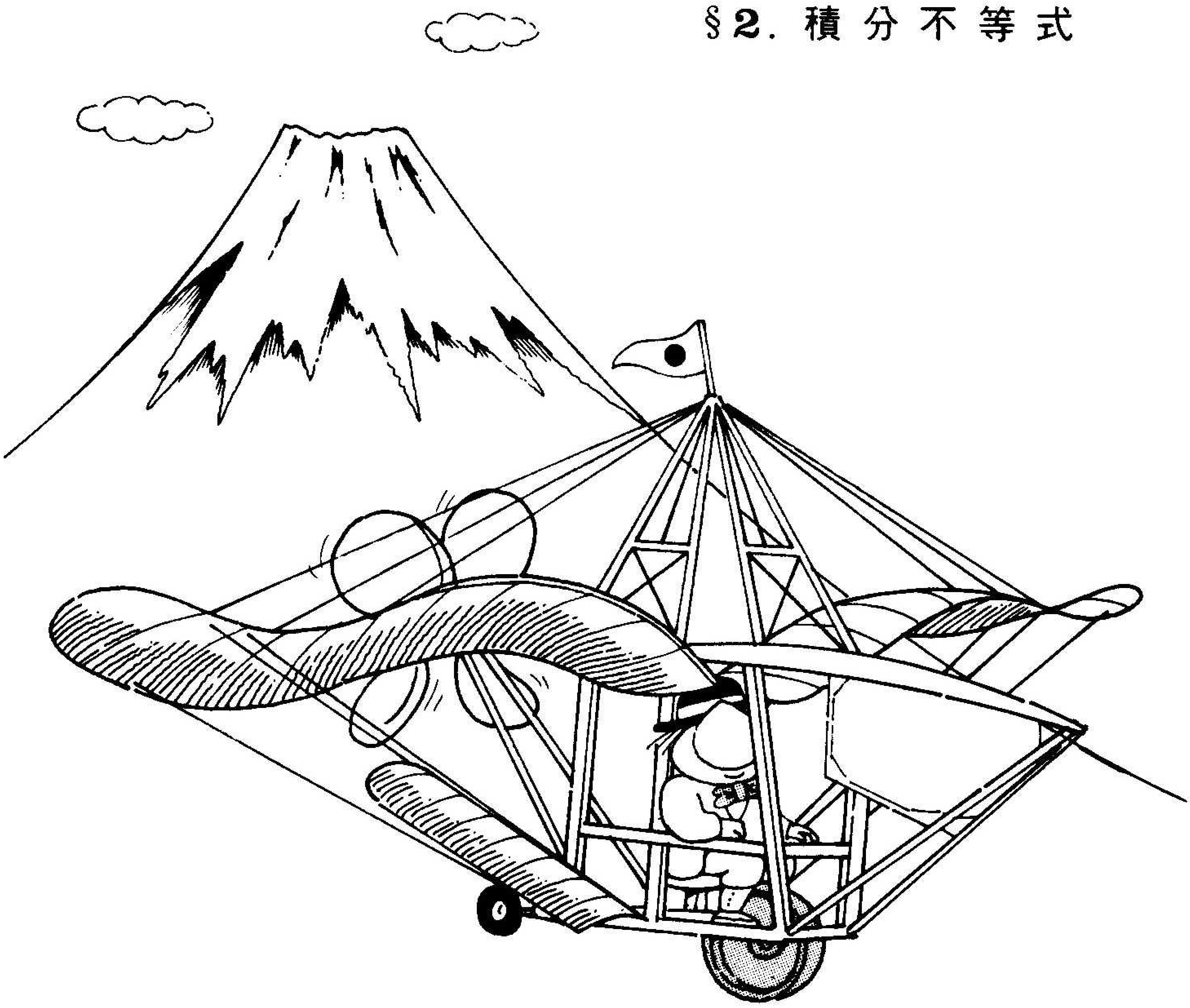
第4章

積　分　法

§1. 積 分 計 算

§2. 積分不等式



整多項式の積分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆整多項式の積分は基解の範囲ではないか，というかもしれない。しかし，次数が高くなると，量から質への転換が起こるのだ。

◆ 整多項式の積分は基解でやっていますが，それでも，やや複雑になると，もう微積を使わないでは手に負えないものです。ここでは多項式の積分でも微積らしい部分に重点をおいてやってみましょう。

* * *

◆ まず **置換積分** から：——

■練習 1. $I=\int(5x+3)^4dx$ を求めよ。

(解) $5x+3=t$ とおくと

$$5dx=dt \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{5}dt$$

$$\therefore \quad I=\int t^4\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^5}{5}+C$$

$$=\frac{1}{25}(5x+3)^5+C$$

■練習 2. $I=\int(x+4)(x-3)^5dx$ を求めよ。

(解) $(x+4)(x-3)^5=\{(x-3)+7\}(x-3)^5$

$$=(x-3)^6+7(x-3)^5$$

であるから

$$I=\frac{1}{7}(x-3)^7+\frac{7}{6}(x-3)^6+C$$

$$=\frac{1}{42}(x-3)^6\{6(x-3)+49\}+C$$

$$=\frac{1}{42}(x-3)^6(6x+31)+C$$

■練習 3. $I=\int(2x+4)(x-3)^3dx$ を求めよ。

(ヒント) $(2x+4)(x-3)^3$

$$=\{2(x-3)+10\}(x-3)^3$$

$$=2(x-3)^4+10(x-3)^3$$

ですから

$$I=\frac{2}{5}(x-3)^5+\frac{10}{4}(x-3)^4+C=\cdots\cdots$$

* * *

◆ 次は **部分積分** です：——

■練習 4. $I=\int x(x+4)^3$ を積分せよ。

(ヒント) **部分積分の公式**

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$

を使うには，

微分して簡単になるほうをuにとる

のがコツ。ここではxのほうがいいでしょう。

$$I=x\cdot\frac{(x+4)^4}{4}-\int 1\cdot\frac{(x+4)^4}{4}dx$$

$$=\frac{1}{4}x(x+4)^4-\frac{1}{20}(x+4)^5+C$$

$$=\frac{1}{20}(x+4)^4\{5x-(x+4)\}+C$$

$$=\frac{1}{20}(x+4)^4(4x-4)+C$$

$$=\frac{1}{5}(x-1)(x+4)^4+C \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

■練習 5. $I=\int(2x+4)(x-4)^3dx$ を積分せよ。

(解) $I=(2x+4)\cdot\dfrac{(x-4)^4}{4}-\int 2\cdot\dfrac{(x-4)^4}{4}dx$

$$=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-4)^5}{5}+C$$

$$=\frac{1}{5}(x-4)^4(2x+7)+C$$

(注) 同じような問題は左のほう，練習2.にもありますが，どっちのやり方が簡単だろうか。大きなちがいはない。いずれにしても，どっちもできるようにしておきたいものだ。

* * *

◆ では，やや総合的な練習にいくとしましょう。

練習 6. 曲線 $y=x^n-x^{3n}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_n，また，この部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_n とする。ただし，n は自然数を表す。このとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1) S_n，V_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}$ を求めよ。　(鹿児島大)

(解) $0\leqq x\leqq 1$ で $0\leqq x^{3n}\leqq x^n\leqq 1$ であるから $y\geqq 0$ である。ゆえに：——

(1) $$S_n=\int_0^1(x^n-x^{3n})dx$$

$$=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{3n+1}$$

$$=\frac{2n}{(n+1)(3n+1)} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

$$V_n=\pi\int_0^1(x^n-x^{3n})^2dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^{2n}-2x^{4n}+x^{6n})dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-2\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{6n+1}}{6n+1}\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{4n+1}+\frac{1}{6n+1}\right)$$

$$=\frac{8\pi n^2}{(2n+1)(4n+1)(6n+1)} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(2) $$\frac{V_n}{S_n}=\frac{8\pi n^2}{(2n+1)(4n+1)(6n+1)}\times\frac{(n+1)(3n+1)}{2n}$$

$$=\frac{4\pi\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(4+\dfrac{1}{n}\right)\left(6+\dfrac{1}{n}\right)}$$

$$\longrightarrow\frac{4\pi\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{\pi}{4} \quad (n\longrightarrow\infty)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}=\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

(注) これは微積の問題として出題されていますが，重点は(1)の積分でしょう。そして，これなら，むしろ基解の範囲ですが，ともかくここでもやってみたのです。

練習 7. (1) $f(x)$ を区間 $[a,\ b]$ で与えられた連続関数とすれば，

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c),\quad a<c<b$$

を満足する c が必ず存在することが知られている。このことの意味をグラフによって説明せよ。(証明不要)

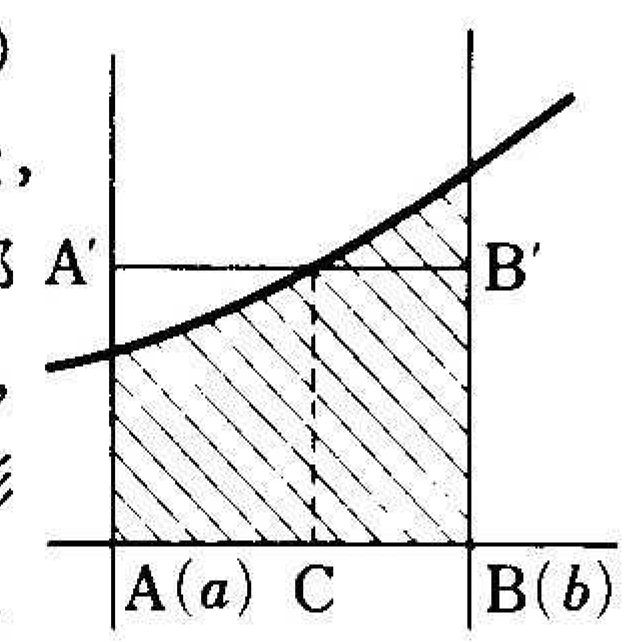
(2) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ とするとき

$$f(\sin\theta)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n+1},$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

となるような θ が必ず存在することを示せ。　(慶大)

(解) (1) 区間 $(a,\ b)$ 内に適当な点Cをとると，右の図の斜線を施した部分の面積が，底辺 $b-a$，高さ $f(c)$ である長方形ABB′A′に等しくすることができることを表している。



(2) (1)を用いると $f(x)$ は連続であるから

$$\int_0^1 f(x)dx=(1-0)f(c)\quad (0<c<1)$$

を満足する c が存在する。

上式の左辺は

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{a_n}{n}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n}$$

であるから，$0<\sin\theta<1\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n}=f(\sin\theta)$$

を満足する θ の存在することがわかる。

(注) このような θ が1つしかないというわけではありません。「1つは必ずある」というのです。

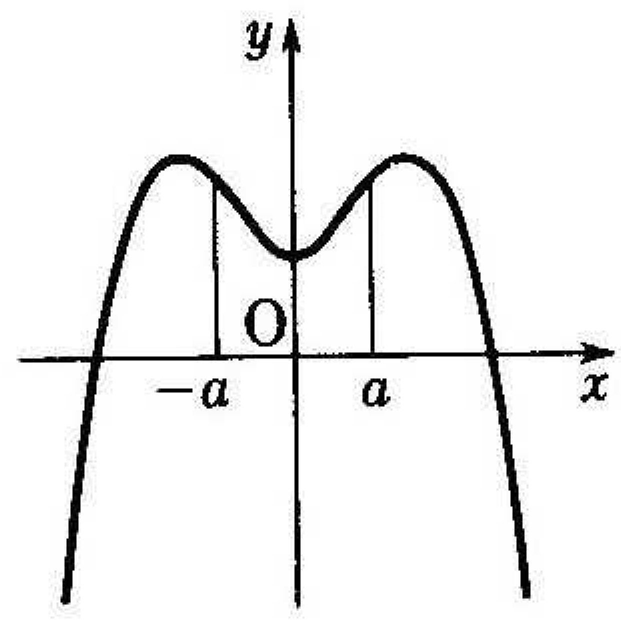
このような問題は難しくはないが，とっつきにくいですね。

○ 偶関数と奇関数の定積分

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

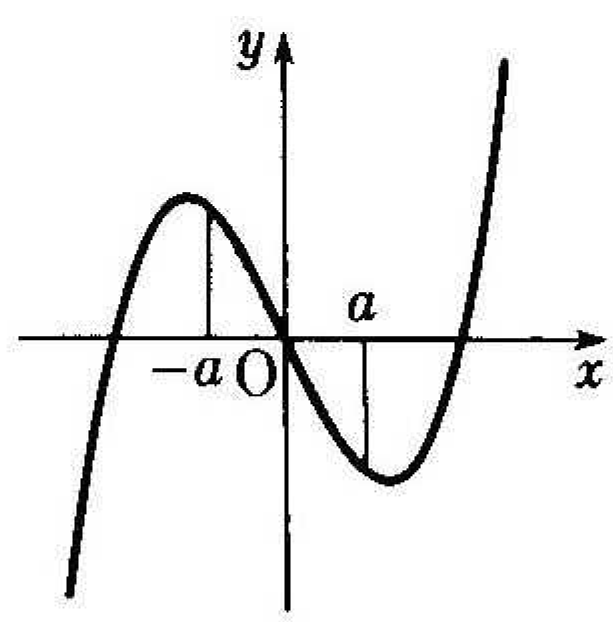
◆陰陽師はまったく影をひそめたのに，理性的かつあまりに理性的な数学に，陰と陽とが温存されているとは○○でもゴゾンジアルメエ。

