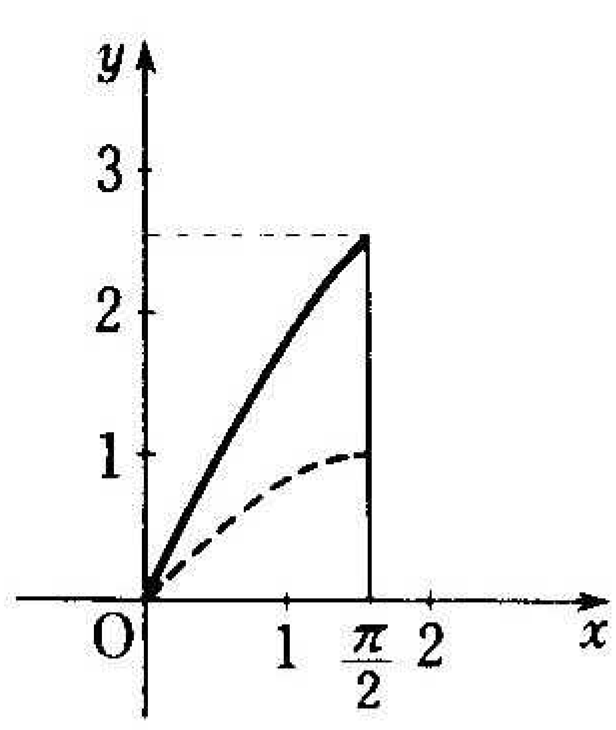
(2) その容器を，回転軸が鉛直になるようにおいて，毎秒 $\pi\mathrm{cm}^3$ の割合で水を入れる。水面の高さが $\frac{\pi}{4}$cm になったときの水面の上昇する速さを求めよ。

(津田塾大)

ヒント (1) 水面の高さが h のときの水の量は

$$V=\pi\int_0^h(x+\sin x)^2dx$$

で与えられますから，容積は



$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin x)^2dx$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-2x\cos x+2\sin x+\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{24}(\pi^3+6\pi+48)\ (\mathrm{cm}^3)$$

となります。次に：——

(2) V と h は t の関数で

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi(h+\sin h)^2\frac{dh}{dt}$$

ところが $\frac{dV}{dt}=\pi$ ですから，$h=\frac{\pi}{4}$ のとき

$$\pi=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt}=\frac{16}{(\pi+2\sqrt{2})^2}\ (\mathrm{cm}/秒)$$

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 水槽Aには，ある薬品の水溶液が満たされている。これに水を注いで薄めながら，水槽Aの流出口から，一定の速さで水溶液を流出させ，それを別の水槽Bに注ぐ。流出を開始した時から時刻 t を測定し，$0\leqq t\leqq k$ (k は正の定数) の範囲で，時刻 t のときの流出水溶液の比重は

$$1+ae^{-bt}\quad\left(\begin{array}{l}a,\ b\ は正の定数\\ e\ は自然対数の底\end{array}\right)$$

で与えられ，また時刻 k のとき，水槽Bへの注入が完了するものとする。水槽Bに注入された水溶液をよくかきまぜたとき，その比重はいくらか。

(京大)

ヒント ヤレヤレ，これはめんどうそうだ，と誰しもが思うにちがいない。ところがサニアラズ!!

さあ，いいですか？

水槽Bの時刻 t における体積を v としますと，

$$v=ct\quad(c\ は正の定数)$$

ですね。

ところで，時刻 t で注入が完了するのですから，完了した時刻におけるBの水溶液の体積は ck です。

そして，時刻0から k の間に注入された全水溶液の重量は (比重)×(体積) ですから

$$\int_0^{ck}(1+ae^{-bt})dv$$

$$=\int_0^k(1+ae^{-bt})cdt=\cdots\cdots$$

$$=c\left\{k+\frac{a}{b}(1-e^{-bk})\right\}$$

で与えられます。

したがって，求める比重は

$$\frac{c\left\{k+\frac{a}{b}(1-e^{-bk})\right\}}{ck}=1+\frac{a}{bk}(1-e^{-bk})$$

となります。案ずるより産むがやすし。

◎関数列の極限の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆多くの場合，関数列の問題は数列の問題に還元されます。だから，イヤガル必要はありません。いや，待てよ。必要あってイヤガル？

◆ 数がある規則にしたがって1列に並べられたものが数列でしたが，関数をある規則にしたがって並べると関数列になります。例えば，これです。

練習1. $f_1(x)$, $f_2(x)$, ……, $f_n(x)$, … はすべて1次式で，次の条件を満たしている。

$$f_1(x)=x+1$$

$$x^2f_{n+1}(x)=x^2+\int_0^x tf_n(t)dt$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$f_n(x)$ を求めよ。（芝浦工大）

ヒント $f_n(x)$ が x の1次式だというのですから

$$f_n(x)=a_nx+b_n$$

とおくことができましょう。$f_1(x)$, $f_2(x)$, ……はみんながちがうのですから，$f_n(x)=ax+b$ とおくことはできません。

さて，$f_n(x)=a_nx+b_n$ を条件式に代入してみますと

$$x^2(a_{n+1}x+b_{n+1})$$

$$=x^2+\int_0^x t(a_nt+b_n)dt$$

$$=x^2+\left[\frac{t^3}{3}a_n+\frac{t^2}{2}b_n\right]_0^x$$

$$=x^2+\frac{x^3}{3}a_n+\frac{x^2}{2}b_n$$

両辺の対応する項の係数を比べてみますと

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n \qquad \cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+1 \qquad \cdots\cdots②$$

となります。①より $a_1=1$ を考慮して

$$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3^{n-1}}$$

となります。また②より $b_1=1$ を考慮して b_n が求められるハズ。すなわち，平衡値（☞「基解」p.144）を求めてみますと，2になりますから

$$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$$

数列 $\{b_n-2\}$ は初項 b_1-2, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列ですから，

$$b_n-2=(b_1-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore\quad b_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore\quad f_n(x)=\frac{1}{3^{n-1}}x+2-\frac{1}{2^{n-1}} \quad \cdots\cdots答$$

練習2. $f_1(x)=\cos^2x$,

$$f_n(x)=\cos^2x-\frac{1}{4}\int_0^\pi f_{n-1}(x)dx$$

$$(n\geqq2)$$

とおくとき，$f_n(x)$ を求めよ。（札幌医大）

ヒント $$f_n(x)=\cos^2x-\frac{1}{4}a_n$$

とおいてみますと，

$$a_1=0$$

は明らか。

$$a_n=\int_0^\pi f_{n-1}(x)dx$$

に $f_{n-1}(x)=\cos^2x-\frac{1}{4}a_{n-1}$ を代入すると，

$$a_n=\int_0^\pi\left(\cos^2x-\frac{1}{4}a_{n-1}\right)dx$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{1+\cos2x}{2}-\frac{1}{4}a_{n-1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin2x}{2}\right)-\frac{1}{4}a_{n-1}x\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}a_{n-1}\pi$$

$$\therefore\quad a_n=-\frac{\pi}{4}a_{n-1}+\frac{\pi}{2}$$

ところで，平衡値は $\frac{2\pi}{4+\pi}$ ですから

$$a_n-\frac{2\pi}{4+\pi}=-\frac{\pi}{4}\left(a_{n-1}-\frac{2\pi}{4+\pi}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{2\pi}{4+\pi}=\left(a_1-\frac{2\pi}{4+\pi}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2\pi}{4+\pi}-\frac{2\pi}{4+\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad f_n(x)=\cos^2x-\frac{\pi}{8+2\pi}+\frac{\pi}{8+2\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$$

あるいは形を変えて

$$f_n(x)=\cos^2x-\frac{\pi}{8+2\pi}\left\{1-\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

……答

*　*　*

◆ では，次にやや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. $f_0(x)=\sin x$,

$$f_n(x)=\sin x+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf_{n-1}(x)dx$$

$(n\geqq1)$

によって関数 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ……を定義するとき，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求めよ。

（名古屋工大）

（解）　$f_n(x)=\sin x+a_n$

とおけば，

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+a_{n-1})dx$$

$$\therefore\quad 2a_n=\Big[x(-\cos x+a_{n-1}x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}1(-\cos x+a_{n-1}x)dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2a_{n-1}-\left[-\sin x+a_{n-1}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}a_{n-1}-\left(-1+\frac{\pi^2}{8}a_{n-1}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}a_{n-1}-\left(-1+\frac{\pi^2}{8}a_{n-1}\right)$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{\pi^2}{16}a_{n-1}+\frac{1}{2}$$

これを変形して

$$a_n-\frac{8}{16-\pi^2}=\frac{\pi^2}{16}\left(a_{n-1}-\frac{8}{16-\pi^2}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{8}{16-\pi^2}=\left(a_1-\frac{8}{16-\pi^2}\right)\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{8}{16-\pi^2}+\left(a_1-\frac{8}{16-\pi^2}\right)\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{8}{16-\pi^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sin x+\frac{8}{16-\pi^2}\quad\text{……答}$$

練習 4. 任意の実数 a をとり，無限数列 $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める。

(1)　$x_0=a$

(2)　x_n がきまったとき，微分方程式
$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2^n}y$ の解で，$t=0$ のとき
$y=x_n$ を満たすものを $y(t)$ とし，
$x_{n+1}=y(1)$ とする。

このとき $\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。　（東海大）

（ヒント）

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2^n}y$$

$$\therefore\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{2^n}dt$$

$$\therefore\quad \log|y|=\frac{t}{2^n}+C$$

$$\therefore\quad y=Ae^{\frac{1}{2^n}}\quad(A=\pm e^C)$$

$t=0$ のとき $y=x_n$ というのですから

$$x_n=A$$

$$\therefore\quad y(t)=x_ne^{\frac{t}{2^n}}$$

また $x_{n+1}=y(1)$ であるから

$$x_{n+1}=x_ne^{\frac{1}{2^n}}$$

となりましょう。これから x_n を求めなければなりません。

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$$

とおいて辺々掛けると

$$x_n=x_0e^{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=ae^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\longrightarrow ae^2\quad(n\longrightarrow\infty)$$

○ 微分方程式とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微分方程式というと，いかにも，モノモノしいが，高校でやるのは，その中のただ1つ，変数分離形にすぎません。

◆ 変数xの関数yがあるとき，xとyとyの導関数からなる方程式を **微分方程式** といいます。微分方程式に関して大切なことは3つ。第1は微分方程式を作ること，第2は微分方程式を解くこと，第3は微分方程式の応用です。

*　*　*

◆ 第1の微分方程式を作ることからはじめましょう。具体的な例から：——

練習 1. $y=x^2+ax$ の微分方程式を作れ。

ここにaは任意定数である。

ヒント　任意定数とは任意の値をとれる定数ということ。円周率πは定数ですが 3.14… という値しかとれない，したがって任意定数ではありません。

さて，$y=x^2+ax$ には任意定数はaだけ，つまり，1個入っています。このときには1回だけ微分して，任意定数を消去することができます。つまり

$$y'=2x+a \qquad \therefore\ a=y'-2x$$

これをもとの式に代入して

$$y=x^2+(y'-2x)x$$

$$\therefore\ xy'-y=x^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

が得られます。これが $y=x^2+ax$ の微分方程式なのです。なお，上の(*)のように，yのついたものは左辺に，yのつかないのは右辺に書くのがふつうです。

ところで，このようにして得られた微分方程式とは何か，というと，$y=x^2+ax$ のaにいろいろな値を入れて得られるいろいろな放物線すべてに共通な性質を示すもの，なのです。だからこそ重要なのです。

練習 2. $y=ax^2+x+1$ の微分方程式を作れ。

解 1.

$$y=ax^2+x+1 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\therefore\ y'=2ax+1 \qquad \cdots\cdots②$$

②×x−①×2 を作ると

$$xy'-2y=-x-2$$

これが求めるものである。

答　$xy'-2y=-x-2$

解 2.

$$y=ax^2+x+1$$

$$\therefore\ \frac{y-x-1}{x^2}=a$$

両辺をxで微分すると

$$\frac{x(y'-1)-(y-x-1)\cdot 2}{x^3}=0$$

$$\therefore\ xy'-2y=-x-2 \qquad \cdots\cdots 答$$

*　*　*

◆ 第2は微分方程式を解くこと，です。これにはいろいろな型があって，それぞれ名称がついていますが，高校でやるのは，その中の1つ。変数分離形というものです。つまり

変数分離形の微分方程式

$$f(y)\frac{dy}{dx}=g(x) \qquad \cdots\cdots(**)$$

の解は

$$\int f(y)dy=\int g(x)dx$$

となる。形式的にいえば，微分方程式(**)の両辺にdxを掛け左辺はyだけ，右辺はxだけにしてから，それぞれ積分した，ということなのです。入試などでは，これ以外に **同次形**（どうじけい）や **線形**（せんけい）のものも出題されますが，すべてやり方を指示してありますから，べつに心配はいりません。では，ともかく，これを：——

■練習 3. 微分方程式

$$x\frac{dy}{dx}=y$$

を解け。

(ヒント) 変数を分離しますと，

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

両辺を積分して

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\quad \log|y|=\log|x|+C$$

ここに C は積分定数です。

$$\therefore\quad \log\left|\frac{y}{x}\right|=C\qquad \therefore\quad \left|\frac{y}{x}\right|=e^C$$

$$\therefore\quad \frac{y}{x}=\pm e^C\qquad \therefore\quad y=\pm e^C x$$

ここで，$\pm e^C=A$ と書くと

$$y=Ax$$

となりましょう。

答 $y=Ax$

* * *

◆ 微積では微分方程式は間接的にも出題されます。詳しくは，それぞれの項目をみてもらうとして，ここには関数方程式と積分方程式の場合をやっておくことにしましょう。

■練習 4. x，y の任意の値に対してつねに

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$$

が成り立つとき，微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。ただし，$f'(0)=a$ とする。

(解) x を定数とみなして，y で両辺を微分すると

$$f'(x+y)=f'(y)+4x$$

ここで $y=0$ とおくと

$$f'(x)=f'(0)+4x$$

ゆえに $y=f(x)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=4x+a$$

これは変数分離形の微分方程式であるから

(実ハソレホド大ゲサニイウホドノコトモナイノダガ……)

$$\int dy=\int(4x+a)dx$$

$$\therefore\quad y=2x^2+ax+C$$

ところが $f(0)=0$ であるから $C=0$

$$\therefore\quad f(x)=2x^2+ax\quad\cdots\cdots\text{答}$$

(注) 実は微分可能性まで条件としないですむのですが，詳しくは（☞「基解」p.262）を参照してください。もう1つ，これを：——

■練習 5. $f(x)=x^2+2+2\int_1^x tf(t)dt$

を満足する微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。 (北大)

(解) $f(x)=x^2+2+2\int_1^x tf(t)dt\quad\cdots\cdots①$

の両辺を x で微分しますと

$$f'(x)=2x+2xf(x)$$

を得る。これは，$y=f(x)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=2x(y+1)$$

となる。これは変数分離形の微分方程式で

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int 2xdx$$

$$\therefore\quad \log|y+1|=x^2+C$$

$$\therefore\quad |y+1|=e^{x^2+C}=e^Ce^{x^2}$$

$$\therefore\quad y+1=\pm e^Ce^{x^2}$$

$\pm e^C=A$ とおくと

$$y=-1+Ae^{x^2}$$

ところが，①において $x=1$ とおくと

$$f(1)=1^2+2+0\qquad \therefore\quad f(1)=3$$

$$\therefore\quad A=\frac{4}{e}$$

$$\therefore\quad f(x)=-1+\frac{4}{e}e^{x^2}$$

答 $f(x)=\frac{4}{e}e^{x^2}-1$

* * *

◆ 最後に，微分方程式の応用については，それぞれの項目を参照してもらえばよいのですが，典型的なものとしては，直交曲線群の方程式を求めることと，曲線の接線影の長さが一定であるような曲線を求めよ，といったタイプのものをマスターすることです。

◑ 微分方程式の作り方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆微分方程式を作ることなんかヤル気もしない，などという人がある。あまりにも簡単だから，というが，さて，どうかな。

◆ 微分方程式とは何か，ということについては（☞ p.258）を参照してください。ここでは，微分方程式を作るコツを練習するのが目的です。

練習 1. 方程式 $y=a\sin x$ から任意定数 a を消去して微分方程式を作れ。

（解） $y=a\sin x$ ……①

$\therefore\ y'=a\cos x$ ……②

②を①で辺々割れば

$$\frac{y'}{y}=\cot x \qquad \therefore\ y'=(\cot x)y$$

答 $\dfrac{dy}{dx}=(\cot x)y$

練習 2. $y=\dfrac{1}{x+a}$ から任意定数 a を消去して微分方程式を作れ。

（解） $y=\dfrac{1}{x+a} \qquad \therefore\ y'=-\dfrac{1}{(x+a)^2}$

$$\therefore\ y'=-y^2$$

答 $\dfrac{dy}{dx}=-y^2$

（注） ふつう微分方程式は y のついたものを左辺に，y のつかないのを右辺に書きます。その流儀でいけば，上の2つは

$$\frac{dy}{dx}-(\cot x)y=0,\ \frac{dy}{dx}+y^2=0$$

となりますが，x の項がないから，無理にここまでやることもないでしょう。

練習 3. $y=\dfrac{x}{x+a}$ から任意定数 a を消去して微分方程式を作れ。

（ヒント） a を孤立させるとうまくいくことが多いものです。つまり，上の方程式を変形して

$$x+a=\frac{x}{y}$$

両辺を x で微分して

$$1=\frac{y\cdot 1-x\cdot y'}{y^2}$$

$$\therefore\ xy'+(y^2-y)=0$$

となりましょう。

*　*　*

◆ 任意定数が2個あれば，2回微分しなければなりません。

練習 4. $y=ax^2+bx+4$ の微分方程式を作れ。

（ヒント） 任意定数は a，b 2個入っていますから，2回微分することが必要です。つまり，

$y=ax^2+bx+4$ ……①

$y'=2ax+b$ ……②

$y''=2a$ ……③

②，③から

$$a=\frac{y''}{2},\ b=y'-xy''$$

これを①に代入して

$$y=\frac{y''}{2}x^2+(y'-xy'')x+4$$

$$\therefore\ x^2y''-2xy'+2y=8$$

これが求めるものです。

練習 5. $y=\dfrac{b}{x+a}$ の微分方程式を作れ。

（解） $y(x+a)=b$ の両辺を x で微分すると

$y\cdot 1+y'(x+a)=0$ ……①

両辺を x で微分して

$y'+y''(x+a)+y'=0$ ……②

①$\times y''-$②$\times y'$ を作ると

$$yy''-2y'^2=0$$

答 $yy''-2y'^2=0$

*　*　*

◆ ある幾何学的条件を満足する曲線の微分方程式を求めたり，ある物理的条件を満足する微分方程式を導いたりすることは，ここの目的ではありません。しかし，やや総合的な問題もないわけではありません。

