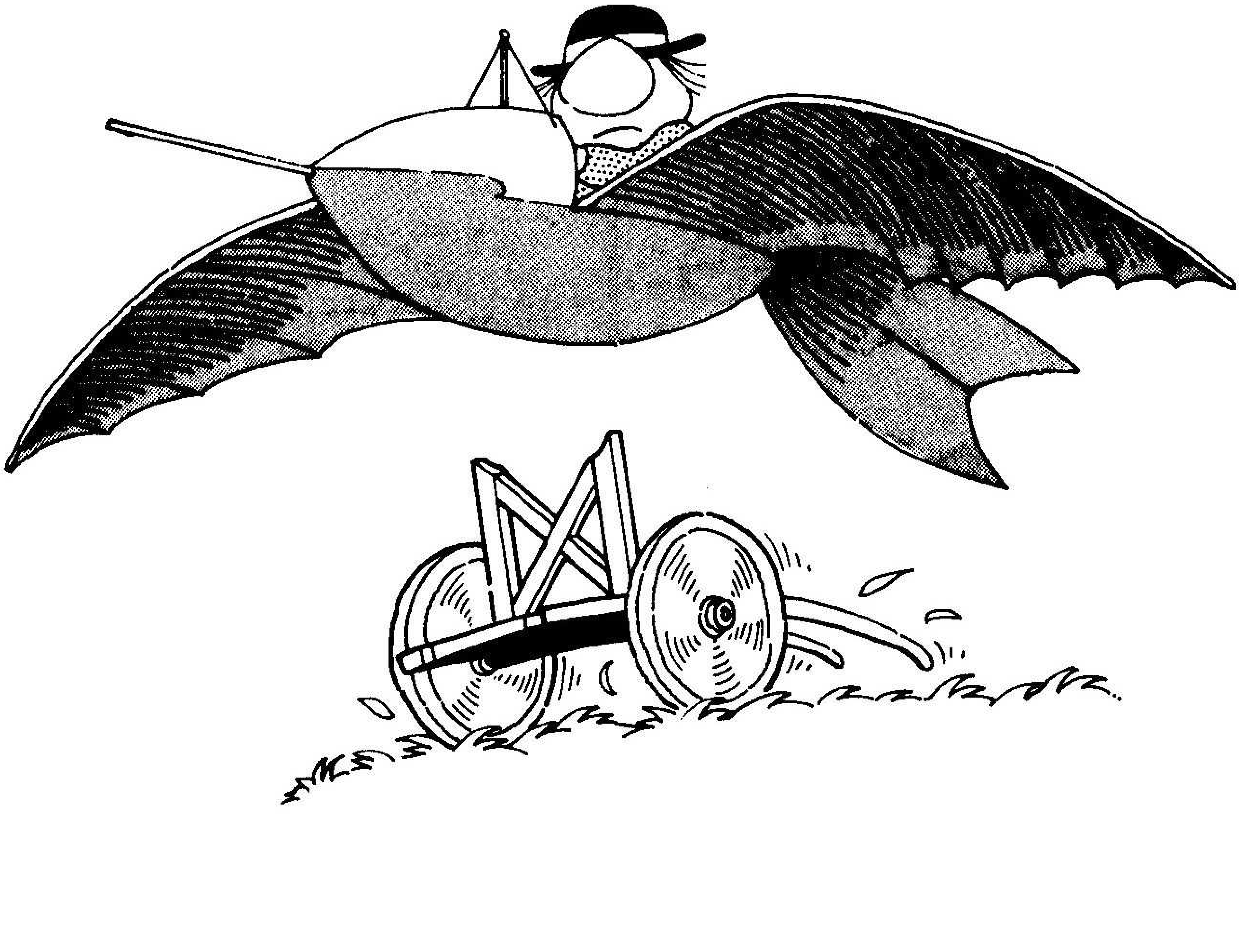
第3章

微分法の応用



◑ (関数の値の)増減の扱い方

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆関数の値が増えたり，減ったり，というが，ウラからみると減ったり，増えたり，というコトになりましょう。ハテ，これは……

◆ 関数の値の増減を調べることはすでに基解でやったことです。微積では，三角関数や指数関数や対数関数などが入ってくる点だけがちがうのです。

■練習 1. $y=x+\dfrac{4}{x^2}$ の増減を吟味せよ。

ヒント　$y=x+4x^{-2}$ と変形してから微分したほうがよいでしょう。

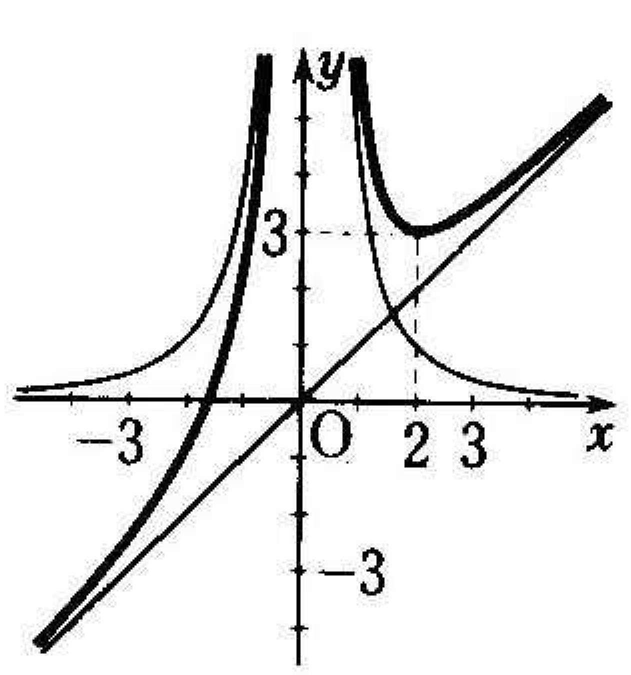
$$y'=1+4\cdot(-2)x^{-3}=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$
$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$$

ところが $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ ですから，次のような増減表が得られます。

x		0		2	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	↗		↘	3 極小	↗

つまり

$x<0$　で増加
$x=0$　で不連続
$0<x<2$　で減少
$x=2$　で極小
　　　$(y=3)$
$2<x$　で増加



■練習 2. $y=\cos^4 x+\sin^4 x$ の増減を吟味せよ。ただし $0<x<\pi$.

ヒント　$y'=4\cos^3 x(-\sin x)+4\sin^3 x(\cos x)$
$$=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$$
$$=2\cdot\sin 2x\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}\right\}$$
$$=-2\sin 2x\cos 2x$$
$$=-\sin 4x$$

ゆえに次のような増減表が得られます。

x	(0)		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		(π)
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y		↘	$\frac{1}{2}$ 極小	↗	1 極大	↘	$\frac{1}{2}$ 極小	↗	

答
$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ で減少
　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる
$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ で増加
　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で極大値 1 をとる
$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4}$ で減少
　$x=\dfrac{3\pi}{4}$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる
$\dfrac{3\pi}{4}<x<\pi$ で増加

■練習 3. $y=x^3e^{-x}$ の増減を吟味せよ。

ヒント　$y'=x^3(-e^{-x})+3x^2e^{-x}$
$$=-\frac{x^3}{e^x}+\frac{3x^2}{e^x}=\frac{-x^2(x-3)}{e^x}$$

x	……	3	……
y'	$+$	0	$-$
y	↗	$\frac{27}{e^3}$ 極大	↘

ゆえに $x<3$ で増加
　$x=3$ で極大値 $\dfrac{27}{e^3}$
　$x>3$ で減少

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。

練習 4. xの関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ は，

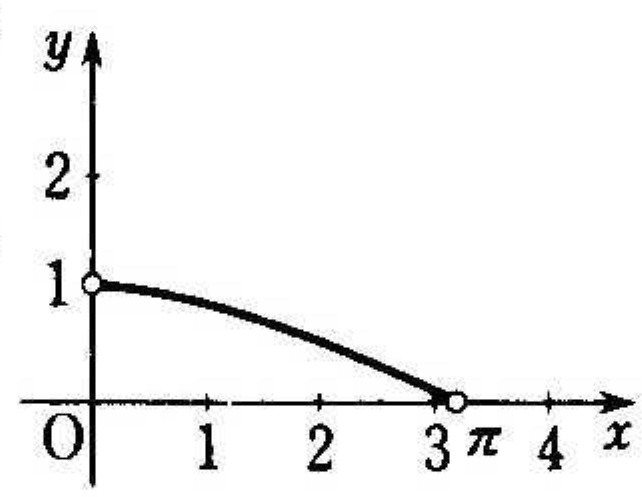
$0<x<\pi$ で単調減少であることを示せ。

（山口大）

（解）
$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

ここに，$g(x)=x\cos x-\sin x$ で，
$$g'(x)=1\cdot\cos x+x(-\sin x)-\cos x$$
$$=-x\sin x<0\quad(\because\ 0<x<\pi)$$
ゆえに $g(x)$ は単調減少で，しかも $g(0)=0$ であるから，$0<x<\pi$ において
$$g(x)<0\qquad\therefore\ f'(x)<0$$
ゆえに，$f(x)$ は単調減少である。



（注）$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフは右のようです。
では，次もやろう!!

練習 5. 関数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ $(x>0)$ のグラフを横軸 $\log_e x$，縦軸yの直角座標をとって表すとき，次のことを調べよ。

(1) 曲線の増減
(2) 曲線の凹凸
(3) 曲線の変曲点
(4) 曲線の対称性（式で示せ）
(5) 曲線の概形　　（徳島大）

（ヒント）(1) 横軸は $\log_e x$ だというのですから $\log_e x=t$ とおいて，横軸に t をとればいいでしょう。そして，このとき，
$$x=e^t$$
ですから
$$y=\frac{x}{1+x}=\frac{e^t}{1+e^t}\qquad\cdots\cdots(*)$$
なる関係があります。
$$\therefore\quad y'=\frac{e^t}{(1+e^t)^2}>0$$
ですから，単調増加なんですね。

次に，(2)です。
$$y''=\frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$$
ですから

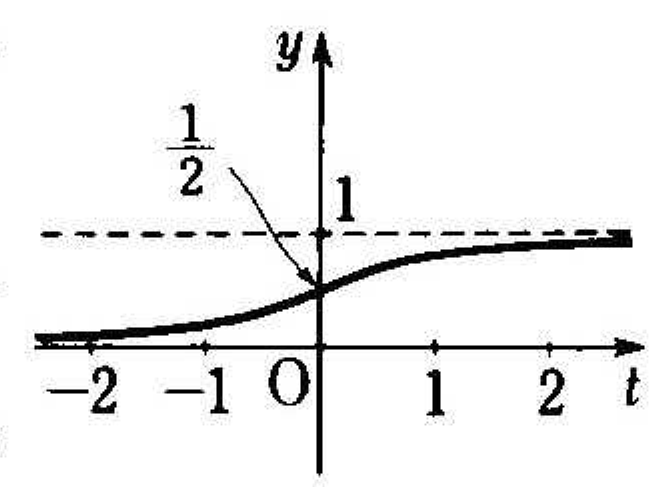
$t>0$ のとき $y''<0$ で上に凸
$t<0$ のとき $y''>0$ で下に凸

です。

したがって……

(3) 変曲点は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ です。

(4) 図をだいたいかいてみると，どうやら変曲点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$が点対称の中心らしいとわかります。そこで，座標軸を平行移動して，新しい頂点を$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$にもっていきますと，新座標 T，Y と旧座標 t，y の間には



$$t=T,\quad y=Y+\frac{1}{2}$$
なる関係があります。これを (*) に代入しますと
$$Y+\frac{1}{2}=\frac{e^T}{1+e^T}$$
$$\therefore\quad Y=\frac{e^T}{1+e^T}-\frac{1}{2}=\frac{e^T-1}{2(1+e^T)}$$
となります。これが新しい頂点に対して対称であることをいうには奇関数であることをいえばよい。そして
$$\frac{e^{-T}-1}{2(1+e^{-T})}=\frac{1-e^T}{2(e^T+1)}=-\frac{e^T-1}{2(1+e^T)}$$
となって予定通り。

(5) そして，グラフは上の通り，万事うまくいったようだな。

*　*　*

◆ $y'>0$ なら増加の状態，$y'<0$ なら減少の状態にあるのはもちろんですが，**$y'=0$ のときは増加のことも減少のこともあります。**

① 極大・極小とは何か

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆ヨーロッパ数学はふしぎと極大・極小とか最大・最小に執着する。しかし，和算（江戸時代の日本数学）にはそれがない。なぜ?!

◆ 極大・極小はすでに基解でやったことですから，今さら，極大・極小とは何かというのも妙なことですが，実は，基解では多項式，それも3次式や4次式を主に扱ったために気がつかなかったことが，微積では重要なポイントとして出てくるのです。

＊　＊　＊

◆ 関数 $y=f(x)$ について，ある点xで

$f'(x)>0$ のとき，$f(x)$ は増加の状態

$f'(x)<0$ のとき，$f(x)$ は減少の状態

にありますが，$f'(x)=0$ のときはいずれともわかりません。グラフをかいてみると，はっきりするでしょう。また

$f(x)$ が増加から減少に変わる点で極大値

$f(x)$ が減少から増加に変わる点で極小値

をとります。

また，$x=a$ で

$f'(a)=0$，$f''(a)>0$ ならば極小値

$f'(a)=0$，$f''(a)<0$ ならば極大値

をとりますが，$f'(a)=0$，$f''(a)=0$ ならばいずれともわかりません。

では，具体的な問題をやってみませんか。

■練習 1. $f(x)=x^4$ の極値を求めよ。

（解）$f(x)=x^4$　　$\therefore$　$f'(x)=4x^3$

ゆえに $f'(x)$ は $x=0$ において負から正に変わる。したがって，$x=0$ のとき極小値をとり，その値は0である。

答　極小値 0 $(x=0)$

（注）$f'(x)=4x^3=0$ を解くと $x=0$ となりますが，$f''(x)=12x^2=0$ となって，極大・極小のいずれとも判定がつきません。しかし，上に示すように実は極小なのです。

■練習 2. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ の極値を求めよ。

（ヒント）微分すると，

$f'(x)$

$$=\frac{(x^2+x+1)(2x-1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

増減表は下の通り。

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 $\frac{1}{3}$	↗

$f''(x)$ を求めても複雑になることは明らかですから，ムダというもの。

答　極大値 3，極小値 $\dfrac{1}{3}$

■練習 3. $f(x)=e^x-x$ の極値を求めよ。

（ヒント）$f'(x)=e^x-1=0$ を解いてみますと

$x=0$

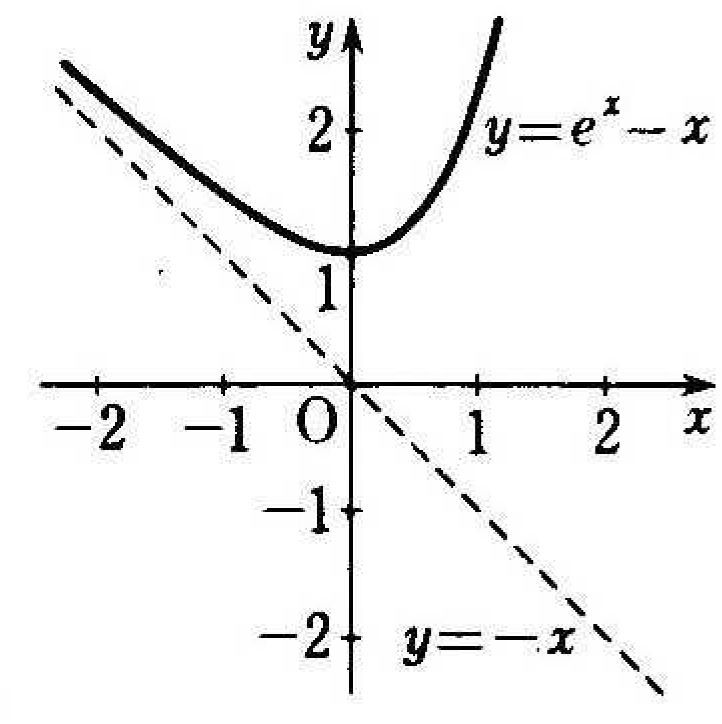
さてはx=0 で極値をとるかもしれない。$f''(x)=e^x$ ですから，$f''(0)=1>0$. なるほど $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとることがわかった。そして，その値は

$f(0)=e^0-0=1$

なのです。なお，必要はないが，

$f(x)=e^x-x$

の概形は右の通り。



＊　＊　＊

◆ では，次には，やや総合的な問題を扱ってみませんか。

練習 4. x の2次方程式

$$ax^2+(a-3)x-a-5=0$$

の2つの実数解の平方の和 p を a の関数とみなしてそのグラフをかけ。　(浜松医大)

ヒント　実数解をもつための条件がまず問題でしょう。判別式を D とすると

$$D=(a-3)^2-4a(-a-5)$$
$$=5a^2+14a+9$$
$$=(a+1)(5a+9)\geqq 0$$

$$\therefore\quad a\leqq-\frac{9}{5}\quad あるいは\quad -1\leqq a$$

であることを忘れてはいけません。

ところで解と係数の関係から，2つの実数解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{a-3}{a},\quad \alpha\beta=-\frac{a+5}{a}$$

$$\therefore\quad p=\alpha^2+\beta^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=\frac{(a-3)^2}{a^2}+\frac{2(a+5)}{a}$$
$$=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{a}+3$$

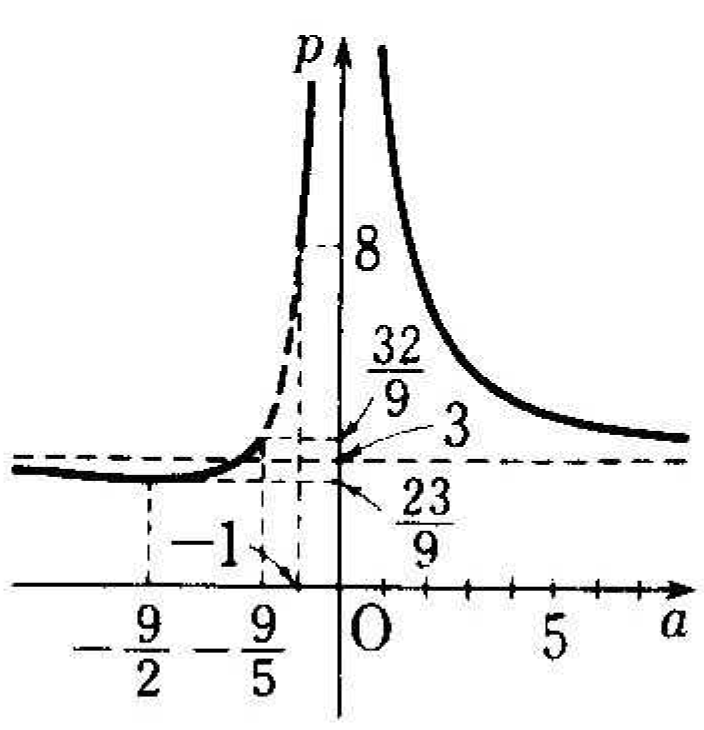
$$\therefore\quad p'=-\frac{18}{a^3}-\frac{4}{a^2}=-\frac{2(2a+9)}{a^3}$$

ゆえに，$a=-\dfrac{9}{2}$ で極小値 $\dfrac{23}{9}$ をとることがわかります。

また，

$$\lim_{a\to\pm\infty}p=3$$

以上のことから右のようなグラフが得られます。



では，もう1つ：——

練習 5. x の関数 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ は $x=3$ において極値をとり，$x=1$ に応ずる曲線 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 上の点における接線の傾きが -2 であるように，a, b を定めよ。(慶大)

解　$$y=\frac{ax+b}{x^2+1}\quad\cdots\cdots①$$

から

$$y'=\frac{(x^2+1)a-(ax+b)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}\quad\cdots\cdots②$$

を得る。

①は $x=3$ において極値をとるから

$$-9a-6b+a=0\quad\cdots\cdots(*)$$

すなわち

$$4a+3b=0\quad\cdots\cdots③$$

なる関係がある。

また，$x=1$ のとき $y'=-2$ であるから

$$\frac{-a-2b+a}{4}=-2$$

$$\therefore\quad b=4\quad\cdots\cdots④$$

③，④より　　$a=-3$

答　$a=-3$, $b=4$

注　数学の得意な人は，上の解答をみて，オヤ，おかしいぞ，と思うかもしれません。というのは，$x=3$ において極値をとるなら確かに(*)が成り立たなければなりません。しかし，(*)が成り立つからといって極値をもつとは限らないのではないか，というのです。いいかえると，問題が正しくなくて，解なし，ということになるのかもしれない，というわけです。

その点に疑問をもつと，$a=-3$, $b=4$ が確かに正しい値であるということを確かめる必要が起きてきます。

しかし，あまり，神経質になることもありますまい。数学科を目ざす人は，そうした点まで注意を向けることもたいせつですが，……。

では，最後に1つ：——

練習 6. $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ が極値をもたないための条件を求めよ。(a, b は定数)

答　$ab\leqq 0$

注　極値をもたないための条件を求めようと思わないで，**極値を求めよ**，という問題を解くのがコツ。そうすると $ab\leqq 0$ が自然に出てくる。また，$f(x)$ のグラフをかくのも1つの方法です。

◎ 極大・極小の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆極大・極小の扱い方は基解と微積でちがいはほとんどない。いや，待てよ。ほとんど，というのが気になりますが，……

◆ このセクションでは極大・極小に関係した総合的な問題を扱うことにしましょう。まず，これです。

練習 1. 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{e^x+1}$ は極値をもたないことを示せ。ただし，e は自然対数の底で，$e=2.718\cdots\cdots$ である。（弘前大）

ヒント **極値を求めよう** と決心してやってみる。そうすると，求められないことがわかる，と，いうしくみになっているハズ!!