◆ やや複雑な積分の計算で，意外と大きな働きをするのが，この **偶関数と奇関数** です。偶関数というのは，いうまでもなく，そのグラフがy軸について対称なもの，そして奇関数というのは，そのグラフが原点について対称なものです。だから，



偶関数 $f(x)$ については

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



奇関数 $f(x)$ については

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

なる関係があります。では次の計算を：——

練習 1. $\int_{-1}^{1} x^3(x^2+1)^2dx$ を求めよ。

(ヒント) x^3 は奇関数，$(x^2+1)^2$ は偶関数，その積は奇関数。してみると，計算するまでもない，これは0なんだ。それはわかった!! わかったが，答案はどう書くのか？

(解) $y=x^3(x^2+1)^2$ は奇関数であるから，$x=-1$ から $x=+1$ まで積分すれば，その値は0に等しい。 答 0

練習 2. $\int_{-1}^{1} (x^4-2x^2+4)dx$ を求めよ。

(ヒント) x^4, x^2, x^0 と偶数乗の項だけからできている。つまり，偶関数です。だから

$$与式=2\int_{0}^{1}(x^4-2x^2+4)dx=\frac{106}{15} \cdots\cdots 答$$

* * *

◆ では，やや，めんどうな問題をやってみませんか。

練習 3. $\int_{-1}^{1} (x^2+x+1)^2dx$を求めよ。

(ヒント) 被積分関数は

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)^2\\&=x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x\\&=(x^4+3x^2+1)+2x^3+2x\end{aligned}$$

と書けますから，

$$\begin{aligned}与式&=2\int_{0}^{1}(x^4+3x^2+1)dx\\&=2\left[\frac{x^5}{5}+x^3+x\right]_0^1=\frac{22}{5} \cdots\cdots 答\end{aligned}$$

練習 4. $\int_{-a}^{a} (e^x-e^{-x})^5dx$ を求めよ。

(解) 被積分関数を $f(x)$ とおくと

$$f(x)=(e^x-e^{-x})^5$$

に対して，

$$f(-x)=(e^{-x}-e^x)^5$$
$$\therefore\ f(-x)=-f(x)$$

ゆえに $f(x)$ は奇関数である。したがって，xについて $-a$ から a まで積分すれば0である。 答 0

(注) 奇関数に気がつかなかったら，サテ，どうするか，次のようなことになりましょう。

$$\begin{aligned}&与式\\&=\int_{-a}^{a}(e^{5x}-5e^{3x}+10e^x-10e^{-x}+5e^{-3x}-e^{-5x})dx\\&=\left[\frac{e^{5x}}{5}-\frac{5e^{3x}}{3}+10e^x+10e^{-x}-\frac{5e^{-3x}}{3}+\frac{e^{-5x}}{5}\right]_{-a}^{a}\\&=\left[\frac{1}{5}(e^{5x}+e^{-5x})-\frac{5}{3}(e^{3x}+e^{-3x})\right.\\&\qquad\left.+10(e^x+e^{-x})\right]_{-a}^{a}\\&=0\end{aligned}$$

* * *

◆ では，めんどうな問題を練習してみませんか。その前に，復習を：——

$f(-x)=-f(x)$ ならば 奇関数
$f(-x)=f(x)$ ならば 偶関数

でしたね。

■練習 5. $-a \leqq x \leqq a$ において

$$f(-x)=-f(x)$$

ならば，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

であることを証明せよ。 (広島大)

(ヒント) なんだ，これなら，今まで使ってきたことだ。しかし，証明せよ，といわれるとちょっとたじろぐ，かも。

(解) $I=\int_{-a}^{a} f(x)dx$

$$=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ところが，

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx$$

において，$x=-t$ とおくと

$$=\int_{a}^{0} f(-t)(-dt)=\int_{0}^{a} f(-t)dt$$

ところが $f(-x)=-f(x)$ であるから

$$=\int_{0}^{a} -f(t)dt=-\int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$=-\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\therefore \quad I=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

Q. E. D.

(注) p.180ではグラフで簡単に説明のついたことなのに，こうしてやってみると，いかにも高等な感じのしてくるのも妙なものです。

では，ついでだ。偶関数の場合もやっておこう。

■練習 6. 区間 $-a \leqq x \leqq a$ において

$$f(-x)=f(x)$$

ならば，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

であることを証明せよ。 (広島大)

(解) $I=\int_{-a}^{a} f(x)dx$

$$=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ところが $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において，$x=-t$ とおくと，

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)(-dt)$$

$$=\int_{0}^{a} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\therefore \quad I=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Q. E. D.

* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみましょう。

■練習 7. $f(x)$ は x の2次式とする。

$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx=2$ を満足し，かつ

$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$ の値が最も小さくなるように $f(x)$ を定めよ。 (静岡大)

(ヒント) $f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+cx^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(ax^4+cx^2)dx=2\left(\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right)=2$$

また，

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)f(x)dx$$

$$=a\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$$

$$+\int_{-1}^{1}(bx+c)(ax^2+bx+c)dx$$

$$=2a+2\int_{0}^{1}\{(b^2+ac)x^2+c^2\}dx$$

$$=2a+2\left(\frac{b^2+ac}{3}+c^2\right)=\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{3}b^2+\frac{8}{9}c^2+10$$

したがって，……

答 $f(x)=5x^2$

① 部分積分法とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆部分積分法などというものが威力を発揮する原因はどこにあるのだろう。タカガ，積の微分法のウラガエシなのに……

◆ u，v が x の関数であれば

$$(uv)'=uv'+u'v$$

$$\therefore\quad uv'=(uv)'-u'v$$

両辺を x で積分しますと

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$

が得られます。これが **部分積分の公式** です。では，具体的な問題をやってみましょう。

練習 1. $\int xe^x dx$ を求めよ。

ヒント どちらを u とみなし，どちらを v' とみるかが問題!! 一般的にいって，

微分して簡単になるほうを u とみなす

のがコツ。e^x は微分しても変わらない。しかし，x は微分して 1 になる。カンタンになる。さては，これだ!!

解 $\int xe^x dx=xe^x-\int 1\cdot e^x dx$

$$=xe^x-e^x+C$$

$$=(x-1)e^x+C$$

練習 2. $I=\int x\sin x dx$ を求めよ。

解 $I=x(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)dx$

$$=-x\cos x+\int\cos x dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C \quad\cdots\cdots\text{答}$$

* * *

◆ e^x と $\sin x$ は，実は同類ですから，その積では，どちらを u とみなしても同じ程度にできます。

練習 3. $I=\int e^{3x}\sin x dx$ を求めよ。

解 1. (e^{3x} を v' とみなして)

$$I=\frac{1}{3}e^{3x}\sin x-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cos x dx$$

いま $J=\int e^{3x}\cos x dx$ とおくと

$$J=\frac{1}{3}e^{3x}\cos x+\int\frac{1}{3}e^{3x}\sin x dx$$

したがって

$$3I+J=e^{3x}\sin x \quad\cdots\cdots①$$

$$I-3J=-e^{3x}\cos x \quad\cdots\cdots②$$

となる。①×3+② を作れば

$$10I=e^{3x}(3\sin x-\cos x)$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{10}e^{3x}(3\sin x-\cos x)$$

答 $\frac{1}{10}e^{3x}(3\sin x-\cos x)+C$

* * *

◆ 定積分もまったく同じく

$$\int_a^b uv'dx=\Big[uv\Big]_a^b-\int_a^b u'vdx$$

となります。では：——

練習 4. $\int_1^e\frac{\log x}{x^2}dx$ を求めよ。

解 与式 $=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$

$$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)$$

$$=1-\frac{2}{e}$$

練習 5. $\int_0^\pi x\sin x dx$ を求めよ。

ヒント $x=u$，$\sin x=v'$ と考えてやればいいでしょう。

答 π

* * *

◆ では，ややめんどうな練習をやってみませんか。

練習 6. 次の等式を証明せよ。

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$$

(解) $\int x^n \sin x dx$

$=\int x^n(-\cos x)' dx$

$=x^n(-\cos x)-\int n x^{n-1}(-\cos x)dx$

$=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x dx$

Q. E. D.

(注) まったく同じようにして

$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$

が証明できます。

練習 7. $I_n=\int \sin^n x dx$ $(n\geqq 2)$ とするとき

$$I_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

を証明せよ。

(解) $I_n=\int \sin x \sin^{n-1}x dx$

部分積分法を適用して

$I_n=(-\cos x)\sin^{n-1}x$

$\quad -\int(-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x$

$\quad +(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x$

$\quad +(n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x$

$\quad +(n-1)\int \sin^{n-2}x dx-(n-1)I_n$

$\therefore \quad nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$

$\therefore \quad I_n=-\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

Q. E. D.

(注) まったく同じようにして $\cos^n x$ の積分については，次の漸化式が成り立つのです。

$$I_n=\int \cos^n x dx \quad (n\geqq 2)$$

とおくと

$$I_n=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

*　　*　　*

◆ 同じく漸化式ですが，次をやってみませんか。

練習 8. p および q を正の整数とするとき，次の定積分

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

について，

(1) $B(1,\ 1)$, $B(2,\ 1)$, $B(2,\ 2)$ および $B(p,\ 1)$ を求めなさい。

(2) p と q とで定まる定数 k によって，次の等式が成り立つ。

$B(p,\ q+1)=kB(p+1,\ q)$

このとき部分積分法を用いて，k を p と q とで表しなさい。　（千葉工大）

(解) (1) $B(1,\ 1)=\int_0^1 1dx=1$

$B(2,\ 1)=\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}$

$B(2,\ 2)=\int_0^1 x(1-x)dx=\dfrac{1}{6}$

$B(p,\ 1)=\int_0^1 x^{p-1}dx=\dfrac{1}{p}$

(2) $B(p,\ q+1)$

$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx$

$=\left[\dfrac{1}{p}x^p(1-x)^q\right]_0^1$

$\quad -\dfrac{1}{p}\int_0^1 x^p(-q)(1-x)^{q-1}dx$

$=\dfrac{q}{p}B(p+1,\ q)$

ところが

$B(p+1,\ q)>0 \qquad \therefore \quad k=\dfrac{q}{p}$

(注) この $B(p,\ q)$ を **ベータ関数** といいます。

○置換積分法とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微積における積分のもっとも大きいテクニックは置換積分法と申せましょう。これを自由に使いこなせることの大切なゆえんだ。

◆ **置換積分**（ちかんせきぶん）というといかめしいが，オキカエ積分とでもいえば，親近感がわく，というものだ。ともあれ，具体的な問題にいくとしましょう。

■練習 1. $I=\int(4x-5)^3dx$ を求めよ。

(ヒント) $4x-5=t$ とおきかえると，

$$(4x-5)^3=t^3$$

となるのはいうまでもありませんが，dx を dt で表さなければなりません。形式的にいうと，

$4x-5=t$ の両辺を x で微分して

$$4=\frac{dt}{dx}$$

両辺に dx を掛けて

$$4dx=dt \quad \therefore \quad dx=\frac{dt}{4}$$

とおきかえるのです。あるいは

$$4x-5=t$$

の左辺を x で微分して 4，それに dx を掛けて $4dx$，右辺を t で微分して 1，それに dt を掛けて $1\cdot dt$ とし，

$$4dx=dt \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{4}dt$$

とすればよいのです。$4dx$ のことを $4x-5$ の微分といい，$1\cdot dt$ を t の微分といいます。そして，

$$4x-5=t$$

から

$$4dx=dt$$

を作ることを「**微分をとる**」といういい方をします。

さて，解答は次のようです。

(解) $4x-5=t$ とおいて，両辺の微分をとると

$$4dx=dt \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{4}dt$$

$$\therefore \quad I=\int t^3\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^4}{4}+C$$
$$=\frac{1}{16}(4x-5)^4+C$$

答 $\frac{1}{16}(4x-5)^4+C$

■練習 2. $I=\int\sqrt[3]{3-4x}\,dx$ を求めよ。

(解) $3-4x=t$ とおくと

$$-4dx=dt \quad \therefore \quad dx=-\frac{1}{4}dt$$

$$\therefore \quad I=\int\sqrt[3]{t}\left(-\frac{1}{4}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$$
$$=-\frac{3}{16}(3-4x)\sqrt[3]{3-4x}+C$$

答 $-\frac{3}{16}(3-4x)\sqrt[3]{3-4x}+C$

■練習 3. $I=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

を証明せよ。

(解) $f(x)=t$ とおくと

$$f'(x)dx=dt$$

$$\therefore \quad I=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dt}{t}$$
$$=\log|t|+C$$
$$=\log|f(x)|+C$$