では，次の練習をやってみませんか。

練習 6. 2次曲線 $Ax^2+By^2=1$ の微分方程式を作れ。

(解)
$$Ax^2+By^2=1$$
$$\therefore\quad A+B\left(\frac{y}{x}\right)^2=x^{-2}$$

両辺を x で微分して
$$B\cdot 2\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{xy'-y\cdot 1}{x^2}=-2x^{-3}$$
$$\therefore\quad xyy'-y^2=-\frac{1}{B}$$

両辺を x で微分すると
$$xyy''+x(y')^2+yy'-2yy'=0$$
$$\therefore\quad xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{dy}{dx}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

(注) この結果を証明せよ，というのは小樽商大に出ています。

練習 7. 円 $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ の微分方程式を作れ。A，B，C は任意定数である。

(解) $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$

の両辺を x で微分すれば
$$2x+2yy'+2A+2By'=0$$

この両辺を2で割って
$$x+yy'+A+By'=0$$

両辺を x で微分すると
$$1+yy''+(y')^2+By''=0$$

両辺を y'' で割ると
$$\frac{1+yy''+(y')^2}{y''}=-B$$

が得られ，この両辺を x で微分すると
$$\frac{y''\{y'y''+yy'''+2y'y''\}-\{1+yy''+(y')^2\}y'''}{(y'')^2}=0$$
$$\therefore\quad\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}=3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\quad\cdots\cdots(*)$$

これが求めるものです。

(注) 同じ円でも

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ （a，b は任意定数）

だとちがってきます。すなわち
$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\qquad\cdots\cdots(**)$$

です。つまり，このほうは中心だけが変わるのですから，制限が大きいわけです。そこで，r も自由に変わるとして，(**) から
$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=r^2$$

と変形して，両辺を x で微分しますと
$$\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\cdot 3\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2\cdot 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\right.$$
$$\left.-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3\cdot 2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\right]\Big/\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4=0$$

つまり，これを変形すると
$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}=3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

が得られます。これは (*) と同じ。当然のことですが，円の微分方程式だからといってみんな同じになるわけではありません。

練習 8. x の関数 y が微分方程式
$$y''-y=2\sin x$$
を満足するものとする。

$y=e^xu-\sin x$ とおくとき，関数 u が満足する微分方程式を作れ。 （早大）

(ヒント) $y'=e^xu+e^xu'-\cos x$
$$y''=e^xu+2e^xu'+e^xu''+\sin x$$
に注意すること。

答 $u''+2u'=0$

*　*　*

◆ 微分方程式を作るとき，任意変数の個数に等しい回数だけ微分する必要があるし，また，それで十分なのですが，こんなこともあります。

$$\ll f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\text{ の微分方程式を作れ}\gg$$

では任意定数は4つではありませんよ。$a(\neq 0)$ で分母・分子を割ると $f(x)=\dfrac{c'x+d'}{x+b'}$ で，本質的に3つしかないのです。

◎微分方程式の解き方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆解ける微分方程式にはいろいろな型がある。
高校ではそのうちひとつだけをやるのです。
イヤガルベカラズ!!

◆ 微分方程式で高校で解けなければならないのは **変数分離形** といわれるものだけです。そして，他のものは，それに導かれるものだけが出題されているのです。

ここではまず変数分離形を，その上で，**同次形** や **線形** のものを，変数分離形にもってゆくことをやってみましょう。

*　*　*

◆ さて，**変数分離形** ですが：——

■練習 1. $\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}=\sin x$ を解け。

ヒント ≪形式的には≫両辺に dx を掛けて

$$\cos y\,dy=\sin x\,dx$$

左辺は y だけ，右辺は x だけ，つまり，変数は分離されたわけ。そこで

$$\int\cos y\,dy=\int\sin x\,dx$$

$\therefore\quad \sin y=-\cos x+C$

$\therefore\quad \sin y+\cos x=C$　（C は積分定数）

これが求めるものです。

■練習 2. $x^2\dfrac{dy}{dx}=y$ を解け。

解 変数分離形であるから

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x^2}$$

$\therefore\quad \log|y|=-\dfrac{1}{x}+C$

$\therefore\quad |y|=e^{-\frac{1}{x}+C}=e^Ce^{-\frac{1}{x}}$

$\therefore\quad y=\pm e^Ce^{-\frac{1}{x}}$

$\therefore\quad y=Ae^{-\frac{1}{x}}$　$(A=\pm e^C)$

答　$y=Ae^{-\frac{1}{x}}$

■練習 3. $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{y}$ を解け。

解　$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int x\,dx$$

$\therefore\quad 2\sqrt{y}=\dfrac{x^2}{2}+C'$　（C' は定数）

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{16}(x^2+C)^2$　（C は定数）

答　$y=\dfrac{1}{16}(x^2+C)^2$

*　*　*

◆ 変数分離形に導くことのできる第1のものは **同次形** です。それは

$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ **の形のもので，**

$\boldsymbol{\dfrac{y}{x}=u}$ **とおく**

と変数分離形になるのです。

■練習 4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ を解け。

ヒント $\dfrac{y}{x}=u$ とおけば　$y=ux$

$\therefore\quad y'=u+u'x$

ですから，

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1}{\sqrt{u}}$$

これを解いて

$\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}=\log|x|+C$　（C は定数）

$\therefore\quad \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}(\log|x|+C)$

答　$y=x\sqrt[3]{\left\{\dfrac{3}{2}(\log|x|+C)\right\}^2}$

*　*　*

◆ 変数分離形に導かれる第2のものは

$$\frac{dy}{dx}=ax+by+C$$

の形のものです。これは $z=ax+by+C$ と

おきますと，変数分離形になるのです。では，これをやってみませんか。

練習 5. $z=x+y+1$ とおくことによって，次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx}=x+y+1$$

(解) $z=x+y+1$ とおくことによって，両辺を x で微分すると

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}-1=z \qquad \therefore\ \frac{dz}{dx}=z+1$$

$$\therefore\ \int\frac{dz}{z+1}=\int dx$$

$$\therefore\ \log|z+1|=x+C$$

$$\therefore\ |z+1|=e^{x+C}$$

$$\therefore\ z+1=\pm e^{C}e^{x}$$

$\pm e^{C}=A$ とおくと

$$z=Ae^{x}-1$$

これと $z=x+y+1$ とから

$$y=(Ae^{x}-1)-x-1$$

$$\therefore\ y=Ae^{x}-x-2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 入学試験のための微分方程式の解法は上の程度で十分です。しかし，解の形を与えたものなら，他の形のものも出題されています。例えば，次のようなものです。

練習 6. a，b を定数とするとき，関数

$$y=e^{-3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

が微分方程式

$$y''+3y'+y=-15e^{-3x}\cos 2x$$

を満足するように a，b の値を定めよ。

（大阪府大）

(ヒント) ただ代入して調べるだけのことです。微分方程式というコトバをとってしまえば，微分法のところの演習問題だといっても怪しむ人はいないハズ。では：——

(解)　$y=e^{-3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$

$$\therefore\ y'=e^{-3x}(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)$$
$$+(-3)e^{-3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$$
$$=e^{-3x}\{(2b-3a)\cos 2x$$
$$+(-2a-3b)\sin 2x\}$$

したがって

$$y''=e^{-3x}\{-(4b-6a)\sin 2x$$
$$+(-4a-6b)\cos 2x\}$$
$$+(-3)e^{-3x}\{(2b-3a)\cos 2x$$
$$+(-2a-3b)\sin 2x\}$$
$$=e^{-3x}\{(5a-12b)\cos 2x$$
$$+(12a+5b)\sin 2x\}$$

そこで $y''+3y'+y$ に代入すると

$$y''+3y'+y=-3e^{-3x}\{(a+2b)\cos 2x$$
$$-(2a-b)\sin 2x\}$$

この右辺が $-15e^{-3x}\cos 2x$ に等しいから

$$-3(a+2b)=-15$$
$$3(2a-b)=0$$
$$\therefore\ a=1,\ b=2$$

(注) 三角関数の合成を使うと

$$y=e^{-3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$$
$$=e^{-3x}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(2x+\alpha)$$

となりますから，

$$y=Ae^{-3x}\sin(2x+\alpha)$$

について $y''+3y'+y$ を計算すると少しラクになります。キミ，やってみませんか。

*　*　*

◆ **連立微分方程式** もあります。

練習 7. 関数 $y=ae^{kt}$ および $x=be^{kt}$（a，b，k は定数で $ab\neq 0$ とする）が微分方程式

$$\frac{dy}{dt}=y+x,\quad \frac{dx}{dt}=y-x$$

を満足するとき，k の値を求めよ。また，a，b の間に成立する関係を求めよ。

（慶大）

(ヒント) $y=ae^{kt}$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dy}{dt}=ake^{kt}，\text{同様にして}\ \frac{dx}{dt}=bke^{kt}$$

これを代入して比べればよい。

$\boxed{答}$　$k=\pm\sqrt{2}$ のときで，

$b=(\pm\sqrt{2}-1)a$　（複号同順）

○（微分方程式の）変数分離形の解法を練習しよう

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆高校でやる微分方程式はただひとつ変数分離形である。これをマスターしないで微分方程式を語るなかれ。

◆ 変数分離形については（☞ p.262）を参照してください。ここでは，もっぱら解法の練習をするのが目的です。

練習 1. $a\left(x\dfrac{dy}{dx}+2y\right)=xy$ を解け。ただし，a は0でない定数である。

（解） 与えられた微分方程式を変形すれば

$$\frac{2a-x}{x}+\frac{a}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

ゆえに，積分すれば

$$\int\frac{2a-x}{x}dx+\int\frac{a}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=0$$

$$\therefore\ \int\frac{2a-x}{x}dx+\int\frac{a}{y}dy=0 \qquad \cdots\cdots(**)$$

$$\therefore\ 2a\log|x|-x+a\log|y|=C$$

$$\therefore\ \log x^2|y|=\frac{x+C}{a}$$

$$\therefore\ e^{\frac{x+C}{a}}=x^2|y|$$

$$\therefore\ y=\pm\frac{1}{x^2}e^{\frac{C}{a}}\cdot e^{\frac{x}{a}}$$

ここで $\pm e^{\frac{C}{a}}=A$ とおくと

$$y=A\frac{1}{x^2}e^{\frac{x}{a}} \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

（注） (*) から (**) へゆくところを，便宜的に

$$\frac{2a-x}{x}dx+\frac{a}{y}dy=0$$

としてもかまいません。厳密なことは大学で学ぶハズ。

練習 2. $x^2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ を解け。

（解） 変数を分離して積分すると

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\therefore\ \log|y|=\frac{1}{x}+C$$

$$\therefore\ |y|=e^{\frac{1}{x}+C}=e^Ce^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore\ y=\pm e^C\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$\pm e^C=A$ とおくと

$$y=Ae^{\frac{1}{x}} \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

練習 3. $e^y\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=1$ を解け。

（解） 与えられた微分方程式を変形すれば

$$\frac{dy}{dx}=e^{-y}-1$$

$$\therefore\ \int\frac{dy}{e^{-y}-1}=\int dx$$

ところが

$$\text{左辺}=\int\frac{e^y}{1-e^y}dy=-\int\frac{(e^y-1)'}{e^y-1}dy$$

$$=-\log(e^y-1)$$

であるから

$$\log(e^y-1)=-x+C$$

$$\therefore\ e^y-1=e^{-x+C}$$

$$\therefore\ e^y=Ae^{-x}+1 \quad (A=e^C)$$

あるいは

$$y=\log(Ae^{-x}+1) \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

練習 4. 微分方程式

$$\sin x\sin^2y-\frac{dy}{dx}\cos^2x=0$$

を解け。

（解） $$\cos^2x\frac{dy}{dx}=\sin x\sin^2y$$

積分して

$$\int\frac{dy}{\sin^2y}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2x}$$

$$\therefore\ \cot y=-\frac{1}{\cos x}+C$$

$$\therefore\ \sec x+\cot y=C \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的なものをやってみませんか。

練習 5. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y=y^2$ の解で，

$x=0$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$ となる $y=f(x)$ を求めよ。（福島県医大）

（解）
$$\frac{dy}{dx}=y^2-y$$

において $y=0$ および $y=1$ は $x=0$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$ という条件を満足しないから適しない。したがって，$y^2-y\neq 0$ である。ゆえに変数を分離して積分すると

$$\int\frac{dy}{y(y-1)}=\int dx$$

$$\therefore\quad \log\left|\frac{y-1}{y}\right|=x+C\quad (C\text{は積分定数})$$

$$\therefore\quad \left|\frac{y-1}{y}\right|=e^{x+C}$$

$$\therefore\quad \frac{y-1}{y}=\pm e^Ce^x$$

$\pm e^C=A$ とおいて，変形すれば

$$y=\frac{-1}{Ae^x-1}$$

$x=0$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$ であるから，$A=-1$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{e^x+1}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

練習 6. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$$

について，次の問に答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1) この微分方程式を解け。

(2) $x=0$ のとき $y=0$ となる解を求め，それを0から $\log 2$ まで積分せよ。

(3) $x\longrightarrow \log 2+0$ のとき $y\longrightarrow -\infty$ となる解を求め，$x>\log 2$ の範囲でそのグラフをかけ。（北大）

（ヒント） (1) 変数分離形ですから，べつにめんどうはありませんね。つまり，

$$\int\frac{dy}{y^2-1}=\frac{1}{2}\int dx$$

$$\therefore\quad \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x+C\quad (C\text{は定数})$$

$$\therefore\quad \left|\frac{y-1}{y+1}\right|=e^{x+C}$$

$$\therefore\quad \frac{y-1}{y+1}=\pm e^Ce^x$$

$\pm e^C=A$ とおいて，変形しますと

$$y=\frac{-Ae^x-1}{Ae^x-1}$$

このままでもいいが，

$$y=\frac{-e^x-k}{e^x-k}\quad (k\text{は定数})$$

のほうが格好がいいでしょう。

(2) $x=0$ のとき $y=0$ なるためには

$$0=\frac{-1-k}{1-k}$$

$$\therefore\quad k=-1$$

$$\therefore\quad y=\frac{-e^x+1}{e^x+1}$$

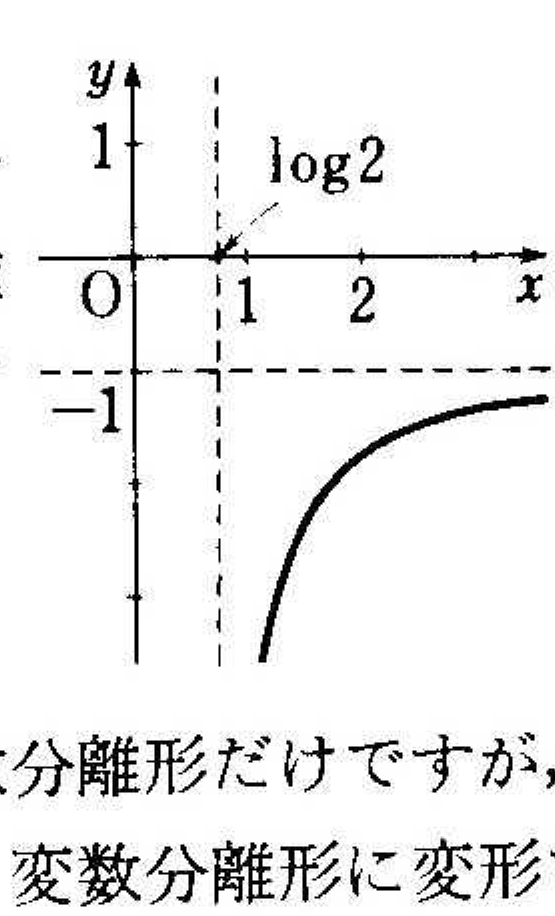
そこで $I=\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{-e^x+1}{e^x+1}dx$ の積分ですが，

$e^x=u$ とおけば

$$I=\int_1^2\frac{-u+1}{u(u+1)}du=\int_1^2\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1}\right)du$$
$$=\Big[\log|u|-2\log|u+1|\Big]_1^2$$
$$=3\log 2-2\log 3$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\log 2+0}\frac{-e^x-k}{e^x-k}=\frac{-2-k}{2-k}=-\infty$