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{e^x+1}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{(e^x+1)^2}\{(e^x+1)(2x-2)$$
$$-(x^2-2x+3)e^x\}$$

これは意外とゴタゴタしてくる。このようなときには，$f'(x)=\dfrac{P(x)}{(e^x+1)^2}$ とおいて，$P(x)$ を別に扱うのがコツです。つまり

$$P(x)=(e^x+1)(2x-2)-(x^2-2x+3)e^x$$
$$=(-x^2+4x-5)e^x+(2x-2)$$

これの符号がおそらく一定なのでしょう。そして，$x\to-\infty$ のとき $P(x)<0$ であることからみて，つねに負となるのではあるまいか。そこで，

$$P'(x)=(-2x+4)e^x+(-x^2+4x-5)e^x+2$$
$$=(-x^2+2x-1)e^x+2$$
$$=-(x-1)^2e^x+2$$
$$P''(x)=-(x-1)^2e^x-2(x-1)e^x$$
$$=-(x^2-1)e^x$$

となりますから，$P'(x)$ は $x=-1$ で極小値 $-\dfrac{4}{e}+2>0$ をとり，$x=1$ で極大値 2 をとり，$P'(2)=-e^2+2<0$ ですから $1<\alpha<2$ なる α に対して 0 となります（ピンとこなかったら $y=P'(x)$ のグラフをかいてみてください）。

そこで，$P(x)$ は $x=\alpha$ の前後で正から負に変わるから極大値をとり，極大値は

$$P(\alpha)=(-\alpha^2+4\alpha-5)e^\alpha+(2\alpha-2)$$
$$=\{-(\alpha-1)^2e^\alpha+2\}+2(\alpha-2)(e^\alpha+1)$$
$$=2(\alpha-2)(e^\alpha+1)<0$$
$$\therefore\quad f'(x)<0$$

ナルホド，予想どおりになった。

＊　＊　＊

◆ さて，小手調べに1つやってみませんか。

練習 2. 関数 $f(x)=x(\log x)^2$ の極大値，極小値を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表すものとする。（武蔵工大）

ヒント $f(x)=x(\log x)^2$

$$\therefore\quad f'(x)=1\cdot(\log x)^2+x\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}$$
$$=\log x(\log x+2)$$

そこで増減表を作ってみますと下の通り。

x	……	$\frac{1}{e^2}$	……	1	……
$\log x$	$-\infty\cdots$	-2	……	0	$\cdots+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{e^2}$ 極大	↘	0 極小	↗

これからわかるように $x=1$ で極小値 0 をとり，$x=\dfrac{1}{e^2}$ で極大値 $\dfrac{4}{e^2}$ をとります。

◆ では，次に，より一般的な問題をやってみませんか。

▶練習 3. 放物線 $y=x^2$ の上に，2点A，Bがある。A，Bの x 座標をそれぞれ $-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ とする。この放物線上の任意の点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を x の関数として表し，この関数の増減，凹凸，極値，変曲点を調べて，グラフの概形をかけ。　　（京大）

（解）　$\mathrm{P}(x,\ x^2)$，$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$ であるから

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)^2$$
$$=2x^4-3x^2-2x+\frac{61}{8}$$

となる。これを $f(x)$ とすると

$$f(x)=2x^4-3x^2-2x+\frac{61}{8}$$
$$\therefore\quad f'(x)=8x^3-6x-2$$
$$=2(x-1)(2x+1)^2$$
$$f''(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

ゆえに，$f(x)$ の増減表および凹凸表は次のようになる。

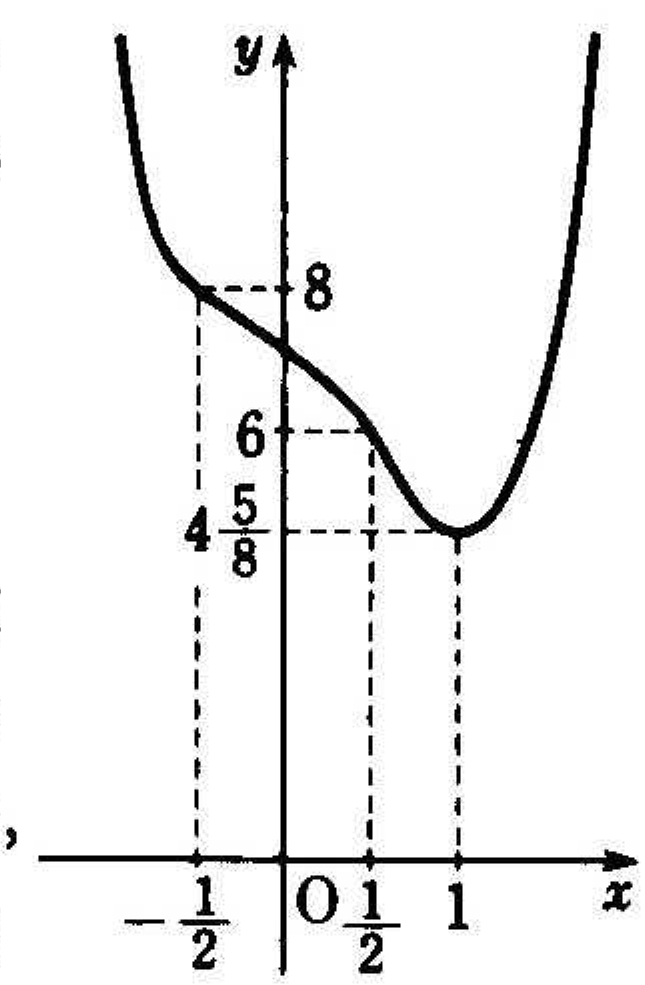
▷増減表

x		$-\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↘	$\frac{37}{8}$ min.	↗

▷凹凸表

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	∪	8（変曲点）	∩	6（変曲点）	∪

以上の結果から $y=f(x)$ のグラフは右のようになる。



▶練習 4. $0<x<2\pi$ で定義された関数 $f(x)$ が次の2つの条件を満足するとき，$f(x)$ の極大値を求めよ。

(i)　$f'(x)=\sin 2x-\cos x$

(ii)　$f(x)$ は極小値0をもつ。　（熊本大）

（解）　$f'(x)=\sin 2x-\cos x$
$$=2\sin x\cos x-\cos x$$
$$=\cos x(2\sin x-1)$$

であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘	

また，

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+C$$

（Cは積分定数）

であるから，極小値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}+C=0$$
$$\therefore\quad C=\frac{3}{4}$$

したがって，

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+\frac{3}{4}$$

したがって，極大値は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\quad および\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

である。

答　$\frac{1}{4}$，$\frac{9}{4}$

◑ 2次の有理関数の極大・極小の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆おそらく微積の中でもっとも難しいのは，2次の有理関数の極値に関するものであろう。マサカ，と思う人はわかっていないのだ。

◆　2次の有理関数とは，分母・分子がxの2次式である分数式のことで，この極大・極小を求めることが目的です。これは意外とめんどうなものが多いもの。では，次を：——

■練習 1. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ の極大・極小を与えるxおよびその極値を求めよ。

（ヒント）　$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)\cdot2-2x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

となりますから，増減表は下の通り。

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘	-1（極小）	↗	1（極大）	↘

もうできたようだな。

■練習 2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$ の極値を求めよ。

（解）　$f'(x)=$

$$\frac{(x^2+x+1)(2x+3)-(x^2+3x+3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{-2x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

となるから，増減表は

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{3}$（極小）	↗	3（極大）	↘

となる。ゆえに求める極大値は $3(x=0)$ で極小値は $\dfrac{1}{3}(x=-2)$ である。

（注）　数Ｉでは判別式を使った。つまり

$$y=\frac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$$

とおいて，分母を払って整理すると

$$(y-1)x^2+(y-3)x+(y-3)=0$$

判別式をDとすると

$$D=(y-3)^2-4(y-1)(y-3)$$
$$=(y-3)(-3y+1)\geqq0$$

$$\therefore\quad (y-3)\left(y-\frac{1}{3}\right)\leqq0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}\leqq y\leqq3$$

こうして，3と$\dfrac{1}{3}$が出るが，これは最大値，最小値ですから，そのままでは極値とはいえないのです。ご注意!!

■練習 3. $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}$（a，b，c は定数）が極値をもたないための条件を求めよ。（東大）

（ヒント）　極値を求めようと努力してみるのだ。そして，それが求められない場合をみつければいいでしょう。

$$f'(x)=a-\frac{c}{x^2}=\frac{ax^2-c}{x^2}$$

ここで $a=0$ か否かで分ける。$a=0$ なら $f'(x)$ の符号変化が起きない，つまり極値なし。次に，$a\neq0$ ならば

$$f'(x)=\frac{a}{x^2}\left(x^2-\frac{c}{a}\right)$$

となりますから，$\dfrac{c}{a}\leqq0$ なら極値はない。そして $\dfrac{c}{a}>0$ なら確かにある。してみると，求める条件は $a=0$ あるいは $a\neq0$ かつ $\dfrac{c}{a}\leqq0$ となりましょう。これをまとめて

$$ac\leqq0$$ ……答

＊　＊　＊

◆ 次はめんどうです。このやり方は覚えておくしか仕方がありません。

練習 4. $\dfrac{x^2-x+a}{x^2+x+1}$ の極大値が3で極小値が $\dfrac{1}{3}$ であるように a の値を定めよ。

ヒント　極大・極小がこの場合，最大・最小であるとして，数Ｉのやり方でやってみますと，

$$y=\frac{x^2-x+a}{x^2+x+1}$$

変形して

$$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-a)=0$$

x の実数条件から判別式を D として

$$D=(y+1)^2-4(y-1)(y-a)\geqq 0$$

$$\therefore\quad 3y^2-2(3+2a)y+(4a-1)\leqq 0$$

これが $\dfrac{1}{3}\leqq y\leqq 3$ なる解をもてばよい。そのための条件は，解と係数の関係から

$$\frac{1}{3}+3=\frac{2}{3}(3+2a),\quad \frac{1}{3}\cdot 3=\frac{4a-1}{3}$$

$$\therefore\quad a=1$$

さて，これを微分法を使ってやるのだ。

解　$$y=\frac{x^2-x+a}{x^2+x+1}\quad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad y'=\frac{(x^2+x+1)(2x-1)-(x^2-x+a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\quad\cdots\cdots②$$

ゆえに極値を与える x の値 u に対して

$$(u^2+u+1)(2u-1)-(u^2-u+a)(2u+1)=0$$

$$\frac{u^2-u+a}{u^2+u+1}=\frac{2u-1}{2u+1}\quad\cdots\cdots③$$

ゆえに $x=\alpha$ のとき極大，$x=\beta$ のとき極小とすると

$$\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}=3,\quad \frac{2\beta-1}{2\beta+1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \alpha=-1,\quad \beta=1$$

$$\therefore\quad \frac{(-1)^2-(-1)+a}{(-1)^2+(-1)+1}=3,\quad \frac{1^2-1+a}{1^2+1+1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad a=1$$

答　1

注　これは，やり方を暗記していない限りとてもできるハズがない。では，もう1つ：——

練習 5. $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+x+1}$ の極大値が3，極小値が $\dfrac{1}{3}$ となるように定数 a，b の値を定めよ。

ヒント　まず，極大・極小と最大・最小が一致するという前提のもとで数Ｉでやってみること。その上で，微積的解法を：——

解　$$y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+x+1}$$

とおくと

$$y'=\frac{(x^2+x+1)(2x+a)-(x^2+ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

ゆえに，極値を与える x の値を u とすると

$$(u^2+u+1)(2u+a)-(u^2+au+b)(2u+1)=0\quad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad \frac{u^2+au+b}{u^2+u+1}=\frac{2u+a}{2u+1}$$

ゆえに極大，極小ならしめる x の値を α，β とすると

$$\frac{2\alpha+a}{2\alpha+1}=3,\quad \frac{2\beta+a}{2\beta+1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{a-3}{4},\quad \beta=\frac{-3a+1}{4}\quad\cdots\cdots②$$

①を展開すると

$$(1-a)u^2+2(1-b)u+(a-b)=0$$

この2つの解が α と β であるから，解と係数の関係から

$$\frac{a-3}{4}+\frac{-3a+1}{4}=\frac{-2(1-b)}{1-a}\quad\cdots\cdots③$$

$$\frac{a-3}{4}\cdot\frac{-3a+1}{4}=\frac{a-b}{1-a}\quad\cdots\cdots④$$

③より

$$4b=a^2+3$$

④より

$$16b=-3a^3+13a^2+3a+3$$

$$\therefore\quad a=-1,\ b=1\ ;\ a=3,\ b=3\cdots\cdots\text{答}$$

注　このやり方は最高にめんどうといっていいでしょう。だからこそ，この機会にぜひマスターしておきたいものだ。

◐最大·最小の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

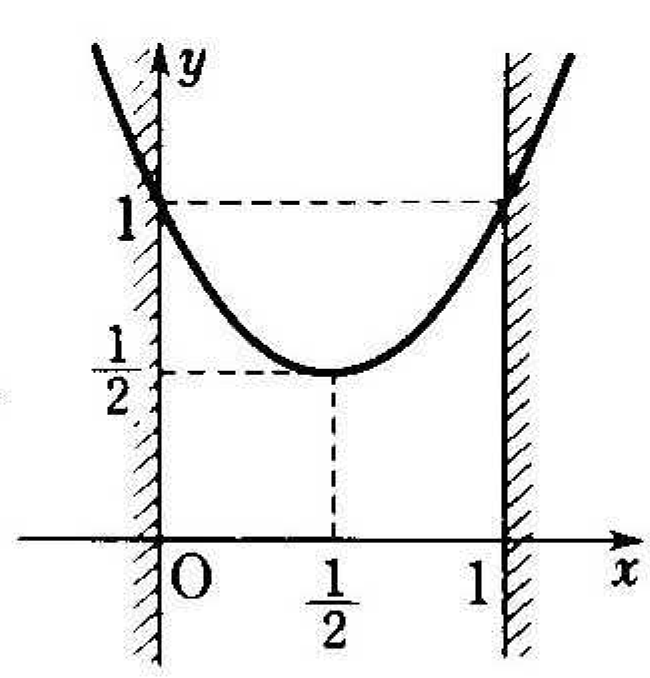
◆最大・最小はしょせん変化を調べれば出てくるハズのもの。変化を調べるのは微分法の役割。してみると，もはやモノもなく事もなし。

◆ 極大・極小と最大・最小とはちがいますよ。与えられた区間でもっとも大きい値が最大値，もっとも小さい値が最小値ですから，極値のようにいくつもあるということはないのです。ともあれ，具体的な練習にいきましょう。

練習 1. $f(\theta)=\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

(ヒント) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\sin^4\theta+(1-\sin^2\theta)^2$

だから，$\sin^2\theta=x$ とおくと $y=2x^2-2x+1$ に等しく，$0\leqq x\leqq 1$ ですからグラフをかくと右の通り。



だから，最大値は1，最小値は$\frac{1}{2}$であることがわかります。

ところで，これを微積での扱いでやると，次のようになります。

(解)　$f(\theta)=\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f'(\theta)&=4\sin^3\theta\cos\theta+4\cos^3\theta(-\sin\theta)\\&=4\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\\&=2\sin 2\theta(-\cos 2\theta)\\&=-\sin 4\theta\end{aligned}$$

ゆえに $4\theta=2n\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{n\pi}{2}$ で $f'(\theta)$ は正から負に変わり $f(\theta)$ は極大値をとり，$4\theta=(2n+1)\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{2n+1}{4}\pi$ で $f'(\theta)$ は負から正に変わり $f(\theta)$ は極小値をとる。

そして

$$\text{極大値}=f\left(\frac{n\pi}{2}\right)=1$$

$$\text{極小値}=f\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

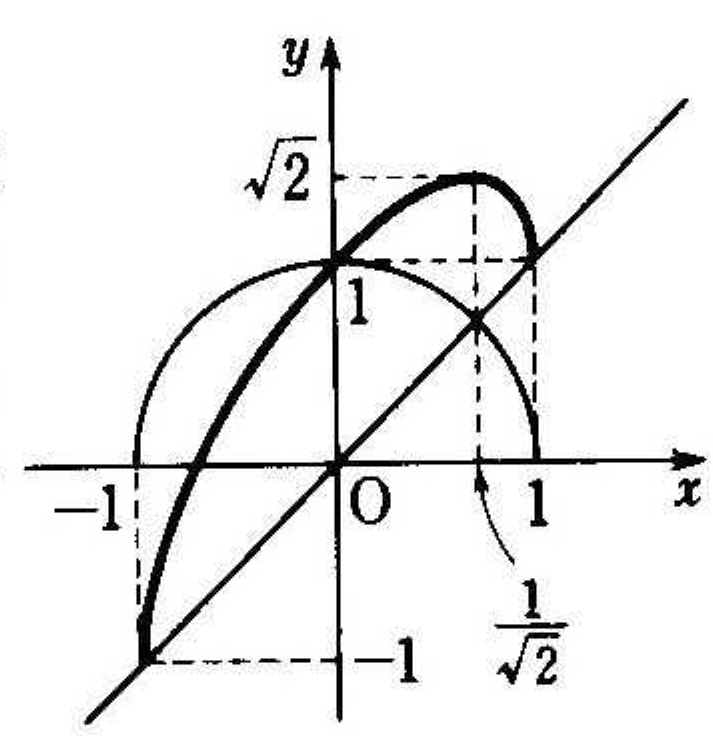
で，これがそれぞれ最大値，最小値である。

(答)　最大値1，最小値$\frac{1}{2}$

(注)　こうしてみると，微積の扱いのほうが数Ⅰよりめんどうですね。一般に，どちらでも扱えるものは数Ⅰのほうが簡単なことが多いのです。

練習 2. $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ の最大値・最小値を求めよ。

(ヒント)　$f(x)$ のグラフは右の通り。最大値は$\sqrt{2}$，最小値は-1 となります。これが数Ⅰのやり方ですが，微積では次のようになります。



(解)　$f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ゆえに $-1\leqq x\leqq 0$ では $f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は単調増加である。

$0<x$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{-2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}\\&=\frac{-2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}\end{aligned}$$

であるから，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で $f'(x)$ は正から負に変わり，$f(x)$ は極大値 $\sqrt{2}$ をとる。そして，$f(-1)=-1$，$f(1)=1$ であるから，最大値は $\sqrt{2}$，最小値は -1 である。

(答)　最大値 $\sqrt{2}$，最小値 -1

(注)　最小値はあるが，極小値はありませんよ。

*　*　*

◆ では，ややめんどうな問題を練習してみませんか。

練習 3. $4x+y=6$ をみたす正の数 x, y に対し，$10-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ の最大値を求めよ。

（広島大）

（解） $x>0$, $y>0$, $4x+y=6$ であるから

$$0<x<\frac{3}{2}$$

$\therefore\quad f(x)=10-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=10-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4x-6}$

$\therefore\quad f'(x)=\dfrac{3(x-1)(x-3)}{x^2(2x-3)^2}$

ゆえに，増減表は下のようになる。

x	(0)		1		$\left(\frac{3}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{17}{2}$	$\searrow$	

したがって $x=1$ で最大値 $\dfrac{17}{2}$ をとる。

答 $\dfrac{17}{2}$

練習 4. 関数

$$f(x)=3(\sin x-\cos x)-\cos 2x$$

の最大値と最小値を求めよ。（東京工大）

（解） $f(x)=3\cdot\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos 2x$

であるから，$\theta=x-\dfrac{\pi}{4}$ とおくと

$$f(x)=g(\theta)=3\sqrt{2}\sin\theta+\sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad g'(\theta)&=3\sqrt{2}\cos\theta+2\cos 2\theta\\&=3\sqrt{2}\cos\theta+2(2\cos^2\theta-1)\\&=4\cos^2\theta+3\sqrt{2}\cos\theta-2\\&=(4\cos\theta-\sqrt{2})(\cos\theta+\sqrt{2})\end{aligned}$$

$\cos\theta+\sqrt{2}>0$ であるから

$$\cos\theta_0=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$$

とすると $g(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0		θ_0		$2\pi-\theta_0$		2π
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	0	$\nearrow$	$g(\theta_0)$	$\searrow$	$g(2\pi-\theta_0)$	$\nearrow$	0

そして，

$$\begin{aligned}g(\theta_0)&=3\sqrt{2}\sin\theta_0+\sin 2\theta_0\\&=3\sqrt{2}\sin\theta_0+2\sin\theta_0\cos\theta_0\\&=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}&g(2\pi-\theta_0)\\&=3\sqrt{2}\sin(2\pi-\theta_0)+\sin(4\pi-2\theta_0)\\&=-(3\sqrt{2}\sin\theta_0+\sin 2\theta_0)=-\frac{7\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

ゆえに，求める最大値は $\dfrac{7\sqrt{7}}{4}$ で，最小値は $-\dfrac{7\sqrt{7}}{4}$ である。

練習 5. $\left(\dfrac{n}{10}\right)^{\frac{n}{10}}$ を最小にする正の整数 n を求めよ。必要ならば $e=2.718\cdots\cdots$ を用いよ。

（九州工大）

（ヒント） $f(x)=x^x$ の対数をとって

$$\log f(x)=x\log x$$

微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1+\log x$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\log x)x^x$$

ゆえに $f(x)$ は $\log x+1=0$ から $x=\dfrac{1}{e}$ で最小値をとります。ところで n は正の整数ですから，$\dfrac{n}{10}=\dfrac{1}{e}$ となることはできませんが，$\dfrac{1}{e}=0.36\cdots\cdots$ を考慮して

$$\frac{3}{10}<\frac{1}{e}<\frac{4}{10}$$

そして $f\left(\dfrac{3}{10}\right)$ と $f\left(\dfrac{4}{10}\right)$ を調べてみますと $f\left(\dfrac{4}{10}\right)$ のほうが小ですから……

答 4

●2変数の関数の最大・最小の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈ 2変数の関数の扱い方は偏微分法を使うのが定石。しかし，それは高校の範囲ではない。かくて変則が正則に優先するのである。

◆　2変数の関数の最大・最小を求める問題は一般に高校の範囲ではありませんが，いくつかの典型的なものについて練習しておくことにしましょう。

練習 1.　$f(x,\ y)=x^2+xy+y^2-3x-3y+10$ の最小値を求めよ。

ヒント　yが一定（$=a$）と見なして

$$k=x^2+ax+a^2-3x-3a+10$$

とおくと，kが最小値をとるのは

$\dfrac{dk}{dx}=0$ のとき，すなわち，

$$2x+a-3=0,\quad x=\frac{3-a}{2}$$

のときで，その最小値mは

$$m=\left(\frac{3-a}{2}\right)^2+a\left(\frac{3-a}{2}\right)+a^2-3\cdot\frac{3-a}{2}$$
$$-3a+10$$
$$=\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{31}{4}$$

です。そこでaをいろいろ変えて，その最小値を求めればよいハズ。

$$\frac{dm}{da}=\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(a-1)$$

ですから $a=1$ のとき $x=\dfrac{3-1}{2}=1$ で，このときの最小値は7です。つまり，$f(x,\ y)$の最小値は7です。

注　同じ問題を数Ⅰなら2乗の和を作るか，判別式を利用してやるのです。(☞「数Ⅰ」p. 238参照)

練習 2.　$f(x,\ y)=\dfrac{2x+4y}{x^2+y^2+1}$ の最大値，最小値を求めよ。

ヒント　yを固定してxの分数関数と考えてまず，最大値，最小値を考える。その上で，yを変えて，最大値の最大値，最小値の最小値を求めればいいハズ。練習1. ではyをxと書きかえたが，yのままでもよいのです。

yを固定して

$$F(x)=\frac{2x+(4y)}{x^2+(y^2+1)}$$

を考えると $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}F(x)=0$ です。また，

$$F'(x)=\frac{(x^2+y^2+1)\cdot 2-(2x+4y)\cdot(2x)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

ゆえに極値を与えるxの値を α としますと，$F'(\alpha)=0$ から

$$\alpha^2+4y\alpha-(y^2+1)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

そして，そのときの極値は

$$\frac{2}{2\alpha}=\frac{1}{\alpha} \qquad \cdots\cdots②$$

で与えられるのでした。(☞ p. 100 参照)

そこで①なる条件の下に$\dfrac{1}{\alpha}$の最大値・最小値を求めればいいでしょう。さて，①より

$$y^2-4\alpha y+(1-\alpha^2)=0$$

判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(2\alpha)^2-(1-\alpha^2)\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$
$$\therefore\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\leqq 5$$
$$\therefore\ -\sqrt{5}\leqq\frac{1}{\alpha}\leqq\sqrt{5}$$

最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$ ということになります。

注　上の(*)で判別式をとったのはいささか不統一のそしりをまぬがれまい。判別式をとる気なら，はじめからそれでやれるからです。自信のある人は判別式を使わずにやること!!