Q. E. D.

(注) 右辺を微分してもかまいませんよ。

＊　＊　＊

◆ 置換積分の具体的な利用法はそれぞれの項にゆずるとして，ここにはいくつか代表的な例をあげておくとしましょう。

練習 4. $I=\int \sin^3 x dx$ を求めよ。

(解) $I=\int \sin^3 x dx$

$$=\int \sin^2 x \sin x dx$$

$$=\int (1-\cos^2 x)\sin x dx$$

$\cos x=t$ とおいて，両辺の微分をとると

$$-\sin x dx=dt$$

$$\therefore \quad \sin x dx=-dt$$

$$\therefore \quad I=\int (1-t^2)(-dt)$$

$$=\int (t^2-1)dt$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

（Cは積分定数）

(注) $\sin^3 x$ を $\sin x$ と $\sin 3x$ で表して積分することもできます。

練習 5. $I=\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ を求めよ。

(解) 1.　$e^x=t$ とおくと

$$e^x dx=dt$$

$$\therefore \quad I=\int \frac{dt}{1+t}=\log|1+t|+C$$

$$=\log(1+e^x)+C$$

(解) 2.　$1+e^x=t$ とおくと

$$e^x dx=dt$$

$$\therefore \quad I=\int \frac{dt}{t}=\log|t|+C$$

$$=\log(1+e^x)+C$$

(注) e^x を t とおこうが $1+e^x$ を t とおこうが大したちがいがありませんが，ものによっては，置換の仕方で計算労力のヒドク異なるものもあります。結局，手際よくするやり方は暗記するより仕様のないものもあります。

練習 6. $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ $(t\geqq 1)$ とおいて，

$I=\int \sqrt{x^2-1}dx$ を積分せよ。

(解) $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$$\therefore \quad x^2-1=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-1$$

$$=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2$$

また，

$$dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$\therefore \quad I=\int \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int \left(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-2\log|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{2}\log|t|+C \cdots\cdots ①$$

ところが $t+\frac{1}{t}=2x$ であるから

$$\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$$

$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-4$$

$$=4(x^2-1)$$

$$\therefore \quad t-\frac{1}{t}=2\sqrt{x^2-1}$$

これを①に代入して

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C$$

……答

(注) この積分は他にもいろいろ置換することができます。例えば

$$\boldsymbol{x=\sec\theta}$$

とおいてもよいし，

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2-1}=t-x}$$

とおくこともできます。ファイトがあれば，この機会にこれらの方法でもやってみませんか。この他にもありますよ。

ところで，このようないろいろの方法をどうして発見したのか，ということになると高校程度では説明が困難です。それらを統一して扱うには複素数の微積分が必要になってくるからです。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑分数関数の積分法

◈分数関数の積分は原理的に簡単だが，実際となるとめんどう。しかし，入試では，さほどのこともない。

◆ 分数関数の積分の基本形は，次のようです。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\log|x-a|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ は $x=a\tan\theta$ とおく

(3) $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

他は上のものの和になります。では，まず個々のものを，その上で総合されたものをやるとしましょう。

■練習 1. $\displaystyle\int\frac{1}{2-3x}dx$ を求めよ。

（解） 1. $\displaystyle 与式=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-\frac{2}{3}}dx$

$$=-\frac{1}{3}\log\left|x-\frac{2}{3}\right|+C$$

（解） 2. $2-3x=t$ とおくと　$-3dx=dt$

$$\therefore\quad 与式=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{-3}$$

$$=-\frac{1}{3}\log|t|+C$$

$$=-\frac{1}{3}\log|2-3x|+C$$

（注） オヤ，上の2つの結果はちがうではないか，と思う人はありませんか。実は同じものです。というのは

$$-\frac{1}{3}\log|2-3x|=-\frac{1}{3}\log3\left|x-\frac{2}{3}\right|$$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\log3+\log\left|x-\frac{2}{3}\right|\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}\log\left|x-\frac{2}{3}\right|-\frac{1}{3}\log3$$

ですから，$-\dfrac{1}{3}\log3$ を積分定数の中に含ませることができるのです。

■練習 2. $I=\displaystyle\int\frac{2x}{x+1}dx$ を求めよ。

（解） $\dfrac{2x}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}$

$$\begin{array}{r|rr} & 2 & \\ 1\ 1 & 2 & 0 \\ & 2 & 2 \\ \hline & & -2 \end{array}$$

ですから

$$I=\int\left(2-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=2x-2\log|x+1|+C$$

■練習 3. $I=\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{x-1}dx$ を求めよ。

（解） $\dfrac{(x+1)^2}{x-1}=x+3+\dfrac{4}{x-1}$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\therefore\quad I=\int\left(x+3+\frac{4}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+3x+4\log|x-1|+C$$

＊　＊　＊

◆ 定積分の場合もやってみましょう。

■練習 4. $I=\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$ を求めよ。

（ヒント） $x=2\tan\theta\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

とおきますと　$dx=2\sec^2\theta d\theta$

$$x^2+4=4(\tan^2\theta+1)=4\sec^2\theta$$

x	$-2\cdots\cdots0\cdots\cdots2$
θ	$-\frac{\pi}{4}\cdots\cdots0\cdots\cdots\frac{\pi}{4}$

ですから

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\sec^2\theta}\cdot2\sec^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

（注） $x=2\tan\theta\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi\right)$ とおいてはいけません。$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}}$ で **$\tan\theta$ は不連続** だからです。

＊　＊　＊

◆ 総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. (1) $\dfrac{3x-7}{(2x+1)(x^2+4)}$

$$=\frac{A}{2x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

が成り立つように定数 A, B, C を定めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^2\left\{\frac{3x-7}{(2x+1)(x^2+4)}+xe^x\right\}dx$ を求めよ。　（北大）

(解) (1) 分母を払うと

$$3x-7=A(x^2+4)+(Bx+C)(2x+1)$$

$x=-\dfrac{1}{2}$ とおいて A を求めると

$$A=-2$$

次に $x=2i$ とおくと

$$6i-7=(2Bi+C)(4i+1)$$
$$=(-8B+C)+i(4C+2B)$$
$$\therefore\ -8B+C=-7,\ 4C+2B=6$$
$$\therefore\ B=C=1$$

答　$A=-2$, $B=1$, $C=1$

(2) $x=2\tan\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$$\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2\theta}{4(\tan^2\theta+1)}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

答　$\dfrac{\pi}{8}$

(3) (1)により

$$\int_0^2\frac{3x-7}{(2x+1)(x^2+4)}dx$$
$$=\int_0^2\frac{-2}{2x+1}dx+\int_0^2\frac{x+1}{x^2+4}dx$$
$$=\Big[-\log(2x+1)\Big]_0^2+\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+4)\Big]_0^2+\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}$$
$$=-\log5+\frac{1}{2}\log8-\frac{1}{2}\log4+\frac{\pi}{8}$$
$$=-\log5+\frac{1}{2}\log2+\frac{\pi}{8}$$

また，

$$\int_0^2xe^xdx=\Big[xe^x\Big]_0^2-\int_0^2e^xdx$$
$$=2e^2-\Big[e^x\Big]_0^2=e^2+1$$

よって，求める積分の値は

$$-\log5+\frac{1}{2}\log2+\frac{\pi}{8}+e^2+1\cdots\cdots\text{答}$$

*　*　*

◆ こんなのもありますよ。

練習 6. $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$（$n$ は正の整数）とする。

(1) I_1 を計算せよ。

(2) $\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{n+1}$ を証明せよ。

(3) $n>2$ のとき $I_n=\dfrac{1}{n-1}-I_{n-2}$ を証明せよ。　（岡山大）

(解) (1) $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1$

$$=\frac{1}{2}\log2$$

(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき

$$\frac{x^n}{2}\leqq\frac{x^n}{1+x^2}\leqq\frac{x^n}{1}$$

であるから

$$\int_0^1\frac{x^n}{2}dx<\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx<\int_0^1x^ndx$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1<\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx<\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$\therefore\ \frac{1}{2(n+1)}<\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx<\frac{1}{n+1}$$

Q. E. D.

(3) $n>2$ のとき

$$I_n+I_{n-2}=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx+\int_0^1\frac{x^{n-2}}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{n-2}(x^2+1)}{1+x^2}dx=\int_0^1x^{n-2}dx$$
$$=\left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]_0^1=\frac{1}{n-1}$$
$$\therefore\ I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

Q. E. D.

◐三角関数の積分法

1 回目 年 月 日
2 回目 年 月 日
3 回目 年 月 日

◆三角関数の積分は一見やさしくみえて，その実，めんどうなものが多いものです。だからバカにしてはいけません，よ。

◆ 三角関数の積分公式は次の通りです。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \mathrm{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$$

では，次の練習をやってみませんか。

練習 1. $I=\int \sin^2 x dx$ を求めよ。

（解） $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから

$$I=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+C$$ （Cは積分定数）

練習 2. $I=\int \sin^3 x dx$ を求めよ。

（解） $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ であるから

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{4}\int(3\sin x-\sin 3x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-3\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$$

$$=\frac{1}{12}(-9\cos x+\cos 3x)+C$$

答 $\dfrac{1}{12}(-9\cos x+\cos 3x)+C$

（参考） **置換積分** でもできます。それには

$$\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$$

と変形するのです。

つまり

$$\int \sin^3 x dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x dx$$

において $\cos x = t$ とおくと

$$\sin x dx = -dt$$

$$\therefore\quad \int \sin^3 x dx=\int(1-t^2)(-dt)$$

$$=\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

オヤ，オヤ，これはさっきの答とちがうではないか，と早合点してはいけません。

$$\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\right)-\cos x+C$$

$$=\frac{1}{12}(-9\cos x+\cos 3x)+C$$

となって，まったく同じなのです。

三角関数の積分には，このようにまったく別なものにみえるものが少なくありませんから，ご注意ありたし。

* * *

◆ 上の（参考）に出てきたように，被積分関数が

$f(\sin x)\cos x$ のとき，$\sin x = t$ とおき
$f(\cos x)\sin x$ のとき，$\cos x = t$ とおく

のがコツ。例えば：——

練習 3. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$ を求めよ。

（ヒント） $\sin x = t$ とおけばよい。

答 $\sin x-\log(1+\sin x)+C$

* * *

◆ では，やや総合的な問題にいきましょうか。

練習 4. $I_n=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ。ただし，n は自然数である。

(ヒント) これは見かけによらずめんどうです。まず，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ と順次やってみましょうか。

$$I_1=\int_0^{\pi}1\cdot dx=\pi$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}2\cos x\,dx$$

$$=\Big[2\sin x\Big]_0^{\pi}=0$$

オヤオヤ，これは予想に反する。しかし，さらにやってみると，どうやら

$$I_{2m}=0,\ \ I_{2m+1}=\pi$$

らしいとわかります。

実は，これが群馬大に出題されたときは，(1)，(2)に分かれていて，

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x}{\sin x}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$

の順に求めることになっていました。これなら自然にできましょう。

(答) $\begin{cases} n\text{が偶数のとき} & 0 \\ n\text{が奇数のとき} & \pi \end{cases}$

練習 5. $|a|<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，定積分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\{\sin(a+x)+\cos x\}^2}$$

を求めよ。　　　　(金沢大)

(解) $\sin(a+x)+\cos x$

$$=\sin(a+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)$$

と書ける。そして，$|a|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$0<\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ \ \sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$$

また，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+x<\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \ \cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0$$

ゆえに，求める積分は存在する。さて，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4\sin^2\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left[\tan\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\left\{1-\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\tan\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2(1+\sin a)}\left\{\frac{\tan\frac{a}{2}+1}{1-\tan\frac{a}{2}}-\frac{\tan\frac{a}{2}-1}{1+\tan\frac{a}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2(1+\sin a)}\cdot\frac{2\left(1+\tan^2\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{2(1+\sin a)}\cdot\frac{2}{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{(1+\sin a)}\cdot\frac{1}{\cos a}$$

$$=\frac{1}{(1+\sin a)\cos a}$$

(注) これも積分がめんどうというわけではありません。しかし，三角関数の式の変形がかなりゴタゴタしましたが，できましたか。ともあれ，計算をバカにしてはいけません。

*　　*　　*

◆ 三角関数の積分で絶対値のついたもの，さらには，絶対値の中にパラメーターの入ったものはめんどうです。しかし，これは，本質的には絶対値のついた関数の積分の問題というべきでしょう。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

積分$\int\sin^n x\,dx$と$\int\cos^n x\,dx$の扱い方

◈この計算は暗記するまで，何回でもやるべきもの。そこまでやって，はじめて，カンタンな場合を使いこなすことができるから。

◆ $\sin^2 x$ や $\sin^3 x$ の積分は次数を下げたり，置換したりして求めることができますが，

次数が高いときは漸化式を使う

のがふつうです。

* * *

◆ まず，次数の低いときから始めようか。

■練習 1. $\int\sin^2 x dx$ を求めよ。

(解) $\int\sin^2 x dx$

$$=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+C$$

答 $\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+C$

■練習 2. $I=\int\sin^3 x dx$ を求めよ。

(解) 1. $I=\int\sin^3 x dx=\int\sin x\sin^2 x dx$

$$=\int\sin x(1-\cos^2 x)dx$$

$\cos x=t$ とおけば

$$-\sin x dx=dt$$

$$\therefore\quad I=\int(1-t^2)(-dt)=\int(t^2-1)dt$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

答 $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(解) 2. 3倍角の公式から

$$\mathbf{\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x}$$

$$\therefore\quad \sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{4}\int(3\sin x-\sin 3x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-3\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{12}(9\cos x-\cos 3x)+C$$

(注) 上の2つの解の結果がちがうように見えますが，もちろん同じものであるハズ。

$$\mathbf{\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x}$$

ですから

$$-\frac{1}{12}(9\cos x-\cos 3x)+C$$

$$=-\frac{1}{12}\{9\cos x-(4\cos^3 x-3\cos x)\}+C$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

となって，確かに一致しました。

■練習 3. $I=\int\cos^4 x dx$ を求めよ。

(ヒント) $\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

を使うとよいでしょう。

■練習 4. $I=\int\cos^5 x dx$ を求めよ。

(ヒント) $\cos^5 x$

$$=\cos^4 x\cos x$$

$$=(1-\sin^2 x)^2\cos x$$

ここで置換するのです!!