となるためには $k=2$ になることが必要です。十分であることはキミが確かめることです。そしてグラフは右の通りです。



* * *

◆ 高校でやるのは変数分離形だけですが，実は，かなりのものが，変数分離形に変形できるのです。例えば，**同次形** のものや，**線形** のものなどです（☞ p.266，268）。だから，変数の変換さえ許せば，微分方程式の問題がどっと変数分離形の中になだれこむわけだ。

(微分方程式の)同次形とは

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微積で扱う微分方程式はほとんど変数分離形ですが，それ以外のものもヒント付でいくつか現れる，その第1号がこれだ。

◆ ともあれ，具体的な例からはじめよう。

練習1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ を $\dfrac{y}{x}=u$ とおいて解け。

(ヒント) $\dfrac{y}{x}=u$ より

$$y=xu$$

この両辺を x で微分しますと

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$$

となりますから，これを与えられた方程式に代入しますと，

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\frac{1}{u}$$

$$\therefore\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$$

これは **変数分離形** です。つまり

$$\int u\,du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{u^2}{2}+C=\log|x|$$

$$\therefore\quad \frac{y^2}{x^2}+2C=\log x^2$$

あるいは

$$y^2=x^2(\log x^2+C)\quad\cdots\cdots\text{答}$$

とかけます。ただし，ここの C と上の行の C とはちがいますよ。

＊　＊　＊

◆ このように，一般に，

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形の微分方程式は $\dfrac{y}{x}=u$ とおくことによって変数分離形にすることができるのです。これを **同次形の微分方程式** というのです。では，次のもやってみませんか。

練習2. $x^2\dfrac{dy}{dx}=y(x+y)$ を $\dfrac{y}{x}=u$ とおくことによって解け。

(解)

$$x^2\frac{dy}{dx}=y(x+y)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

において $\dfrac{y}{x}=u$ とおけば

$$x\frac{du}{dx}+u=u+u^2$$

$$\therefore\quad \int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{u}=\log|x|+C$$

$$\therefore\quad \log|x|=-\left(\frac{x}{y}+C\right)$$

$$\therefore\quad |x|=e^{-\left(\frac{x}{y}+C\right)}=e^{-C}e^{-\frac{x}{y}}$$

$$\therefore\quad x=\pm e^{-C}e^{-\frac{x}{y}}$$

ここで $\pm e^{-C}=A$ とおくと

$$x=Ae^{-\frac{x}{y}}\quad(A\text{は任意定数})$$

答　$x=Ae^{-\frac{x}{y}}$

練習3. $3x+y+x\dfrac{dy}{dx}=0$ を解け。

(ヒント)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+y}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}-3$$

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくことによって

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{2u+3}=0$$

ゆえに，……

答　$2xy+3x^2=C$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的なものをやってみませんか。

練習 4. $x^2+y^2=cx$ の直交曲線群の方程式を求めよ。

ヒント　c をいろいろに変えますと，

$$x^2+y^2=cx$$

は原点で y 軸に接する曲線群を表すハズ。これらのすべてに直交する曲線群を求めよ，というわけです。

解　$$x^2+y^2=cx \qquad \cdots\cdots①$$

の両辺を x で微分すれば

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=c \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より c を消去すれば

$$x^2-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0$$

を得る。これは与えられた曲線群上の点では $\frac{dy}{dx}$ が x, y で定まることを示している。すなわち

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-y^2}{2xy} \qquad \cdots\cdots③$$

したがって，直交曲線群上の点 (x, y) においては

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2} \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つ。

さて，$\frac{y}{x}=v$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

したがって，④は変数分離形となり解くことができる。すなわち，

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{v}-\frac{2v}{1+v^2}\right)dv$$

$$\therefore\quad \log x=\log v-\log(1+v^2)+C'$$

これを書きかえると

$$x^2+y^2=Cy$$

を得る。

答　$x^2+y^2=Cy$

練習 5. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x+y-5}{x-3y-5}$$

において

$$x=X+2,\quad y=Y-1$$

とおいて，X, Y に関する微分方程式に変換してこれを解け。

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

また，

$$3x+y-5=3(X+2)+(Y-1)-5$$
$$=3X+Y$$
$$x-3y-5=(X+2)-3(Y-1)-5$$
$$=X-3Y$$
$$\therefore\quad \frac{dY}{dX}=\frac{3X+Y}{X-3Y}$$

さらに $\frac{Y}{X}=v$ とおくと

$$\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$$

$$\therefore\quad \int\frac{dX}{X}=\frac{1}{3}\int\frac{dv}{1+v^2}-\int\frac{v}{1+v^2}dv$$

$$\therefore\quad \log|X|=\frac{1}{3}\theta-\frac{1}{2}\log(1+v^2)+C'$$

ここに　$\tan\theta=v$

$$\therefore\quad \log|X|\sqrt{1+v^2}-C'=\frac{1}{3}\theta$$

$-C'=\log C$ とおくと

$$3\log C|X|\sqrt{1+v^2}=\theta$$

両辺の正接をとって

$$\tan(3\log C|X|\sqrt{1+v^2})=v$$

$$\therefore\quad \tan\left(3\log C|x-2|\sqrt{1+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2}\right)=\frac{y+1}{x-2}$$

（ヤレヤレ，コレハスゴイコトニナッタ。モウ少シナントカナラナイカ，$|x-2|$ ヲ根号内ニ入レテミヨウカ）

$$\tan\{3\log C\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\}=\frac{y+1}{x-2}$$

あるいは分母を払って

$$(x-2)\tan\{3\log C\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\}$$
$$=y+1 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

ただし，C は積分定数。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

●線形微分方程式とは

◆線形の微分方程式というのは高校の範囲ではありません。しかし，ちょっとしたヒントをつけてよく出題されていますよ。

◆　線形の微分方程式というのは次のようなものです。

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

これの簡単なのが，よく出題されています。これを練習するのが目的です。では，まずこれから：――

練習 1. aを定数，$f(x)$ を連続関数とするとき，微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x) \quad \cdots\cdots①$$

の解は次の式で与えられることを，方程式の両辺に e^{ax} を掛けることによって確かめよ。ただし，Cは定数である。

$$y=e^{-ax}\left\{\int e^{ax}f(x)dx+C\right\}\cdots\cdots②$$

（順天堂大）

ヒント　「確かめよ」とあるから解の方から手をつけろ，ということなのでしょう。

②の両辺に e^{ax} を掛けて

$$ye^{ax}=\int e^{ax}f(x)dx+C$$

両辺をxで微分すると

$$\frac{dy}{dx}\cdot e^{ax}+y\cdot ae^{ax}=e^{ax}f(x)$$

両辺を e^{ax} で割ると

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$$

ナルホド!!　確かめられたではないか。

練習 2. (1)　$e^{2x}f(x)$ を微分せよ。

(2)　$\frac{dy}{dx}+2y=e^x$

を解け。

ヒント　どうやら，(1)は(2)のためのヒントらしいと気がついたでしょう。ともあれ(1)からやってみるとしようか。

(1)　$\frac{d}{dx}(e^{2x}f(x))$

$=e^{2x}f'(x)+2e^{2x}f(x)$

$=e^{2x}\{f'(x)+2f(x)\}$

（ナルホド，ソウダッタノカ）

(2)　$$\frac{dy}{dx}+2y=e^x$$

の両辺に e^{2x} を掛けると

$$e^{2x}\left\{\frac{dy}{dx}+2y\right\}=e^{3x}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(e^{2x}y)=e^{3x}$$

両辺を積分して

$$e^{2x}y=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{3}e^{x}+Ce^{-2x}$$

ここに，Cはいうまでもなく，積分定数です。

練習 3. $\frac{dy}{dx}+3y=\sin x$

を解け。

ヒント　両辺に e^{3x} を掛けると

$$e^{3x}\frac{dy}{dx}+3e^{3x}y=e^{3x}\sin x$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(e^{3x}y)=e^{3x}\sin x$$

$$\therefore\quad e^{3x}y=\int e^{3x}\sin x\,dx$$

ところが：――

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

の積分はネゴトでもまちがえてはいけなかったのだ。ここでは不精して結果のみあげると

$$\int e^{3x}\sin x dx=\frac{e^{3x}(3\sin x-\cos x)}{10}$$

ですから

$$e^{3x}y=\frac{e^{3x}}{10}(3\sin x-\cos x)+C$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{10}(3\sin x-\cos x)+Ce^{-3x}\quad\cdots\text{答}$$

練習 4. 微分方程式

$$\cos x\frac{dy}{dx}+y\sin x=1\quad\cdots\cdots①$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $y=g(x)\cos x$ とおいて①から $g(x)$ のみたす微分方程式をつくれ。ただし，$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$

(2) (1)を利用して微分方程式①の解 $y=f(x)$ を求めよ。 (札幌医大)

解 (1) $\frac{dy}{dx}=g'(x)\cos x+g(x)(-\sin x)$

$$\therefore\quad(\cos x)\{g'(x)\cos x-g(x)\sin x\}+g(x)\cos x\sin x=1$$

$$\therefore\quad g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\quad\cdots\cdots(*)$$

(2) (*)を積分して

$$g(x)=\tan x+C$$

$$\therefore\quad y=f(x)=\sin x+C\cos x$$

答 (1) $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

(2) $f(x)=\sin x+C\cos x$

では，もう1つ：——

練習 5. x の関数 y が導関数をもつとき，次の問いに答えよ。ただし，問(1)，(2)は $\boxed{}$ にあてはまる数字または数式を記入するだけでよい。

(1) $e^{-2x}\frac{d}{dx}(e^{2x}y)=\boxed{}\frac{dy}{dx}+\boxed{}y$

(2) 微分方程式 $\frac{dy}{dx}+3y=0$ の一般解は $y=Ce^{\boxed{}}$ (Cは積分定数) となる。

(3) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+2y=x^2$$

の一般解を求めよ。 (新潟大)

ヒント (2)は変数分離形ですから，とくに問題はありませんね。

(3)では，両辺に e^{2x} を掛けて変形しますと

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y)=x^2e^{2x}$$

そこで，両辺を x で積分して，さらに両辺を e^{2x} で割ると，……

答 (1) 順に，1，2

(2) $-3x$

(3) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$

* * *

◆ では，最後に積分方程式から1例を拾ってみましょう。

練習 6. $f(x)=x^2+3\int_1^x f(t)dt\quad\cdots\cdots①$

を解け。

ヒント 両辺を x で微分しますと

$$f'(x)=2x+3f(x)$$

ここで，$y=f(x)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}-3y=2x$$

(サア，ドウデス，ワカリマスカ，アキラメマスカ，5分間待ツトシヨウ)

両辺に e^{-3x} を掛けると

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y)=2e^{-3x}x$$

$$\therefore\quad e^{-3x}y=2\int e^{-3x}xdx$$

$$=-\frac{2}{9}(3x+1)e^{-3x}+C$$

$$\therefore\quad y=-\frac{2}{9}(3x+1)+Ce^{3x}$$

ところが，①より $f(1)=1$

$$\therefore\quad C=\frac{17}{9}e^{-3}$$

$$\therefore\quad f(x)=-\frac{2}{9}(3x+1)+\frac{17}{9}e^{3(x-1)}$$

……答

◐ 図形と微分方程式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈図形問題への微分方程式の応用で，もっとも大切な点は，流通座標の活用の仕方です。関数形を使うと混乱する!!

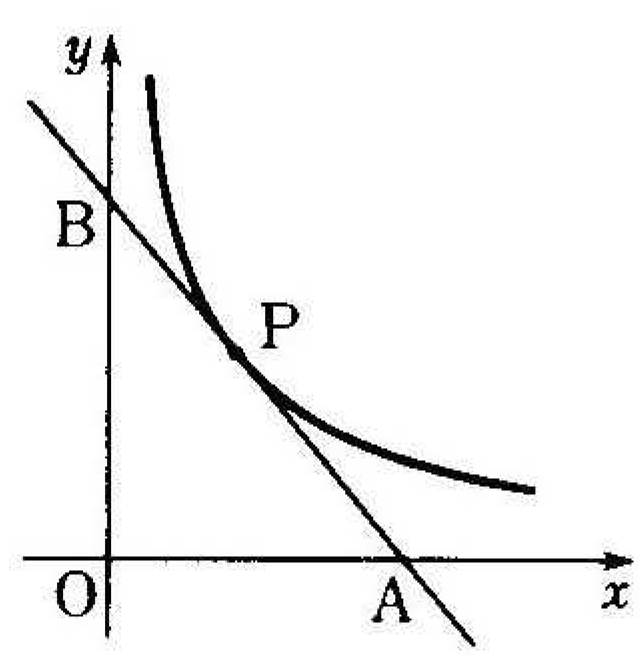
◆ このセクションでは微分方程式を図形に応用することを練習してみましょう。大きく分けて2つになります。1つは，接線や法線に関係したもの，もう1つは直交曲線を求めるものです。では，ともかく，はじめようではないか。まず第1のタイプを：——

練習 1. 曲線 $y=f(x)$ は第1象限にあり，点 (1, 1) を通る。曲線上の任意の点Pにおける接線と x, y 軸との交点をそれぞれ A, B とするとき，Pは $\overline{\mathrm{AB}}$ の中点であるという。この曲線の方程式を求めよ。

ヒント 曲線上の任意の点 P(x, y) における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}$$

で与えられますから，



接線の方程式は

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となります。ここに，X, Y はいわゆる流通座標です。(*) が x 軸と交わる点は

$$\mathrm{A}\left(x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ -x\frac{dy}{dx}+y\right)$$

ですから，P(x, y) が中点であることから

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}+0\right)=x,\ \frac{1}{2}\left(0-x\frac{dy}{dx}+y\right)=y$$

実は，この2つをやる必要はありません。整理してみると，いずれも同じ微分方程式になるからです。すなわち，

$$x\frac{dy}{dx}=-y$$

これは変数分離型ですから

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\ \log y=-\log x+C$$

($x>0$, $y>0$ ですよ)

$$\therefore\ \log xy=C$$

$$\therefore\ xy=e^C$$

ところが点 (1, 1) を通るというから

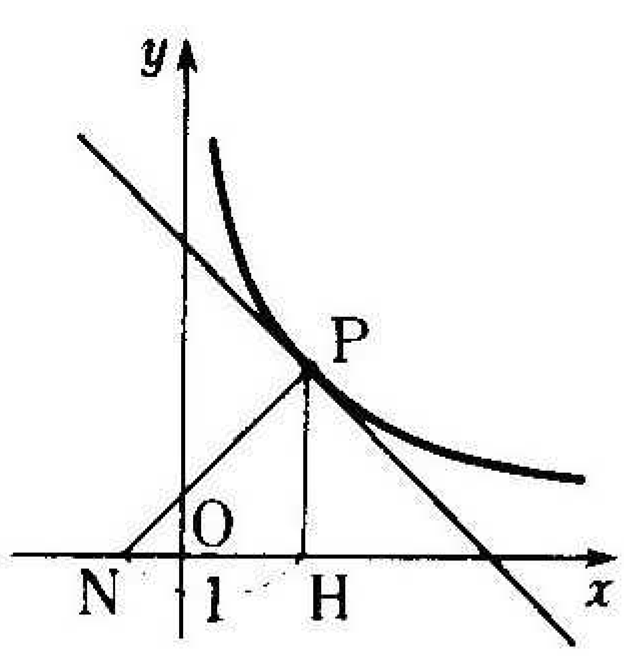
$$xy=1 \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

練習 2. 曲線上の点Pにおける法線（接点を通り，接線に垂直な直線）が x 軸と交わる点を N，Pから x 軸に下した垂線の足を Hとするとき，NH=1 ならば，この曲線の方程式を求めよ。

ヒント 曲線上の1点 P(x, y) における法線の方程式は

$$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$$

ですから，Nの座標は



$$\left(x+y\frac{dy}{dx},\ 0\right)$$

また H(x, 0) ですから

$$\overline{\mathrm{NH}}=\left|y\frac{dy}{dx}\right|=1$$

$$\therefore\ y\frac{dy}{dx}=\pm 1$$

$$\therefore\ \int y\,dy=\pm\int dx$$

$$\therefore\ \frac{y^2}{2}=\pm x+C' \quad (C' \text{ は積分定数})$$

すなわち

$$y^2=\pm 2x+C \quad (C\text{は定数})$$

*　*　*

◆ では，やや総合的なものもやってみませんか。

練習 3. 曲線 $y=f(x)(y>0)$ 上の任意の点Pにおける法線がx軸と交わる点をQとする。Pのx座標がつねにQのx座標の3倍になっている。次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の満たす微分方程式を作れ。

(2) この曲線とx軸によって囲まれる図形の面積が5になるという条件のもとで，この微分方程式を解け。（鳥取大）

（解） (1) Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，法線の方程式は，$X,\ Y$ を流通座標として

$$Y=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(X-x)+y$$

と書ける。QのX座標は，$Y=0$ とおいて得られ，

$$X=x+y\frac{dy}{dx}$$

である。ゆえに，題意から

$$x=3\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore\quad y\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}x \qquad \cdots\cdots①$$

これが求める微分方程式である。

(2) 次に①を変形して

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dy^2}{dx}=-\frac{2}{3}x$$

$$\therefore\quad y^2=-\frac{2}{3}x^2+C \quad (C\text{は定数})$$

あるいは

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2}+y^2=a^2 \quad (a^2=C)$$

と書ける。

このだ円の囲む面積は10であることから

$$\pi a^2\sqrt{\frac{3}{2}}=10 \qquad \therefore\quad a^2=\frac{10\sqrt{6}}{3\pi}$$