＊　＊　＊

◆ 原則的には同じことですが，形の変わったものについて練習してみましょう。

練習 3. $x+y+z=\pi$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき $\sin x\sin y\sin z$ の最大値を求めよ。

(解) $z=\pi-(x+y)$

$\therefore\quad \sin x\sin y\sin z=\sin x\sin y\sin(x+y)$

いま y を一定と考え，

$$f(x)=\sin x\sin y\sin(x+y)$$

とおくと，

$$f'(x)$$
$$=\sin y\{\sin x\cos(x+y)+\cos x\sin(x+y)\}$$
$$=\sin y\sin(2x+y)$$

で，$\sin y>0$, $0<2x+y<2\pi$ であるから $2x+y=\pi$ のとき，したがって $x=\dfrac{\pi-y}{2}$ のとき $f'(x)$ は正から負に変わる。したがって $f(x)$ の最大値を $M(y)$ とすると

$$M(y)=f\left(\frac{\pi-y}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin y(1+\cos y)$$

そして，

$$M'(y)=\frac{1}{2}\{\sin y(-\sin y)+\cos y(1+\cos y)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2y+\cos y)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{3}{2}y\cos\frac{y}{2}$$

であるから $y=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値をとる。そしてこのとき $x=\dfrac{\pi}{3}$, $z=\dfrac{\pi}{3}$ である。

答　$\dfrac{3}{8}\sqrt{3}\left(x=y=z=\dfrac{\pi}{3}\right)$

(注) 微分しないでもできます。つまり

$$A=\sin x\sin y\sin z$$
$$=\sin x\cdot\frac{1}{2}\{\cos(y-z)-\cos(y+z)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sin x\{\cos(y-z)-\cos(\pi-x)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sin x\{\cos(y-z)+\cos x\}$$

ゆえに x を固定すると $y=z$ のとき最大値をとり

$$A\leqq\frac{1}{2}\sin x(1+\cos x)$$

この右辺の最大値を求めるには $\sin x>0$ ですから2乗して

$$\sin^2x(1+\cos x)^2$$
$$=(1-\cos^2x)(1+\cos x)^2$$
$$=(1-\cos x)(1+\cos x)^3$$

について考えればいい。これなら $\cos x=t$ とでもおいてやればスグできます。

では，もう1つ：——

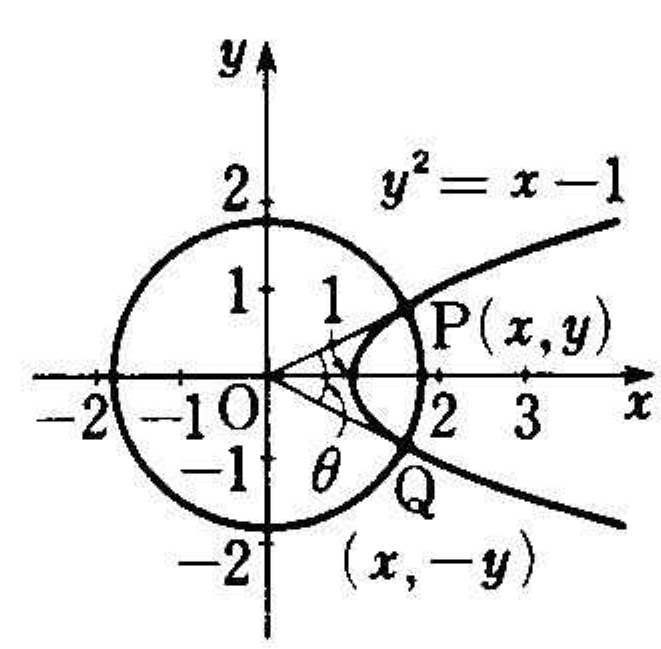
練習 4. 原点を中心とし，半径 r の円が，放物線 $y^2=x-1$ と2点 P, Q で交わるとして，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とする。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。

(i) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき，$\cos\theta$ を x の関数で表せ。

(ii) θ を最大にする r の値を求めよ。

(iii) r が限りなく大きくなるとき，θ はどんな値に近づくか。　(お茶の水女大)

(ヒント) (i) $\mathrm{P}(x,\ y)$ としますと $\mathrm{Q}(x,\ -y)$ ですから，余弦定理から



$$\cos\theta=\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{2(x^2+y^2)}$$

ところが　$y^2=x-1$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$$

(ii) $f'(x)=\cdots\cdots=\dfrac{2x(x-2)}{(x^2+x-1)^2}$

増減表を作って調べてみますと，$x=2$ のとき，$\cos\theta$ は最小，すなわち θ は最大となります。このとき，

$$\mathrm{P}(1,\ 2)$$

したがって，

$$r\text{の最小値}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

であることがわかります。

(iii) $r^2=x^2+y^2=x^2+x-1$

$$\therefore\quad x=\frac{-1+\sqrt{4r^2+5}}{2}\quad(x>1)$$

$$\therefore\quad \lim_{r\to\infty}\cos\theta=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{r\to\infty}\theta=0\quad\cdots\cdots\text{答}$$

1 回目 年 月 日
2 回目 年 月 日
3 回目 年 月 日

最大・最小と応用問題

◈最大・最小の応用問題をまとめてやっておくのが目的。と，いうのも，応用問題はとかくきらわれる。そこで，否応なしに直面させる!!

◆ このセクションでは，最大・最小に関する図形その他の応用問題を扱ってみましょう。では，まず，これです。

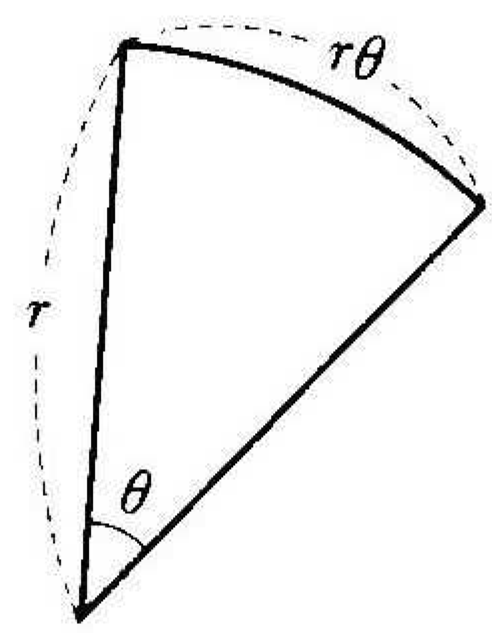
練習 1. 周の長さ一定 s の扇形のうちで，その面積が最大のものを求めよ。

ヒント 扇形の半径を r，中心角を θ としますと，その周は

$r\theta+2r=s$ (一定)

で，その面積 S は

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$



です。

そこで

$$S=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{s-2r}{r}=\frac{(s-2r)r}{2}$$
$$=-r^2+\frac{s}{2}r=-\left(r^2-\frac{s}{2}r\right)$$
$$=-\left(r-\frac{s}{4}\right)^2+\frac{s^2}{16}$$

ゆえに，半径 r が周の $\frac{1}{4}$ のとき最大となり，その値は $\frac{s^2}{16}$ です。

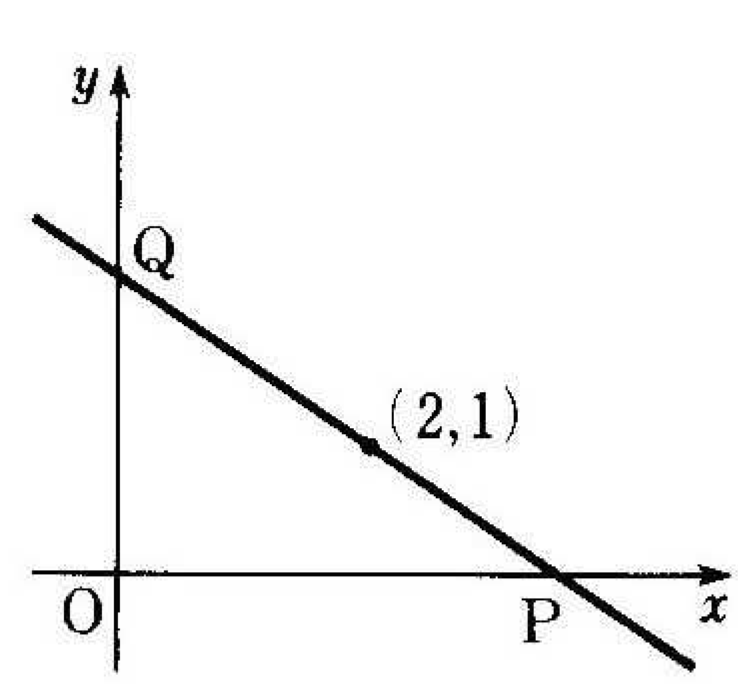
練習 2. 第1象限にある点 $(2,\ 1)$ を通り，x 軸，y 軸の正の部分と P，Q で交わる直線を引くとき $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}$ の最小値を求めよ。

ヒント 直線の傾きを $-m\ (m>0)$ としようか。

PQ の方程式は

$y-1=-m(x-2)$

ですから，



$$\mathrm{P}\left(2+\frac{1}{m},\ 0\right),\ \mathrm{Q}(0,\ 2m+1)$$

となります。だから，

$$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}=\left(2+\frac{1}{m}\right)+(2m+1)$$
$$=3+\left(2m+\frac{1}{m}\right)$$

これの最小値を求めるには $2m+\frac{1}{m}$ の最小値を求めればいいだろう。あっ，そうだ!! 相加・相乗平均の関係が使えそうだな。

かくして：——

$$2m+\frac{1}{m}\geqq 2\sqrt{2m\cdot\frac{1}{m}}=2\sqrt{2}$$
$$\therefore\quad \overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}\geqq 3+2\sqrt{2}$$

ゆえに求める最小値は $3+2\sqrt{2}$ で，そのときの m の値は

$$2m=\frac{1}{m}\quad \text{から}\quad m=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

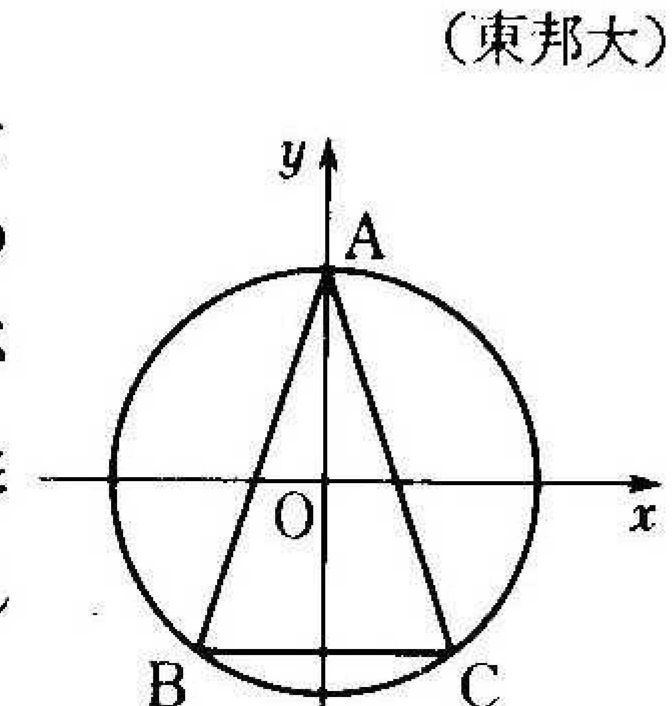
したがって PQ の方程式は

$$x+\sqrt{2}\,y-(2+\sqrt{2})=0$$

なのです。

練習 3. 半径 r の定円に内接する二等辺三角形のうちで，面積の最大のものの面積を求めよ。 (東邦大)

ヒント 座標軸の原点を中心とし，半径 r の円に内接し，頂点が $\mathrm{A}(0,\ r)$ である三角形(右図)について考えればいいでしょう。

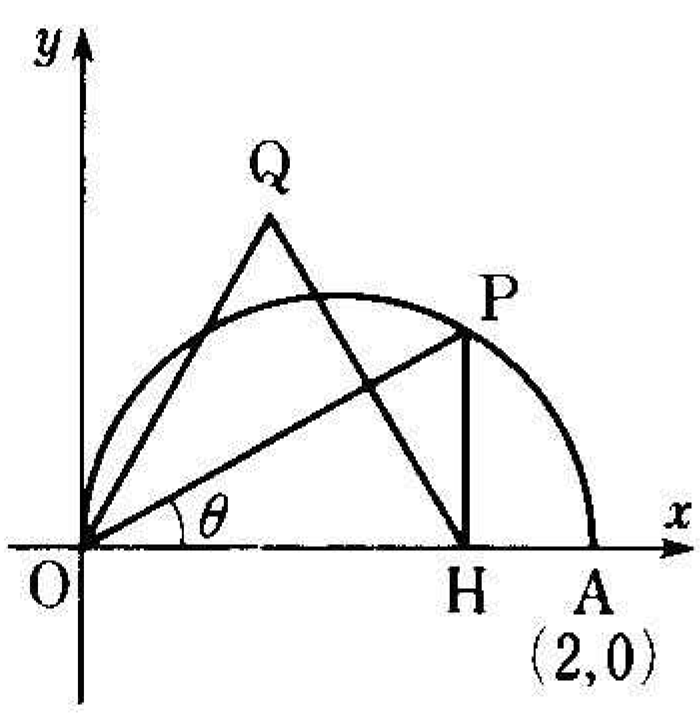


$\mathrm{C}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ としますと $\triangle\mathrm{ABC}=(r-r\sin\theta)\cdot r\cos\theta$ に注意。

答 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ (正三角形)

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. O(0, 0)，A(2, 0) を直径の両端とし，第1象限にある半円の弧上の1点をPとする。PからOAに下した垂線の足をH，直線OPに関するHの対称点をQとする。Pをどこにとったとき，Qの y 座標が最大となるか。　　　(慶大)



ヒント　$\angle POH=\theta$ としますと

$OP=2\cos\theta$

$OH=OQ=2\cos^2\theta$

ですから，Qの y 座標は

$$OQ\sin 2\theta$$
$$=2\cos^2\theta\cdot\sin 2\theta$$
$$=(1+\cos 2\theta)\sin 2\theta$$
$$=\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta$$

そこで，これを $f(\theta)$ とおきますと，

$$f(\theta)=\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'(\theta)=2\cos 2\theta+2\cos 4\theta$$
$$=2\cos 2\theta+2(2\cos^2 2\theta-1)$$
$$=2(2\cos 2\theta-1)(\cos 2\theta+1)$$

ゆえに，$\theta=\frac{\pi}{6}$ で $f(\theta)$ は極大かつ最大になります。

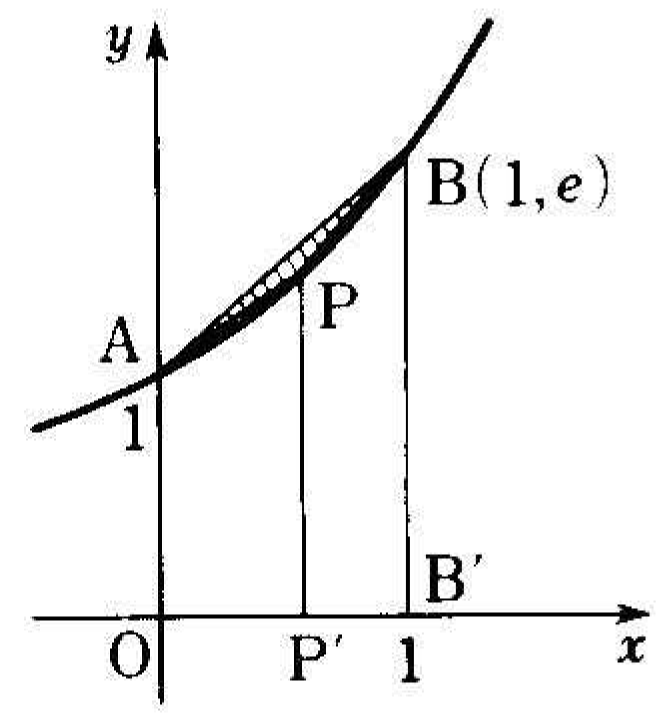
答　$P\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

練習 5. 曲線 $y=e^x$ 上の $x=0$，$x=1$ に対応する点をそれぞれA，Bとする。この曲線の弧AB上に点Pをとり，△PABをつくる。△PABの面積の最大値を求めよ。　　　(中央大)

ヒント　$\triangle PAB=\text{台形}OB'BA-\text{台形}OP'PA-\text{台形}P'B'BP$

に目をつけて計算すればいいでしょう。

△PABを $f(x)$ とおくと，$P(x,\ e^x)$ に対して



$$f(x)=\frac{1}{2}(e+1)-\frac{1}{2}\{(e^x+1)x+(e+e^x)\times(1-x)\}$$

となって，

$$f'(x)=\frac{1}{2}(-e^x+e-1)$$
$$f''(x)=-\frac{1}{2}e^x<0$$

となります。すると，$f'(x)=0$ にするのところで極大（かつ最大）となるのでしょう。

$$-e^x+e-1=0$$

とおくと

$$e^x=e-1\qquad\therefore\quad x=\log(e-1)$$

です。したがって，求める最大値は

$$\frac{1}{2}\{(e-1)\log(e-1)-e+2\}$$

となります。

注　ABに平行な接線の接点を求めて，これをPとしてもいいでしょう。このときには

$$y'_{x=x}=e^x=e-1$$

から x を求めればよいわけです。

*　*　*

◆ では，もう1つ。

練習 6. 双曲線 $x^2-y^2=1$ と x 軸に平行な直線 l との交点をP，Qとする。P，Qにおける双曲線の接線と l とが囲む三角形の面積の最小値を求めよ。　　　(阪大)

ヒント　l の方程式を $y=h$ としますと，面積 S は

$$S=\sqrt{h^2+1}\left(h+\frac{1}{h}\right)\quad(h>0)$$
$$S'=\frac{\sqrt{h^2+1}}{h^2}(2h^2-1)$$

だから……

答　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

① 接線の求め方

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◈接線の問題のタイプが4つ。そして，そのおのおのがさらに3つに分かれる。結局 3×4=12 通り。ヤレヤレ，これはたいへんだ!!