* * *

◆ 次に $\sin^n x$ と $\cos^n x$ の積分の漸化式にふれておくことが必要でしょう。

練習 5. n が正の整数のとき

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ の漸化式を導け。

(解) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x dx$

に部分積分法を適用して

$$=\Big[\sin^{n-1}x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\geqq 2)\quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

* * *

◆ 上の漸化式から，n が正の偶数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}x dx$$

$$=\cdots\cdots=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$$

したがって，

n が正の偶数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

まったく同様にして

n が正の奇数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

練習 6. n が正の整数のとき

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ の漸化式を導け。

(ヒント) 結果は上とまったく同じです。

* * *

◆ もう1段上のものもあります。つまり，これです。しかし，難しいのでムリにやるほどのことでもありません。

練習 7. $I_{m,n}=\int\cos^m x\sin^n x dx$

とすれば，

$$I_{m,n}=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$$

が成り立つことを示せ。また，

$$I_{m,1}=-\frac{\cos^{m+1}x}{m+1}$$

が成り立つことを示せ。

(ヒント) 証明すべき式の両辺を x で微分したものを証明してもよいのです。しかし，ここでは左と同じく変形(部分積分法)して，左辺から右辺を導くことにしましょう。

$$I_{m,n}=\int\cos^m x\sin^n x dx$$

$$=\int\cos^{m-1}x(\sin^n x\cos x)dx$$

$$=\cos^{m-1}x\cdot\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}$$

$$-\int\{(m-1)\cos^{m-2}x(-\sin x)\}$$

$$\times\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}dx$$

$$=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{n+1}$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}x\sin^{n+2}x dx$$

(ココデアキラメテハイケマセンヨ，$\sin^{n+2}x=\sin^n x\cdot\sin^2 x=\sin^n x(1-\cos^2 x)$ を使って)

$$I_{m,n}=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{n+1}$$

$$+\frac{m-1}{n+1}(I_{m-2,n}-I_{m,n})$$

となります。両辺に $n+1$ を掛けると両辺に $I_{m,n}$ が出てきますから，これについて解きますと求めるものが出てきます。後半の

$$I_{m,1}=-\frac{\cos^{m+1}x}{m+1}$$

についてはべつにいうこともないでしょう。

ともあれ，これは暗記もの!!

積分 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ と $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ と

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

これはネゴトでもまちがえることのないまでにやり方をよくオボエルこと。きまったやり方に徹することが大切ですよ。

◆ このセクションでは

$$\int e^{2x}\sin 5x\,dx \quad や \quad \int \frac{\cos 3x}{e^{4x}}dx$$

などの積分をやるのが目的です。これはきわめて重要ですから，何度もくり返して，暗記するまでやってください。

では：——

■練習 1. $ab\neq 0$ のとき

$$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad J=\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

を求めよ。

（解） 部分積分(法)を使って，

$$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$$
$$=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\int\frac{e^{ax}}{a}(b\cos bx)dx$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J$$
$$\therefore\quad aI+bJ=e^{ax}\sin bx \quad \cdots\cdots①$$

次に，

$$J=\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx-\int\frac{e^{ax}}{a}(-b\sin bx)dx$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I$$
$$\therefore\quad bI-aJ=-e^{ax}\cos bx \quad \cdots\cdots②$$

①×a＋②×b を作れば

$$(a^2+b^2)I=e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$$

したがって

$$\boldsymbol{I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C}$$

①×$(-b)$＋②×a を作れば

$$-(a^2+b^2)J=-e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)$$

したがって

$$\boldsymbol{J=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C}$$

（注） この練習をやるときには $a=1$, $b=2$ とか $a=-2$, $b=3$ とか，いろいろ数字を入れてやってみて，その結果を比べてみるのがよいのです。例えば，こんなぐあいだ。

■練習 2. $\int\frac{\sin 3x}{e^{2x}}dx$ を求めよ。

（解） $I=\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$

$J=\int e^{-2x}\cos 3x\,dx$

とおけば，

$$I=\frac{e^{-2x}}{-2}\sin 3x-\int\frac{e^{-2x}}{-2}(3\cos 3x)dx$$
$$=-\frac{e^{-2x}}{2}\sin 3x+\frac{3}{2}J$$
$$\therefore\quad 2I-3J=-e^{-2x}\sin 3x \quad \cdots\cdots①$$

次に，

$$J=\frac{e^{-2x}}{-2}\cos 3x-\int\frac{e^{-2x}}{-2}(-3\sin 3x)dx$$
$$=-\frac{e^{-2x}}{2}\cos 3x-\frac{3}{2}I$$
$$\therefore\quad 3I+2J=-e^{-2x}\cos 3x \quad \cdots\cdots②$$

①×2＋②×3 を作ると

$$13I=-e^{-2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)$$
$$\therefore\quad I=-\frac{1}{13}\cdot\frac{2\sin 3x+3\cos 3x}{e^{2x}}+C$$

（注） さて，左の欄の結果の I において $a=-2$, $b=3$ を代入してみると，確かに上のものと一致しますね。なるほど，これでよかったのだ。このように，a，b にいろいろ値を入れて，ラクにできるまで何度もやるのだ。なお，I, J の結果を覚える必要などもちろんありません。

*　*　*

◆ 次にもう1段複雑なのをやってみましょう。それはこれです。

練習 3. 次の定積分を求めよ。

$$I=\int_0^{\pi} xe^x \sin x dx$$ (東京工大)

(ヒント) x と e^x と $\sin x$ と，3つの積ですから，2つと1つに分けて部分積分法を適用したほうがよいでしょう。例えば：――

$$I=\int_0^{\pi} x(e^x \sin x)dx$$

ところで，

$$\boldsymbol{\int e^x \sin x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C}$$

$$\boldsymbol{\int e^x \cos x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C}$$

ですから

$$I=\left[x\cdot\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\pi\cdot\frac{e^{\pi}}{2}(0+1)-\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi}e^x\sin x dx-\int_0^{x}e^x\cos x dx\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}(-e^{\pi}-1)=\frac{\pi e^{\pi}-e^{\pi}-1}{2}$$

(答) $\dfrac{\pi e^{\pi}-e^{\pi}-1}{2}$

(注) 何も x と $e^x\sin x$ に分けなければならないというものではありません。e^x と $x\sin x$ としてもいいし，$\sin x$ と xe^x にしてもよいのです。やってみてください。

*　*　*

◆ 次は，かなり難しい問題です。

練習 4. $ab\neq 0$ であるとき

$$I_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{ax}\cos bx dx$$

とすれば，無限数列 $\{I_n\}$ は等比数列をなすことを示せ。ただし，n は自然数で

$$x_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}$$

とする。 (宇都宮大)

(解) 部分積分法により

$$I_n=\frac{1}{a^2+b^2}\Big[e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)\Big]_{xn}^{xn+1}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax_{n+1}}(a\cos bx_{n+1}+b\sin bx_{n+1})-e^{ax_n}(a\cos bx_n+b\sin bx_n)\}$$

しかるに

$$\cos bx_n=\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi=0$$

$$\sin bx_n=\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi=-\cos n\pi=(-1)^{n-1}$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{1}{a^2+b^2}(-1)^n b(e^{ax_{n+1}}+e^{ax_n})$$

ところが

$$ax_{n+1}=a\left\{(n+1)-\frac{1}{2}\right\}\frac{\pi}{b}=ax_n+\frac{a}{b}\pi$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{(-1)^n b}{a^2+b^2}(e^{\frac{a}{b}\pi}+1)e^{ax_n}$$

$$=\frac{(-1)^n b}{a^2+b^2}(e^{\frac{a}{b}\pi}+1)e^{-\frac{a\pi}{2b}}\cdot e^{\frac{a\pi}{b}n}$$

ゆえに，$\{I_n\}$ は公比 $-e^{\frac{a}{b}\pi}$ の等比数列をなす。

(注) こうしてみると $\int e^{ax}\sin x dx$ の計算が抵抗なくできることがいかに大切かわかるでしょう。では，もう1つ：――

練習 5. 関数 $f_n(x)\ (n=0,1,2,\cdots\cdots)$ を

$$f_0(x)=e^x\sin x,\quad f_n(x)=\int_{\frac{\pi}{4}n}^{x} f_{n-1}(t)dt$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ によって定義する。

$$f_n(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}n\right)$$

であることを証明せよ。 (京都工繊大)

(ヒント) **数学的帰納法** でやるのが定石でしょう。それには部分積分法を使って

$$\int e^x\sin(x+\alpha)dx=\frac{1}{\sqrt{2}}e^x\sin\left(x+\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

を証明するのです。あとはキミがやる!!

① 無理関数の積分法

1 回目 年 月 日
2 回目 年 月 日
3 回目 年 月 日

◈根号の中が3次や4次のものは積分できません。だ円積分といわれるもの。しかし，高校でやる体(てい)のものではない。

◆ 無理関数の積分法は大きく分けて２つになります。第１は根号内が１次式のとき，第２は２次式のときです。このほかに，置換積分してやる場合もありますが，それは，いわば，本質的なものではないのです。

では，まず第１の場合から：——

第１は根号内が１次のときです。例えば，

練習 1. $\int\sqrt{x}\,dx$ を求めよ。

(解) 与式$=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ （Cは積分定数）

練習 2. $I=\int\sqrt{3x+2}\,dx$ を求めよ。

(解) 1. $3x+2=t$ とおくと

$3dx=dt$

$\therefore\ I=\int\sqrt{t}\cdot\dfrac{dt}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ ……答

(解) 2. $\sqrt{3x+2}=t$ とおくと

$3x+2=t^2$

$\therefore\ 3dx=2tdt$

$\therefore\ dx=\dfrac{2}{3}tdt$

$\therefore\ I=\int t\cdot\dfrac{2}{3}tdt=\dfrac{2}{3}\int t^2dt$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{2}{9}(\sqrt{3x+2})^3+C$

$=\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ ……答

練習 3. $I=\int\sqrt[3]{5-4x}\,dx$ を求めよ。

(解) 1. $5-4x=t$ とおくと

$-4dx=dt$

$\therefore\ I=\int\sqrt[3]{t}\cdot\dfrac{dt}{-4}$

$=-\dfrac{1}{4}\int t^{\frac{1}{3}}dt$

$=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$

$=-\dfrac{3}{16}(5-4x)^{\frac{4}{3}}+C$

$=-\dfrac{3}{16}(5-4x)\sqrt[3]{5-4x}+C$

……答

(解) 2. $\sqrt[3]{5-4x}=t$ とおくと

$5-4x=t^3$

$\therefore\ -4dx=3t^2dt$

$\therefore\ I=\int t\cdot\left(-\dfrac{3}{4}t^2\right)dt$

$=-\dfrac{3}{4}\int t^3dt$

$=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{t^4}{4}+C$

$=-\dfrac{3}{16}(5-4x)\sqrt[3]{5-4x}+C$

……答

練習 4. $I=\int\dfrac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}dx$ $(a>0)$

を求めよ。

(解) $\dfrac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{(x+a)-x}$

$=\dfrac{1}{a}(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})$

$\therefore\ I=\dfrac{1}{a}\left\{\dfrac{2}{3}(x+a)\sqrt{x+a}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right\}+C$

$=\dfrac{2}{3a}\{(x+a)\sqrt{x+a}+x\sqrt{x}\}+C$

……答

* * *

◆ 次は，根号内が2次式のときです。これは3つに場合分けされます。すなわち，それは

$$\sqrt{a^2-x^2},\quad \sqrt{x^2+a^2},\quad \sqrt{x^2-a^2}$$

の積分にもっていけるからです。

練習 5. $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ を求めよ。

(ヒント) ここでは，

$$\boldsymbol{x=2\cos\theta}\quad \left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおきますと，

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4\sin^2\theta}=2\sin\theta$$

$$\therefore\quad I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2(-\sin\theta)}{2\sin\theta}d\theta=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=-\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$$

答 $\frac{\pi}{6}$

* * *

◆ このように，一般に，

$\sqrt{a^2-x^2}$ の入った積分は

$x=a\cos\theta$ または $x=a\sin\theta$ とおく

とよいのです。

練習 6. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(ヒント) $x=\tan\theta$ とおいてみますと

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2\theta+1}=\sqrt{\sec^2\theta}=|\sec\theta|$$

これでは絶対値記号があってうまくない。

$$\boldsymbol{x=\tan\theta}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

としておけばいいでしょう。このとき

$$dx=\sec^2\theta d\theta$$

ですから

$$I=\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta}=\int\sec\theta d\theta=\cdots\cdots$$

$$=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+C\quad(C\text{は定数})$$

これでできたわけです。これを x で表すのはべつにめんどうなし!!