したがって

$$f(x)=y=\sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{3\pi}-\frac{2}{3}x^2}\ \cdots\cdots\text{答}$$

（注） だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の囲む面積が πab であることは知っていてもいいことだ。

では，もう1つ。こんどは体積の関係してくるものをやってみましょう。

練習 4. xy 平面上で点 $(1,\ 2)$ を通る曲線 $y=f(x)$ をx軸のまわりに回転した曲面と，定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，動点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ においてx軸に垂直に交わる2平面によって囲まれた回転体Vがある。ただし，$0\leqq a\leqq x$ とする。いま，Pを通り切口の円を底面とし原点Oを頂点とする直円すいの体積がつねにVの体積の $\dfrac{2}{3}$ に等しいという。

(1) $f(x)$ に関する微分方程式を作れ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

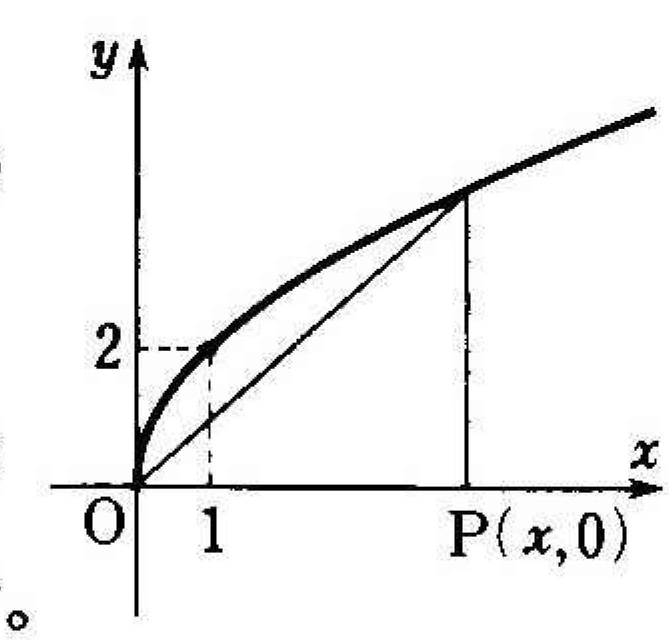
(3) aの値を定めよ。（関西大）

（ヒント） 題意から

$$V=\pi\int_a^x y^2dx \ \cdots\cdots①$$

また

$$\frac{1}{3}\pi y^2\cdot x=\frac{2}{3}V\cdots②$$



という関係があります。

①，②からVを消去しますと

$$\frac{1}{3}\pi y^2x=\frac{2}{3}\pi\int_a^x y^2dx$$

つまり

$$xy^2=2\int_a^x y^2dx \qquad \cdots\cdots③$$

となりますから，両辺をxで微分しますと

$$x\cdot 2y\frac{dy}{dx}+1\cdot y^2=2y^2$$

これから

$$2x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\therefore\quad y=C\sqrt{x}$$

ところが点 $(1,\ 2)$ を通るのですから $C=2$

$$\therefore\quad y=2\sqrt{x} \qquad \cdots\cdots④$$

となります。

③，④から $a=0$ が求まります。

速度・加速度と微分方程式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆速度や加速度が時間や空間とともに変わるとき微分方程式は必然的に現れてくる。それは避けて通ることのできない道なのだ。

◆ 微分方程式の応用として，速度や加速度を扱うのがこのセクションの目的です。では，さっそくこれをやってみませんか。

■練習 1. x 軸上を運動している点がある。速度については，$\dfrac{dx}{dt}=f(x)$，加速度については $\dfrac{d^2x}{dt^2}=x$ なる関係があるとする。$f(0)=1$ のとき，$f(x)$ を求めよ。（早大）

（解） $f(x)=y$ とすれば

$$x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dx}=y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ \int xdx=\int ydy$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{2}+C=\frac{y^2}{2}\quad (C\text{は積分定数})$$

ところが $x=0$ のとき $y=1$ であるから

$$C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y^2=x^2+1$$

$$\therefore\ y=\pm\sqrt{x^2+1}$$

ところが $x=0$ のとき $y=1>0$ であるから

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}\quad \cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

*　*　*

◆ 運動への微分方程式の問題は，平面運動が圧倒的に多いのです。では，それを：——

■練習 2. ある2つの動点A，Bの，ある一定点からの時刻 t における距離をそれぞれ y，z とするとき，次の関係があるという。

$$\frac{dy}{dt}+z=0\quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{dz}{dt}+y+z=0\quad \cdots\cdots②$$

このとき，動点Aのその一定点からの時刻 t における距離は，その点の速度と加速度の和に等しいことを証明せよ。

（大阪教育大）

（ヒント） 要するに

$$\frac{dy}{dt}+z=0\quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{dz}{dt}+y+z=0\quad \cdots\cdots②$$

の2つの式から

$$y=\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}$$

を導け，というわけでしょう。してみると，①，②から z をなくせばいいにちがいない。

（解） ①より

$$z=-\frac{dy}{dt}\quad \cdots\cdots③$$

両辺を t で微分すれば

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}\quad \cdots\cdots④$$

③，④を②に代入して

$$-\frac{d^2y}{dt^2}+y-\frac{dy}{dt}=0$$

$$\therefore\ y=\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}$$

Q. E. D.

■練習 3. xy 平面上で，時刻 t における点Pの座標を $(x(t),\ y(t))$ とする。点Pは $\dfrac{dx}{dt}=y$，$\dfrac{dy}{dt}=x$ を満たし，さらに点 $(0,\ a)$ を通るように動くものとする。ただし，a は正の定数である。点Pはどのような曲線上にあるか。

（愛知工大）

ヒント
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{x}{y}$$

ですから

$$\int y\,dy=\int x\,dx$$

$$\therefore\quad \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C$$

点 (0, a) を通るというのですから

$$a^2=2C$$

$$\therefore\quad y^2=x^2+a^2$$

$$y=\pm\sqrt{x^2+a^2}$$

$x=0$ のとき，$y=a>0$ であるから

$$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

ということになりましょう。

答　直角双曲線の上半分 $y=\sqrt{x^2+a^2}$

*　　*　　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 水平面内に x 軸，y 軸をとり，$xy-$ 平面内で投げ出された物体の位置を $(x,\ y)$ とすると，x，y について次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

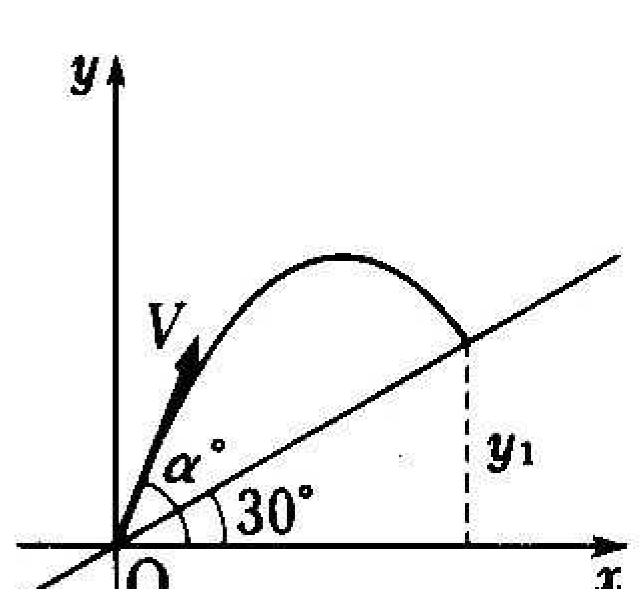
ただし，g は正の定数，t は時間を表す変数である（空気の抵抗など，影響の小さいものは無視してある）。

傾斜 30° の長い坂道の途中で，上り方向に向かって，一定の初速で石を投げる。坂道上もっとも遠くに石を届かせるには，仰角何度で投げればよいか。　(神戸大)

解　x 軸，y 軸を右の図に示すようにとると，坂道の方程式は

$y=x\tan 30°$ ……①

である。



物体の初速度を V，仰角を $\alpha°$ とする。さて，$\frac{d^2x}{dt^2}=0$ より

$$\frac{dx}{dt}=c_1 \qquad \cdots\cdots②$$

$t=0$ のとき，$x=0$ であるから

$$x=c_1t \qquad \cdots\cdots③$$

次に，$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$ より

$$\frac{dy}{dt}=-gt+c_2 \qquad \cdots\cdots④$$

$t=0$ のとき，$y=0$ であるから

$$y=-\frac{g}{2}t^2+c_2t \qquad \cdots\cdots⑤$$

ところが，$t=0$ において

$$c_1=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=V\cos\alpha° \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$c_2=V\sin\alpha° \qquad \cdots\cdots⑦$$

であるから，径路の方程式は③，⑤より t を消去して

$$c_1{}^2y=-\frac{g}{2}x^2+c_1c_2x$$

これと坂道①との交点の y 座標を y_1 とすると

$$y_1=\frac{2}{3g}(\sqrt{3}\,c_2-c_1)c_1$$

ゆえに，石の届いた地点までの道のり l は

$$\begin{aligned} l&=\frac{y_1}{\sin 30°}\\ &=\frac{2}{3g\sin 30°}(\sqrt{3}\,c_2-c_1)c_1\\ &=\frac{4V^2}{3g}(\sqrt{3}\sin\alpha°-\cos\alpha°)\cos\alpha°\\ &=\frac{8V^2}{3g}\sin(\alpha°-30°)\cos\alpha°\\ &=\frac{4V^2}{3g}\{\sin(2\alpha°-30°)-\sin 30°\}\end{aligned}$$

$30°\leqq\alpha\leqq 90°$ を考慮して，これが最大となるのは $2\alpha°-30°=90°$ のとき，したがって $\alpha=60°$ のときである。　答　60°

注　これでは数学の問題だか物理の問題だかわかりやしない，とおこる人もあろうか。いうなれば，これは，数理物理学の初歩的問題というわけです。

◐水量と微分方程式

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈微分方程式の応用範囲は広いが，水量に関する問題は，それが積分という形で表されるがゆえに特別な性格をもってくるのだ。

◆ ともあれ，具体的な問題から出発しましょう。まず，これをやってみませんか。

練習 1. 一様な断面をもつ水槽がある。この水槽の底にあけた穴から水が流れ出すときは，水位hの降下する速さは，そのときの水位の平方根に比例するという。このとき，次の問に答えよ。

(1) 水位の降下する速さと水位との関係式を求めよ。

(2) 水位の降下に対する時間の変化率と水位との関係を求めよ。 （慶大）

ヒント (1) 水位の降下する速さvは，そのときの水位hの平方根に比例するのですから，

$$v=k\sqrt{h}\quad (k\text{は比例定数})$$

と表せます。

(2) $v=-\dfrac{dh}{dt}$ ですから

$$\frac{dh}{dt}=-k\sqrt{h}$$

$$\therefore\quad \frac{dt}{dh}=-\frac{1}{k\sqrt{h}}\qquad\cdots\cdots(*)$$

となります。このとき

$$\frac{dt}{dh}=\frac{1}{\dfrac{dh}{dt}}$$

であることもお忘れなく!!

答 $v=k\sqrt{h}$，$\dfrac{dt}{dh}=-\dfrac{1}{k\sqrt{h}}$.

注 微分方程式(*)は容易に解けて

$$t=-\frac{2}{k}\sqrt{h}+C$$

となります。

練習 2. 容器の底にある穴から1秒間に流出する水の量は，水の深さの平方根に比例する。曲線 $y=x^2\ (0\leqq y\leqq a)$ をy軸のまわりに回転してできる容器の底から，1秒間に流出する水量を水の深さ $a$cm のとき $v$cm^3 とする。深さ $\dfrac{a}{2}$cm のとき，水面の低下する速度を求めよ。 （東京医歯大）

ヒント 深さhのときの容器内の水の体積をVとすれば

$$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h ydy=\frac{\pi h^2}{2}$$

となります。つまり

$$V=\frac{\pi h^2}{2}$$

この両辺を時間tで微分しますと

$$\frac{dV}{dt}=\pi h\frac{dh}{dt}\qquad\cdots\cdots①$$

となります。ところが$\dfrac{dV}{dt}$は水量の時間に対する変化率ですから，

$$-\frac{dV}{dt}=k\sqrt{h}$$

となりましょう。ここにkは比例定数です。

ところが，$h=a$のとき $-\dfrac{dV}{dt}=v$ だというのですから

$$v=k\sqrt{a}\qquad\therefore\quad k=\frac{v}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore\quad \frac{dV}{dt}=-\frac{v\sqrt{h}}{\sqrt{a}}\qquad\cdots\cdots②$$

①と②から

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{v}{\pi\sqrt{ah}}$$

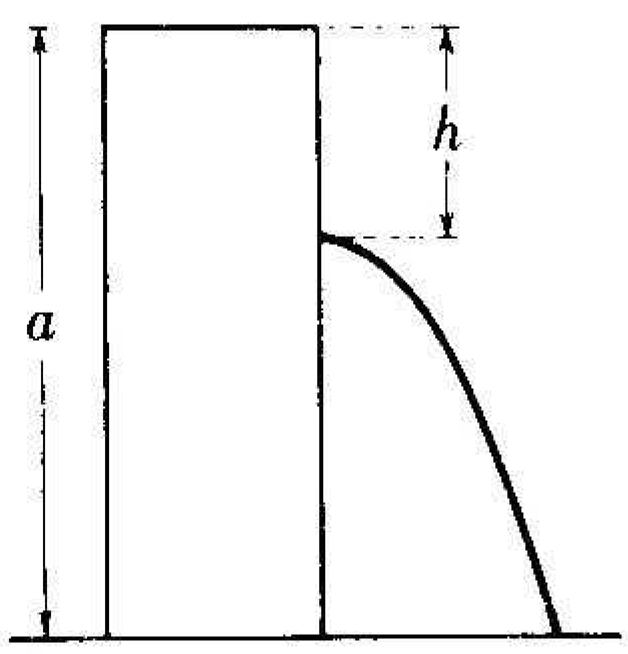
これに $h=\dfrac{a}{2}$ を代入する解くだけ。

答 $\dfrac{\sqrt{2}v}{\pi a}$cm/秒

＊　＊　＊

◆ では，もう1つ：——

練習 3. 図のように鉛直な側面をもった水槽が水平な床の上におかれており，水面の高さは床から a cm である。いま側面に小さな穴をあけて水を水平方向に噴出させる。



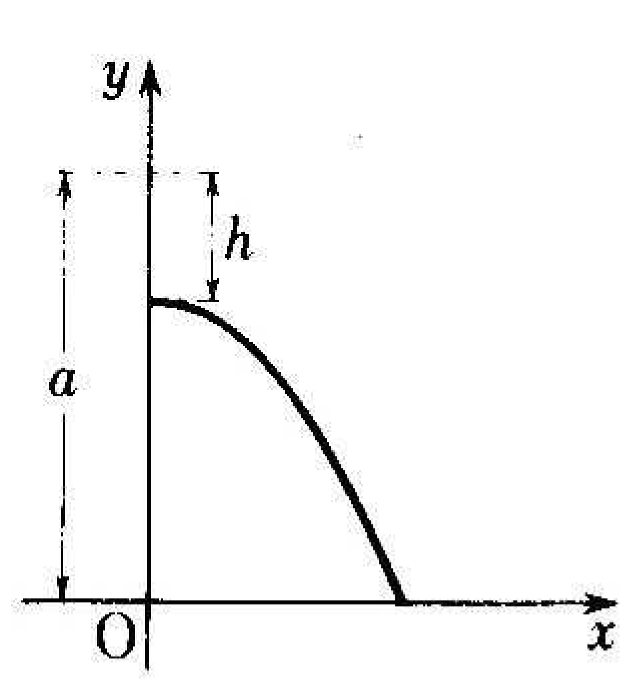
(1) 穴の位置を水面から $h$cm にするとき，噴流は床の上のどの点に落ちるか。

(2) 噴流が穴の真下の床上の点から最も遠くに落ちるためには，穴の位置をどこにすればよいか。

(3) 穴の位置を一鉛直線上いろいろに変えるときの，噴流の通過する範囲を求めよ。ただし，噴出した水は水平方向には等速度運動をし，鉛直方向には加速度 $g$cm/秒^2 の等加速度運動をする。また水面から $h$cm の深さの穴から噴出する水の初速は $\sqrt{2gh}$ cm/秒である。 （東大）

ヒント ずいぶん長い。一度読むとイヤになりますね。しかし，まず(1)だけみれば，気はラクですね。さて：——

(1) まず右の図のように座標軸を選ぶとしましょう。



噴流してから t 秒後の点を $(x,\ y)$ としますと水平方向には等速度運動で，しかも初速度 $\sqrt{2gh}$ だというのですから

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{2gh}$$

なる関係があります。

$$\therefore\quad x=\sqrt{2gh}\,t+C$$

しかし，$t=0$ のとき $x=0$ ですから $C=0$

$$\therefore\quad x=\sqrt{2gh}\,t \qquad \cdots\cdots①$$

次に，鉛直方向には加速度 g cm/秒^2 の等加速度運動をする，というのですから，

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dt}=-gt+C'$$

$t=0$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=0$ ですから　$C'=0$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dt}=-gt$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+C''$$

です。ところが $t=0$ のとき $y=a-h$ ですから，　$C''=a-h$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+(a-h) \qquad \cdots\cdots②$$

床に落ちる点では $y=0$ ですから②より

$$t=\sqrt{\frac{2(a-h)}{g}}$$

で，このとき①から

$$x=2\sqrt{h(a-h)} \qquad \cdots\cdots③$$

が得られます。これで(1)は完了。

(2) ③が最大になるのはいうまでもなく，$h=\dfrac{a}{2}$ のときだ。

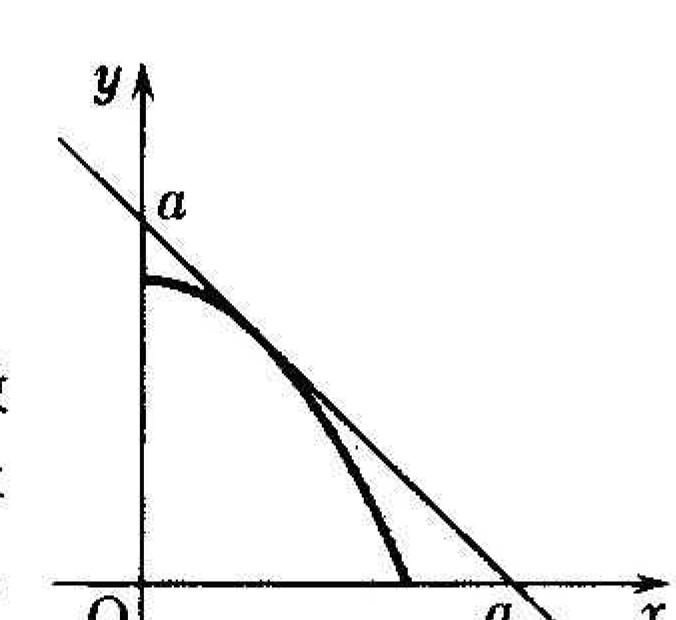
(3) ①，②から t を消去しますと

$$4h^2-4(a-y)h+x^2=0$$

この2次方程式が $0\leqq h\leqq a$ なる解をもつための条件（それは x と y の関係で与えられます）を求めればよいでしょう。これは，もはや微積の問題ではありませんよ。途中を省略して求める範囲は

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad x+y\leqq a$$

です。したがって右図陰影部分（境界も含む）となります。



注 どうも，これを微分方程式の項に入れるのはいささか牽強付会（けんきょうふかい）のそしりをまぬがれまい。しかし，場所としてはやはりここだなあ。

○連立微分方程式の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈入試問題としての連立微分方程式はべつにめんどうなし。イヤガルベカラズ，オソルベカラズ!!