◆ 接線を求める問題は大きく分けて4つになります。曲線上の点Pにおける接線，曲線外の点Aから引いた接線，傾きの与えられた接線，最後は特殊な難問，です。

次に曲線の方程式からいうと，陽関数のとき，陰関数のとき，パラメーターで与えられたとき，の3つに大別されます。

組合せると 4×3=12 通り，というわけ。これを混乱させずにやるのがコツです。

*　*　*

◆ では，まず，**曲線上の点における接線** からはじめよう。

■練習 1. $y=\sqrt{x+2}$ 上の点 (2, 2) における接線の方程式を求めよ。

(解)
$$y=\sqrt{x+2}$$
$$\therefore\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

ゆえに点 (2, 2) における接線の傾きは$\frac{1}{4}$です。したがって，接線は
$$y-2=\frac{1}{4}(x-2)$$
$$\therefore\quad x-4y+6=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 2. $x^2+xy+2y^2=4$ 上の点 (1, 1) における接線を求めよ。

(解)
$$x^2+xy+2y^2=4$$
$$\therefore\quad 2x+xy'+1\cdot y+4yy'=0$$
$$\therefore\quad y'=-\frac{2x+y}{x+4y}$$

ゆえに，点 (1, 1) における傾きmは
$$m=-\frac{3}{5}$$

したがって，求める接線は
$$y-1=-\frac{3}{5}(x-1)$$
$$3x+5y-8=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 3. $x=2\sin t$, $y=3\cos t$ 上の $t=\frac{\pi}{3}$ に対応する点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(解) $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t$

であるから
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}\tan t$$

ゆえに $t=\frac{\pi}{3}$ に対応する点 $\left(\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$ における接線の傾きは
$$-\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

で，接線は
$$y-\frac{3}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})$$

すなわち
$$y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+6 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 次は **曲線外の点から引いた接線** を求める場合です。

■練習 4. 曲線 $y=e^x$ に原点から引いた接線を求めよ。

(解) $y=e^x$ 上の任意の点 $(t,\ e^t)$ における接線は
$$y=e^t x+(1-t)e^t$$
で，これが原点を通るための条件は
$$t=1$$

ゆえに，求める接線は

$$y=ex$$

である。　　答　$y=ex$

練習 5. だ円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に点 (5, 5) から引いた接線の方程式を求めよ。

（解）
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{4}+\frac{2y}{9}y'=0 \quad \therefore \quad y'=-\frac{9x}{4y}$$

であるから，だ円上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は

$$y-\beta=-\frac{9\alpha}{4\beta}(x-\alpha)$$

これを変形して

$$\frac{\alpha x}{4}+\frac{\beta y}{9}=1$$

これが点 (5, 5) を通るための条件は

$$\frac{5}{4}\alpha+\frac{5}{9}\beta=1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{9}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

であるから①，②を解いて（コレハイヤダナ）

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{8}{5},\ -\frac{9}{5}\right),\ \left(-\frac{32}{65},\ \frac{189}{65}\right)$$

よって，求める接線は

$$y=2x-5,\quad y=\frac{8}{21}x+\frac{65}{21} \qquad \cdots\cdots 答$$

*　　*　　*

◆ 次は **傾きの与えられた接線** です。一般にはこれがもっとも簡単ですが，意外とめんどうになるのもあるからご用心!!

練習 6. だ円 $x^2+4y^2=4$ の接線で傾き 2 のものを求めよ。

（解）
$$x^2+4y^2=4$$

の両辺を x で微分して

$$2x+8yy'=0$$

$$\therefore \quad y'=-\frac{x}{4y}$$

接点を $(\alpha,\ \beta)$ とすると

$$\alpha^2+4\beta^2=4 \qquad \cdots\cdots①$$

かつ

$$-\frac{\alpha}{4\beta}=2 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②を連立させて解くと

$$\alpha=\pm\frac{8}{\sqrt{17}},\quad \beta=\mp\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (複号同順)$$

ゆえに，求める接線は

$$y\pm\frac{1}{\sqrt{17}}=2\left(x\mp\frac{8}{\sqrt{17}}\right) \quad (複号同順)$$

すなわち

$$y=2x\pm\sqrt{17} \qquad \cdots\cdots 答$$

*　　*　　*

◆ 第 4 は **特殊な難問** です。例えば：——

練習 7. $y=x^4-2x^2+4x$ と相異なる 2 点で接する直線を求めよ。

（ヒント） これは微分法など使わないで，次のようにやるとラクです。

求める直線を $y=mx+n$ として，与えられた方程式と連立させて y を消去しますと

$$x^4-2x^2+(4-m)x-n=0$$

この左辺が $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ を変形できるハズ。そして，そのための条件は，対応する項の係数を比較して

$$2(\alpha+\beta)=0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-2 \qquad \cdots\cdots②$$
$$2\alpha\beta(\alpha+\beta)=-(4-m) \qquad \cdots\cdots③$$
$$(\alpha\beta)^2=-n \qquad \cdots\cdots④$$

となります。①，②より

$$\alpha+\beta=0,\quad \alpha\beta=-1$$

これを③，④に代入しますと

$$m=4,\quad n=-1$$

となります。つまり，求める直線は

$$y=4x-1$$

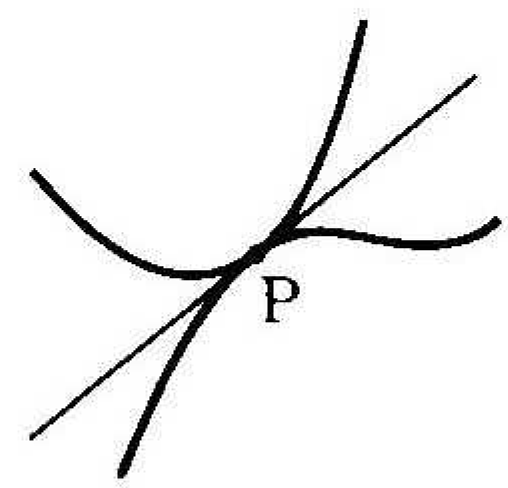
というわけです。

●曲線と曲線の接する問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈曲線と曲線が接するというのは，その上の同一点で接線を共有することなんですから，しょせん，曲線と直線のそれに押しやられる。

◆　2つの曲線が点Pにおいて接するということは，点Pにおいて**接線を共有する**，ということなのです。(右図)



ともあれ，次の練習1. をやりましょう。

練習 1. 放物線 $y=-x^2+ax+b$ が点A(1, 1) において $y=x^2$ に接するという。定数 a, b の値を求めよ。

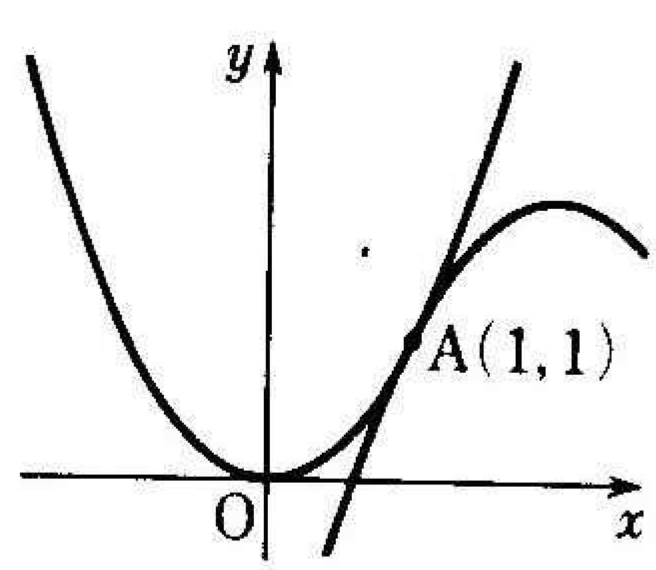
(解)　点Aにおける $y=x^2$ の接線は

$y=2x-1$ …①

であるから，

$y=-x^2+ax+b$

が点 A(1, 1) において①に接する条件を求めればよい。



ところが $y'=-2x+a$ であるから

$-2\cdot1+a=2$　　$\therefore$　$a=4$

また，$y=-x^2+ax+b$ が点 (1, 1) を通ることから

$-1+a+b=1$　　$\therefore$　$b=-2$

答　$a=4$, $b=-2$

(注)　わかってしまえば，その点における共通接線をわざわざ求めるまでもない。その点での微分係数の等しいことをいえば十分です。では，これを：——

練習 2. 2つの関数 $y=2\sin x$ のグラフと $y=a-\cos 2x$ のグラフが接するように定数 a の値を求めよ。ただし，$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。

(上智大)

(ヒント)　$y=2\sin x$　……①

$y=a-\cos 2x$　……②

より y' を求めると，それぞれ

$y'=2\cos x$, $y'=2\sin 2x$

ですから，接点を (α, β) としますと

$2\cos\alpha=2\sin 2\alpha$　……③

でなければなりません。③より

$\cos\alpha(2\sin\alpha-1)=0$

$\therefore$　$\cos\alpha=0$　あるいは　$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi$

そして，この α の値に対して①，②が同一点を通るのですから

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$2\sin\dfrac{\pi}{6}=a-\cos\dfrac{\pi}{3}$　　$\therefore$　$a=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$2\sin\dfrac{\pi}{2}=a-\cos\pi$　　$\therefore$　$a=1$

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

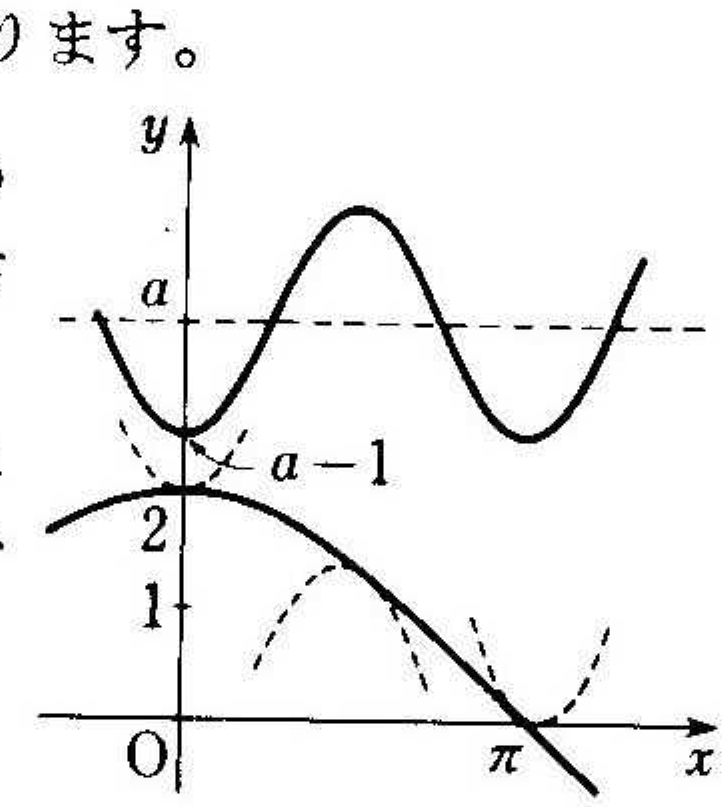
$2\sin\dfrac{5}{6}\pi=a-\cos\dfrac{5}{3}\pi$　　$\therefore$　$a=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$2\sin\dfrac{3}{2}\pi=a-\cos 3\pi$　　$\therefore$　$a=-3$

結局，求める a の値は -3, 1, $\dfrac{3}{2}$ の3つであることがわかります。

(注)　接する3つの場合を図に示すと右のようになります。初めにグラフで考えれば，答はだいたいわかるハズです。



◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 3. 2つの曲線 $y=a(x+1)^2$, $y^2=4ax$ が接するときの a の値および，その共通接線の方程式を求めよ。ただし，$a>0$ とする。 （東京電機大）

（解）1. $y=a(x+1)^2$

$$\therefore \quad y'=2a(x+1) \qquad \cdots\cdots①$$

$$y^2=4ax$$

$$\therefore \quad 2yy'=4a$$

$$\therefore \quad y'=\frac{2a}{y} \qquad \cdots\cdots②$$

であるから，接点の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とすると

$$2a(\alpha+1)=\frac{2a}{\beta} \qquad \cdots\cdots③$$

および

$$\beta=a(\alpha+1)^2 \qquad \cdots\cdots④$$

$$\beta^2=4a\alpha \qquad \cdots\cdots⑤$$

なる関係がある。

③より

$$\beta=\frac{1}{\alpha+1} \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑤÷④より

$$\beta=\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \qquad \cdots\cdots⑦$$

で，⑥，⑦より β を消去すれば

$$\frac{1}{\alpha+1}=\frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \qquad \therefore \quad \alpha=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \beta=\frac{3}{4}$$

したがって，⑤より

$$a=\frac{27}{64}$$

したがって，求める共通接線は

$$y=\frac{9}{8}x+\frac{3}{8}$$

である。

答 $a=\dfrac{27}{64}$, $y=\dfrac{9}{8}x+\dfrac{3}{8}$

（解）2. $y=a(x+1)^2$, $y^2=4ax$ より y を消去すれば

$$a^2(x+1)^4=4ax$$

これを変形すれば

$$x^4+4x^3+6x^2+kx+1=0 \qquad \cdots\cdots①$$

を得る。ここに

$$k=4\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

である。2つの曲線が接するならば①は重複解をもたなければならない。これを α とすれば①の左辺は，$(x-\alpha)^2$ で割りきれなければならない。組立除法を使って割算を行って下の結果を得る。すなわち

$$\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+k\alpha+1=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$4\alpha^3+12\alpha^2+12\alpha+k=0 \qquad \cdots\cdots③$$

②，③より k を消去して

$$3\alpha^4+8\alpha^3+6\alpha^2-1=0$$

$$\therefore \quad (3\alpha-1)(\alpha+1)^3=0$$

$\alpha=\dfrac{1}{3}$ のとき，③より

$$k=-\frac{148}{27} \qquad \therefore \quad a=\frac{27}{64}$$

したがって，共通接線は

$$y=\frac{9}{8}x+\frac{3}{8}$$

となる。

$\alpha=-1$ のとき，③より

$$k=4 \qquad \therefore \quad \frac{1}{a}=0 \quad (\text{不合理})$$

ゆえに $\alpha=-1$ は適さない。

答 $a=\dfrac{27}{64}$, $y=\dfrac{9}{8}x+\dfrac{3}{8}$

（注）このように，方程式の解の理論から求めることもできます。そして，そのほうが微分法を使うよりも簡単なことも多いのです。次もその1例です。

練習 4. $y=x^4+a$ と $y=2x^2+bx$ が相異なる2点で接するように定数 a, b の値を定めよ。

（ヒント） 2つの式から y を消去して

$$x^4-2x^2-bx+a=0$$

左辺は，2点で接するなら $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ で割りきれなければならない。よって，……

答 $a=1$, $b=0$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑ 接線の応用問題

◆微分法の応用の中でもっともめんどうなものの多いのは接線ですが，その接線の応用問題とあれば，いよいよめんどうではあるまいか。

◆ 接線の関係した応用問題といってもいろいろありますが，ここでは主として，接線の関係した図形問題をやってみるとしましょう。では，まず，これから：——

■練習1. 双曲線 $xy=k$ の上の点Pにおける接線が両軸と囲む部分の面積を求めよ。

ヒント　$xy=k$ の両辺を x で微分すると

$$xy'+1\cdot y=0 \qquad \therefore \quad y'=-\frac{y}{x}$$

いま，曲線上の任意の点を $P\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ としますとPにおける接線の傾きは $-\dfrac{1}{t^2}$，したがって接線は

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$$

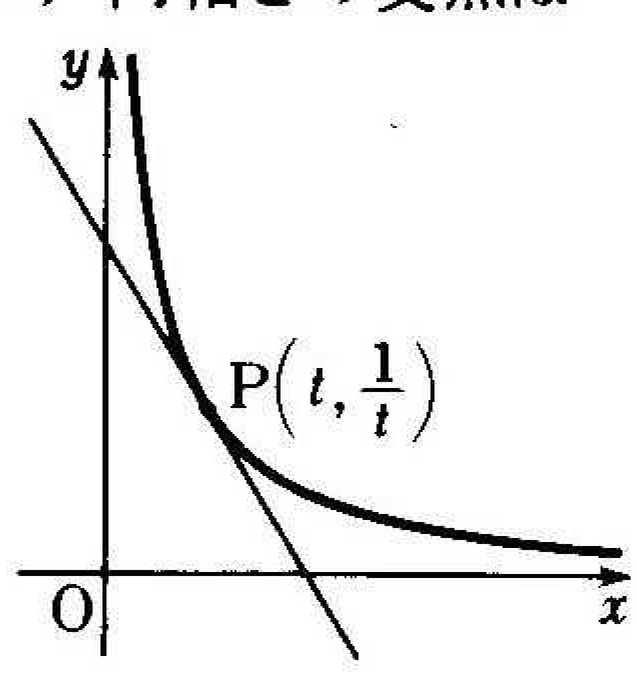
となりましょう。そして，両軸との交点は

$$(2t,\ 0),\ \left(0,\ \frac{2}{t}\right)$$

ですから，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|2t|\left|\frac{2}{t}\right|=2$$

となります。



■練習2. 曲線 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq 1)$ 上の任意の点Pから x 軸に下した垂線の足をQとし，また，Pにおける接線が x 軸と交わる点をRとするとき，線分QRの長さは一定であることを示せ。

ヒント　$y=a^x$

$\therefore \quad \log y=x\log a$

$\therefore \quad \dfrac{1}{y}y'=\log a$

$\therefore \quad y'=(\log a)y$

いま点Pを $(t,\ a^t)$ とすると，点Pにおける接線は

$$y-a^t=(\log a)a^t(x-t)$$

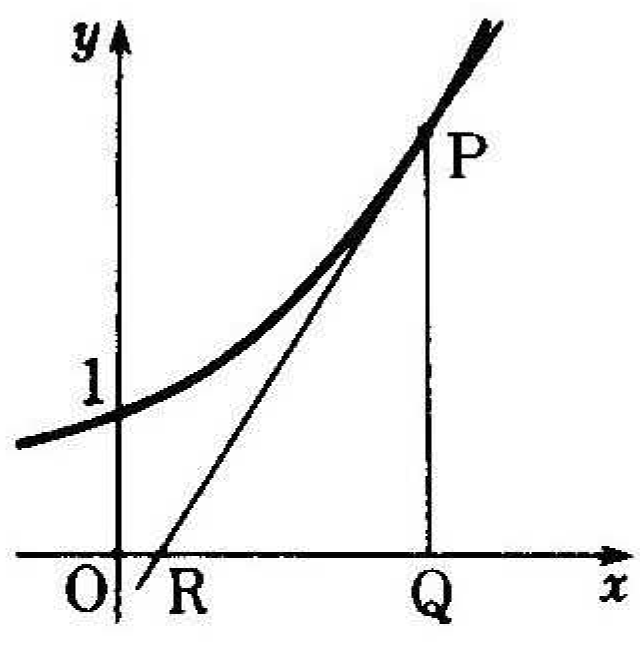
ゆえに，点Rの x 座標は

$$t-\frac{1}{\log a}$$

で，したがって

$$\overline{\mathrm{RQ}}=t-\left(t-\frac{1}{\log a}\right)=\frac{1}{\log a}=\text{一定}$$

Q. E. D.



■練習3. a，b を正の定数，n を2以上の整数とする。このとき，方程式

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

の表す曲線は，n に関係なくつねに点 $(a,\ b)$ において一定の直線に接することを示せ。　（芝浦工大）

ヒント　n が何であっても点 $(a,\ b)$ を通ることは確かです。そこで，あとは，この点における接線の傾きが一定であることさえいえればいいでしょう。

ところで，

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

の両辺を x で微分しますと

$$n\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{a}+n\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\cdot\frac{y'}{b}=0$$

$$\therefore \quad y'=-\frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{b}{y}\right)^{n-1}$$

ゆえに，点 $(a,\ b)$ における y' の値は

$$-\frac{b}{a}\left(\frac{a}{a}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{b}\right)^{n-1}=-\frac{b}{a}$$

となります。

ナルホド，予定通りであった!!