しかし，次のほうが簡単です。それは

$$\boldsymbol{x+\sqrt{x^2+1}=t}$$

とおくのです。

そうすると，

$$x^2+1=(t-x)^2$$

$$\therefore\quad 2tx=t^2-1$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$\therefore\quad I=\int\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}dt=\int\frac{t^2+1}{t(t^2+1)}dt$$

$$=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$$

$$=\log|x+\sqrt{x^2+1}|+C\quad\cdots\cdots\text{答}$$

一般に，

$\sqrt{x^2+A}$ の入った積分は

$x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく

ほうが三角関数を使うよりラクにいきます。

では，もう1つ：——

練習 7. $I=\int\sqrt{x^2-1}dx\ (x>1)$ を求めよ。

(ヒント) これは，

$$\boldsymbol{x=\sec\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおいてみますと

$$I=\int\sqrt{\tan^2\theta}\cdot\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=\int\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

これはできますね。しかし，それよりは

$x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおきますと

$$I=\int\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})+C$$

あるいは $\sqrt{x^2-1}=x+mt$ とおいてみますと

$$2mtx=-m^2t^2-1$$

$$\therefore\quad (mt+x)dt=-tdx$$

としてやることもできます。これはキミにやってもらうとしましょう。このようにいろいろな考え方があるものです。

◑ 積分 $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ の扱い方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

根号内が2次式であるときの積分は3つに分けられます。その型をよくオボエ，これを何度も練習するのがコツです。

◆ この積分は微積の中でも，特にめんどうなものです。まず，予備練習から：——

ax^2+bx+c において平方を完成するとは何のことであったか。それは，

$$ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

でしたね。具体的には

≪$x^2+4x+10$ において平方を完成せよ≫

$$x^2+4x+10=(x+2)^2+6$$

≪x^2+6x+1 において平方を完成せよ≫

$$x^2+6x+1=(x+3)^2-8$$

といったぐあい。こうして，3つの場合が出てきます。それは

$$a(x+\alpha)^2+\beta$$

において

(i) $a>0,\ \beta>0$
(ii) $a>0,\ \beta<0$
(iii) $a<0,\ \beta>0$

のときです。$a<0,\ \beta<0$ のときは根号内が負になるから考えなくてよいのです。では，積分にいきましょう。

* * *

◆ まず，第1のタイプから：——

練習 1. $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ を求めよ。

(ヒント) 平方を完成するまでもありませんね。(iii)のタイプです。このときには

$x=\cos\theta$ とおく

のが定石。そうすると

$$\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta}$$

オヤ，コレハ困ッタ!! そこで，θ の範囲をきめておくべきだったことがわかります。x は0から1まで変わるのだから，θ は0から $\frac{\pi}{2}$ まででいいだろう。

(解) 1. $x=\cos\theta \quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

とおくと，

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-\sin^2\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-\cos 2\theta)d\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^0=\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots\text{答}$$

(解) 2. $x=\sin\theta\ \left(\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\right)$ とおいてみたらどうでしょう。

$$I=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2\theta)d\theta=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

当然のことながら結果は同じです。

練習 2. $I=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx$ を求めよ。

(ヒント) $I=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx$ と変形して $x-1=\cos\theta$ とおけばよいハズ。

答 $\frac{\pi}{2}$

* * *

◆ 第2のタイプは：――

練習 3. $I=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ。

ヒント　ともかく根号がとれるように，つまり x^2+1 が完全平方になるように置換したいのです。1つの方法は

$x=\tan\theta$ とおく

ことです。x は0から1までの間だから，

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ でもいいし，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ としてもいいことはもちろんです。

さて $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$x^2+1=\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$

ですから

$$\sqrt{x^2+1}=\sec\theta,\quad dx=\sec^2\theta d\theta$$

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\cdot\sec^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos^4\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}$$

$\sin\theta=t$ とおくと

$$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{(1-t^2)^2}$$ となって……

あるいは，一般に

$$\int\frac{d\theta}{\cos^n\theta}=\frac{\sin\theta}{(n-1)\cos^{n-1}\theta}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{d\theta}{\cos^{n-2}\theta}$$

であることを使って

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}=\left[\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\left[\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\tan\frac{3\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}$$ ……答

練習 4. $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

を示せ。Cは積分定数。

ヒント　いちばん簡単なのは右辺を微分することですが，なるべく練習としては左辺から右辺を導きたいところだ。練習のつもりでぜひやってください。

*　*　*

◆ 第3のタイプは：――

練習 5. $I=\int\sqrt{x^2-1}dx$ を求めよ。

ヒント　これは(ii)のタイプで

$x=\sec\theta$ とおく

のが定石です。つまり

$$x^2-1=\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$$

$$dx=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\therefore\quad I=\int|\tan\theta|\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

となってできるわけ。結果は

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})+C$$

（Cは積分定数）

*　*　*

◆ 以上をまとめると，

$\sqrt{1-x^2}$ のタイプ ―― $x=\cos\theta$ とおく

$\sqrt{x^2+1}$ のタイプ ―― $x=\tan\theta$ とおく

$\sqrt{x^2-1}$ のタイプ ―― $x=\sec\theta$ とおく

のが定石。しかし，細かいこととなるといろいろあります。

例えば，

$\sqrt{x^2+a}$ のタイプのものは

$x+\sqrt{x^2+a}=t$ とおく

ほうが簡単にいくことが多いとか，そのほか，いろいろな置換法があるからです。しかし，あまりめんどうなことを覚える必要もないでしょう。

では，もう1つ：――

練習 6. 不定積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

を導け。

⑪ 対数関数の積分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆対数関数の積分は多くの場合，部分積分の練習場です。されば，キミはそれに徹して練磨しなければならない!!

◆ 対数関数の入った関数の積分をやるのが目的です。この種の計算では **部分積分法**

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

が主役です。では，ともかく，これを：——

練習 1. $I=\int \log x\,dx$ を求めよ。（信州大）

（解） $I=\int 1\cdot\log x\,dx$

$=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\log x-x+C$

答 $x\log x-x+C$

練習 2. $I=\int x\log x\,dx$ を求めよ。（埼玉大）

（解） $I=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

$=\frac{x^2}{4}(2\log x-1)+C$

答 $\frac{x^2}{4}(2\log x-1)+C$

練習 3. $I=\int x^n\log x\,dx$ を求めよ。ただし，nは自然数である。

（解） $I=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$

$=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\{(n+1)\log x-1\}+C$

答 $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\{(n+1)\log x-1\}+C$

* * *

◆ では，前問でnが負のときどうなるでしょうか。それが次の問題です。

練習 4. $I=\int\frac{\log x}{x^n}dx\cdot(n\neq1)$ を求めよ。

（解） $I=\int x^{-n}\log x\,dx$

$=\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\log x-\int\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\log x-\frac{1}{(-n+1)^2}x^{-n+1}+C$

$=\frac{x^{-n+1}}{(-n+1)^2}\{(-n+1)\log x-1\}+C$

……答

練習 5. $I=\int\frac{\log x}{x}dx$ を求めよ。

（解） $I=(\log x)^2-\int(\log x)\frac{1}{x}dx$

$=(\log x)^2-I$

$\therefore\ I=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$ ……答

* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみることにしましょう。

練習 6. $I=\int(\log x)^2dx$ を求めよ。

（ヒント） $I=\int 1\cdot(\log x)^2dx$

$=x(\log x)^2-\int x\cdot2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\cdots\cdots$

答 $x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C$

（注） こうしてみると，部分積分法の有効であることがわかるでしょう。なお，結果は微分して，正しいかどうか確かめるとよいでしょう。

練習 7. $\dfrac{\int_0^2 x\log(x+1)dx}{\int_0^2 \log(x+1)dx}$ の値を求めよ。

（福井大）

（解） 分子

$$=\int_0^2 x\log(x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log(x+1)\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{x+1}dx$$

$$=2\log 3-\frac{1}{2}\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=2\log 3-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\log(x+1)\right]_0^2$$

$$=2\log 3-\frac{1}{2}(2-2+\log 3)$$

$$=\frac{3}{2}\log 3$$

分母$=\int_0^2\log(x+1)dx$

$$=\Big[x\log(x+1)\Big]_0^2-\int_0^2\frac{x}{x+1}dx$$

$$=2\log 3-\int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=2\log 3-\Big[x-\log(x+1)\Big]_0^2$$

$$=3\log 3-2$$

$\therefore$ 与式$=\dfrac{\frac{3}{2}\log 3}{3\log 3-2}$

$$=\frac{3\log 3}{2(3\log 3-2)}$$ ……答

練習 8. 対数の底を e とする。

(1) $x\geqq 4$ のとき $\log x<\sqrt{x}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{-2}\log x dx$ を求めよ。

（東京医歯大）

（ヒント） (1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x$ とおきますと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$$=\frac{x-4}{2x(\sqrt{x}+2)}\geqq 0$$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加です。そして，

$$f(4)=2-\log 4=\log e^2-\log 4>0$$

ですから　$f(x)>0$

$\therefore\ \sqrt{x}>\log x$

(2) (1)により $n\geqq 4$ のとき

$$0<\log n<\sqrt{n}$$

$$\therefore\ 0<\frac{\log n}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

となります。

いよいよ，本番の(3)です。

(3) $I_n=\displaystyle\int_1^n x^{-2}\log x dx$

とおきますと，

$$I_n=\left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^n-\int_1^n\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{\log n}{n}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n$$

$$=-\frac{\log n}{n}-\frac{1}{n}+1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\log n}{n}-\frac{1}{n}+1\right)$$

(2)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$，また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore$ 与式$=1$ ……答

（注） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{-2}\log x dx$ を $\displaystyle\int_1^\infty x^{-2}\log x dx$ と書いて，**異常積分**（いじょうせきぶん）ということがあります。しかし，これは高校の範囲ではありませんから，ご安心あれ。

では，もう1つ：――

練習 9. $\displaystyle\int\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$ を求めよ。

（ヒント） 部分積分を使えばいいでしょう。

すなわち

与式$=2\sqrt{1+x}\log(1+x)$

$$-\int 2\sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$=$……

$$=2\sqrt{x+1}\{\log(x+1)-2\}+C$$

……答

⑩ 指数関数の積分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数関数だけなら積分もラクだ。しかし，他のものと結びつくとめんどうになることが多いもの。あなどるべからず。

◆ 指数関数 e^x は微分しても積分しても e^x なのですからめんどうはありませんが，他の関数とコンビになると，そうもいかない。このセクションでは e^x の入った積分をやるのが目的です。では：――

■練習 1. $\int e^{mx}dx$ を求めよ。ただし，$m \neq 0$.

（解） $mx=t$ とおくと

$$mdx=dt \qquad \therefore \quad dx=\frac{1}{m}dt$$

$$\therefore \quad \int e^{mx}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{m}dt=\frac{1}{m}e^t+C$$

$$=\frac{1}{m}e^{mx}+C$$

（Cは積分定数）

（注） $m \neq 0$ という条件がなかったらどうなりますか？ 場合を分ける必要があります。つまり，$m=0$ ならば

$$\int e^{mx}dx=\int 1dx=x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

■練習 2. $\int \frac{5e^{3x}+3}{e^x}dx$ を求めよ。

（解） $\int \frac{5e^{3x}+3}{e^x}dx=\int(5e^{2x}+3e^{-x})dx$

$$=5\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+3\cdot\frac{1}{-1}e^{-x}+C$$

$$=\frac{5}{2}e^{2x}-3e^{-x}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

■練習 3. $\int(e^x+e^{-x})^3dx$ を求めよ。

（ヒント） $(e^x+e^{-x})^3$

$$=e^{3x}+3e^{2x}e^{-x}+3e^xe^{-2x}+e^{-3x}$$

$$=e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}$$

としてやる!!