◆ 微分方程式の意味と解き方については，(☞ p.258, 262) を参照してください。ここでは連立微分方程式の解法を練習しましょう。

練習 1.　$\dfrac{dx}{dt}=x,\ \dfrac{dy}{dt}=y$

で，$t=0$ のとき $x=y=1$ であるならば，点 $(x,\ y)$ はどんな曲線上にあるか。

(解)　$\dfrac{dx}{dt}=x$　　$\therefore\ \displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int dt$

$\therefore\ \ \log|x|=t+C$　(Cは定数)

$$\therefore\ \ |x|=e^{t+C}$$

$\therefore\ \ x=\pm e^C e^t=Ae^t$　$(A=\pm e^C)$

$t=0$ のとき　$x=1$ であるから　$A=1$

$$\therefore\ \ x=e^t$$

まったく同様にして

$$y=e^t$$

$$\therefore\ \ y=x$$

ゆえに点 $(x,\ y)$ は直線 $y=x$ 上を動く。

練習 2. 平面上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，原点から出発し，t 秒後の座標が微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(x+1),\ \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}(y+1)$$

を満たしているとする。t 秒後の点Pの位置および速度ベクトルの大きさを求めよ。

(大阪市大)

(解)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(x+1)$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\int dt$$

$\therefore\ \ \log|x+1|=\dfrac{1}{2}t+C$　(Cは定数)

$$\therefore\ \ |x+1|=e^{\frac{1}{2}t+C}=e^C\cdot e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\therefore\ \ x+1=\pm e^C e^{\frac{1}{2}t}$$

$\pm e^C=A$ とおいて

$$x=-1+Ae^{\frac{1}{2}t}$$

$t=0$ のとき　$x=0$ であるから　$A=1$

$$\therefore\ \ x=-1+e^{\frac{1}{2}t}$$

まったく同様にして

$$y=-1+e^{-\frac{1}{2}t}$$

ゆえに，t 秒後の点Pの位置は

$$\left(-1+e^{\frac{1}{2}t},\ -1+e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

である。

また，速度ベクトルの大きさは

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(e^{\frac{1}{2}t}\cdot\frac{1}{2}\right)^2+\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{e^t+e^{-t}}}{2}$$

である。

(注)　この微分方程式は連立とはいうものの個々別々に積分できるのですから，本質的には単独のものと同じです。しかし

$$\frac{dx}{dt}=y\qquad\cdots\cdots①$$

$$\frac{dy}{dt}=x\qquad\cdots\cdots②$$

となると，x，y がからみあっているからめんどうになります。このときは

①より

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$$

これと②より

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x$$

となりますが，これはもはや高校の範囲ではありません。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習しませんか。

練習 3. y と z とはそれぞれ x の関数で，

$$\frac{d(y+z)}{dx}=3,\quad \frac{d(yz)}{dx}=4x+1$$

を満足する。$x=0$ のとき，$y=-3$，$z=2$ となるような y と z とを求めよ。

（東京医歯大）

（解）
$$y+z=3x+C_1$$
$$yz=2x^2+x+C_2$$

ここに C_1，C_2 は定数である。

$x=0$ のとき $y=-3$，$z=2$ であるから

$$C_1=-1,\quad C_2=-6$$

$$\therefore\quad y+z=3x-1,\quad yz=2x^2+x-6 \quad \cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad y=2x-3,\quad z=x+2 \quad \cdots\cdots\boxed{答}$$

（注）(*) から y，z を求めるにはふつうの連立方程式と同じように解けばよいのです。そうすると2組出ますが，$x=0$ のときの条件から一方がきまるわけ。

練習 4. 関数 $y_1=ae^{kx}$ および $y_2=be^{kx}$（a，b，k は定数で $ab\neq 0$ とする）が，微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1+y_2,\quad \frac{dy_2}{dx}=y_1-y_2$$

を満足するとき，k の値を求めよ。また，a，b の間に成立する関係を求めよ。（慶大）

（ヒント）$y_1=ae^{kx}$，$y_2=be^{kx}$ を代入すればいいでしょう。まず，

$$\frac{dy_1}{dx}=ake^{kx}=ky_1$$

$$\frac{dy_2}{dx}=bke^{kx}=ky_2$$

に目をつけて

$$ky_1=y_1+y_2$$

$$\therefore\quad (k-1)y_1=y_2 \quad \cdots\cdots①$$

$$ky_2=y_1-y_2$$

$$\therefore\quad (k+1)y_2=y_1 \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入しますと

$$(k^2-1)y_2=y_2$$

ところが，仮定から $y_2\neq 0$ ですから

$$k^2-1=1 \qquad \therefore\quad k=\pm\sqrt{2}$$

となりましょう。

次は a，b の関係です。

①，②より k を消去して，

$$\frac{y_2}{y_1}+1=\frac{y_1}{y_2}-1$$

$\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{b}{a}$ を代入しますと $a^2-2ab-b^2=0$ が出てきます。

$\boxed{答}$ $k=\pm\sqrt{2}$，$a^2-2ab-b^2=0$

*　　*　　*

◆ では，最後に1つ，物理への応用例を練習しておきましょう。

練習 5. ある2つの動点A，Bの，ある一定点からの時刻 t における距離をそれぞれ y，z とするとき，次の関係があるという。

$$\frac{dy}{dt}+z=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{dz}{dt}+y+z=0 \quad \cdots\cdots②$$

このとき，動点Aのその一定点からの時刻 t における距離は，そのときの速度と加速度との和であることを証明せよ。

（大阪教育大）

（ヒント）このような問題はとかく意味がつかめなくて敬遠されがちですが，よく読むとなんのことはない，

$$y=\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}$$

を示せ，ということらしいね。してみると，z を消去すればいいにちがいない，とわかりましょう。

z を消去するには，①から

$$z=-\frac{dy}{dt}$$

両辺を t で微分して

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}$$

これを②に代入して変形すれば，……

もうできたなあ。

○関数方程式の解き方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆関数方程式といっただけではいろいろありますが，ここで扱うのはいわゆる積分方程式のタマゴです。しかし，このタマゴ2色あり!!

◆ ここで **関数方程式** というのは，次のタイプのもの。ともかく，やってみませんか。

練習 1. $f(x)=\sin x+2\int_0^{\pi} f(t)dt$

を満足する $f(x)$ を求めよ。

ヒント $f(x)$，したがって $f(t)$ がどんな関数かわかりませんが $\int_0^{\pi} f(t)dt$ が **xを含まない定数** であることは明らかです。そこで，これをAとおくことにします。つまり，

$$A=\int_0^{\pi} f(t)dt \qquad \cdots\cdots①$$

そして

$$f(x)=\sin x+2A \qquad \cdots\cdots②$$

となりますから，②を①に代入して

$$A=\int_0^{\pi}(\sin t+2A)dt$$
$$=\Big[-\cos t+2At\Big]_0^{\pi}$$
$$=(1+2A\pi)-(-1)$$
$$=2+2A\pi$$
$$\therefore\quad A=\frac{-2}{2\pi-1}$$
$$\therefore\quad f(x)=\sin x-\frac{4}{2\pi-1} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 2. $f(x)=e^x+3\int_0^1 tf(t)dt$

を満足する $f(x)$ を求めよ。

解 $\int_0^1 tf(t)dt=A$ とおくと，

$$f(x)=e^x+3A$$
$$\therefore\quad A=\int_0^1 t(e^t+3A)dt$$
$$=\Big[(e^t+3At)t\Big]_0^1-\int_0^1(e^t+3At)dt$$
$$=(e+3A)-\Big[e^t+\frac{3A}{2}t^2\Big]_0^1$$
$$=(e+3A)-\left(e-1+\frac{3A}{2}\right)$$
$$=\frac{3A}{2}+1$$
$$\therefore\quad A=-2$$
$$\therefore\quad f(x)=e^x-6 \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 上の練習は積分の上端下端が定数ですから，このように扱えたのです。しかし，そこにxが入ると，まったく別の方法を適用しなければなりません。

では，次の 練習 3. をやってみませんか。

練習 3. 連続関数 $f(x)$ が

$$f(x)=x+\int_0^x f(t)dt$$

を満足するとき，$f(x)$ を求めよ。

ヒント $$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$$

ですから，

$$f(x)=x+\int_0^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots①$$

の両辺をxで微分しますと

$$f'(x)=1+f(x)$$

となります。これは **微分方程式** です。

$y=f(x)$ とおきますと

$$\frac{dy}{dx}=1+y$$
$$\therefore\quad \int\frac{dy}{y+1}=\int dx$$
$$\therefore\quad \log|y+1|=x+C$$
$$\therefore\quad |y+1|=e^{x+C}=e^C\cdot e^x$$
$$\therefore\quad y+1=\pm e^C e^x$$

そこで $\pm e^C = A$ とおきますと

$$y = -1 + Ae^x \quad \cdots\cdots②$$

これでやめてしまう人が多いが，これはいけません。①において $x=0$ とおきますと

$$f(0)=0$$

となりますから，②において $x=0$ とおくと

$$0=-1+A$$

$$\therefore \quad A=1$$

$$\therefore \quad f(x)=e^x-1 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ では，ややめんどうな問題をやってみませんか。

練習 4. a が定数のとき，$f(x)$ は連続関数で

$$f(x)=e^{ax}+\int_0^x e^{a(x-t)}f(t)dt$$

を満たす。このとき $f(x)$ を求めよ。

（神戸大）

（解） $f(x)=e^{ax}+e^{ax}\int_0^x e^{-at}f(t)dt$

$$\cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=ae^{ax}+ae^{ax}\int_0^x e^{-at}f(t)dt + e^{ax}\cdot e^{-ax}f(x) \quad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$f'(x)=(a+1)f(x)$$

$y=f(x)$ と書くと

$$\frac{dy}{dx}=(a+1)y$$

$$\therefore \quad \int\frac{dy}{y}=(a+1)\int dx$$

$\therefore \quad \log|y|=(a+1)x+C$ （Cは定数）

$$\therefore \quad |y|=e^{(a+1)x+C}=e^Ce^{(a+1)x}$$

$$\therefore \quad y=\pm e^Ce^{(a+1)x}$$

$\pm e^C=A$ とおくと

$$y=Ae^{(a+1)x}$$

与えられた方程式において $x=0$ とおくと

$$f(0)=1$$

$$\therefore \quad A=1$$

$$\therefore \quad f(x)=e^{(a+1)x} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ 2つの関数方程式を連立させたものもあります。例えば：——

練習 5. 次の条件を満足する a の値と関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{3}{2}x^2\int_0^a f(t)tdt$$

$$\int_0^1 f(t)dt=1$$

（お茶の水女大）

（ヒント） $\int_0^a f(t)tdt=A$ （定数）

とおくことができますから，

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{3}{2}Ax^2$$

これは恒等式ですから $x=1$ を代入しても成り立つハズ。かくて

$$1=\frac{3}{2}A\cdot1^2 \qquad \therefore \quad A=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \int_0^x f(t)dt=x^2$$

両辺を x で微分しますと

$$f(x)=2x$$

これを

$$A=\int_0^a f(t)tdt$$

に代入して

$$\frac{2}{3}=\int_0^a 2t^2dt=\left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$

$$\therefore \quad a^3=1$$

$$\therefore \quad a=1$$

$\boxed{答}$ $f(x)=2x$，$a=1$

* * *

◆ このページに出てきた関数方程式は $\int_a^x f(t)dt$ を含んでいて，これを微分すれば $f(x)$ になることが大切なところでした。なお，$\int_a^x f(t)dt$ でなく $\int_x^a f(t)dt$ なら，$-\int_a^x f(t)dt$ と書けますから，まったく同じに扱えて符号が変わるだけ!!

加法定理と関数方程式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆加法定理から与えられて関数を求める問題は一種の暗記物。ひとつは必ずオボエテおかなくてはいけませんよ。

◆ 例えば，

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

とか，

$$e^{x+y}=e^x\cdot e^y \quad \cdots\cdots ①$$

のような関係式を加法公式と呼んでいます。

①は $e^x=f(x)$ と書くと

$$\boldsymbol{f(x+y)=f(x)f(y)} \quad \cdots\cdots (*)$$

と形式化することができます。このセクションでは，逆に (*) なる条件を満足する関数は何か，ということをやるのです。このような問題は基解でもやったハズ。しかし，その解けるものはごく限られていました。しかし，微積となるとかなり広く扱えるのが特徴です。では，やってみましょう。

*　*　*

練習 1.　x，y のすべての値に対して

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，かつ，$f(x)$ が x のすべての値に対して微分可能であるとき，$f(x)$ を求めよ。ただし，$f'(0)=a$ とする。

ヒント　基解のやり方については「基解」(☞ p.262) を参照してください。ここでは，微積のやり方を：——

x を定数とみなして①の両辺を y で微分しますと

$$f'(x+y)=f'(y)$$

となります。ここで $y=0$ とおきますと

$$f'(x)=f'(0)=a$$

$$\therefore\ f(x)=ax+C \quad (C：積分定数)$$

ところが①において $y=0$ とおいてみますと

$$f(x)=f(x)+f(0)$$

$$\therefore\ f(0)=0$$

$$\therefore\ C=0$$

$$\therefore\ f(x)=ax \quad \cdots\cdots 答$$

練習 2. 微分可能な関数 $f(x)$ が，$f'(0)=1$ で，任意の x，y に対して，

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy \cdots\cdots ①$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

解　x を定数とみなして①を y で微分すると，

$$f'(x+y)=f'(y)+2x$$

ここで，$y=0$ とおくと

$$f'(x)=f'(0)+2x$$

$$\therefore\ f'(x)=2x+1$$

$$\therefore\ f(x)=x^2+x+C \quad (Cは積分定数) \quad \cdots\cdots ②$$

ところが，①において $y=0$ とおくと

$$f(x)=f(x)+f(0)+0$$

$$\therefore\ f(0)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③より　$C=0$

$$\therefore\ f(x)=x^2+x \quad \cdots\cdots 答$$

*　*　*

◆ 上の練習 1. や練習 2. は基解の方法でもできるのですが，次の問題では，もはや，そう簡単にはいきませんよ。

練習 3. 微分可能な関数 $f(x)$ が，$f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x)>0$ を満足するとき $f(x)$ を求めよ。

解　x を定数とみなして

$$f(x+y)=f(x)f(y) \quad \cdots\cdots ①$$

の両辺を y で微分すると

$$f'(x+y)=f(x)f'(y)$$

ここで $y=0$ とおくと

$$f'(x)=f(x)f'(0)$$

$$\therefore\quad f'(x)=f(x)$$

$y=f(x)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=y \qquad \therefore\quad \int\frac{dy}{y}=\int dx$$

$$\therefore\quad \log|y|=x+C$$

$$\therefore\quad |y|=e^{x+C}=e^Ce^x$$

$$\therefore\quad y=\pm e^Ce^x=Ae^x \quad (A=\pm e^C)$$

ところが，①において $y=0$ とおくと

$$f(x)=f(x)f(0)$$

$f(x)>0$ であるから

$$f(0)=1 \qquad \therefore\quad A=1$$

$$\therefore\quad f(x)=e^x \qquad \boxed{答}\ e^x$$

(注) 実はこれも基解の範囲でできます。すなわち，①の両辺の対数をとりますと

$$\log f(x+y)=\log f(x)+\log f(y)$$

そこで $\log f(x)=F(x)$ とおきますと

$$F(x+y)=F(x)+F(y)$$

これなら練習1. から

$$F(x)=ax$$

$$\therefore\quad f(x)=e^{ax}$$

ところが

$$f'(x)=ae^{ax}$$

ですから，$f'(0)=1$ より $a=1$

$$\therefore\quad f(x)=e^x$$

といったぐあい。では，もう1つ：——

練習 4. $f(xy)=f(x)+f(y)$，$x>0$，$f(1)=0$ のとき $f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ は微分可能で，$f'(1)=a$ とする。