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 4. 定数 a は絶対値が5以下の整数であるという。いま曲線 $y=x^2(a-x)$ の変曲点において接線を引いたところ，これが放物線 $y=x^2+x$ の接線にもなった。a の値を求めよ。（東京理大）

（解）$y=x^2(a-x)$ について

$$y'=2ax-3x^2$$
$$y''=2a-6x$$

であるから，$y''=0$ を解いて　$x=\dfrac{a}{3}$

このとき，

$$y=\frac{2}{27}a^3,\quad y'=\frac{a^2}{3}$$

が得られる。

ゆえに変曲点は $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{2}{27}a^3\right)$ で，この点における接線は

$$y=\frac{a^2}{3}x-\frac{a^3}{27}$$

である。これが $y=x^2+x$ に接するための条件は，y を消去して得られる2次方程式

$$x^2+\left(1-\frac{a^2}{3}\right)x+\frac{a^3}{27}=0$$

が重複解をもつことであるから，判別式を D とすると

$$D=\left(1-\frac{a^2}{3}\right)^2-4\cdot 1\cdot\frac{a^3}{27}=0$$

$$\therefore\quad 3a^4-4a^3-18a^2+27=0$$

$$\therefore\quad (a-3)(3a^3+5a^2-3a-9)=0$$

$3a^3+5a^2-3a-9=0$ の整数解があれば a^3 の係数3で，定数項 -9 の約数を割ったものしかありえない。すなわち ±1，±3（±9 は条件から不適）しかないが，代入してみるといずれも適さない。

ゆえに，　$a=3$

答　3

（注）定数 a の絶対値が5以下という条件があまり活用されていないようだなあ。

練習 5. 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x>0)$ は，曲線 $y=x^3$ 上の点とする。Pを通るこの曲線の2本の接線が x 軸と交わる点を A，B とし，$\angle\mathrm{APB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

(1) $\cos\theta$ を x を用いて表せ。

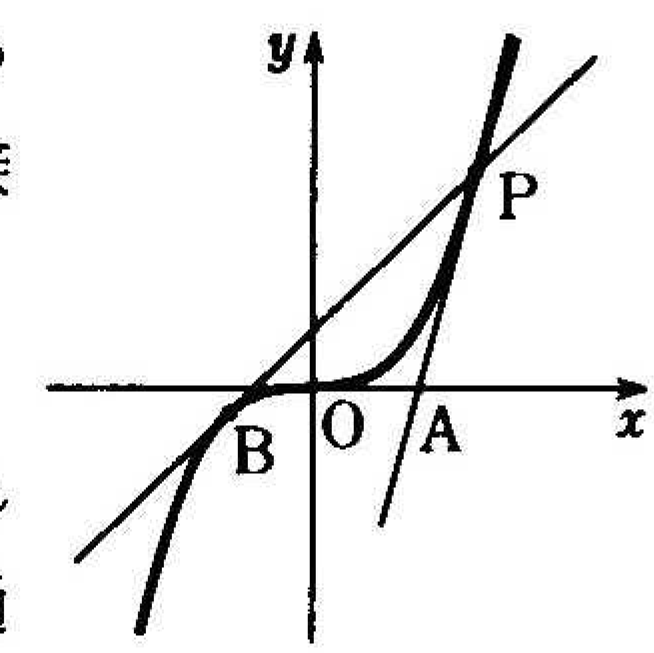
(2) $\tan\theta$ が最大となる x の値を求めよ。

（阪大）

（ヒント）曲線上の任意の点 $(t,\ t^3)$ における接線の方程式は

$3t^2x-y-2t^3=0$

で与えられます。これが，点 $\mathrm{P}(x,\ x^3)$ を通るための条件はいうまでもなく，



$$3t^2x-x^3-2t^3=0$$

です。これを t について解いてみると

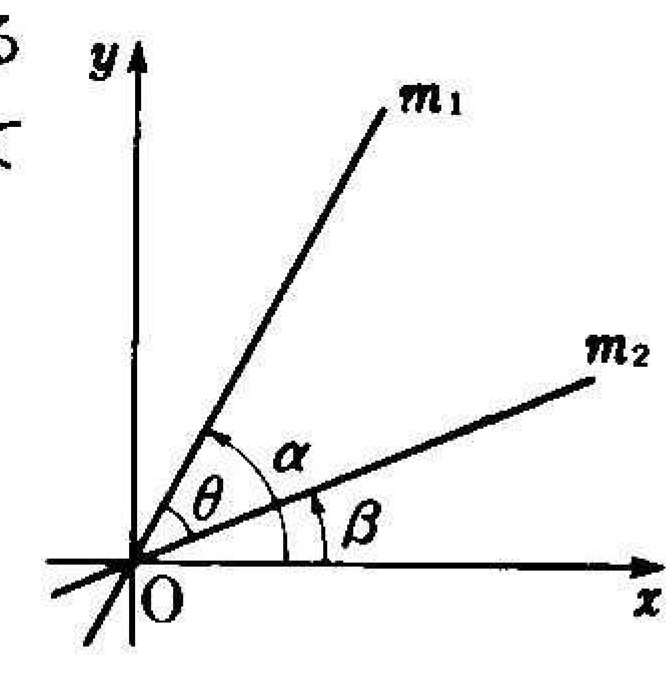
$$t=x\ (\text{重複解}),\ -\frac{x}{2}$$

ですから，Pを通る2つの接線の傾きは

$$m_1=3x^2,\quad m_2=\frac{3}{4}x^2$$

です。

さて，交角を求めるには，右の図において



$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

を使って，

$$\tan\theta=\frac{\left|3x^2-\dfrac{3}{4}x^2\right|}{\left|1+\dfrac{9}{4}x^4\right|}=\frac{9x^2}{9x^4+4}$$

後半の $\tan\theta$ の最大となる x を求めるには微分してもよいし，$\tan\theta$ の逆数 $x^2+\dfrac{4}{9x^2}$ について **相加・相乗平均の関係** を考えてもよいでしょう。答は $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ です。

(曲線の)交角の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆曲線のなす角を，その交点の近所だけできめる，というこの定義は，いささか実際的でないような気もするが，いかがなものであろう。

◆ 曲線の **交角** というのは，2つの曲線が交わるとき，交点における接線のなす角のことです。では，ともかく，これを：——

■練習1. 2つの曲線 $xy=2$ と $x^2-y^2=3$ の交点 A(2, 1) における交角を求めよ。

ヒント　$xy=2$ の両辺を x で微分しますと

$$xy'+1\cdot y=0 \quad \therefore \quad y'=-\frac{y}{x}$$

ゆえに，Aにおける接線の傾き m_1 は

$$m_1=-\frac{1}{2}$$

となります。

次に $x^2-y^2=3$ の両辺を x で微分しますと，

$$2x-2yy'=0 \quad \therefore \quad y'=\frac{x}{y}$$

ゆえに，Aにおける接線の傾き m_2 は

$$m_2=\frac{2}{1}=2$$

$$\therefore \quad m_1m_2=-1$$

これからわかるように，Aにおける2接線は直交しますから，なす角は90°です。

答　90°

注　実は上の問題で交点を特にとり出す必要もなかったのです。つまり，$xy=2$, $x^2-y^2=3$ の交点を (α, β) としますと，

$$y'=-\frac{y}{x} \quad \therefore \quad m_1=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$$y'=\frac{x}{y} \quad \therefore \quad m_2=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\therefore \quad m_1m_2=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=-1$$

となるからです。こんなことが割合多いので，一般に，**交点は必要になるまで求めないでおく** のがコツです。

■練習2. 2つの放物線 $y^2=4(x+1)$, $y^2=4(1-x)$ の交角を求めよ。

解　交点を $A(\alpha, \beta)$ とする。

$y^2=4(x+1)$ の両辺を x で微分すると

$$2yy'=4 \quad \therefore \quad y'=\frac{2}{y}$$

$y^2=4(1-x)$ の両辺を x で微分すると

$$2yy'=-4 \quad \therefore \quad y'=-\frac{2}{y}$$

ゆえに，接線の傾き m_1, m_2 は

$$m_1=\frac{2}{\beta},\quad m_2=-\frac{2}{\beta}$$

で与えられる。ところが，交点Aにおいては

$$\beta^2=4(\alpha+1)$$
$$\beta^2=4(1-\alpha)$$
$$\therefore \quad 2\beta^2=4(\alpha+1)+4(1-\alpha)=8$$
$$\therefore \quad \beta^2=4$$
$$\therefore \quad m_1m_2=-\frac{4}{\beta^2}=-1$$

ゆえに2つの接線は直交する。すなわち交角は90°である。

答　90°

注　上の解も交点を求めないでやりましたが，もちろん，交点を求めて代入したほうが自然というものでしょう。ただ，上のような考え方がスゴク役に立つことが多いことをオボエテおいてください。

■練習3. 2つの円 $x^2+y^2+4x=1$, $x^2+y^2+2y=9$ の交角を求めよ。

ヒント　円ですから微分しないでもできますがここでは微分してやること。

答　$\frac{3}{4}\pi$

＊　＊　＊

◆ 次に総合的な問題をいくつかやってみましょう。

練習 4. 曲線 $y=x+\frac{1}{x}$ 上の点Pにおける接線が原点OとPを結ぶ直線と直交するとき，線分 OP の長さを求めよ。（工学院大）

ヒント　点Pの座標を $\left(t,\ t+\frac{1}{t}\right)$ としますと，Pにおける接線の傾きは $\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$ で，OP の傾きは $\frac{1}{t}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ ですから，その直交条件から

$$\frac{t^2-1}{t^2}\cdot\frac{t^2+1}{t^2}=-1 \qquad \therefore\ t^2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となります。　　　　答　$\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

練習 5. 曲線 $y=3\log x$ の上の2点 P，Q の x 座標をそれぞれ a，b とし，$a<b$ とする。ここに対数の底は e である。

(1) P，Q におけるこの曲線の2つの接線のなす鋭角が 45° であるとき，a，b のみたす条件を求めよ。

(2) また，(1)における a，b が共に整数であるとき，a，b を求めよ。

（東京理大）

ヒント　点 $P(a,\ 3\log a)$ における接線の傾きは $\frac{3}{a}$，点 $Q(b,\ 3\log b)$ における接線の傾きは $\frac{3}{b}$ ですから，それらが x 軸の正の向きとなす角を α，β とすると

$$\tan\alpha=\frac{3}{a},\quad \tan\beta=\frac{3}{b}$$

題意により

$$\tan(\alpha-\beta)=1$$

$$\therefore\ \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$$\therefore\ ab+3(a-b)+9=0$$

この整数解を求めることは数Iの範囲ですよ（☞「数I」p.160 を参照してください）。答は $(a,\ b)=(2,\ 15)$，$(1,\ 6)$ です。

*　　*　　*

◆ 曲線の交角について忘れてならないのは **直交曲線群** を求める問題です。ここでは，次の練習をしておきましょう。微分方程式の解法についてはその項目を参照してください。

練習 6. 曲線群 $y^2=x+C$（Cは任意の定数のすべての曲線に直交する曲線をすべて求めよ。　　（滋賀大）

解　$y^2=x+C$ の両辺を x で微分して

$$2y\frac{dy}{dx}=1 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$$

ゆえに，求める曲線群の微分方程式は

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

である。変数分離型の微分方程式であるから

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\therefore\ \log|y|=-2x+C'$$

$$\therefore\ y=\pm e^{-2x+C'}$$

$$\therefore\ y=Ce^{-2x}\quad (C\text{は任意定数})$$

答　$y=Ce^{-2x}$

練習 7. 曲線群 $y=ax^4$ のすべてに直交する曲線で点 (1, 1) を通るものを求めよ。

ヒント　$y=ax^4$ を変形して

$$yx^{-4}=a$$

両辺を x で微分しますと

$$y(-4x^{-5})+\frac{dy}{dx}x^{-4}=0$$

つまり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{x}$$

よって，求める曲線については

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$$

これは **変数分離形の微分方程式** です。

$$\therefore\ \int xdx+4\int ydy=0$$

$$\frac{x^2}{2}+2y^2=C$$

これが点 (1, 1) を通るから，……

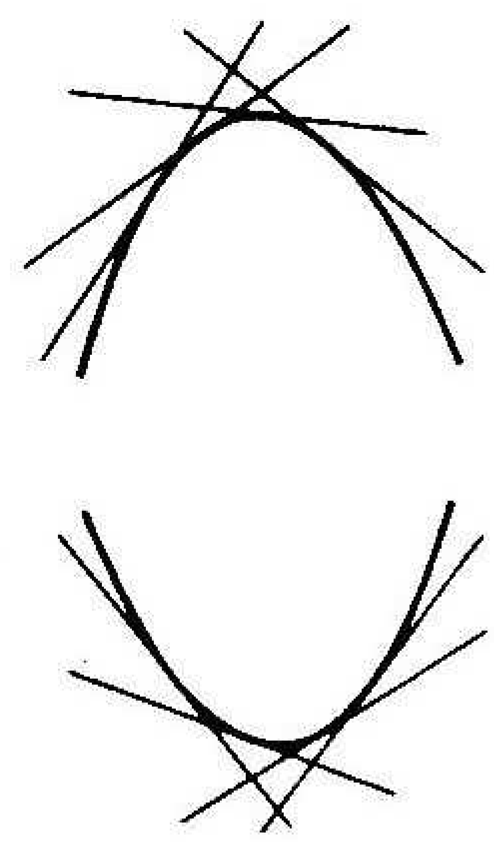
答　$x^2+4y^2=5$

① (曲線の)凹凸と変曲点の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆いつか試験の答案にこんなのがあった。……
ユエニコノ曲線ハ〜ニオイテ上ニデコ，〜ニオイテ上ニボコデアル，減点すべきや否や？

◆ 曲線が右の図の上のように上のほうにデッパッテいるとき，**上に凸**（とつ）であるといい，下のように下のほうにデッパッテいるとき，**下に凸**であるといいます。しかし，デッパルなどということばは数学的とはいいがたい。



接線を次々に引いてみますと，上に凸のときには接線の傾きがしだいに小さくなっていくし，下に凸のときには接線の傾きがしだいに大きくなっています。そこで，次のように定義します。

$y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ において

$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ のとき，上に凸

$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ のとき，下に凸

である。それでは $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ のときはどうか。

これは，上に凸のこともあれば下に凸のこともあり，どちらでもないこともありますから，グラフをかいて調べることにしておくほうが無難というもの，です。

上に凸という代わりに，下に凹（おう）
下に凸という代わりに，上に凹
ということもあります。

では，次の練習をやってみませんか。

■**練習 1.** $f(x)=x^2+4x+2$ の凹凸を吟味せよ。

（ヒント） $f'(x)=2x+4$，$f''(x)=2>0$

ゆえに，この関数の曲線は下に凸であることがわかります。もっとも，これは計算しないでも，はじめからわかっていることですが，それでも，わざわざ2回微分して調べるのが数学的というものです。

■**練習 2.** $f(x)=x^3$ の凹凸を吟味せよ。

（解） $f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$

ゆえに，$x>0$ では下に凸，$x<0$ では上に凸で，$x=0$ では $f''(x)$ が負から正に変わるから **変曲点** である。

*　*　*

◆ 曲線が凸から凹に，または凹から凸に変わる点を変曲点といいます。正確には，

$f''(x)$ の符号が変わる曲線上の点を
変　曲　点

というのです。

（注） 昔は彎曲点（わんきょくてん）ともいったが，これは思えば妙な訳語である。ワンキョクする点なんてあるハズがない。それから，試験の答案にときどき変態点と書いたのを見うける。この人何を考えているのかなあ!?

■**練習 3.** $f(x)=x^4-6x^2+5$ の凹凸および変曲点を調べよ。

（ヒント） $f'(x)=4x^3-12x$
$f''(x)=12(x-1)(x+1)$

符号変化を表にしてみますと，次の通り。

x		-1		1	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$(-1,0)$ 変曲点	$\cap$	$(1,0)$ 変曲点	$\cup$

ここに∪は下に凸，∩は上に凸を表しています。答は今さらいうまでもありますまい!!

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 4. $y=x^3-3x^2+4$ の変曲点を求めよ。また，その変曲点は，この3次曲線の点対称の中心であることを示せ。

ヒント $y=x^3-3x^2+4$

$\therefore\ y'=3x^2-6x,\ y''=6x-6$

ゆえに変曲点はA (1, 2) であることがわかります。次に，この点Aが点対称の中心であることをいうには2つの方法があります。

この点Aを通る任意の直線ともとの曲線との交点の中点がAと一致することを証明する方法，もう1つは，座標系を平行移動して，新しい原点をAにもってゆくと，新しい方程式は原点に関して対称，したがって奇関数になるハズです。

ここでは前者の方法でやっておきましょう。後者の方法については「数Ⅰ」(☞p.252) を参照してください。さて：──

点 (1, 2) を通り，傾きmの直線 l は

$$l: y-2=m(x-1)$$

これと $y=x^3-3x^2+4$ との交点については

$$mx+(2-m)=x^3-3x^2+4$$

$$\therefore\ x^3-3x^2-mx+(2+m)=0$$

（コレハ必ズ $x-1$ ヲ因数ニモツカラ）

$$\therefore\ (x-1)\{x^2-2x-(m+2)\}=0$$

ゆえに l と曲線との交点のx座標は

$$x^2-2x-(m+2)=0$$

の2つの解 x_1, x_2 で，解と係数の関係から

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

となってAと一致することがわかります。なるほど，Aは2交点の中点，すなわち点対称の中心となるわけだ。

練習 5. 曲線 $y=e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$ $(a>0)$ に原点を通る接線が2本引けるとき，その2接点の間の部分に変曲点がただ1つあることを証明せよ。 (北大)

ヒント まず，何はともあれ，原点から引いた接線の接点を求めなければなるまい。

$$y=e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$

$$\therefore\ y'=-(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} \quad \cdots\cdots①$$

いま，曲線上の点 (α, β) における接線を l としますと

$$y-\beta=-(\alpha-a)e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}(x-\alpha)$$

これが原点を通るのですから

$$-\beta=-(\alpha-a)e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}(-\alpha)$$

ところが $\beta=e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}$ $(\neq 0)$ ですから

$$\alpha^2-a\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots②$$

が得られます。これの2つの実数解 α_1, α_2 が2接線の接点のx座標を与えるわけです。したがって，実数解をもつ条件から

$$a^2-4>0 \quad \cdots\cdots③$$

さあ，前半は終わった。次は，変曲点だ!! ①から

$$y''=-1\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}+(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$

$$=\{(x-a)^2-1\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$

ですから $y''=0$ を解いて

$$(x-a)^2=1 \quad \therefore\ x=a\pm 1$$

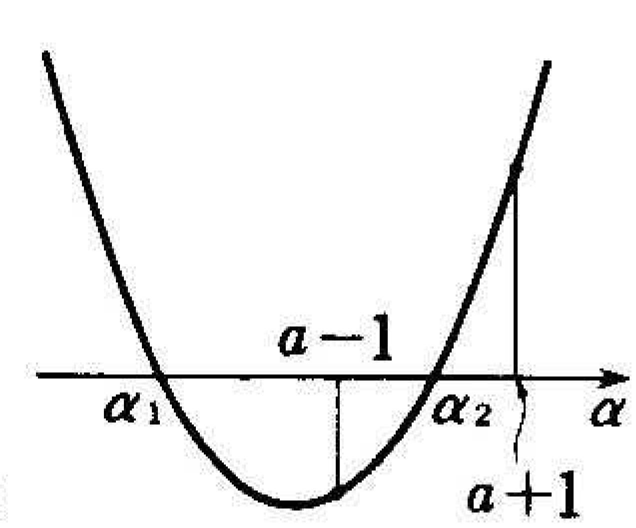
この2つの変曲点（のx座標）のうち一方だけが②の2つの解の間にあることを示せばいいわけだ。それは数Ⅰの問題ですよ!!

$$f(\alpha)=\alpha^2-a\alpha+1$$

とおくと，

$$f(a+1)=(a+1)^2-a(a+1)+1$$
$$=2+a>0$$
$$f(a-1)=(a-1)^2-a(a-1)+1$$
$$=2-a<0$$

となります。ここのところがピンとこなかったら右のようにグラフをかいてみると，変曲点の1つだけが2つ解の間にあることがハッキリわかるハズ。



* * *

◑整 多項式と凹凸

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈凹凸について知らんとすれば，まず整多項式の場合をマスターすべし。それも，3次，4次で結構ですよ。

◆ このセクションでは，多項式で表された曲線の**凹凸**（おうとつ）について練習しましょう。では，さっそくながら，これを：——

■練習 1. 曲線 $y=x^3-3x^2$ の凹凸を吟味せよ。

（解） $y'=3x^2-6x$

$y''=6x-6=6(x-1)$

したがって，次の凹凸表が得られます。

x	……	1	……
y''	$-$	0	$+$
y	∩	-2 変曲点	∪

答 $\begin{cases} x<1 \text{ で上に凸，} 1<x \text{ で下に} \\ \text{凸，点 } (1,\ -2) \text{ が変曲点。} \end{cases}$

■練習 2. 曲線 $y=x^3-2ax^2+a^2x$ の凹凸を調べよ。

（解） $y'=3x^2-4ax+a^2$

$$y''=6x-4a=6\left(x-\frac{2}{3}a\right)$$

ゆえに

$$\begin{cases} x<\dfrac{2}{3}a \text{ のとき　上に凸} \\ x=\dfrac{2}{3}a \text{ のとき　変曲点} \left(\dfrac{2}{3}a,\ \dfrac{2}{27}a^3\right) \\ x>\dfrac{2}{3}a \text{ のとき　下に凸} \end{cases}$$

■練習 3. 曲線 $y=x^3-3x^2-12x+1$ はただ1つの変曲点をもち，そのグラフは変曲点に関して対称であることを示せ。

（解） $y'=3x^2-6x-12$，$y''=6x-6$

であるから点 $(1,\ -13)$ は変曲点である。さて，点 $(1,\ -13)$ が原点にくるように平行移動すると，点 $(x,\ y)$ に対応する点 (X,Y) に対して

$$X=x-1,\quad Y=y+13$$

なる関係があるから

$$x=X+1,\quad y=Y-13$$

を与えられた方程式に代入すると

$$Y-13=(X+1)^3-3(X+1)^2-12(X+1)+1$$

$$\therefore\quad Y=X^3-15X$$

となる。これは奇関数だから，原点について対称である。よって，証明された。

■練習 4. $y=(1-x^2)^3$ の凹凸および変曲点を吟味せよ。

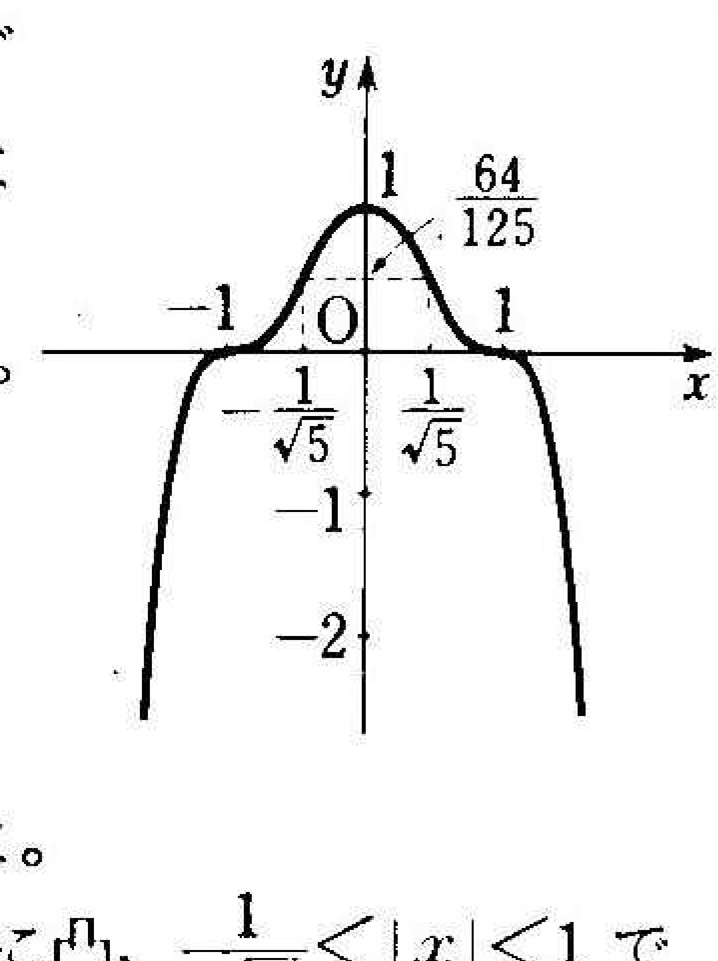
（ヒント） $y'=-6x(1-x^2)^2$

$\therefore\quad y''=-6(x^2-1)(5x^2-1)$

ですから，凹凸表は次のようです。

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1	
y''	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$
y	∩	0 変曲点	∪	$\frac{64}{125}$ 変曲点	∩	$\frac{64}{125}$ 変曲点	∪	0 変曲点	∩

なお，ついでにグラフを示すと右のようになります。



では，もう1つやってみませんか。

■練習 5. 曲線

$y=|x^2(1-x^2)|$

の凹凸を吟味せよ。

答 $\begin{cases} |x|>1 \text{ で下に凸，} \dfrac{1}{\sqrt{6}}<|x|<1 \text{ で} \\ \text{上に凸，} |x|<\dfrac{1}{\sqrt{6}} \text{ で下に凸。} \end{cases}$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 6. 点 (1, 25) を通る4次曲線 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ が直線 $x+y=1$ と2点で接し，$\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ においてのみ上に凸である。a, b, c, d, e の値を求めよ。（関西医大）

ヒント　$y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$y''=12ax^2+6bx+2c$

ですから，

$$2(6ax^2+3bx+c)=0$$

の解が $\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$ なのでしょう。

そこで，解と係数の関係から

$$\frac{1+\sqrt{7}}{2}+\frac{1-\sqrt{7}}{2}=-\frac{3b}{6a}$$

$$\therefore\ b=-2a \qquad \cdots\cdots①$$

$$\frac{1+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{2}=\frac{c}{6a}$$

$$\therefore\ c=-9a \qquad \cdots\cdots②$$

また，$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ と $y=-x+1$ が2点で接するというのですから，y を消去して得られる

$$ax^4+bx^3+cx^2+(d+1)x+(e-1)=0$$

の左辺は $a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ の形に書けるハズ（もちろん $\alpha\neq\beta$ ですよ）。このことから

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{2a} \qquad \cdots\cdots③$$

$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=\frac{c}{a} \qquad \cdots\cdots④$$

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{d+1}{2a} \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$(\alpha\beta)^2=\frac{e-1}{a} \qquad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つのです。

①と③から

$$\alpha+\beta=1 \qquad \cdots\cdots⑦$$

②，④から

$$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=\frac{c}{a} \qquad \therefore\ 1+2\alpha\beta=-9$$

$$\therefore\ \alpha\beta=-5 \qquad \cdots\cdots⑧$$

⑦，⑧を⑤，⑥に代入して

$$10a=d+1 \qquad \cdots\cdots⑨$$

⑥，⑧から

$$25a=e-1 \qquad \cdots\cdots⑩$$

さらに，点 (1, 25) を通るのですから

$$25=a+b+c+d+e \qquad \cdots\cdots⑪$$

こうして，a, b, c, d, e が求められます。

答　$a=1$, $b=-2$, $c=-9$, $d=9$, $e=26$

注　$a>0$ という条件を忘れないようにしてください。これを忘れても答だけは正しく出るからキケンだ!!