*　*　*

◆ では，次にやや総合的なものをやるとしましょう。

■練習 4. $\int xe^xdx$ を求めよ。

（解） $\int xe^xdx=xe^x-\int 1\cdot e^xdx$

$$=xe^x-e^x+C$$

$$=(x-1)e^x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

■練習 5. $\int \frac{x}{e^{2x}}dx$ を求めよ。

（解） $\int \frac{x}{e^{2x}}dx=\int xe^{-2x}dx$

$$=x\frac{e^{-2x}}{-2}-\int 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}dx$$

$$=-\frac{xe^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}+C$$

$$=-\frac{xe^{-2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}+C$$

$$=-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

■練習 6. $I=\int e^x\sin x dx$, $J=\int e^x\cos x dx$

とするとき，

$$I+J=e^x\sin x,\quad I-J=-e^x\cos x$$

を証明せよ。

（ヒント） $I=\int e^x\sin x dx$

$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$$

$$=e^x\sin x-J$$

$$\therefore \quad I+J=e^x\sin x$$

他も同様ですから自分でやってください。

*　*　*

◆ では，やや総合的なものをやってみましょう。

練習 7. 任意の実数 x に対して，

$\int_0^x f(t)e^{-t}dt=x^2$ であるとき，

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。　（近畿大）

（解） (1) $\int_0^x f(t)e^{-t}dt=x^2$

の両辺を x で微分すれば

$$f(x)e^{-x}=2x$$

$$\therefore\quad f(x)=2xe^x$$

(2) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2xe^x dx$

$$=\Big[2xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 2e^x dx$$

$$=2e-\Big[2e^x\Big]_0^1=2e-(2e-2)=2$$

練習 8. 関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\leqq x\leqq 1)\\ 2-x & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$

で定義されているとき，次の問に答えよ。

(1) $S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}dx$ を求めよ。

(2) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x}dx$ を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

(3) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

（九大）

（ヒント） (1) 題意により

$$S_0=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}dx$$

$$=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$+\Big[-(2-x)e^{-x}\Big]_1^2-\int_1^2 e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^1+\frac{1}{e}+\Big[e^{-x}\Big]_1^2$$

$$=\cdots\cdots=\frac{(e-1)^2}{e^2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

これはべつにめんどうではありませんね。

(2) これはちょっと気が重い。しかし，$x-2n=t$ とおいてみますと，

$$S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x}dx$$

$$=\int_0^2 f(t)e^{-t-2n}dt$$

$$=e^{-2n}\int_0^2 f(t)e^{-t}dt$$

$$=e^{-2n}S_0=e^{-2n}\cdot\frac{(e-1)^2}{e^2}$$

$$=\frac{(e-1)^2}{e^{2n+2}}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

となって，案外ラクでした。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ は初項 $\frac{(e-1)^2}{e^2}$，公比 $e^{-2}(<1)$ の無限等比数列の和ですから，公式から

$$\frac{(e-1)^2}{e^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{(e-1)^2}{e^2-1}=\frac{e-1}{e+1}$$

答 $\dfrac{e-1}{e+1}$

練習 9. $\int_{\log\frac{1}{2}}^{\log 2}|e^x-3+2e^{-x}|dx$

を計算せよ。ただし，対数は自然対数とする。　（大阪府大）

（ヒント） $f(x)=e^x-3+2e^{-x}$

$$=e^{-x}(e^{2x}-3e^x+2)$$

$$=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2)$$

ですから，$e^x\leqq 1$ すなわち $x\leqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ で，$1\leqq e^x\leqq 2$ すなわち $0\leqq x\leqq \log 2$ のとき $f(x)\leqq 0$ です。

$$\therefore\quad \text{与式}=\int_{-\log 2}^{0}(e^x-3+2e^{-x})dx$$

$$-\int_0^{\log 2}(e^x-3+2e^{-x})dx$$

$$=\Big[e^x-3x-2e^{-x}\Big]_{-\log 2}^{0}$$

$$-\Big[e^x-3x-2e^{-x}\Big]_0^{\log 2}$$

$$=-2+e^{-\log 2}+e^{\log 2}$$

$$=-2+\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}$$

答 $\dfrac{1}{2}$

○定積分の近似値

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆定積分の近似値を求めることは応用上大切でひとつの分野を形成しているほどです。しかし，微積でやるのは，ホンの入口だけデス。

◆ 定積分の近似値を求めることは応用上きわめて大切です。しかし，高校でやるのはそのごく一部，しかも入試に出るのはまた限られた部分です。ここでは，関連する問題をいくつかやってみるとしましょう。イヤガル人が多いが，だれでも一度はやる必要があるのです。では：——

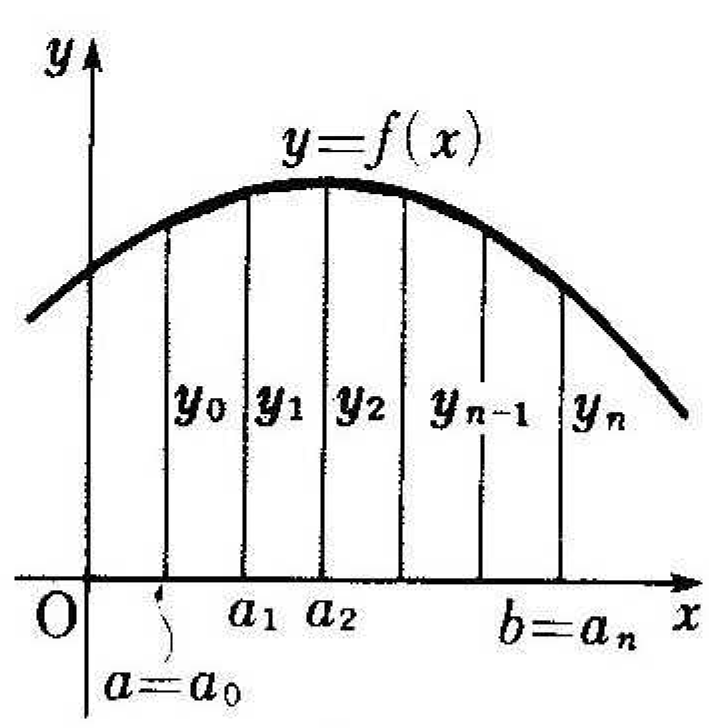
＊　＊　＊

◆ まず，もっとも簡単なのは **台形公式** といわれるもの。右の図に示すように，

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

を求めるのに，区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点を

$$a=a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_n=b$$



とします。それに対する $y=f(x)$ の値をそれぞれ $y_0,\ y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n$ とし，

$$h=\frac{b-a}{n}$$

としますと，こうして得られる台形の面積（符号も考慮して）の和で I を近似させることができます。つまり

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \frac{1}{2}(y_0+y_1)h+\frac{1}{2}(y_1+y_2)h$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h$$

したがって，

$$\boldsymbol{I=\frac{h}{2}\{y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1})\}}$$

となります。

これを **台形公式** といいます。では，具体的な問題をやってみましょう。

■練習 1. 0から1までの間を10等分し，台形公式を使って定積分 $\int_0^1 x^2dx$ の近似値を求めよ。

（解）

x	x^2
0.0	0.00
0.1	0.01
0.2	0.04
0.3	0.09
0.4	0.16
0.5	0.25
0.6	0.36
0.7	0.49
0.8	0.64
0.9	0.81
1.0	1.00

$h=0.1$

$$\int_0^1 x^2dx$$

$$=\frac{h}{2}\{y_0+y_{10}+2(y_1+y_2+\cdots+y_9)\}$$

$$=\frac{0.1}{2}\{0.00+1.00+2(0.01+0.04+\cdots\cdots+0.81)\}$$

$$=0.05\times\{1.00+2\times2.85\}$$

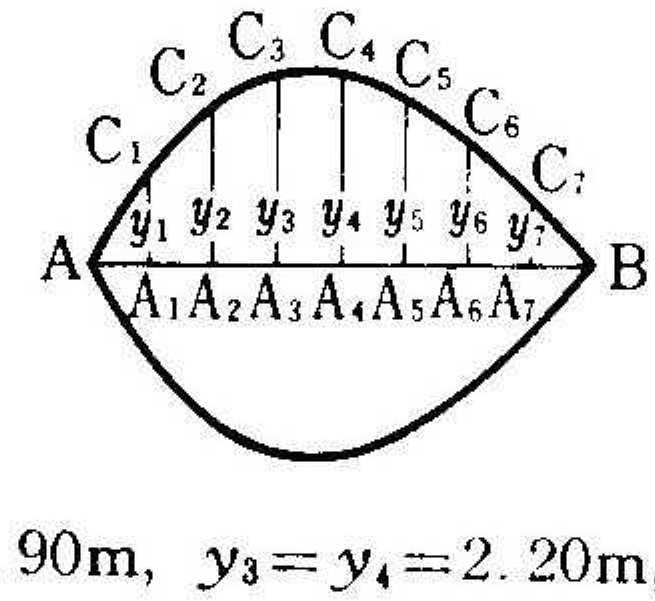
$$=0.335$$ ……答

（注）$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\fallingdotseq 0.333$

ですから，上の近似値はかなりよい値です。

■練習 2. 右の図は船の断面図で，

$AA_1=A_1A_2=\cdots\cdots$
$=A_6A_7=A_7B$
$=1\text{m}$



$y_1=1.20\text{m},\ y_2=1.90\text{m},\ y_3=y_4=2.20\text{m},$
$y_5=2.00\text{m},\ y_6=1.50\text{m},\ y_7=0.80\text{m}$

である。この船の断面積は何 m^2 か。

（武蔵大）

（ヒント）方法は指定されていないから台形公式でやってもよいでしょう。

（解）台形公式によって計算すると，

$$S=\frac{h}{2}\{0+0+2(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_7)\}\times2$$

ここに $h=1(\text{m}),\ y_1=1.20(\text{m}),\ \cdots\cdots$

$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\{2(1.20+1.90+2.20+2.20+2.00$
$+1.50+0.80\}\times 2=23.60(\mathrm{m}^2)$

答　23.6m²

＊　＊　＊

◆ **シンプソンの公式** というのがよく使われます。これは，曲線の弧を線分で代用しないで，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の弧で代用するのです。その結果は

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \frac{h}{3}\{y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{2n-2})\}$$

です。

練習 3. $\int\frac{dx}{x}=\log_e|x|+C$ を利用して $\log_e 2$ の値を小数第3位まで求めよ。ただし分割した小区間の長さを0.25として，シンプソンの公式から計算せよ。　（慶大）

解　$\int_1^2\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^2=\log 2$

であるから $\int_1^2\frac{dx}{x}$ の近似値を求めればよい。

	x	$y=\frac{1}{x}$
0	1.00	1.0000
1	1.25	0.8000
2	1.50	0.6666
3	1.75	0.5714
4	2.00	0.5000

$h=0.25$

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\fallingdotseq\frac{h}{3}\{y_0+y_4+4(y_1+y_3)+2y_2\}$$

$$=\frac{0.25}{3}\{1.0000+0.5000+4(0.8000+0.5714)+2\times 0.6666\}$$
$$=0.6932$$

答　0.693

練習 4. (1)　$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}$ のとき $\lim_{n\to\infty}S_n$ は1つの定積分で表されることを証明しなさい。

(2)　この定積分の下端と上端の間を4等分し，シンプソンの公式を用いて $\lim_{n\to\infty}S_n$ の近似値（小数第3位4捨5入）を求めなさい。　（慶大）

解　(1)　S_n

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{0}{n}}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}S_1=\int_1^2\frac{dx}{x}$$

(2)　$y=f(x)=\frac{1}{x}$ について，区間［1, 2］を4等分すると，その分点は

1, 1.25, 1.5, 1.75, 2

で，y の値はそれぞれ

1, 0.8, 0.6667, 0.5714, 0.5

よって

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\{1+0.5+4(0.8+0.5714)+2\times 0.6667\}$$
$$=0.693\cdots\cdots$$

答　0.69

注　上の2つはまったくといっていいくらい同じですが，解答の形式のちがいを示したのです。

＊　＊　＊

◆ では，あと1問やってみましょう。

練習 5. h が正で小なるとき $\int_{a-h}^{a+h}f(x)dx$ を求めるのに，

$$\frac{h}{3}\{f(a-h)+4f(a)+f(a+h)\}$$

なる近似式がよく使われる。

$f(x)=x^4$ なるときの誤差の絶対値を求めよ。　（立命館大）

ヒント　$\int_{a-h}^{a+h}x^4dx=2a^4h+4a^2h^3+\frac{2}{5}h^5$

また，

$$\frac{h}{3}\{f(a-h)+4f(a)+f(a+h)\}$$
$$=2a^4h+4a^2h^3+\frac{2}{3}h^5$$

から $\frac{4}{15}h^5$ が得られます。

○シンプソンの公式の利用法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆シンプソンの公式などは無理して覚えないとそのまま試験までいってしまう。サア，きょう，いや，今すぐヤルノダ!!