(解) $f(xy)=f(x)+f(y)$ ……①

において，$x=1$ とおくと

$$f(x)=f(x)+f(1) \qquad \therefore\quad f(1)=0$$

x を固定して，①の両辺を y で微分すると

$$xf'(xy)=f'(y)$$

$y=1$ とおくと

$$xf'(x)=f'(1)=a$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{a}{x}$$

$$\therefore\quad f(x)=a\log x+C \quad (C\text{は定数})$$

$x=1$ を代入すると

$$0=a\cdot 0+C \qquad \therefore\quad C=0$$

$$\therefore\quad f(x)=a\log x$$

$$\boxed{答}\ f(x)=a\log x$$

*　　*　　*

◆ こんな変わったのもありますが，方針は同じです。

練習 5. $f(x)$ は微分可能な関数で，x，y のすべての値に対して

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

である。$f(x)$ を求めよ。

ただし，$f'(0)=1$ とする。 (岐阜大)

(ヒント) $y=0$ とおくと

$$f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1+f(x)f(0)}$$

$$\therefore\quad f(0)\{f(x)+1\}\{f(x)-1\}=0$$

$f(x)=-1$ および $f(x)=1$ は $f'(0)=1$ に反するから適さないことがわかります。

$$\therefore\quad f(0)=0$$

次に，x を固定して y で微分しますと

$$f'(x+y)$$
$$=\frac{\{1+f(x)f(y)\}f'(y)-\{f(x)+f(y)\}\{f(x)f'(y)\}}{\{1+f(x)f(y)\}^2}$$

ここで $y=0$ とおきますと

$$f'(x)=f'(0)-\{f(x)\}^2f'(0)$$

ところが $f'(0)=1$ ですから

$$f'(x)=-\{f(x)\}^2+1$$

$y=f(x)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=-(y^2-1)$$

これは **変数分離形** であるから

$$\int\frac{dy}{y^2-1}=\int dx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\int dx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x+C$$

$x=0$ のとき $y=0$ から

$$C=0$$

$$\boxed{答}\ f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

○ 微分と定積分の関係

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微分と定積分との関係をつかんだとき，微積分学が生まれ，近代科学の最大の武器を供給することとなった。

◆ 定積分とその導関数の間には重要な関係があります。すなわち，a を定数としますと

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

なる関係があります。このセクションでは，この関係および，もう少し拡張した形の定理を扱うことにしましょう。

練習 1. a を定数とするとき

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

を証明せよ。

（解） $\int f(t)dt=F(t)$ としますと

$$F'(t)=f(t)$$

である。

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_a^x$$

$$=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)=f(x)$$

Q. E. D.

（注） この定理を一般化すると次のようになります。

練習 2. $\alpha(x)$，$\beta(x)$ を微分可能な関数とするとき

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

$$=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

を証明せよ。

（解） $\int f(t)dt=F(t)$ とおくと，

$F'(t)=f(t)$ であるから

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{\alpha(x)}^{\beta(x)}$$

$$=\frac{d}{dx}\{F(\beta(x))-F(\alpha(x))\}$$

$$=F'(\beta(x))\beta'(x)-F'(\alpha(x))\alpha'(x)$$

$$=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ では，上の定理ないし関係はどのように使われるのか，これが次の練習目標です。

練習 3. $f(x)=\int_0^x \sqrt[3]{\sin t}\,dt$

を極大あるいは極小ならしめる x の値を求めよ。（名大）

（ヒント） $\int \sqrt[3]{\sin t}\,dt$ を置換積分しようなどという大それた考えをおこしてはいけません。$f'(x)$ を求めてみることがまず大切!!

（解） $f(x)=\int_0^x \sqrt[3]{\sin t}\,dt$

$$\therefore\quad f'(x)=\sqrt[3]{\sin x}$$

であるから，n を整数として

$x=2n\pi$ のとき $f(x)$ は極小値をとり，

$x=(2n+1)\pi$ のとき $f(x)$ は極大値をとります。

答 $\begin{cases}\text{極小値を与える } x \text{ は } 2n\pi \\ \text{極大値を与える } x \text{ は } (2n+1)\pi\end{cases}$

練習 4. $f(x)=\int_0^x te^t dt$ の極値を求めよ。

（解） $f'(x)=xe^x$

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとり，その値は

$$f(0)=\int_0^0 te^t dt=0$$

である。

答 極小値 0 ($x=0$)

*　*　*

◆ では，やや総合的な練習にとりかかるとしましょう。

練習 5. $f(x)=\int_x^{x+h}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$（$e$ は自然対数の底）のとき $\lim_{h\to 0}\frac{f(0)}{h}$ を求めよ。

（北大）

ヒント　$f(x)$ を h の関数と考えて $g(h)$ としてみたらどうでしょう。つまり

$$f(0)=\int_0^{0+h}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_0^h e^{-\frac{t^2}{2}}dt=g(h)$$

とおくのです。そうすると

$$g(0)=\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$$

ですね。だから：——

解　$f(0)=g(h)$ とおくと

$$g(h)=\int_0^h e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad g(0)=0$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)$$

$$=\left[e^{-\frac{h^2}{2}}\right]_{h=0}=e^0=1$$

答　1

練習 6. $f(x)=\int_0^x t(\sin x-\sin t)dt$ のとき $f'(x)$ を求めよ。（関西大）

ヒント　次のようにやる人がヒドク多い。夢にもマチガッテはいけません。つまり

$$f'(x)=x(\sin x-\sin x)=0$$

とやってしまうのです。**積分されるものの中に x が入っていてはいけません**。では，どうするか？

$$f(x)=\int_0^x t(\sin x-\sin t)dt$$

$$=\sin x\int_0^x tdt-\int_0^x t\sin tdt$$

ですから

$$f'(x)=(\sin x)x+(\cos x)\int_0^x tdt-x\sin x$$

$$=(\cos x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}(\cos x)x^2$$

となります。しかし，答としては

$$\frac{1}{2}x^2\cos x$$

と書くほうがいいでしょう。

$\frac{1}{2}\cos x\cdot x^2$ はマギラワシクテいけません。

では，もう 1 つ：——

練習 7. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x+\sin^2 x)\sin xdx$ の値を求めよ。

(2)　x の関数 $f(x)=\int_0^x e^t\sin(x-t)dt$ に対して，$f''(x)+f(x)$ を求めよ。

（横浜国大）

ヒント　(1)は当面の目的ではありませんから，答だけ書いておくことにします。それは $\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}$ です。しかし，キミは必ずやってみるのですよ。さて：——

(2)　$\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$

ですから

$$f(x)=\int_0^x e^t(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$$

$$=\sin x\int_0^x e^t\cos tdt-\cos x\int_0^x e^t\sin tdt$$

となります。ここで $f'(x)$ や $f''(x)$ を求めることができます。すなわち

$$f'(x)=\cos x\int_0^x e^t\cos tdt+\sin x\cdot e^x\cos x$$

$$+\sin x\int_0^x e^t\sin tdt-\cos x\cdot e^x\sin x$$

$$=\cos x\int_0^x e^t\cos tdt+\sin x\int_0^x e^t\sin tdt$$

$f''(x)=$…………

あるいは

$$x-t=u$$

とおきますと

$$f(x)=\int_x^0 e^{x-u}\sin u(-du)$$

$$=e^x\int_0^x e^{-u}\sin udu$$

とすることもできます。このほうが少しラクというもの。いずれにせよ，あとは計算だけ。答は e^x です。

○ 微積分の公式をまとめておくと

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈微積によく現れる微積分公式をあげておきます。しかし，これをスベテオボエヨウなどと考えてはいけませんよ。

◆ ここには導関数と不定積分の公式をまとめておくことにしましょう。

まず **導関数** から，

(1) **有理関数**

$f(x)$	$f'(x)$
x^m	mx^{m-1}
$y=(x-\alpha_1)\times(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$	$\frac{y}{x-\alpha_1}+\frac{y}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{y}{x-\alpha_n}$
$\frac{1}{x^m}$	$-\frac{m}{x^{m+1}}$
$\frac{b+x}{a+x}$	$\frac{a-b}{(a+x)^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

(2) **無理関数**

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$\sqrt{1-x^2}$	$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) **三角関数**

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x\tan x$
$\mathrm{cosec}\, x$	$-\mathrm{cosec}\, x\cot x$

(4) **指数関数**

e^x	e^x
a^x	$a^x\log a$

(5) **対数関数**

$\log\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\log_a\|x\|$	$\frac{1}{x\log a}$

(6) **その他の関数**

x^x	$x^x(1+\log x)$

*　　*　　*

◆ 次は，**不定積分** です。積分定数は省略してあります。

(1) **有理関数**

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{x-a}$	$\log\|x-a\|$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log\|ax+b\|$
$\frac{1}{(x-a)^2}$	$-\frac{1}{x-a}$
$\frac{1}{(ax+b)^2}$	$-\frac{1}{a(ax+b)}$
$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$	$\frac{1}{b-a}\log\left\|\frac{x+a}{x+b}\right\|$

(2) **無理関数**

$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$
$\sqrt{x-a}$	$\frac{2}{3}\sqrt{(x-a)^3}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$	$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x-a)^2}$
$\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$
$x\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b}$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\log\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\log\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\sqrt{ax^2+b}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{ax^2+b}+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\log\lvert x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+b}\rvert$
$x\sqrt{ax^2+b}$	$\dfrac{1}{3a}(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+b}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\log\lvert x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+b}\rvert$
$\dfrac{x}{\sqrt{ax^2+b}}$	$\dfrac{1}{a}\sqrt{ax^2+b}$

(3) 三角関数

$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin mx$	$-\dfrac{1}{m}\cos mx$
$\cos mx$	$\dfrac{1}{m}\sin mx$
$\sin mx\sin nx$	$\dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$
$\cos mx\cos nx$	$\dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+\dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$
$\sin mx\cos nx$	$-\dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}-\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\log\lvert\sin x\rvert$
$\sec x$	$\log\left\lvert\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$
$\operatorname{cosec} x$	$\log\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$

(4) 指数関数

e^{mx}	$\dfrac{1}{m}e^{mx}$
xe^x	$(x-1)e^x$
x^2e^x	$(x^2-2x+2)e^x$
$\dfrac{1}{a+be^x}$	$\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{a}\log\lvert a+be^x\rvert$
$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$	$2\log\lvert e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\rvert$
$\dfrac{x}{e^x}$	$-\dfrac{x+1}{e^x}$
$\dfrac{x^2}{e^x}$	$-\dfrac{x^2+2x+2}{e^x}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\log a}$

(5) 対数関数

$\log x$	$x(\log x-1)$
$x\log x$	$\dfrac{x^2}{2}\left(\log x-\dfrac{1}{2}\right)$
$(\log x)^2$	$x\{(\log x)^2-2\log x+2\}$

◆ ここにあげた公式のいくつかはもちろんオボエテおかなければなりません。しかし，大部分はオボエテはいけないし，それを解答に使ってはいけません。積分が出てきたとき，この表をみてやらないこと。

もうひとつ，注意しておきたいことは，若干条件を省略してあることです。例えば，e^{mx} のところで $m=0$ でも使えるか，などといってはいけない。もちろん $m\neq 0$ です。同じく $\sin mx\cdot\sin nx$ も $m=n$ のときにはこの公式を使えないのです。

アステロイドとは何か

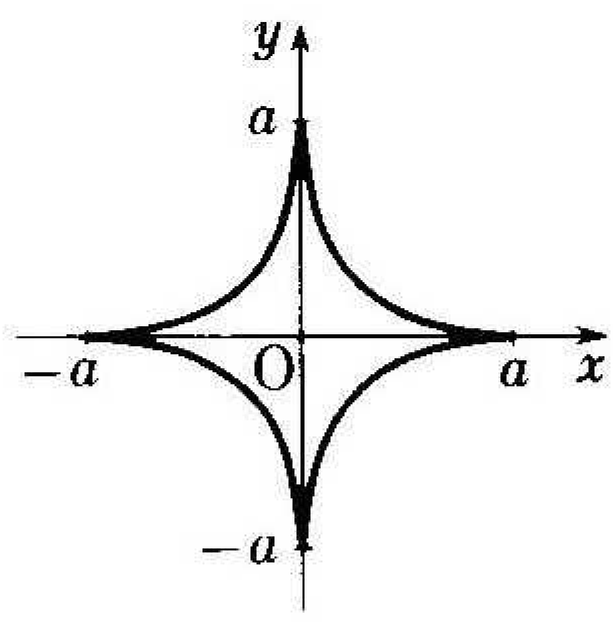
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈アステロイドという名称は1838年に使われたことがわかっています。それは，ウィーンで発行された本の中にあるのです。

◆ 方程式

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad (a>0)$$

のグラフは下のようになります。これを**アステロイド** (asteroid) といいます。訳して，星芒形（せいぼうけい），これではかえってめんどうだ。ほとんど使う人のないのも当然である。



さて，このセクションでは，アステロイドに関係したいろいろな問題を練習するのが目的です。

■練習 1. 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ のグラフの概形をかけ。

（解） xの符号を変えてもyの符号を変えても変わらないから，x軸，y軸に関して対称である。ゆえに，第1象限だけ調べれば十分である。

さて，与えられた方程式の両辺をxで微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\leqq 0 \qquad \cdots\cdots②$$

ゆえに，曲線は単調減少である。

②の両辺をxで微分すると

$$y''=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{xy'-y\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$$

$$=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}>0$$

したがって，この曲線は下に凸である。

また，座標軸との交点は $(a,\ 0)$，$(0,\ a)$で，$y=x$ との交点は $\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{4},\ \frac{\sqrt{2}\,a}{4}\right)$ である。

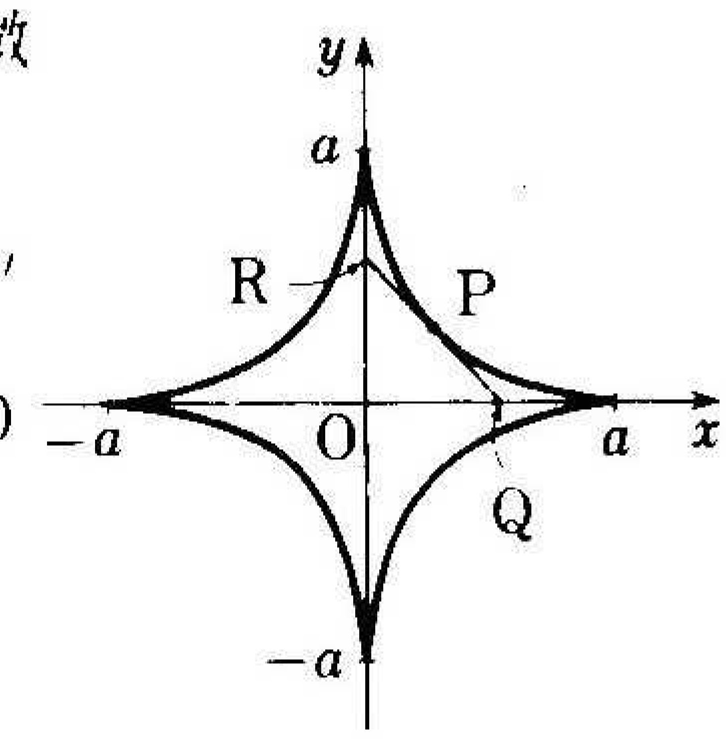
これらをもとにしてグラフをかくと，左の欄のような曲線となる。

■練習 2. 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ の接線がx軸とy軸とで切りとられる部分の長さは一定であることを示せ。ただし，接点は，座標軸上にないとする。

（ヒント） 両辺をxで微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$$

$$\therefore\quad y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$



となります。

点 $P(\alpha,\ \beta)$ における接線の傾きmは

$$m=-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

ですから，点Pにおける接線は

$$y-\beta=-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}(x-\alpha)$$

これを変形すると

$$\frac{x}{\sqrt[3]{\alpha}}+\frac{y}{\sqrt[3]{\beta}}=a^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\quad Q(a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}},\ 0),\quad R(0,\ a^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}})$$

$$\therefore\quad \overline{QR}^2=a^{\frac{4}{3}}(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})=a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}=a^2$$

$$\therefore\quad \overline{QR}=a$$

ナルホド，接線の長さはaだったのだ。では，逆はどうなるのか。それは微分方程式の問題になります。

◆ アステロイドの方程式

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

は，変形して

$$(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=(a^{\frac{1}{3}})^2$$

となりますから

$$x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta,\ y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta$$

とおきますと

$$\boldsymbol{x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta}\quad(a>0)$$

となります。これが **アステロイドのパラメーター表示** です。

アステロイドは，このパラメーター表示を用いるほうが便利なことが多いのです。

では，これを：——

練習 3. アステロイド　$x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ $(a>0)$ の全長を求めよ。