練習 7. $f(x)=x^3+3x^2-4x-6$ とするとき，関数 $y=f(x-a)+b$ のグラフの変曲点が原点と一致するように b を定めよ。（東京電機大）

解　$y=f(x-a)+b$

$\therefore\ y'=f'(x-a)$, $y''=f''(x-a)$

ところが

$f'(x)=3x^2+6x-4$, $f''(x)=6x+6$

であるから

$$y''=6(x-a)+6=6(x-a+1)$$

ゆえに，変曲点の x 座標は

$$a-1=0 \qquad \therefore\ a=1$$

そして，このとき y 座標も 0 であるから

$$b=0-f(0-1)=-f(-1)$$
$$=-(-1+3+4-6)=0$$

答　$b=0$

練習 8. x の3次関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$(a\neq0)$ について

(1) 任意の実数 β に対して

$$f(x)=a(x-\beta)^3+\frac{f''(\beta)}{2}(x-\beta)^2+f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta) \qquad \cdots\cdots①$$

と表せることを示せ。

(2) 特に点 $(\beta,\ f(\beta))$ が曲線の変曲点のとき，①の右辺はどのようになるか。（青山学院大）

答　$a(x-\beta)^3+f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$

◯分数関数と凹凸

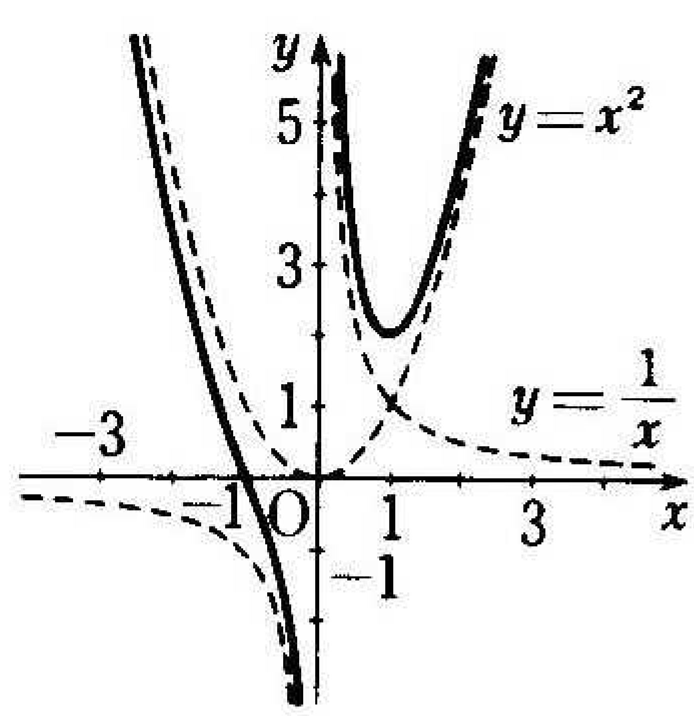
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈分数関数の２次導関数は意外とめんどうになります。まして凹凸の吟味は頭痛のタネと知るべし。忍耐，ニンタイ。

◈ このセクションでは分数関数について凹凸の扱い方を練習するのが目的です。では，これをやってみませんか。

練習 1. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ のグラフの凹凸と変曲点を調べよ。

ヒント　$y=x^2$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフをべつべつにかいて合成してみますと，右のようになります。してみると，y 軸の左のほうではどうやら下に凸から上に凸に変わり，y 軸の右のほうでは下に凸になりそうだ。変曲点は１個にちがいない。では，計算で調べてみようか。



解　$y=x^2+\dfrac{1}{x}=x^2+x^{-1}$

$\therefore\quad y'=2x-x^{-2}$

$\therefore\quad y''=2+2x^{-3}=\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$

ゆえに凹凸表は下のようになる。

x		-1		0	
y''	$+$	0	$-$	|	$+$
y	∪	0 (変曲点)	∩	|	∪

答 $\begin{cases} x<-1 \text{ で下に凸，} -1<x<0 \text{ で上に凸，} 0<x \text{ で下に凸。変曲点は } (-1,\ 0) \end{cases}$

練習 2. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ のグラフの凹凸を調べよ。

ヒント　このままで微分してもよいが，割ってからやったほうが少しラクでしょう。

つまり

$$\begin{array}{r|rrrr} & & & 1 & \\ 1\ 0\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1\ 0 \\ \hline & & & 1 & 0 \end{array}$$

$y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$

$\quad =x+x(x^2-1)^{-1}$

$\therefore\quad y'=1+x\cdot(-1)(x^2-1)^{-2}(2x)$
$\qquad +1\cdot(x^2-1)^{-1}$
$\quad =1+(x^2-1)^{-1}-2x^2(x^2-1)^{-2}$

$y''=(-1)(x^2-1)^{-2}(2x)$
$\qquad -2x^2\cdot(-2)(x^2-1)^{-3}(2x)$
$\qquad -4x(x^2-1)^{-2}$
$\quad =-6x(x^2-1)^{-2}+8x^3(x^2-1)^{-3}$
$\quad =\dfrac{-6x(x^2-1)+8x^3}{(x^2-1)^3}=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

あとは，べつにめんどうはないでしょう。

答 $\begin{cases} x<-1 \text{ で上に凸，} -1<x<0 \text{ で下に凸，} 0<x<1 \text{ で上に凸，} 1<x \text{ で下に凸；変曲点は } (0,\ 0) \end{cases}$

*　*　*

◈ 次に，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 3. 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)^2}$ について

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極値および曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求め，この曲線の概形をかけ。

（佐賀大）

ヒント　微分して

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2x+2)-(x^2+2x+3)\cdot2}{(x-1)^3}$$

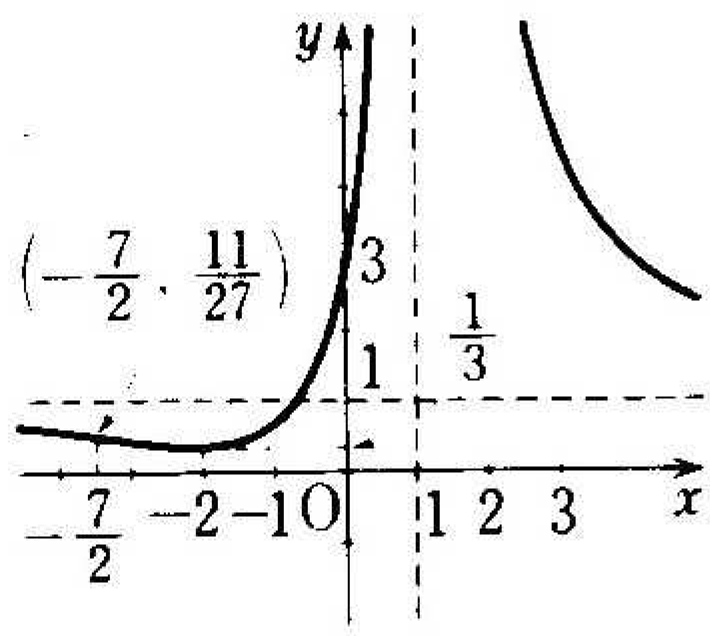
$$=\frac{-4(x+2)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-4\{(x-1)\cdot1-(x+2)\cdot3\}}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{4(2x+7)}{(x-1)^4}$$

変曲点は　$\left(-\frac{7}{2},\ \frac{11}{27}\right)$

また，グラフは右のようになります。



では，もう1つやってみませんか。

練習 4. 関数

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x-2}$$

について次の各問に答えよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$ を求め，$f(x)$ の増減，極値また $f(x)$ の表す曲線の凹凸を調べよ。

(2) (1)の結果を用いて $f(x)$ のグラフをかけ。　　　　（岩手大）

ヒント　$f'(x)=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

$$f''(x)=\frac{12}{(x-2)^3}$$

となります。これから $f(x)$ の増減，凹凸表を作ると次のようです。

x		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$	
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f''(x)$	−	−	−		+	+	+
$f(x)$	↗	max. $5-2\sqrt{6}$	↘		↘	min. $5+2\sqrt{6}$	↗
		∩				∪	

また，漸近線を求めるには変形して

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x-2}=x+3+\frac{6}{x-2}$$

とすれば $y=x+3$ および $x=2$ であることがわかります。あるいは

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}-(ax+b)\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-a)x^2+(2a-b+1)x+2b}{x-2}$$

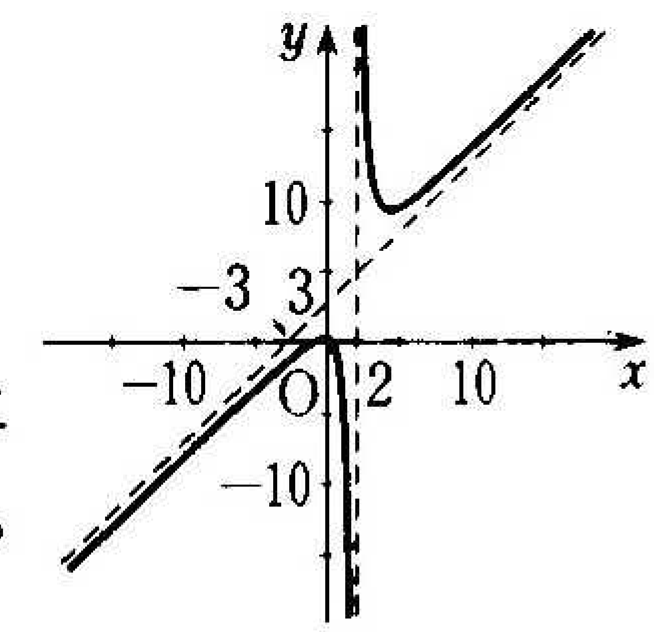
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-a)x+(2a-b+1)+\dfrac{2b}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=0$$

となるための条件は $a=1$，$2a-b+1=0$ ですから $a=1$，$b=3$，

つまり，漸近線は

$$y=x+3$$

となります。



グラフは右のようになります。いうまでもなく双曲線です。

＊　＊　＊

◆ 分数関数のときには凹凸の吟味はめんどうになりますので，特に要求されてない限り，やらなくてもよいと思ってさしつかえありません。

ところで，もう1つ：――

練習 5. 次の関数

$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\quad(a>0)$$

の増減，曲線の凹凸，漸近線を調べて，グラフをかけ。

解　$y'=-\dfrac{16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$

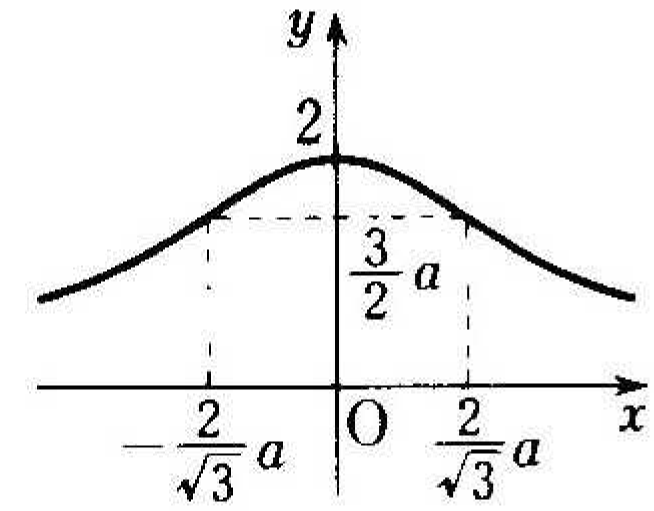
$$y''=\frac{16a^3(3x^2-4a^2)}{(x^2+4a^2)^3}$$

これから y の増減，曲線の凹凸などを表にすると次のようになる。

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}a$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}a$		∞
y'		+		+	0	−		−	
y''		+	0	−		−	0	+	
y	(0)	↗		↗	極大 2	↘		↘	(0)
		∪	変曲点 $\frac{3}{2}a$		∩		変曲点 $\frac{3}{2}a$	∪	

漸近線は x 軸で，また，明らかに y 軸について対称である。

これから右のようなグラフを得る。



無理関数と凹凸

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈無理関数の凹凸は計算してみるまでわからないことが多い。だから，計算しつつも，そこに期待がある。

◆　このセクションでは無理関数に関係した凹凸（おうとつ）や変曲点の問題を練習するのが目的です。凹凸や変曲点についてはその項目を参照してください。では，これを：——

練習 1. $y=\sqrt[3]{x^2}$ の凹凸，変曲点を調べよ。

(ヒント)　$y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore\quad y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\quad y''=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}$$

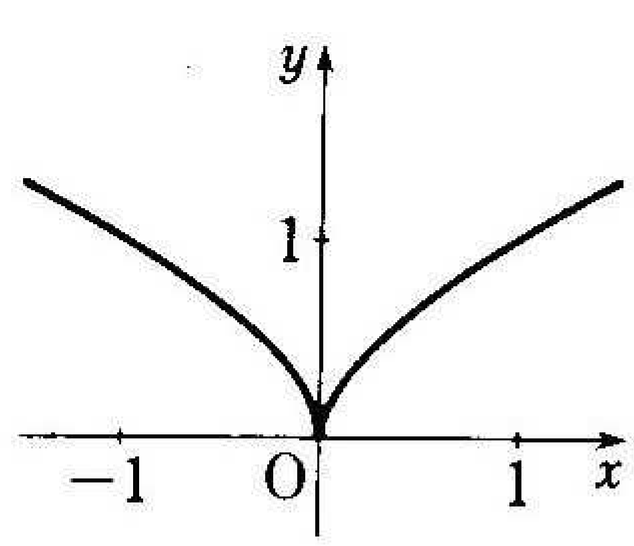
つまり　$y''=-\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに凹凸表は次のようになります。

x		0	
y''	$-$	|	$-$
y	$\cap$	0	$\cap$

つまり，$\sqrt[3]{x^2}$ は連続ですが，y' も y'' も $x=0$ で不連続。グラフは右の通り。なるほど，そうだったのか!!

もちろん変曲点はありませんよ。



練習 2. $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ の凹凸，変曲点を調べよ。

(ヒント)　$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}+\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}=\frac{-(x-3)}{4x^2\sqrt{x}}$$

ゆえに，凹凸表は次の通りです。

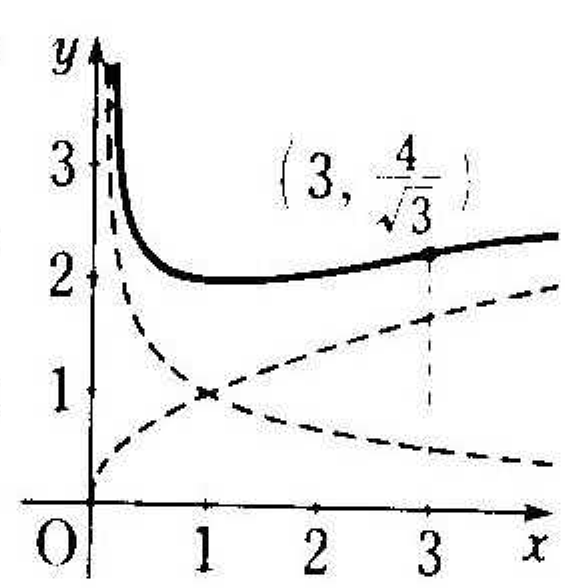
x	(0)		3	
y''		$+$	0	$-$
y		$\cup$	$\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (変曲点)	$\cap$

だから，

$0<x<3$ で下に凸，$3<x$ で上に凸

$\left(3,\ \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$ で変曲点をもつ。　答

(注)　ついでにグラフをかいてみますと，これは $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と $y=\sqrt{x}$ のグラフの合成で右のようになります。



練習 3. $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$

の凹凸，変曲点を吟味せよ。($a>0$, $b>0$)

(解)　$\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1-\sqrt{\dfrac{x}{a}}$

$$\therefore\quad y=b\left(1+\frac{x}{a}-2\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\therefore\quad y''=b\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{b(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{a\sqrt{x}}$$

ところが，

$$\sqrt{\frac{y}{b}}=1-\sqrt{\frac{x}{a}}\geqq 0$$

などから

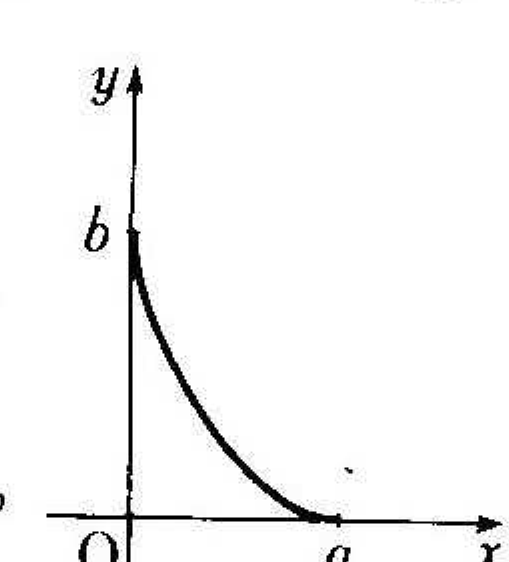
$0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b$　……①

したがって，①の範囲で

$y''>0$

ゆえに，この曲線は下に凸である。

(注)　グラフは第1象限にあって，右のようになります。



◆ 次に，やや総合的な問題を扱ってみませんか。まず，これです。

■練習 4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ について，次の問に答えよ。

(1) この関数の増減・極値・凹凸を調べてグラフをかけ。

(2) 原点をO，曲線 $y=f(x)$ 上の点をPとする。この曲線の接線が，直線OP に平行に引けるためには，Pの x 座標はどのような範囲の数でなければならないか。 （九州工大）

(解) (1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

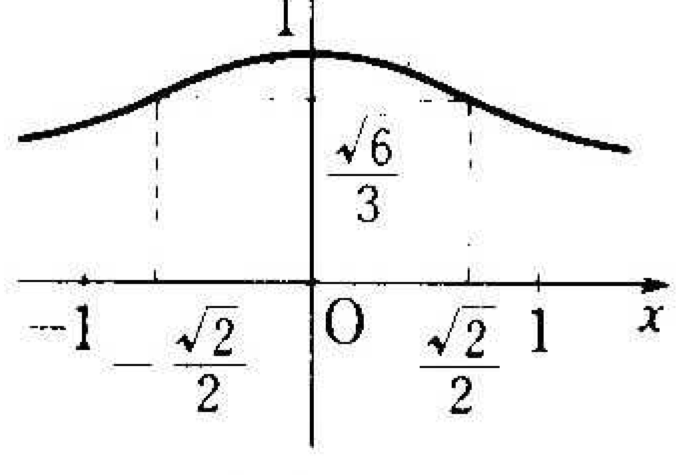
$$\therefore \quad f'(x)=\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$$

であるから，$f(x)$ の増減表，凹凸表は下のようである。

	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0		$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		1 (極大)		$\searrow$	
		$\cup$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (変曲点)	$\cap$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (変曲点)	$\cup$	

すなわち，$y=f(x)$ のグラフは極大点 $(0,\ 1)$，変曲点 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ をもち，y 軸について対称で，x 軸が漸近線である。グラフは右のようになる。



(2) 上の $f''(x)$ の符号変化からわかるように $f'(x)$ は $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で極大（かつ最大）$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ をとり，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で極小（かつ最小）$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ をとるから

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqq f'(x)\leqq\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

したがって，点 $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ に対して，OP の傾きは $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ であるから，OP に平行な接線が存在するための条件は

$$\left|\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\right|<\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