◆ 定積分の近似値を求めるにはいろいろの公式がありますが，受験生としては，次の3つを知っていれば十分です。それは

1. 長方形公式

2. 台形公式

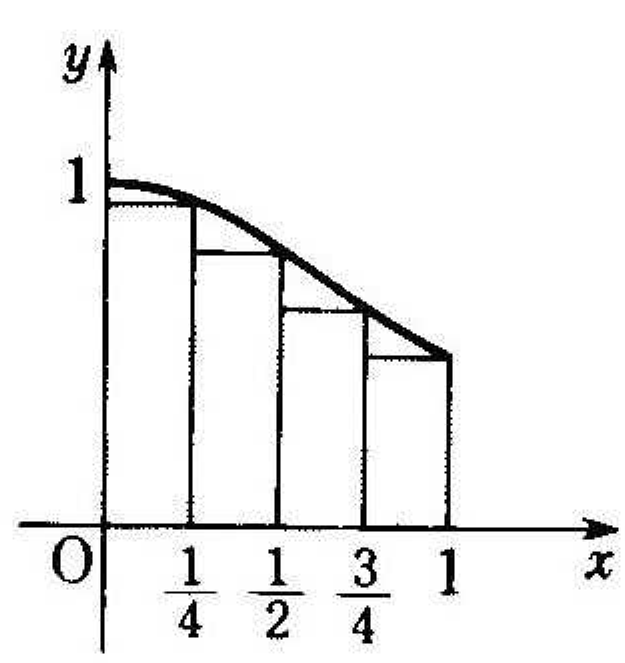
3. シンプソンの公式

です。

*　*　*

◆ では，まず長方形公式から：——

■練習1. 0から1までの区間を4等分し，長方形公式を用いて $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の近似値を求めよ。



（解） ［0, 1］を4等分した点 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 に対する被積分関数の値を y_1, y_2, y_3, y_4 とすると

$$y_1=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{16}{17}\fallingdotseq 0.94118$$

$$y_2=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}=0.8$$

$$y_3=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{25}=0.64$$

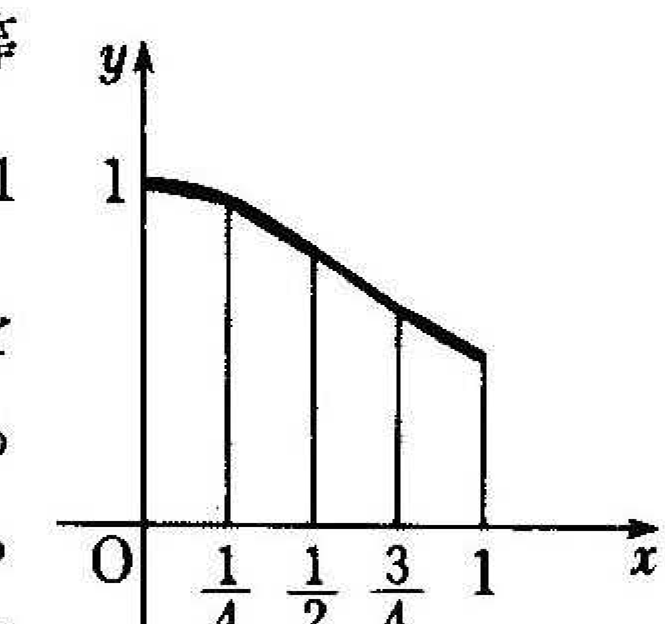
$$y_4=\frac{1}{1+1^2}=0.5$$

で，これを高さとし，横の長さ $\frac{1}{4}$ の長方形4つの和を求めると

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \fallingdotseq \frac{1}{4}\{0.94118+0.8+0.64+0.5\}$$
$$=0.720$$

（注） 区間［0, 1］の4等分点のうち左のほうの4つ 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ を採用して上のように計算しますと 0.845 となって，かなりちがいがあります。長方形公式は，このちがいは問題にしない大まかな値を求めるときに使うものです。なお，0.720 と 0.845 の平均値は 0.783 でかなり正しい値に近いのです。

■練習2. 0から1までの区間を4等分し台形公式を用いて $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の近似値を求めよ。



（解） ［0, 1］を4等分する点 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 で x 軸に垂直な直線を引いて，曲線と交わる点を次々に結んで得られる4つの台形の面積を求めればよい。さて，その台形の面積は順次

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1+0.94118)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0.94118+0.8)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0.8+0.64)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0.64+0.5)$$

で，その和は

$$\frac{1}{8}\{1+2(0.94118+0.8+0.64)+0.5\}$$
$$=\frac{1}{8}(1.5+4.76236)\fallingdotseq 0.783$$

答　0.783

（注） 実は，上の注で示した2つの平均に等しいのです。

*　*　*

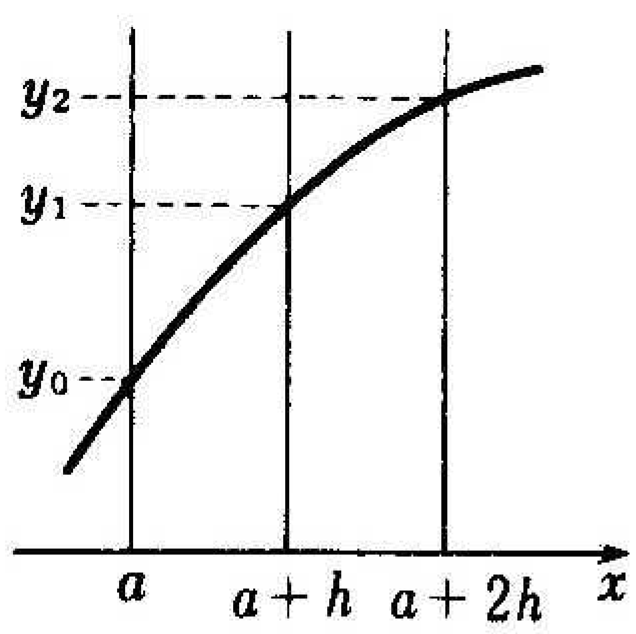
◆ 次が**シンプソンの公式**です。これは，積分区間をいくつかに等分し，それに対応する曲線の弧を y 軸に平行な軸をもつ放物線で近似させるのです。こういっただけでは，ピンとこないでしょう。

そこで，まず，これを：——

≪$y=px^2+qx+r$ の $x=a$，$a+h$，$a+2h$ に対応する値をそれぞれ y_0，y_1，y_2 とするとき

$$I=\int_a^{a+2h} y\,dx$$

を求めよ≫



をやってみましょう。

それは：——

$$I=\int_a^{a+2h}(px^2+qx+r)dx$$

$$=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_a^{a+2h}$$

$$=\frac{p}{3}\{(a+2h)^3-a^3\}$$

$$+\frac{q}{2}\{(a+2h)^2-a^2\}+r\{(a+2h)-a\}$$

$$=\frac{p}{3}(6a^2h+12ah^2+8h^3)$$

$$+\frac{q}{2}(4ah+4h^2)+2rh$$

$$=\frac{h}{3}[(pa^2+qa+r)$$

$$+4\{p(a+h)^2+q(a+h)+r\}$$

$$+\{p(a+2h)^2+q(a+2h)+r\}]$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

≪区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分し，分点を a_0，a_1，……，$a_{2n}=b$ とし，これに対応する $y=f(x)$ の値をそれぞれ y_0，y_1，…，y_{2n} とする。そして小区間の幅を $h\left(=\frac{b-a}{2n}\right)$ とし，区間 $[a_k,\ a_{k+2}]$ の部分の曲線を $y=px^2+qx+r$ で近似させると，対応する積分は次の近似式で与えられる。

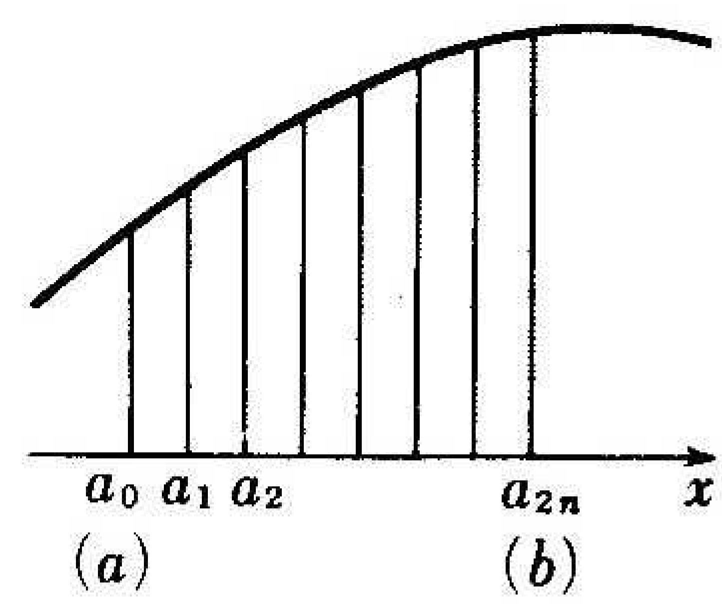
$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\{y_0+y_{2n}$$

$$+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{2n-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{2n-2})\}$$≫

これがシンプソンの公式です。

さて，この証明は次の通り：——



$$\int_a^b f(x)dx$$

$$=\int_{a_0}^{a_2}+\int_{a_2}^{a_4}+\cdots\cdots+\int_{a_{2n-2}}^{a_{2n}}$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

$$+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

$$+\frac{h}{3}(y_4+4y_5+y_6)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

$$=\frac{h}{3}\{y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{2n-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{2n-2})\}$$

Q. E. D.

では，これをやってみませんか。

■練習 3. 0から1までの区間を4等分し，シンプソンの公式を用いて $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の近似値を求めよ。 (京都工繊大)

(解) $[0,\ 1]$ を4等分する点 0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，1 に対する y の値は $y_0=1$，$y_1=0.94118$，$y_2=0.8$，$y_3=0.64$，$y_4=0.5$ であるから

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\{(1+0.5)$$

$$+4\times(0.94118+0.64)+2\times0.8\}$$

$$=0.7854$$

答 0.7854

＊　＊　＊

◑定積分と等式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆定積分に関連した等式は，とかく混乱のもと。
というのも，クイズ的になりがちだからです。
くれぐれもご用心ありたし。

◆ 定積分に関係した等式の証明はみんなにキラワレル分野のひとつです。しかし，コツがわかれば大したこともない。

では，ともかくやってみませんか。

■練習 1. 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

ただし，a，b は定数である。

（ヒント） $f(\times)$ の $\times$ が左辺では $a+b-x$，右辺では x になっていますから，これをおきかえるのがコツ。

（解） $a+b-x=t$ とおくと

$$-dx=dt$$

$$\therefore\quad 左辺=\int_b^a f(t)(-dt)=\int_a^b f(t)dt$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

Q. E. D.

■練習 2. $\displaystyle\int_0^c f(2c-x)dx=\int_c^{2c} f(x)dx$

を証明せよ。

（解） $2c-x=t$ とおきますと

$$-dx=dt$$

$$\therefore\quad 左辺=\int_{2c}^c f(t)(-dt)=-\int_{2c}^c f(t)dt$$

$$=\int_c^{2c} f(x)dx$$

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ 次に，ややめんどうな問題をやってみませんか。

■練習 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

を証明せよ。

（ヒント） 適当な置換をしたときに，

$$f(\sin x)=f(\cos x)$$

になればいいだろう。ところが

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

という関係があったから $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおいてみたらうまくいくのではあるまいか。

（解） $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと $dx=-dt$ だから

$$左辺=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)(-dt)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

Q. E. D.

■練習 4. $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ で連続な関数のとき

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

の成り立つことを証明せよ。　（都立大）

（ヒント） $\sin x$ に変換を施しても $\sin x$ というのだから $x=\pi-t$ とでもしたらどうだろう。

$x=\pi-t$ とおくと　$dx=-dt$

$$\therefore\quad \int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

$$=\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)(-dt)$$

$$=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin t)dt-\int_0^\pi tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin x)dx-\int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

もう，できたね。

＊　＊　＊

◆ では，ややめんどうなものをやってみませんか。

練習 5. (1) 恒等式

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx$$

を証明せよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$ を計算せよ。（慶大）

（解） (1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx$

$$=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ところが $x=-t$ とおくと　$dx=-dt$

$$\therefore\ \int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)(-dt)$$

$$=\int_{0}^{a} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-x)dx$$

$$\therefore\ \int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx$$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\right\}dx$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi-2}{8}$$

答　$\dfrac{\pi-2}{8}$

練習 6. n を 0 または正の整数とし，

$$I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$$

とおくとき，次の関係を証明せよ。

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のときの　$\tan x<\dfrac{4}{\pi}x$

(2) $n>0$ とき　$0<I_n<\dfrac{\pi}{4(n+1)}$

(3) $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$　（徳島大）

（ヒント） (1) $f(x)=\tan x-\dfrac{4}{\pi}x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおいて $f(x)<0$ を証明すればよいでしょう。さて $f'(x)=\sec^2 x-\dfrac{4}{\pi}$ ですが，考える範囲では $\sec^2 x$ は増加関数で，しかも $f'(0)<0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$ ですから，$f'(x)$ はこの範囲で負から正に変わり，しかも $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ ですから $f(x)<0$，かくて，予定通りです。

(2) $n\geqq 1$ のとき，

$$\tan x<\frac{4}{\pi}x$$

$$\therefore\ \tan^n x<\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n$$

$$\therefore\ 0<\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx<\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4^n}{\pi^n}x^n dx=\frac{\pi}{4(n+1)}$$