ヒント　第1象限の部分 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ について長さを求め，これを4倍すればいいでしょう。

$$\therefore\quad s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta$$

$$=6a\left[\frac{-\cos2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3a\cdot2=6a$$

答　$6a$

*　*　*

◆ アステロイドの囲む面積を求めてみましょう。これも第1象限にある部分の面積を求めて4倍すればいいだろう。

練習 4. アステロイド　$x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ の囲む部分の面積を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

解　求める面積を S とすると

$$S=4\int_0^a ydx$$

において，

$$x=a\cos^3\theta,\ \ y=a\sin^3\theta$$
$$dx=-3a\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

x	0 ……… a
y	a ……… 0
θ	$\frac{\pi}{2}$ ……… 0

であるから，

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0(a\sin^3\theta)(-3a\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta$$

$$=12a^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta\right\}$$

ところが，

***n* が偶数のとき**

$$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

であるから（☞ p.191）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15}{96}\pi$$

$$\therefore\quad S=12a^2\left(\frac{3\pi}{16}-\frac{15\pi}{96}\right)=\frac{3\pi}{8}a^2$$

答　$\frac{3\pi}{8}a^2$

注　上の計算で使った公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\cdots\cdots$ はべつに覚えておく必要はありませんが，必要に応じて導き出せるようにしておくべきです。

アステロイドの方程式は形もキレイで，それに計算もあまりめんどうではないので，入試にはよく出題されてきました。総合練習にはいい材料です。余裕があったら，回転体の体積なども求めてみませんか。

① カテナリーとは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆Catenary とは何ぞ!! 太さと重さの一様な綱の両端を同一の高さに保つとき，綱の作る曲線なんですよ。綱とは rope なり。

◆ **カテナリー**，訳して**懸垂線**（けんすいせん）といわれる曲線の方程式は

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

です。これは力学によく現れてくる重要な曲線ですが，微積にもしばしば現れてきます。

練習 1. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ のグラフの概形をかけ。

(ヒント) xの代わりに $-x$ とおいてみますと

$$y=\frac{e^{-x}+e^x}{2}$$

となって，与えられたものと同じになります。つまり，これは偶関数，つまりy軸に関して対称であることがわかります。

$$y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$
$$=\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{2e^x}$$

ゆえに，増減表は下の通り。

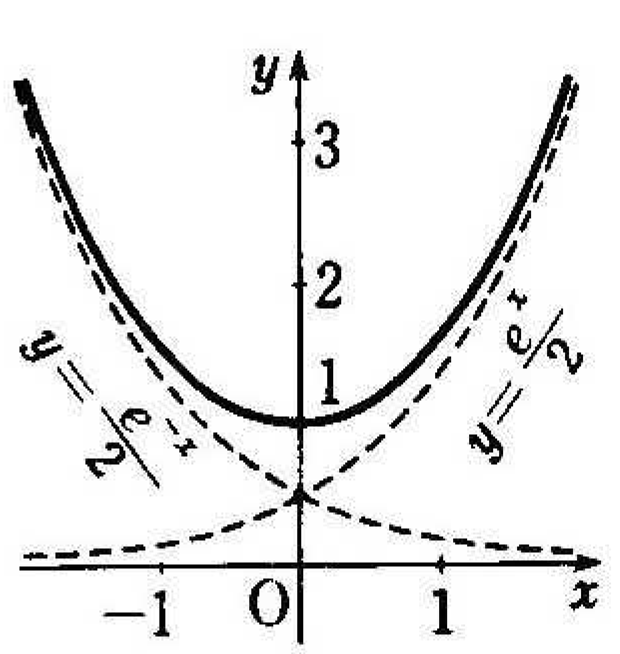
x		0	
y'	$-$		$+$
y	↘	1 (極小)	↗

また，$y''=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ ですから，グラフは下に凸です。

ここで，

$$y=\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}$$

に目をつけて，2つの合成関数であることから，グラフは右のようになりましょう。



(注) この曲線は，ちょっとみると放物線に似ていますが，放物線よりも，$x=0$ の付近が平らたい感じ。

練習 2. 曲線

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

とx軸，y軸および $x=1$ で囲む部分の面積を求めよ。

(解) $S=\displaystyle\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$

$=\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$ ……答

練習 3. 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $x=0\sim t$ における長さを求めよ。

(ヒント) **曲線の長さの公式は**

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

でしたね。

(解) 曲線の長さをsとすると

$$s=\int_0^t\sqrt{1+\left\{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'\right\}^2}dx$$
$$=\int_0^t\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$
$$=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$
$$=\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^t-\frac{1}{e^t}\right)$$

答 $\dfrac{1}{2}\left(e^t-\dfrac{1}{e^t}\right)$

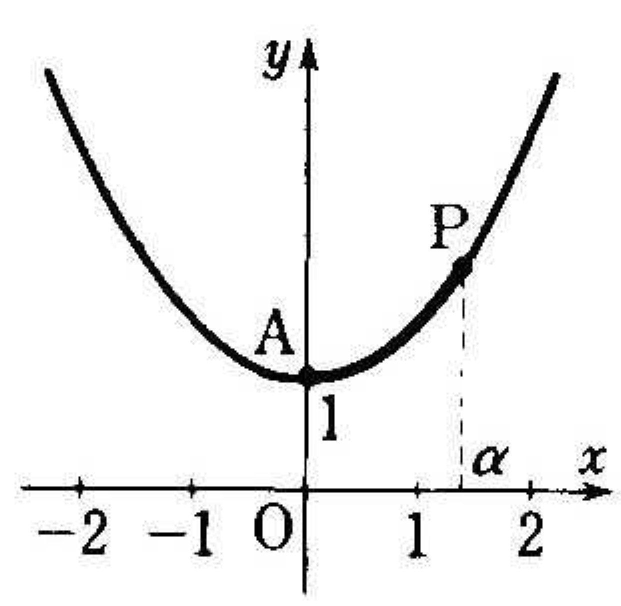
* * *

◆ では，やや総合的な問題をやることにしましょう。

■練習 4. 点Pは曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x\geqq 0)$ に沿って毎秒 v_0 の速さで動くものとする。点Pが点 (0, 1) を出発してから，t 秒後のPの x 座標を t で表せ。

（青山学院大）

（ヒント） t 秒後の点Pの位置を $(\alpha,\ \beta)$ としますと



弧 AP の長さは

$$\int_0^\alpha \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^\alpha-\frac{1}{e^\alpha}\right)$$

となります。ところが，これは題意によって v_0t に等しいハズ!!

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(e^\alpha-\frac{1}{e^\alpha}\right)=v_0t$$

$$\therefore\quad (e^\alpha)^2-2v_0t(e^\alpha)-1=0$$

$$\therefore\quad e^\alpha=v_0t+\sqrt{v_0{}^2t^2+1}\qquad(-\text{は捨てる})$$

これから α を求めればいいでしょう。そのためには，両辺の対数をとって

$$\alpha=\log(v_0t+\sqrt{v_0{}^2t^2+1})$$

となります。

（答） $\log(v_0t+\sqrt{v_0{}^2t^2+1})$

*　　*　　*

◆ $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ という置換は積分の場合にも有効です。例えば：——

■練習 5. $I=\displaystyle\int_1^2\sqrt{x^2-1}\,dx$ を求めよ。

（ヒント） $x=\sec\theta$ とおきますと，

$$x^2-1=\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$$

$$dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$$

となって，根号がとれますので積分ができます。あるいは，次のようにやってもいい。

（解） $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t\geqq 0)$ とおくと

$$x^2-1=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$dx=\frac{e^t-e^{-t}}{2}dt$$

また，

x	1 …… 2
t	0 …… $\log(2+\sqrt{3})$

であるから

$$I=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-2t\right]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{(2+\sqrt{3})^2-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}\right.$$

$$\left.-4\log(2+\sqrt{3})\right\}$$

$$=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

（答） $\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$

（注） なお，一般に

$\sqrt{x^2+A}$ の積分は

$x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく

と有効です。この場合なら，$x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおきますと：——

$$x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$\sqrt{x^2-1}=t-x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

ですから，

$$I=\int_1^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)at$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{3}}\left(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

となって，このほうが少しラクかな。

*　　*　　*

◆ ガリレオは重い綱の両端を固定すると放物線を描いて垂れ下がるだろう，と推定しましたが，1669年まちがいであることが証明されました。そして，それから約20年たって，1690年から1691年にかけて，カテナリーが発見されたのです。カテナリーという名前も1690年になってはじめて使われたのでした。

サイクロイドとは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

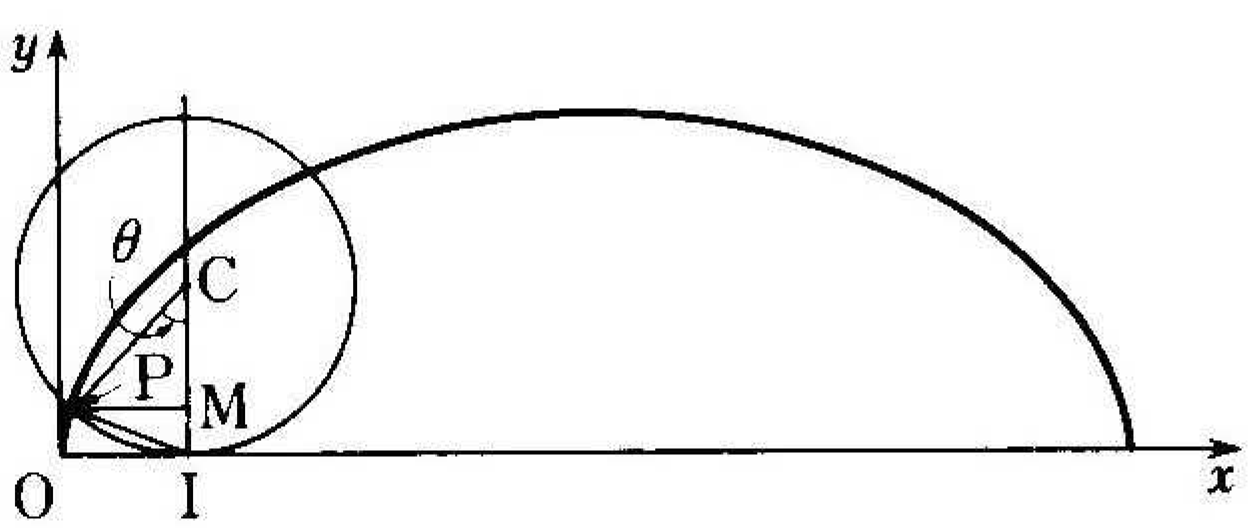
◆サークル，サーカス，サイクロン，などなどなど。サイクロイドもまた同類です。ハテナ，この4つのコトバ，どこに類似点ありや？

◆ 1つの円が直線上を，すべらずに転がるとき，円周上の1点の描く軌跡を **サイクロイド** (cycloid) といいます。では，その方程式を求めることからはじめましょう。

練習 1. 半径 a の円が x 軸上をすべらずに回転する。はじめ原点にあった点の描く曲線は，次の式で与えられることを示せ。

$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$

ここに θ はパラメータである。(下図参照)



(解) 上の図において，

$$\overline{\mathrm{OI}}=\widehat{\mathrm{PI}}=a\theta,\ \overline{\mathrm{PM}}=a\sin\theta$$

であるから，点Pの x 座標は

$$x=\mathrm{OI}-\mathrm{PM}=a\theta-a\sin\theta$$

$$\therefore\ x=a(\theta-\sin\theta)$$

次に，点Pの y 座標は $\overline{\mathrm{IM}}$ に等しく

$$y=\overline{\mathrm{IC}}-\overline{\mathrm{MC}}=a-a\cos\theta$$

$$\therefore\ y=a(1-\cos\theta)$$

Q. E. D.

* * *

◆ では，サイクロイドについてのいくつかの練習をやってみませんか。

練習 2. サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 上の $\theta=\frac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(解) $\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$，$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$

であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

したがって，$\theta=\frac{\pi}{2}$ ならば $\frac{dy}{dx}$ の値は1で，このとき $x=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$，$y=a$，ゆえに求める接線は

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$\therefore\ y=x+2a-\frac{\pi}{2}a \quad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 3. 曲線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ は上に凸であることを示せ。

(解) $\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$，$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$

であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{cosec}^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{a\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4a}\mathrm{cosec}^4\frac{\theta}{2}<0$$

ゆえに曲線は上に凸である。

(注) $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}$ としたほうがわかりやすいかもしれませんね。

* * *

◆ 次にはサイクロイドのいわば積分的練習をやってみましょう。

練習 4. サイクロイド

$x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

と x 軸の囲む部分の面積を求めよ。

(解) 求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{2\pi}ydx=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$=3\pi$$

答 3π

(注) 今でこそこの面積を簡単に求めることができるのですが，ガリレオの頃はたいへんだった。彼は，π^2 だろうと見当つけて，金属の板にこの曲線の形を切り抜いて目方を測ってみたそうです。3π と π^2 ではちょっとちがいます。

練習 5. サイクロイド

$x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

の弧の長さを求めよ。

(解) 求める長さを s としますと

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=8$$

答 8

(注) この弧の長さはロゼルバールという人がはじめて求めたのでした。では，もう1つ。

練習 6. $x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ が x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。$(a>0)$ (愛媛大)

(ヒント) 求める体積を V としますと

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)d\theta$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3d\theta$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\pi a^3\left[\theta-3\sin\theta+\frac{3}{2}\left(\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sin3\theta}{3}+3\sin\theta\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$=\cdots\cdots=5\pi^2a^3$$

* * *

◆ サイクロイドを描くには，実際に円をまわして点を結んでいくとよいわけで，そのようなオモチャもできていますが，ふつうは次のようにやります。

一直線上に，$0.35a$ の間隔をもつ19個の点 A_0，A_1，A_2，……，A_{18} をとります。ただし左のほうから A_0，A_1，……としましょう。

次に，点 A_0 を中心とし，半径 a の半円を左側にかき，半円周の最下部から出発して $20°$ 間隔で半円周を区切ります。だから，ここで分度器がいるわけです。

次に，上の10個の点を通って，はじめの直線に平行線を引き，この10個の直線を下のほうから l_0，l_1，……，l_9 としましょう。

次に点 A_0，A_1，……，A_{18} を中心として半径 a の円をかき直線 l_0，l_1，……，l_8，l_9，l_8，……，l_0 と交わる点（接することもありますが）をとります。最後に，これらの点をナメラカに結ぶのです。

サイクロイドの描き方はほかにもありますが，疲れ休めにちょっとやってみるのもいいでしょう。かつて，ガリレオやデカルトやパスカルなどが，楽しんだタノシミを味わうのもいいではありませんか。

* * *

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

○(微積の)物理への応用

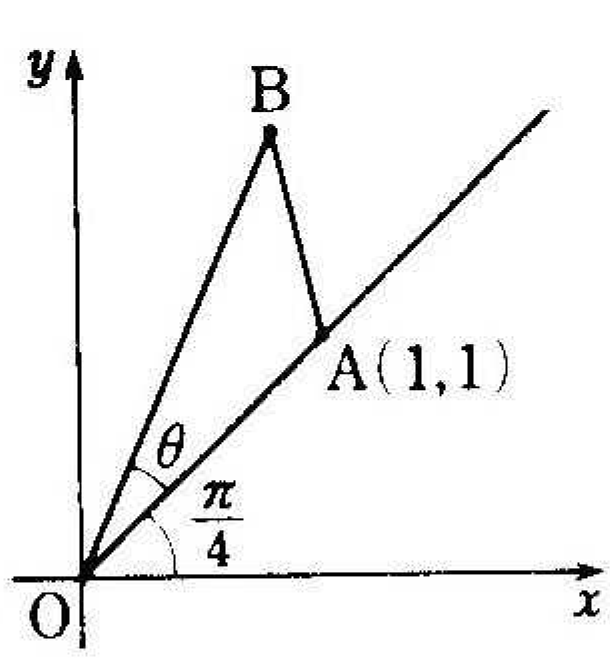
◆微積の物理への応用といっても，基解の場合と変わるところがありません。ただ，計算の範囲が広がったにすぎません。

◆ このセクションでは，微積の物理への応用例をいくつかやってみようというわけです。総合演習のつもりで，気楽にやること!!