である。

$$\therefore \quad 4x^4+4x^2-27\geqq 0$$

$$\therefore \quad |x|\geqq\sqrt{\sqrt{7}-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots\boxed{答}$$

■練習 5. $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ について，y' および y'' を求め，y の増減・極値・グラフの凹凸を調べよ。 （福岡教育大）

(ヒント) $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$$

$$y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$+\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{-\frac{1}{3}}\times 2$$

$$-\frac{2}{9}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-1)^5(x+1)^4}}$$

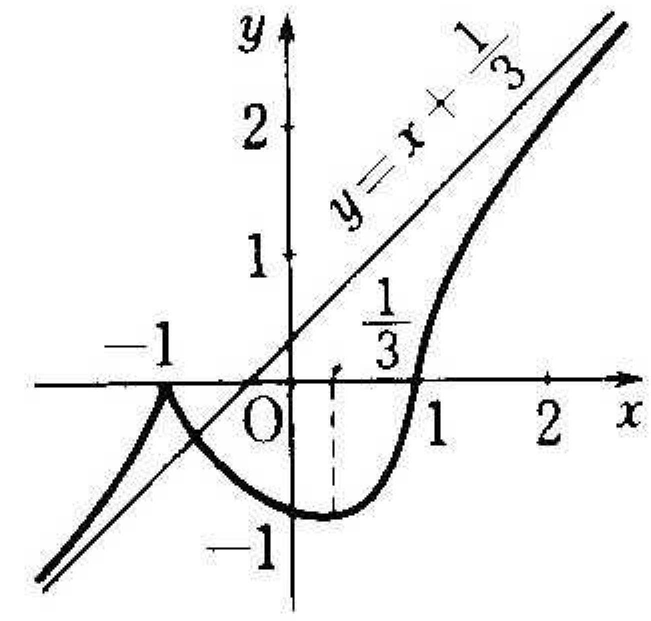
これらから

極大値 0

極小値

$-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ ($\fallingdotseq -1.06$)

変曲点は $(1,\ 0)$ などが得られ，グラフは右のようになります。



*　*　*

三角関数と凹凸

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆凹凸といったものがなぜ特にとりあげられるのであろう。キミ，それに答えられますか。凹凸の応用を考えてみたらどうかな。

◆ このセクションでは，三角関数の関係した関数の凹凸を練習するのが目的です。凹凸については（☞p. 116）を参照してください。

練習 1. $y=\sin 2x$ $(0<x<\pi)$ の凹凸を吟味せよ。

（解）　$y'=2\cos 2x$

$y''=-4\sin 2x$

ゆえに次の凹凸表を得る。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y''		$-$		$+$	
y		$\cap$	0 変曲点	$\cup$	

答 $\begin{cases} 0<x<\frac{\pi}{2} \text{ で上に凸} \\ \frac{\pi}{2}<x<\pi \text{ で下に凸} \\ \text{点 } (0,\ 0) \text{ が変曲点} \end{cases}$

練習 2. $y=2\sin x-\sin^2 x$ $(0<x<2\pi)$ の凹凸を吟味せよ。

（解）　$y'=2\cos x-2\sin x\cos x$

$=2\cos x-\sin 2x$

$y''=-2\sin x-2\cos 2x$

$=-2\sin x-2(1-2\sin^2 x)$

$=2(2\sin^2 x-\sin x-1)$

$=2(\sin x-1)(2\sin x+1)$

ゆえに次の凹凸表を得る。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{11}{6}\pi$		2π
y''		$-$	0	$-$		$+$		$-$	
y		$\cap$		$\cap$	$-\frac{5}{4}$ 変曲点	$\cup$	$-\frac{5}{4}$ 変曲点	$\cap$	

答 $\begin{cases} 0<x<\frac{7}{6}\pi \text{ および } \frac{11}{6}\pi<x<2\pi \\ \quad\text{で上に凸,} \\ \frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi \text{ で下に凸} \end{cases}$

練習 3. $y=x+2\sin x$, $0<x<2\pi$ の凹凸を吟味せよ。

（ヒント）　$y'=1+2\cos x$

$y''=-2\sin x$

オヤ，予想に反してラクらしいな，……。

答 $\begin{cases} 0<x<\pi \text{ で上に凸,} \\ \pi<x<2\pi \text{ で下に凸} \end{cases}$

練習 4. $y=\cos x(1+\sin x)$, $0<x<2\pi$ の凹凸を吟味せよ。

（ヒント）　$y=\cos x+\sin x\cos x$

$=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore\ y'=-\sin x+\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x$

$=-\sin x+\cos 2x$

$y''=-\cos x-2\sin 2x$

$=-\cos x-4\sin x\cos x$

$=-\cos x(4\sin x+1)$

さあ困ったぞ!!　$\cos x$ のほうはいいが，$\sin x=-\frac{1}{4}$ となる x がわからない。しかし，第3象限と第4象限に1つずつあることは確かです。このようなときには $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$ となるような第3象限の角を α とするとよいでしょう。そうすると第4象限の角は $(3\pi-\alpha)$ となるハズ。そこで，答はこの α を使って書けばいいでしょう。これは必ずやっておいてください，よ。

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. $0\leqq x\leqq 1$ において

$$f(x)=\begin{cases}3x & \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{3}\text{ のとき}\right)\\ 1 & \left(\frac{1}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\text{ のとき}\right)\\ 3-3x & \left(\frac{2}{3}\leqq x\leqq 1\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sin\pi x+b\sin 3\pi x)$$

とする。

(1) $g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$, $g'\left(\frac{1}{3}\right)=0$ が同時に満足されるように a, b を定めよ。

(2) $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフの対称軸を求めよ。

(3) $y=g(x)$ のグラフの凹凸をも考えて，$f(x)$，$g(x)$ の大小関係が x の範囲によってどのように変わるかを調べ，これらの関数のグラフをかけ。

(大阪教育大)

ヒント (1) $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(a\sin\frac{\pi}{3}+b\sin\pi\right)$

$$=\frac{a}{2}=f\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

$\therefore\quad a=2$

$$g'(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(a\cos\pi x+3b\cos 3\pi x),\quad a=2$$

であるから

$$g'(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(2\cos\pi x+3b\cos 3\pi x)$$

$$\therefore\quad g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(1-3b)=0\quad\therefore\quad b=\frac{1}{3}$$

(2) グラフをかいてみるとわかるハズ。

$0\leqq x\leqq 1$ を考慮して，求める対称軸は $x=\frac{1}{2}$ であることがわかります。

(3) $g(x)$ の凹凸が当面の問題点ですが，$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ で考えると次のようです。

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x\right)$$

ですから，

$$g'(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(2\cos\pi x+\cos 3\pi x)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\{2\cos\pi x+(4\cos^3\pi x-3\cos\pi x)\}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cos\pi x(4\cos^2\pi x-1)$$

$$\therefore\quad g''(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(-2\pi\sin\pi x-3\pi\sin 3\pi x)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\{-2\pi\sin\pi x-3\pi(3\sin\pi x-4\sin^3\pi x)\}$$

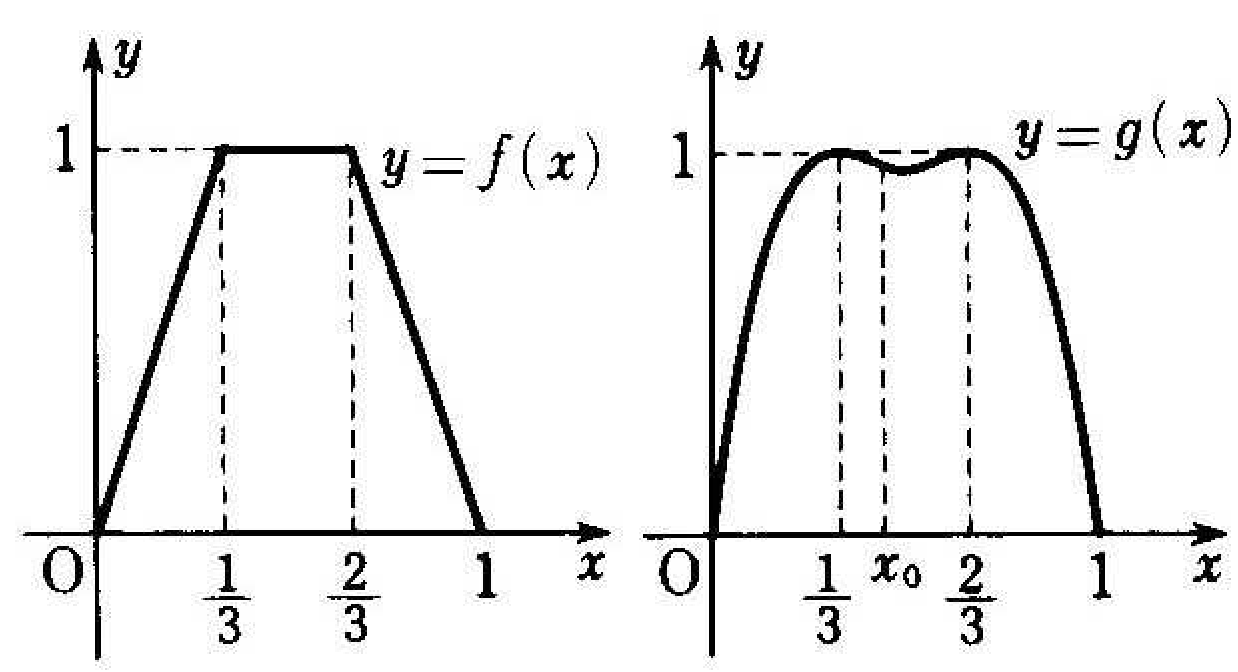
$$=\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}\sin\pi x(12\sin^2\pi x-11)$$

ゆえに $0<\sin\pi x<\sqrt{\frac{11}{12}}$ のとき $g''(x)<0$

したがって，$g(x)$ は上に凸となります。

$\sqrt{\frac{11}{12}}<\sin\pi x$ のときには $g''(x)>0$ ですから，$g(x)$ は下に凸となります。

そして，概形は下のようになります。



注 それにしても $\sin\pi x_0=\sqrt{\frac{11}{12}}$ といった結果はいささかフユカイです。$\sqrt{\frac{11}{12}}\fallingdotseq 0.9574$ ですから $x_0\fallingdotseq 0.41$ です。しかし，まさかこんな計算を試験場でやれるはずもない。

では，もう１つ：——

練習 6. $f(x)=e^x\sin x\quad(0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフの凹凸を吟味せよ。

ヒント $f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=2e^x\cos x$

答 $\begin{cases}0\leqq x<\frac{\pi}{2}\text{ で下に凸}\\ \frac{\pi}{2}<x\leqq\pi\text{ で上に凸}\end{cases}$

*　*　*

○対数関数と凹凸

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ああ，なぜにかくもデコ・ボコがとりあげられるのであろう。2次導関数などというものがあるからではあるまいか。

◆ 対数関数の入った関数の凹凸(おうとつ)を調べるのがこのセクションの目的です。では，さっそくやってみませんか。

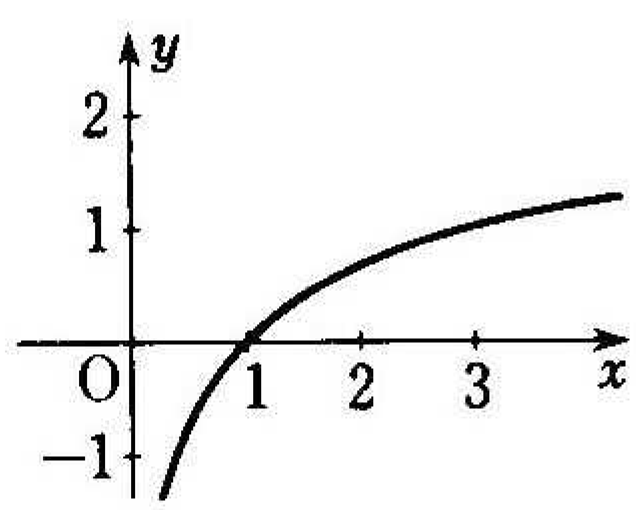
■練習 1. $y=\log x$ の凹凸を吟味せよ。

(解)　$y=\log x$

$$y'=\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{1}{x^2}$$

ゆえに凹凸表は下の通りである。

x	(0)　　(∞)
y''	$-$
y	∩



したがって，

$y=\log x$ のグラフは上に凸である。

■練習 2. $y=\log(x^2+1)$ の凹凸を吟味せよ。

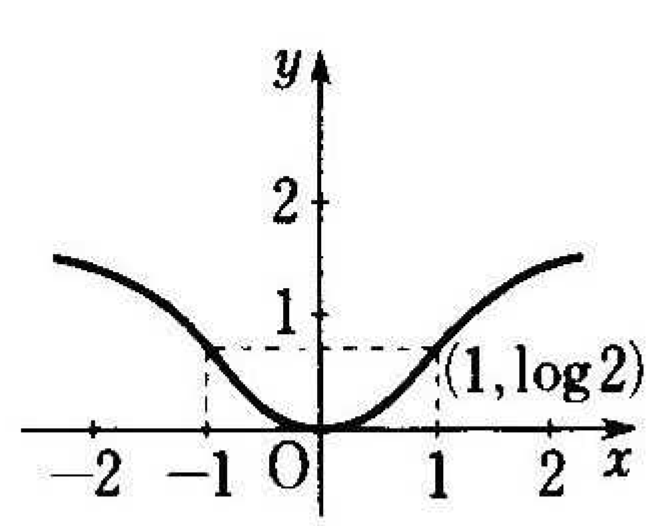
(ヒント)　$y=\log(x^2+1)$

$$y'=\frac{2x}{x^2+1}$$

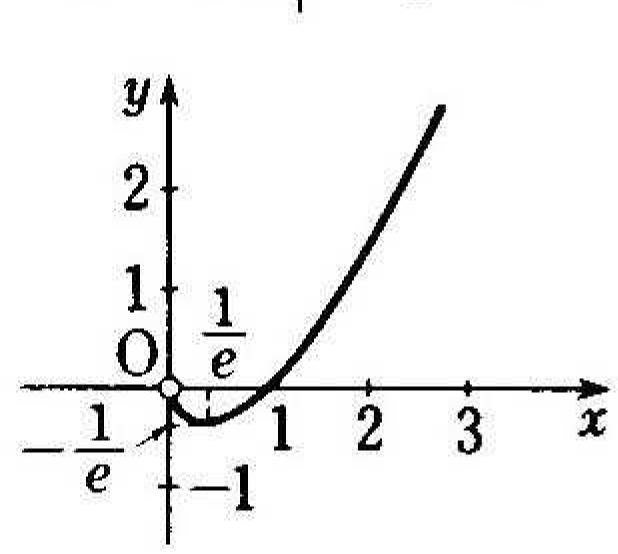
$$y''=\frac{(x^2+1)2-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

ゆえに $|x|<1$ で下に凸，$|x|>1$ で上に凸，点 $(\pm1,\ \log 2)$ は変曲点である。

(注)　参考のために $y=\log(x^2+1)$ のグラフをかいてみると，右のようになります。



■練習 3. 曲線　$y=x\log x$ の凹凸を吟味せよ。



(ヒント)　$y=x\log x$

$\therefore\quad y'=1+\log x$

$$\therefore\quad y''=\frac{1}{x}>0$$

ゆえに $y=x\log x$ は下に凸である。

(注)　$\displaystyle\lim_{x\to0}x\log x=\lim_{x\to0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$

これは $\dfrac{-\infty}{\infty}$ の形ですから，**ロピタルの定理**(☞p. 166) を適用しますと

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

となることがわかります。

また，$\displaystyle\lim_{x\to0}y'=-\infty$ ですから，原点の付近では x 軸に垂直になっているのです。

■練習 4. 曲線 $y=(\log x)^2$ の凹凸を吟味せよ。

(ヒント)　$y=(\log x)^2$

$$y'=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$y''=\frac{2}{x^2}(1-\log x)$$

ゆえに凹凸表は次のようになりましょう。

x	(0)		e	
y''		$+$	0	$-$
y		∪	1 (変曲点)	∩

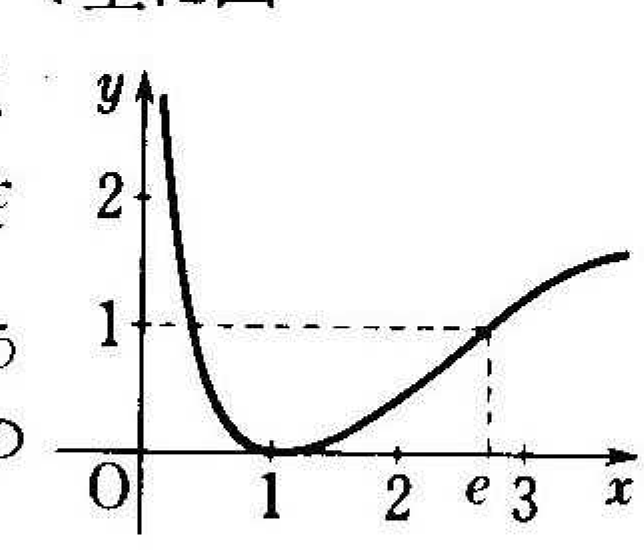
つまり　$0<x<e$ で下に凸

$e<x$　で上に凸

$(e,\ 1)$ が変曲点

(注)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y'=\lim_{y\to\infty}\frac{2\log x}{x}$

ロピタルの定理を使うと0に近づくので，右のようなグラフになる!!



*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

■練習 5. (1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の増減，極値，凹凸，変曲点を調べてグラフをかけ。

(2)　(1)の結果などを用いて，$e<\alpha<\beta$ のとき，不等式

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\log\alpha}{\log\beta}<\frac{\beta}{\alpha}$$

が成り立つことを証明せよ。（順天堂大）

ヒント　(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

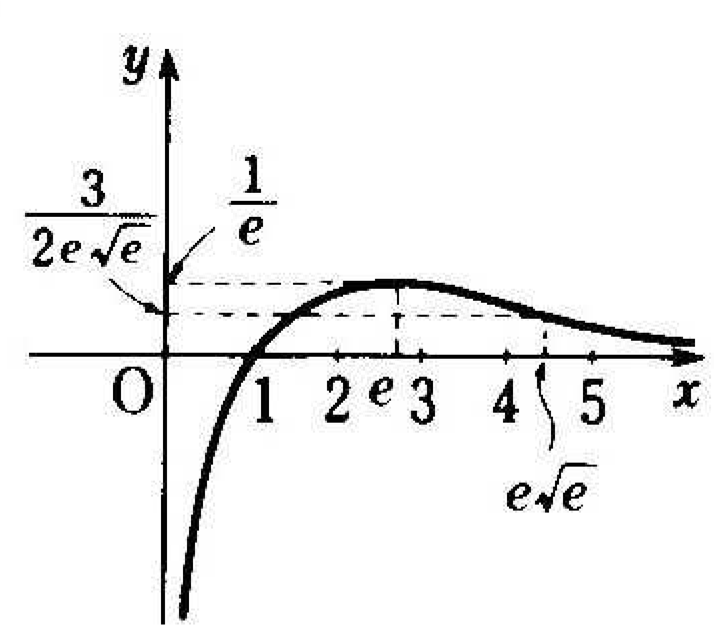
$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{x^2}\left\{x\cdot\frac{1}{x}-\log x\right\}$$

$$=\frac{1}{x^2}(1-\log x)$$

ですから $x=e$ で極大値をとり，その値は $\dfrac{1}{e}$ です。次に，

$$f''(x)=\frac{1}{x^3}(2\log x-3)$$

ですから $x<e^{\frac{3}{2}}$ で上に凸，$x>e^{\frac{3}{2}}$ で下に凸になります。変曲点はもちろん $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ です。これらからグラフは右の通り。



(2)　$e<\alpha<\beta$ ならグラフからわかるように

$$\frac{\log\alpha}{\alpha}>\frac{\log\beta}{\beta}$$

これを変形して求める不等式の左半分が得られます。

右半分については

$$\beta\log\beta-\alpha\log\alpha=\log\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}>0$$

から出てきます。

■練習 6. 関数 $f(x)=x(\log x)^2$ の増減，凹凸，変曲点などを調べてグラフをかけ。

ヒント　$f'(x)=1\cdot(\log x)^2+x\cdot 2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=(\log x)(\log x+2)$$

ゆえに $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)		$\frac{1}{e^2}$		1	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

したがって $f(x)$ は $x=\dfrac{1}{e^2}$ において極大値 $\dfrac{4}{e^2}$ をとり，$x=1$ で極小値 0 をとる。

次に，

$$f''(x)=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2(\log x+1)}{x}$$

であるから

$0<x<\dfrac{1}{e}$ で $f''(x)<0$：上に凸

$\dfrac{1}{e}<x$ で $f''(x)>0$：下に凸

で，点 $\left(\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{e}\right)$ は変曲点である。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{2(\log x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}(-2x\log x)=\lim_{x\to0}(-2)\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}(-2)\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(2x)=0$$

もういいでしょう。グラフをかくことはキミにまかせるとしよう。なお，上では，ロピタルの定理を2回も使いましたよ。

対数関数の入った関数の微分や積分は一般にめんどうはありませんが，グラフをかくことになると，$x\longrightarrow0$ の付近や $x\longrightarrow\infty$ のときめんどうになることが多いもの。そしてこのときには，必ずといっていいくらいロピタルの定理が効力を発揮するのです。だから，ぜひオボエテおいてくださいよ。

◐ 指数関数と凹凸

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数関数の入った関数を微分してもあまりめんどうにならない。だから2回してもめんどうにならない。なるほど凹凸のよい練習場!!