となって，事もなし。

(3) $\displaystyle I_n+I_{n+2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x dx$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x dx$$

$$=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$$

(4) これはちょっと難しいよ。

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$$

において $n=2k$ とおくと

$$I_{2k}+I_{2k+2}=\frac{1}{2k+1}$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k}+I_{2k+2})$$

$$=(I_0+I_2)-(I_2+I_4)+(I_4+I_6)-\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(-1)^n(I_{2n}+I_{2n+2})$$

$$=I_0+(-1)^n I_{2n+2}$$

$\longrightarrow I_0\ (n\longrightarrow\infty)$　((2)による)

そして，これは $\dfrac{\pi}{4}$ に等しい。

◑ 定積分の入った不等式

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆定積分はできなくても，その限界がわかればいろいろと有用なことが多いもの。その実用性が入試の中にも侵入してくるのだ。

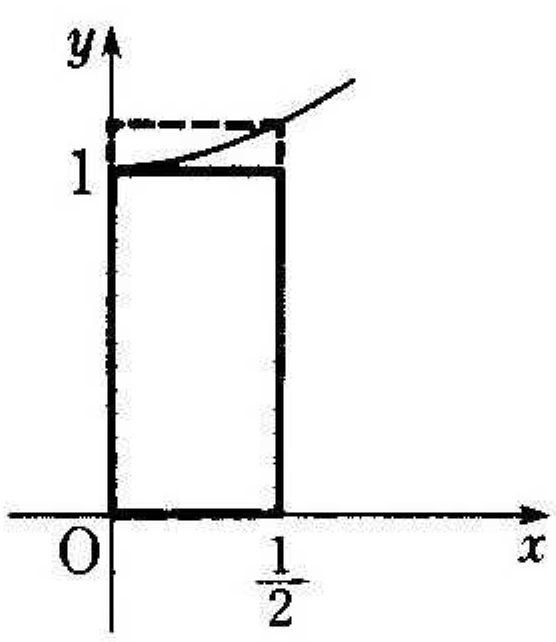
◆ 定積分を使って数列の和の限界をきめることは (p.214) でやります。ここでは，定積分の値の限界が目的です。

では，まず，これを：——

練習 1. 不等式 $\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx<2-\sqrt{2}$

を証明せよ。

ヒント　$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ のグラフをだいたいかいてみますと右のようになります。



さて，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ は陰影部分の面積 S を表しています。これが $\frac{1}{2}$ より大で $2-\sqrt{2}$ より小であることをいえばいいわけ。

ところで S より小で面積 $\frac{1}{2}$ のものとは何か。いうまでもない。太い実線で囲んだ長方形です。また，S より大で $2-\sqrt{2}$ の面積をもつものは何か。図の，破線で囲んだ長方形ならつごうがいいのだが……

計算してみると

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$$

まずいな。$2-\sqrt{2}$ にはならない。しかし，

わけだ。さて，それはどうだ？

$$\frac{2\sqrt{15}}{15}<\frac{2\cdot4}{15}=0.53\cdots<0.58\cdots=2-\sqrt{2}$$

なるほど予定通りうまくいった!!

(注) さて，上のヒントにもとずいて，解答をキチンとかいてみること，その上で次へ。

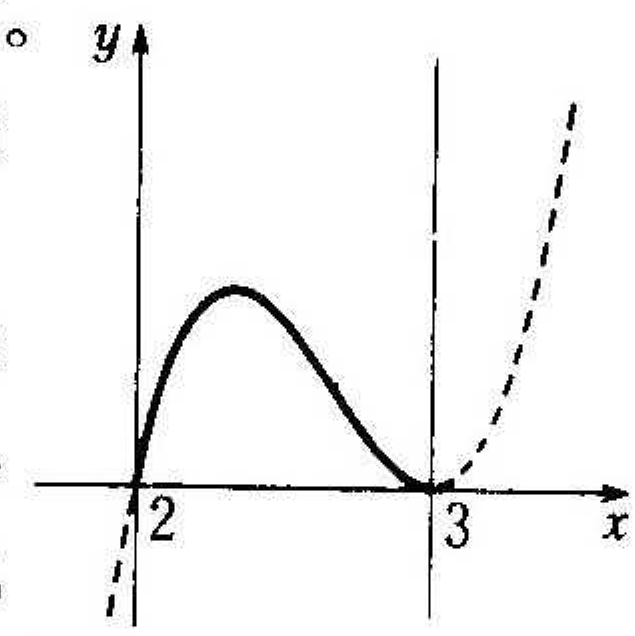
練習 2. 不等式

$$0<\int_2^3\sqrt[3]{2(x-3)^2(x-2)}\,dx<\frac{2}{3}$$

を証明せよ。

ヒント　$y=\sqrt[3]{2(x-3)^2(x-2)}$ の変化を調べるには，この無理関数のグラフをかくほどのこともあるまい。$y=(x-3)^2(x-2)$ の変化を調べてみれば十分だ。

そして，それは右の通り!!



さては $[2,\ 3]$ において最小値は 0，これで，証明すべき不等式の左半分は終わったなあ。

次は，$[2,\ 3]$ における最大値はどうです？

$$f(x)=(x-3)^2(x-2)$$

とおくと

$$f'(x)=(x-3)^2\cdot1+2(x-3)\cdot(x-2)$$
$$=(x-3)(3x-7)$$

これから $x=\frac{7}{3}$ で最大値をとり，したがって $\sqrt[3]{2(x-3)^2(x-2)}$ の最大値は $\frac{2}{3}$ であることがわかります。もはや，右半分もできてしまったわけだ。

練習 3. 不等式

$$\frac{\sqrt{6}}{9}<\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{(x^2+6)(9-2x)}}<\frac{2}{7}$$

を証明せよ。

ヒント　$y=\frac{1}{\sqrt{(x^2+6)(9-2x)}}$ の変化を調べるまでもない。$y=(x^2+6)(9-2x)$ をまず調べてみるのだ!!

◆ では，ややめんどうな問題を：——

練習 4. 次の不等式

$$\left\{\int_a^b f(x)dx\right\}^2 \leqq (b-a)\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

を証明せよ。ただし，$b>a$. （佐賀大）

ヒント これは，一種の暗記物。オボエテいなくてはとてもできません。理屈をいわずにオボエル!!

解 $\{f(x)-t\}^2 \geqq 0$ であるから

$$\int_a^b \{f(x)-t\}^2 dx \geqq 0$$

$$\therefore \int_a^b [\{f(x)\}^2 - 2\{f(x)\}t + t^2]dx \geqq 0$$

$$\therefore (b-a)t^2 - 2\left\{\int_a^b f(x)dx\right\}t + \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \geqq 0$$

$b>a$ で，t のすべての値について成り立つから，判別式 $\leqq 0$ である。したがって，判別式をDとすると

$$\frac{D}{4} = \left\{\int_a^b f(x)dx\right\}^2 - (b-a)\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \leqq 0$$

$$\therefore \left\{\int_a^b f(x)dx\right\}^2 \leqq (b-a)\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

Q. E. D.

注 上の不等式を一般化したのが次のシュワルツ（Schwarz）の不等式です。これもいわば暗記物です。

練習 5. $a<b$ のとき，

シュワルツの不等式

$$\left\{\int_a^b \boldsymbol{f(x)g(x)dx}\right\}^2 \leqq \int_a^b \{\boldsymbol{f(x)}\}^2 \boldsymbol{dx} \cdot \int_a^b \{\boldsymbol{g(x)}\}^2 \boldsymbol{dx}$$

を証明し，これを用いて次の不等式を導け。

$$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \geqq 1$$

ただし，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において，連続でつねに正であるとする。

解 $\{\lambda f(x)+\mu g(x)\}^2 \geqq 0$ であるから，$a<b$ を考慮して

$$\int_a^b \{\lambda f(x)+\mu g(x)\}^2 dx \geqq 0$$

$$\therefore \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\lambda\mu + \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)\mu^2 \geqq 0$$

λ, μ のすべての実数値について成り立つから判別式をDとして

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \leqq 0$$

$$\therefore \left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

Q. E. D.

次に，上の不等式において $a=0$, $b=1$ とおき，$f(x)$, $g(x)$ の代わりに，それぞれ $\sqrt{f(x)}$, $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ とおくと

$$\left\{\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx\right\}^2 \leqq \int_0^1 (\sqrt{f(x)})^2 dx \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2 dx$$

$$\therefore 1 \leqq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

Q. E. D.

* * *

◆ シュワルツ（あるいはシュヴァルツ）の不等式は特殊化することによっていろいろな不等式を導くことができます。例えば，

$$a=-1,\ b=1,$$

$$f(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{\sqrt{ax+b}} \quad (0<a<b)$$

とおけば

$$\left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}\right)^2 < \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{dx}{ax+b}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{dx}{ax+b} > \frac{4}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$$

が得られる，といったぐあいです。

絶対値のついた積分と蛇足

◈絶対値のついた積分は基礎解析で十分にやってあるハズだが，微分・積分ではただ三角関数や指数関数が入ってくるだけのこと!!

◆ さっそくながら1例を：——

練習 1. $f(a)=\int_0^1|x-a|dx$ のグラフをかけ。

(解) $a<0$ のとき

$$f(a)=\int_0^1(x-a)dx=-a+\frac{1}{2}$$

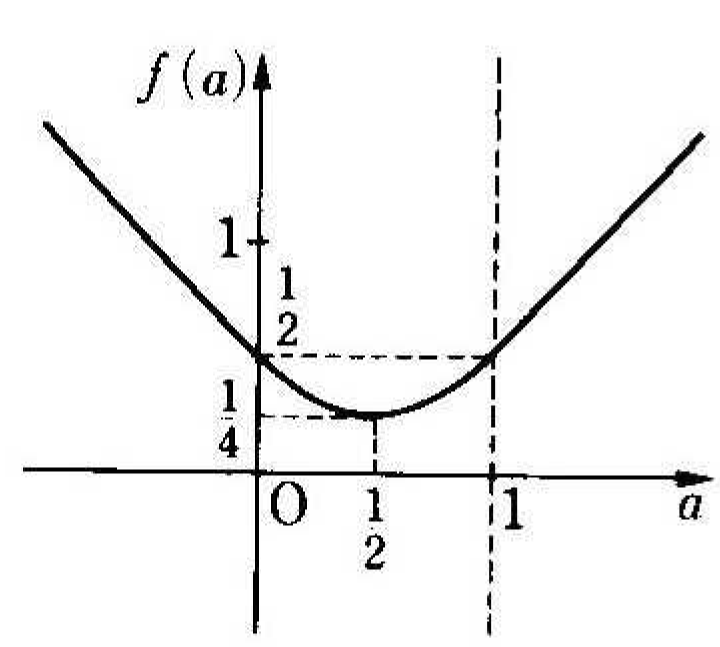
$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$f(a)=\int_0^a(-x+a)dx$

$$+\int_a^1(x-a)dx=a^2-a+\frac{1}{2}$$

$1<a$ のとき

$$f(a)=\int_0^1(-x+a)dx=a-\frac{1}{2}$$

かくて，結果は右のようになります。



練習 2. $f(a)=\int_{a-1}^a|t|dt$ のグラフをかけ。

(解) $a<0$ のとき

$$f(a)=\int_{a-1}^a(-t)dt=-a+\frac{1}{2}$$

$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$f(a)=\int_{a-1}^0(-t)dt+\int_0^a tdt=a^2-a+\frac{1}{2}$$

$1<a$ のとき

$$f(a)=\int_{a-1}^a tdt=a-\frac{1}{2}$$

オヤ，コノ結果ハ上トオナジデハナイカ，ココデ数学ズキノ人ハガクゼントシテオドロクヨウデナケレバナラナイ，シカシ，基礎解析デハ手ニ負エナイコトナノデアル。トコロガ微分・積分デハ置換シテコレヲ超エルコトガデキルノダ!!

つまり

$$f(a)=\int_0^1|x-a|dx$$

において $x-a=t$ とおくと

$$dx=dt$$

$$\therefore\quad f(a)=\int_{-a}^{1-a}|t|dt$$

$a=1-b$ とおくと

$$\int_{-a}^{1-a}|t|dt=\int_{b-1}^{b}|t|dt$$

なるほど，そうだったのか。

では，もう1つ：——

練習 3. $f(\theta)=\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}|t|dt$ のグラフをかけ。$(0\leqq\theta<2\pi)$

(ヒント) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$f(\theta)=\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\sin\theta}^{\cos\theta}=\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

デスネ。

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$f(\theta)=\int_{\sin\theta}^0 tdt+\int_0^{\cos\theta}(-t)dt$$

$$=-\frac{\sin^2\theta}{2}-\frac{\cos^2\theta}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ のとき

$$f(\theta)=\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}(-t)dt=-\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$\frac{3\pi}{2}\leqq\theta<2\pi$ のとき

$$f(\theta)=\int_{\sin\theta}^0(-t)dt+\int_0^{\cos\theta}tdt=\frac{1}{2}$$

もういいでしょう。