練習 1. P，Qが同時にそれぞれ O(0, 0), A(1, 1) を出発し，Pは第1象限内において，ある直線上を秒速Vで，Qもある直線上を秒速vで進む。PとQはt秒後にBで出会い，その後，PはQの進んできた道を逆にAに向かって秒速$\dfrac{V}{2}$で進んでAに到達した。Pの要した時間は$\dfrac{2\sqrt{2}}{V}$秒であった。$\angle AOB=\theta$ とするとき，vをVとθで表せ。　　(同志社大)

ヒント △OAB に目をつけて，1つの角θだけがわかっているわけだから，余弦定理を使うのが本筋でしょう。

解 題意から右の図において



$$OA=\sqrt{2}$$
$$OB=Vt$$
$$AB=vt$$
$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{V}-t\right)\frac{V}{2}$$

なる関係がある。また，余弦定理により

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta$$

$$\therefore\quad \left(\sqrt{2}-\frac{V}{2}t\right)^2=2+V^2t^2-2\sqrt{2}\,Vt\cos\theta$$

これから

$$\cos\theta=\frac{1}{8\sqrt{2}}(4\sqrt{2}+3Vt)$$
$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(4\sqrt{2}+\frac{6\sqrt{2}\,V}{V+2v}\right)$$
$$=\frac{5V+4v}{4(V+2v)}$$

これをvについて解いて

$$v=\frac{(5-4\cos\theta)}{4(2\cos\theta-1)}V \quad \cdots\cdots \text{答}$$

練習 2. 平面上を点が動いている。この点の時刻tにおける位置 P_t は $(a\cos t,\ b\sin t)$ である。ただし，a，bは正の定数とする。時刻tにおけるこの点の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_t$ とし，mを定数とする。ベクトル $m\boldsymbol{v}_t$ を，P_t を始点として矢線で示すとき，その終点が時間 $0\leqq t<2\pi$ の間に描く平面上の曲線が囲む面積を求めよ。(早大)

ヒント 動点の座標が時間tの関数として与えられ，したがって位置ベクトルが

$$(a\cos t,\ b\sin t)$$

ですから

$$\boldsymbol{v}_t=(-a\sin t,\ b\cos t)$$

となります。したがって，終点の位置ベクトル $(x,\ y)$ は

$$(a\cos t-am\sin t,\ b\sin t+bm\cos t)$$

となります。つまり

$$x=a(\cos t-m\sin t)$$
$$y=b(\sin t+m\cos t)$$

ですから，tを消去して

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1+m^2$$

が得られます。つまり，だ円

$$\frac{x^2}{a^2(1+m^2)}+\frac{y^2}{b^2(1+m^2)}=1$$

の周上を1周するのですから，その囲む面積は

$$\pi\cdot a\sqrt{1+m^2}\cdot b\sqrt{1+m^2}=\pi ab(1+m^2)$$

となります。

答 $\pi ab(1+m^2)$

■練習 3. 軸がy軸に平行な放物線上を運動する点Pがあって，時刻 $t=0$ のとき原点Oにある。速度ベクトルはx成分がつねに一定で，$t=1$ のときその y 成分が0になり，またそれは $t=2$ のとき向きがx軸の正方向と45°の角をなし，大きさが $\sqrt{2}$ である。

(1) 放物線の方程式を求めよ。

(2) 時刻tにおける直線 OP と放物線とによって囲まれる部分の面積を求めよ。（東京水産大）

解 (1) 点Pは $t=0$ のとき原点Oにあるから Pの描く放物線の方程式は

$$y=ax^2+bx \quad (a\neq 0) \qquad \cdots\cdots①$$

とおくことができる。点Pの速度ベクトルは $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ で，そのx成分が一定で，かつ $t=2$ のとき

$$\vec{v}=(\sqrt{2}\cos 45°,\ \sqrt{2}\sin 45°)=(1,\ 1)$$

であるから

$$\frac{dx}{dt}=1 \qquad \therefore \quad x=t+C$$

と書ける。そして，$t=0$ のとき $x=0$ であるから　$C=0$

$$\therefore \quad x=t \qquad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して

$$y=at^2+bt \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dt}=2at+b$$

ところが，$t=1$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=0$ であるから

$$2a+b=0 \qquad \cdots\cdots③$$

また，$t=2$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=1$ であることから

$$4a+b=1 \qquad \cdots\cdots④$$

③，④を解いて

$$a=\frac{1}{2},\ b=-1$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x^2-x \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

である。

(2) 点Pの，時刻tにおける位置は

$$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-t\right)$$

で与えられるから，OP の方程式は

$$y=\left(\frac{1}{2}t-1\right)x$$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^t\left\{\left(\frac{1}{2}t-1\right)x-\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(tx-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}tx^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^t=\frac{t^3}{12} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ では，もう1つやってみませんか。

■練習 4. OA=1cm のとき，直線 OA 上をAから出発して動く動点Pがある。Pの速度は OP の長さ（$x$cm）と A を出発してからの時間（t 秒）に比例している。出発後2秒までは，速度の絶対値は増加するが，その後は減少している。xとtの関係式を求めよ。（関西医大）

ヒント Pの速度は OP の長さxと，A を出発してからの時間tに比例するというのですから，比例定数をkとしますと

$$\frac{dx}{dt}=kxt$$

なる関係があります。これは変数分離形の微分方程式で

$$\int\frac{dx}{x}=\int kt\,dt$$

$$\therefore \quad \log|x|=\frac{kt^2}{2}+C$$

$$\therefore \quad x=\pm e^C\cdot e^{\frac{kt^2}{2}}=Ae^{\frac{kt^2}{2}}$$

$t=0$ のとき $x=1$ だから　$A=1$

$$\therefore \quad x=e^{\frac{kt^2}{2}}$$

となりましょう。そして，

$t=2$ のとき　$\left(\left|\dfrac{dx}{dt}\right|\right)'=0$

ということから $x=e^{-\frac{1}{8}t^2}$ となります。

三角関数の合成の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角関数の合成は三角関数の扱いには欠かせない道具なんです。必ず，カナラズ，よく理解してほしいものだ!!

◆ **三角関数の合成** というのは

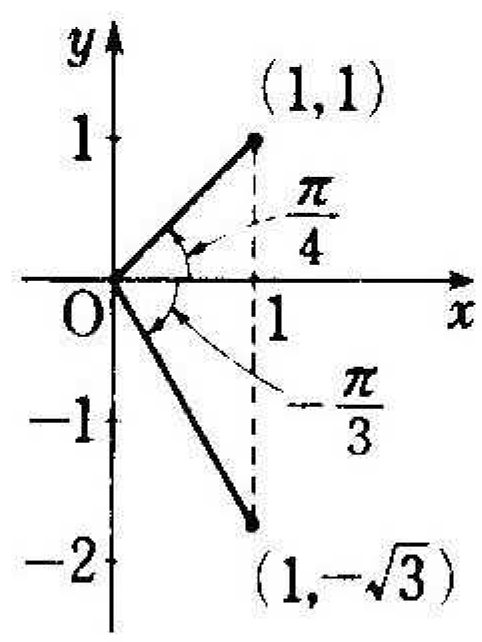
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

のような変形で，ここに，αは，点$(a,\ b)$を原点と結んだ直線がx軸の正の方向となす角でした。例えば：――

$$\ll \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1^2+1^2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\gg$$

であるし，

$$\ll \sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\times\sin\left(\theta+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\gg$$



となる，といったぐあい。さて，その応用です。

＊　＊　＊

◆ 第1は，**グラフをかく** こと：――

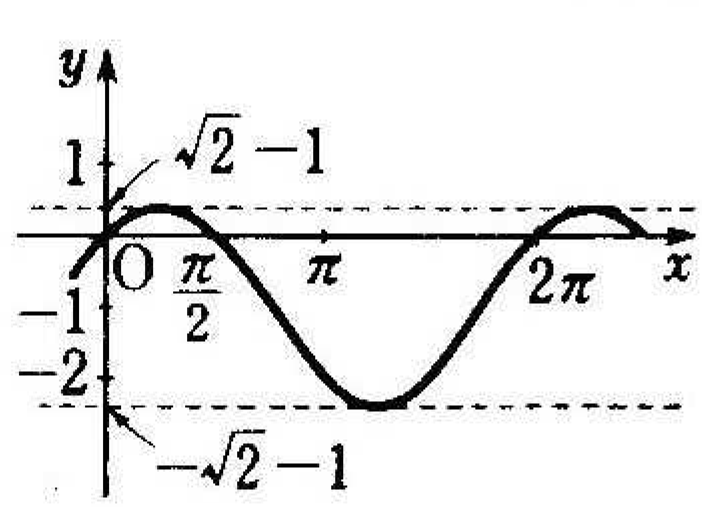
■練習 1. $y=|\sin x+\cos x-1|$ のグラフをかけ。（東大）

（解） $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

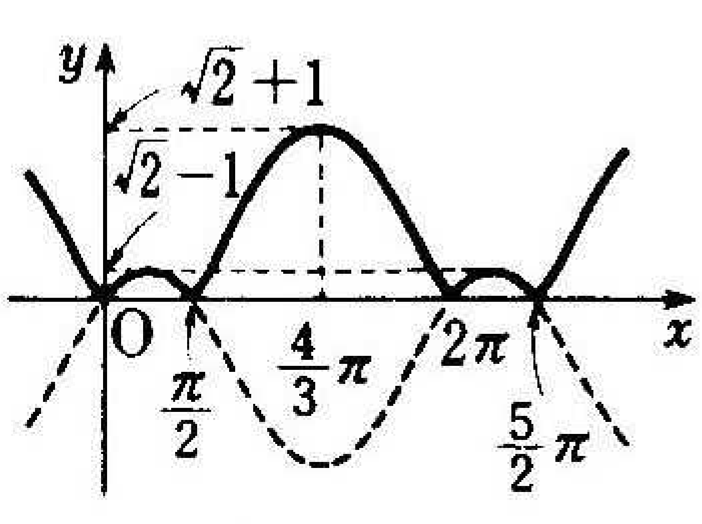
であるから，

$y=\sin x+\cos x-1$

のグラフは右上図の通りである。



ゆえに，求めるグラフは右下図のようになる。



＊　＊　＊

◆ 第2は，**最大・最小問題への応用** です。

■練習 2. $f(x)=4\sin x+3\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

（解） $f(x)=4\sin x+3\cos x$
$=\sqrt{4^2+3^2}\sin(x+\alpha)=5\sin(x+\alpha)$

ここに，αは第1象限の角で $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ である。ゆえに，求める最大値は5，最小値は-5である。

＊　＊　＊

◆ 第3は，**方程式への応用** ですが，これにはいろいろな場合があります。

■練習 3. $\sin\theta+\cos\theta+1=0$ を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

（解）
$$\sin\theta+\cos\theta=-1$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$
$$\therefore\quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad \theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$ ……答

■練習 4. $a\sin\theta+b\cos\theta+1=0$ が解をもつための条件を求めよ。

（解） $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=-1\quad\left(\tan\alpha=\frac{b}{a}\right)$

$$\therefore\quad \sin(\theta+\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

これを満足するθがあるための条件は

$$\sqrt{a^2+b^2}\geqq1\qquad\therefore\quad a^2+b^2\geqq1$$

である。

答　$a^2+b^2\geqq1$

◆ 第4は，**微分法への応用** です。

練習 5. $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

のとき次式を証明せよ。

$$y''=-y$$

(解) $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=5\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$$

ここに α は第1象限の角で $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ である。

$$\therefore\quad y'=5\cos\left(x+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$$

$$y''=-5\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$$

$$\therefore\quad y''=-y$$

Q. E. D.

(注) もちろん三角関数の合成を使わなくてもできますが，2倍はゴタゴタするでしょう。

＊　＊　＊

◆ 第5は，**積分法への応用** です。

練習 6. $a>0$, $b>0$ のとき

$$\int_0^{\pi}|a\sin x+b\cos x|dx$$

を求めよ。（山口大）

(解) $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

ただし，

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}>0,\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>0$$

ゆえに　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

したがって

$0<x<\pi-\alpha$ のとき　$\sin(x+\alpha)>0$

$\pi-\alpha<x<\pi$ のとき　$\sin(x+\alpha)<0$

ゆえに

$$与式=\int_0^{\pi-\alpha}(a\sin x+b\cos x)dx$$

$$+\int_{\pi-\alpha}^{\pi}-(a\sin x+b\cos x)dx$$

$$=\Big[-a\cos x+b\sin x\Big]_0^{\pi-\alpha}$$

$$+\Big[a\cos x-b\sin x\Big]_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

$$=-a\cos(\pi-\alpha)+b\sin(\pi-\alpha)+a$$

$$-a-a\cos(\pi-\alpha)+b\sin(\pi-\alpha)$$

$$=2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)$$

$$=2\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=2\sqrt{a^2+b^2}$$

答　$2\sqrt{a^2+b^2}$

(注) ところで，三角関数の合成を使わなければどうなるのかな，余裕があったら考えてみてください。では，もう1つ：——

練習 7. $\frac{1}{3}<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac{1}{2}$

を証明せよ。（日本大）

(解) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

しかるに，$0\leqq x\leqq 1$ であるから

$$1<\sin x+\cos x\leqq\sqrt{2}$$

（ココノトコロガヨクワカラナケレバ，グラフヲカイテミヨ，一目瞭然デアリマショウ）

$$\therefore\quad x^2\leqq x^{(\sin x+\cos x)^2}<x$$

したがって，

$$\int_0^1 x^2dx\leqq\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\int_0^1 xdx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac{1}{2}$$

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ このように三角関数の合成はスゴク役に立つのですから，十分使いこなせるようにしてください。それにしても，2つの三角関数の合成は，どうして，こんなにもカンタンになるのであろうか？

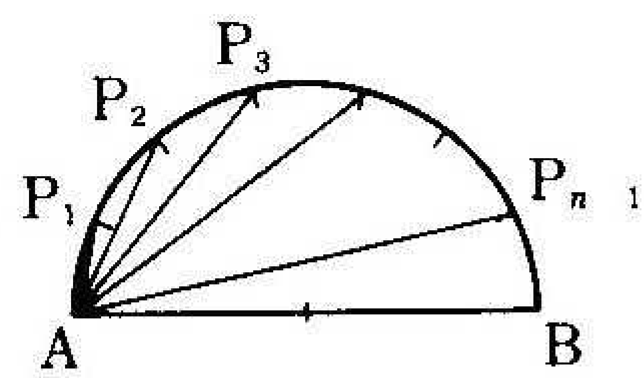
また，ここで忘れてならないことは $\sin\theta$, $\cos\theta$ の周期が等しいことです。これが，わずか異なるときには，物理でやったようにうなりの現象が出てきます。しかし，それは，この問題ではありません。なお，平面上で三角関数の合成をする機械もあります。

平均値の求め方と蛇足

◈有限個のものの平均値については今更いうことはありません。しかし，無限個の平均となると積分が必要となります。

◆　では，さっそくながら次の練習1. にいきましょう。

■練習 1. $\overline{\mathrm{AB}}=l$ を直径とする半円の弧を $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，……，P_{n-1} で n 等分するとき次の平均値を求めよ。



$$m=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{AP_1}+\mathrm{AP_2}+\cdots+\mathrm{AP}_{n-1}+\mathrm{AP}_n}{n}$$

ただし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{B}$ とする。

ヒント　正弦定理によって

$$\mathrm{AP}_k=l\sin\frac{k\pi}{2n}$$

ですから

$$m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{l\sin\frac{\pi}{2n}+l\sin\frac{2\pi}{2n}+\cdots+l\sin\frac{n\pi}{2n}\right\}$$

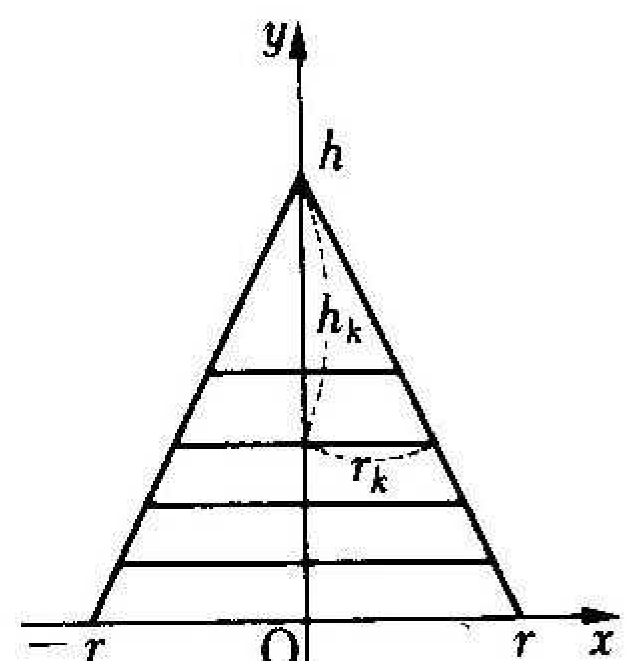
$$=l\int_0^1\sin\frac{\pi x}{2}dx=l\left[\frac{-\cos\dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2l}{\pi}$$

答　$\dfrac{2l}{\pi}$

■練習 2. 底面の半径 r，高さ h の円すいがある。底面に平行な n 枚の平面でこの円すいを切り，体積を $n+1$ 等分する。これらの平面による円すいの切り口の面積 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の平均値を S_n とする。S_n は $n\to\infty$ のとき，どんな値に近づくか。

（名古屋工大）



ヒント　底面積 A_k の円すいの底面の半径を r_k，高さを h_k としますと

$$h_k:r_k=h:r$$

$$\therefore\quad h_k=\frac{hr_k}{r}$$

という関係があります。そして，体積 V_k は

$$V_k=\frac{1}{3}\pi r_k{}^2\cdot h_k=\frac{1}{3}\pi r_k{}^2\cdot\frac{hr_k}{r}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi h}{r}r_k{}^3$$

ところが，他方

$$V_k=\frac{k}{n+1}V$$

ですから

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi h}{r}r_k{}^3=\frac{k}{n+1}V$$

$$\therefore\quad r_k{}^3=\frac{k}{n+1}V\cdot\frac{3r}{\pi h}$$

ところが　$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$

ですから

$$r_k{}^3=\left(\frac{k}{n+1}\right)r^3$$

$$\therefore\quad r_k{}^2=\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}r^2$$

$$\therefore\quad S_k=\pi\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}r^2$$

ゆえに，$S_n=\pi r^2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{n}$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}S_n=\pi r^2\int_0^1x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$=\frac{3}{5}\pi r^2$$

答　$\dfrac{3}{5}\pi r^2$

◆　ここで，ふと気がついたキミはどなる。ちょっと待って下さいよ。加えて，n でわって，極限をとれば平均だというなら，面積も体積もみんな平均じゃありませんか。

うん，これは大問題だ!!