◆ 指数関数 e^x の入った関数の凹凸を練習するのがこのセクションの目的です。

■練習 1. 曲線 $y=e^x$ の凹凸を吟味せよ。

（解）　$y=e^x$, $y'=e^x$, $y''=e^x>0$

ゆえに $y=e^x$ は下に凸で，変曲点をもたない。

■練習 2. $y=xe^x$ の凹凸を吟味せよ。

（解）　$y=xe^x$

$y'=1\cdot e^x+xe^x$

$y''=e^x+1\cdot e^x+xe^x=(x+2)e^x$

ゆえに凹凸表をつくれば下のようになる。

x		-2	
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	$-\dfrac{2}{e^2}$ 変曲点	$\cup$

答 $\begin{cases} x<-2 \text{ で上に凸，} x>-2 \text{ で下} \\ \text{に凸，点 } \left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right) \text{ が変曲点。} \end{cases}$

■練習 3. $y=\dfrac{x^3}{e^x}$ の凹凸を吟味せよ。

（ヒント）　$y=\dfrac{x^3}{e^x}=x^3e^{-x}$ としたほうが計算がラクでしょう。さて，

$y'=x^3(-e^{-x})+3x^2e^{-x}$

$y''=x^3e^{-x}+3x^2(-e^{-x})$

$\quad +3x^2(-e^{-x})+6xe^{-x}$

$\quad =x(x^2-6x+6)e^{-x}$

$e^{-x}>0$ ですから，y'' の符号は

$x(x^2-6x+6)$

$=x\{x-(3+\sqrt{3})\}\{x-(3-\sqrt{3})\}$

によってきまります。

答 $\begin{cases} x<0 \text{ で上に凸，} 0<x<3-\sqrt{3} \\ \text{で下に凸，} 3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3} \\ \text{で上に凸，} 3+\sqrt{3}<x \text{ で下に凸，} \\ \text{変曲点の } x \text{ 座標は } 0,\ 3\pm\sqrt{3} \end{cases}$

＊　＊　＊

◆ 次には e^x と三角関数の入ったものについて練習してみましょう。

■練習 4. $f(x)=e^x\sin x$ が上に凸であるような x の範囲を求めよ。

（ヒント）　$f(x)=e^x\sin x$

$\therefore\ f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$

$\therefore\ f''(x)=(e^x\sin x+e^x\cos x)$

$\quad +(e^x\cos x-e^x\sin x)$

$\quad =2e^x\cos x$

これが負であるのは n を整数として

$$\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$$

のときです。

答　$\dfrac{\pi}{2}+2n\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi$

■練習 5. $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

のグラフの凹凸を吟味せよ。

（ヒント）　$f(x)=e^{-x}\cos x$

$\therefore\ f'(x)=e^{-x}(-\sin x)-e^{-x}\cos x$

$\quad =-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$

$f''(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$

$\quad +e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$\quad =\dfrac{2\sin x}{e^x}$

ゆえに

$0<x<\pi$ において　下に凸

$\pi<x<2\pi$ において　上に凸

となります。

◆ 次にやや総合的な問題をやってみませんか。まず，これから：——

練習 6. $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ について

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。

(2) 増減，極値，凹凸および変曲点を調べて表にせよ。

(3) (2)を用いて，グラフをかけ。

（大阪工大）

ヒント (1) $f(x)=(e^x+e^{-x})^{-1}$

$$\therefore\quad f'(x)=-(e^x+e^{-x})^{-2}\cdot(e^x-e^{-x})=-\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$f''(x)=2(e^x+e^{-x})^{-3}(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^{-2}(e^x+e^{-x})=\frac{2(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}$$

(2) $x>0$ で $f'(x)<0$ ですから　減少

$x<0$ で $f'(x)>0$ ですから　増加

で，$x=0$ において極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとることがわかります。また

$$e^{2x}-6+e^{-2x}=e^{-2x}(e^{4x}-6e^{2x}+1)$$
$$=e^{-2x}\{e^{2x}-(3+2\sqrt{2})\}\{e^{2x}-(3-2\sqrt{2})\}$$
$$=e^{-2x}\{e^x+(\sqrt{2}+1)\}\{e^x-(\sqrt{2}+1)\}\times\{e^x+(\sqrt{2}-1)\}\{e^x-(\sqrt{2}-1)\}$$

ですから

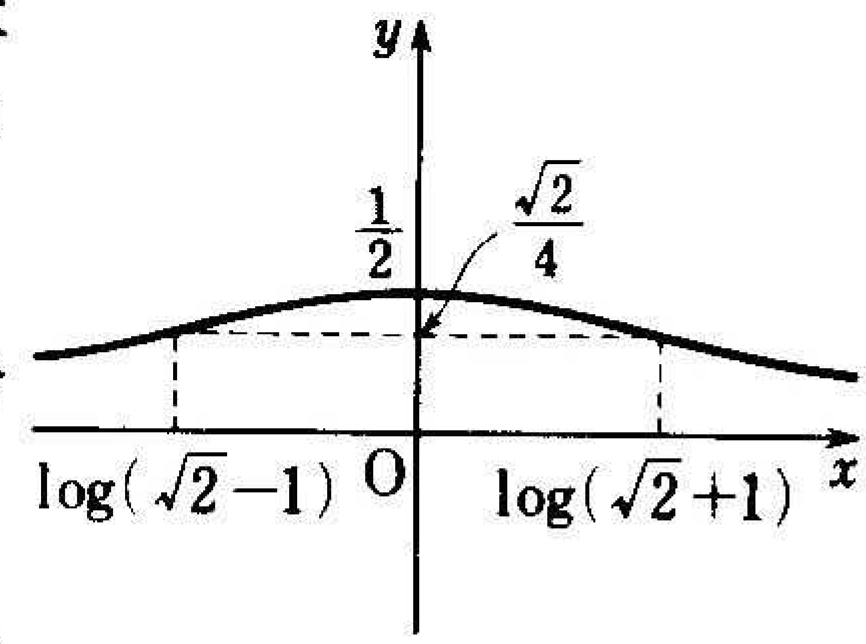
$e^x<\sqrt{2}-1$　すなわち　$x<\log(\sqrt{2}-1)$ のとき $f''(x)>0$ で $y=f(x)$ のグラフは下に凸，$\sqrt{2}-1<e^x<\sqrt{2}+1$ すなわち $\log(\sqrt{2}-1)<x<\log(\sqrt{2}+1)$ で上に凸，$\sqrt{2}+1<e^x$ すなわち $\log(\sqrt{2}+1)<x$ で下に凸です。

変曲点の x 座標はいうまでもなく

$$\log(\sqrt{2}\pm1)$$

で，このとき y 座標はいずれも $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ になります。

(3) グラフは右のようになります。



注 x の符号を変えると e^x と e^{-x} は入れかわるのですから $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ は偶関数です。つまり，y 軸について対称です。だから，$x\geqq0$ の部分を考えれば十分です。これに気がつけば少し計算がラクになりましょう。なお，

$$\log(\sqrt{2}-1)+\log(\sqrt{2}+1)=\log(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=\log1=0$$

となりますから

$$\log(\sqrt{2}-1)=-\log(\sqrt{2}+1)$$

です。

当然のことながら，ちょっと蛇足を：——

練習 7. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ の変曲点を求めよ。

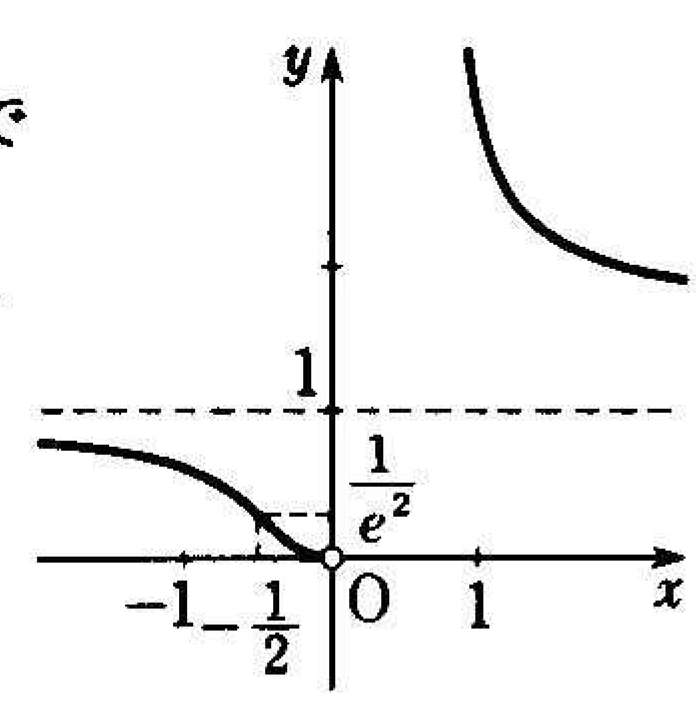
ヒント　$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore\quad f''(x)=\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=\frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

ゆえに，$x=-\dfrac{1}{2}$ で変曲点は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{e^2}\right)$ となるでしょう。

なお，グラフは右のようです。



注 ついでながら，この関数 $y=e^{\frac{1}{x}}$ のグラフをかけ，という問題について，原点の付近のもようを正しくかける人は少ないものです。次のことに注意すること!!

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-0}y'=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=0$$

グラフのかき方

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆グラフは初めの問題で，しかも，終わりの問題である。というのも，カンタンにして，フクザツだからである。

◆ グラフのかき方は基解で詳しくやってあることですが，微積では **凹凸** や **変曲点**，それから **漸近線** を求めることなどが新しく入ってきます。それらはそれぞれの項目を参照してください。ここでは，それらを総合してグラフをかくことに主眼点をおいてあります。では，次の練習 1. をやってみませんか。

練習 1. 次の曲線の増減，凹凸，変曲点を調べ，グラフをかけ。

$$y=x^3-3x^2+2$$

(解) $y=x^3-3x^2+2$

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y''=6x-6=6(x-1)$

であるから，下のような増減表および凹凸表を得る。

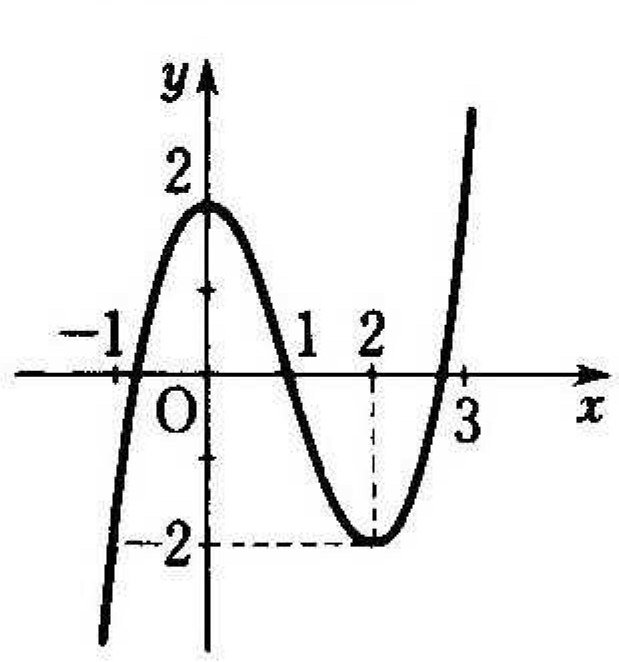
増減表

x		0		2	
y'	+		−		+
y	↗	2（極大）	↘	−2（極小）	↗

凹凸表

x		1	
y''	−		+
y	∩	0（変曲点）	∪

したがって求めるグラフは右のようになる。



(注) 変曲点(1, 0)がこの3次曲線の点対称の中心であることを忘れないように!!

練習 2. $y=\dfrac{x^3}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

(ヒント) 分子が3次式，分母が1次式ですから分子を分母で割ってみますと，

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

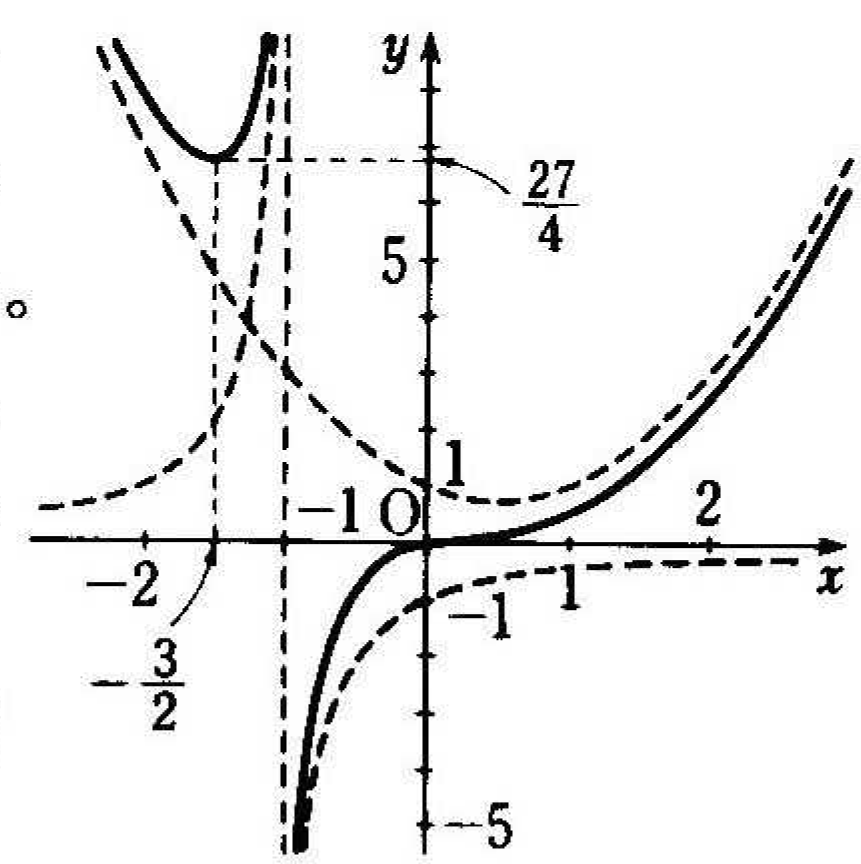
商は　x^2-x+1

余りは　-1

となります。

$$\therefore\quad y=x^2-x+1+\frac{-1}{x+1}$$

そこで，$y=x^2-x+1$，$y=\dfrac{-1}{x+1}$ のグラフを別々にかいて合成すると右のようになります。これで大体のもようはもうわかったのです。



$x=-1$ が漸近線であることもわかるし，$x\longrightarrow\pm\infty$ において $y=x^2-x+1$ に近づいていく，これを **漸近曲線**（ぜんきんきょくせん）といいます。

なお，$y=\dfrac{x^3}{x+1}$ で $x\fallingdotseq 0$ のときには分母はほとんど1で，$y=x^3$ にほぼ一致することに気がつくと，原点付近は簡単にかけます。

これらがわかった上で，微分して極値，変曲点などを求めて解答らしい解答をかく，ということになるのです。

では，それは必ずやってみてください。なお，極値はただ1つ $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{27}{4}\right)$ ですよ。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 3. $y=x+\dfrac{1}{|x-1|}$ の極値を求め，また，そのグラフをかけ。　(新潟大)

(解) $x>1$ のとき

$$y_1=x+\frac{1}{x-1}$$

とおくと，

$$y_1'=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$x<1$ のとき

$$y_2=x-\frac{1}{x-1}$$

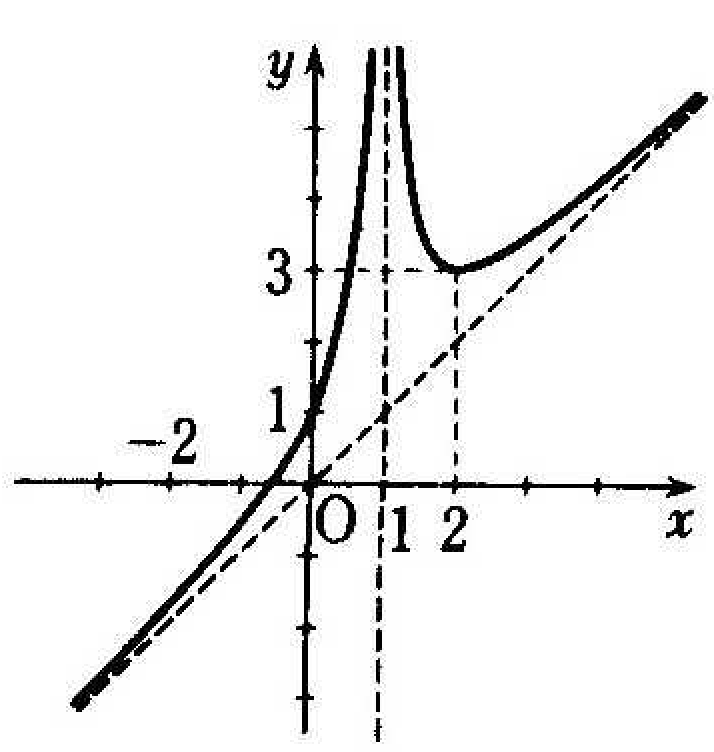
とおくと，

$$y_2'=1+\frac{1}{(x-1)^2}>0$$

ゆえに，増減表は次のようになる。

x		1		2	
y'	+	×	−	0	+
y	↗	×	↘	3 (極小)	↗

また，漸近線は $y=x$ および $x=1$ であるから，求めるグラフは右のようになる。



(注) $x>1$ の部分も $x<1$ の部分も，いずれも双曲線で，漸近線は共通なわけです。

練習 4. $0<x<\pi$ において，関数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

のグラフの概形をかけ。

(ヒント)　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

から

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

となります。分母は正ですから，分子の符号を求めたい。そこで，

$$g(x)=x\cos x-\sin x$$

とおきますと

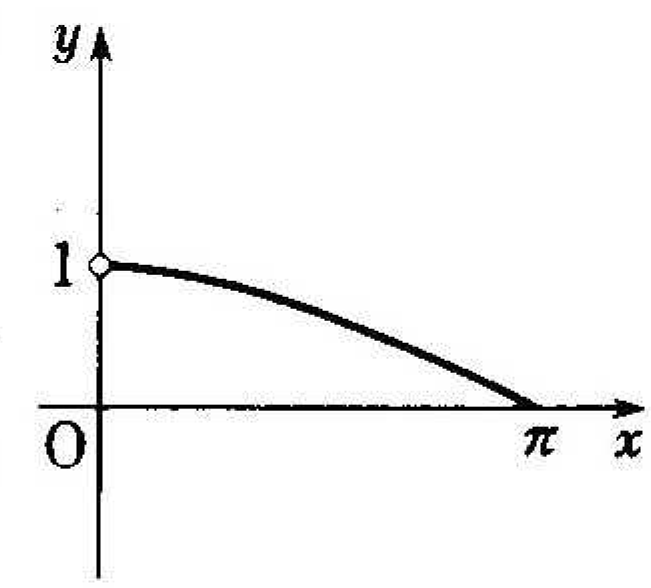
$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x$$
$$=-x\sin x<0$$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは $0<x<\pi$ において単調減少です。

また，$x=0$ では定義されていませんが $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ですから点 $(0,\ 1)$ に近づくこともわかります。さらに

$$f(\pi)=0$$

これらをもとにしてグラフをかくと右のようになります。



参考のために，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の値を下にあげておきましょう。

≪$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の値≫

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	(1)	0.9	0.870	2.3	0.324
0.1	0.998	1.0	0.841	2.4	0.281
0.2	0.993	1.2	0.777	2.5	0.239
0.3	0.985	1.4	0.704	2.6	0.198
0.4	0.974	1.6	0.625	2.7	0.158
0.5	0.959	1.8	0.541	2.8	0.120
0.6	0.941	2.0	0.455	2.9	0.082
0.7	0.920	2.1	0.411	3.0	0.047
0.8	0.897	2.2	0.367	3.1	0.013

*　　*　　*

◆ 上に示すように，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の値も求められているし，グラフも単純な曲線になりますが，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の積分

$$\int\frac{\sin x}{x}dx$$

は求めることができません。

定積分の特殊なものは求められますが，それもスゴク難しい。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◑漸近線の求め方

◈漸近線は数Iでも代幾でもやったのですが，一般的な扱い方はやってなかったのだ!! いまそれをとりあげるのです。

◆ 漸近線の求め方で大切なことが3つあります。第1は座標軸に平行な漸近線を求めること，第2は割ることによって求められる場合，そして第3は一般の場合の扱い方です。

では，まず，第1の場合から：——

＊　＊　＊

■練習 1. $y=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ の漸近線を求めよ。

ヒント これは，実は数Iの範囲です。漸近線は2つ。

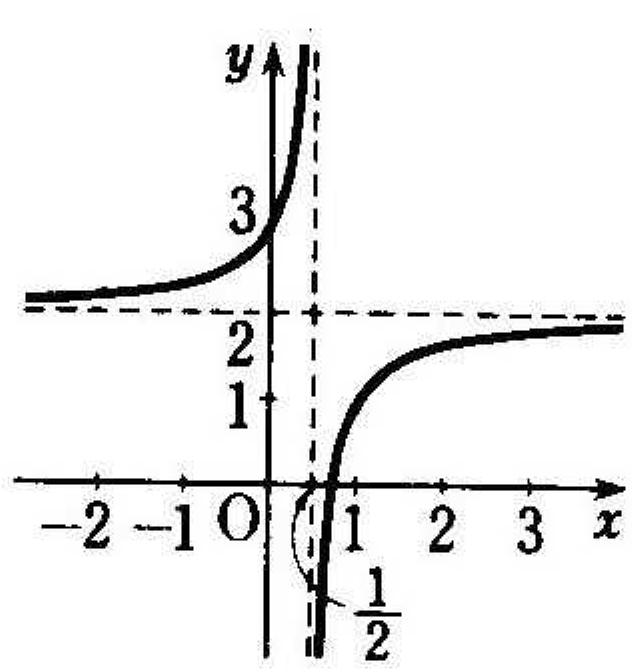
1つは 分母$=0$ とおいて得られる

$$x=\frac{1}{2}$$

です。もう1つは

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-3}{2x-1}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{1}{x}}=2$$



として得られる $y=2$ です。

答 $x=\dfrac{1}{2},\ y=2$

■練習 2. $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$ の漸近線を求めよ。

答 $x=-2,\ y=3$

＊　＊　＊

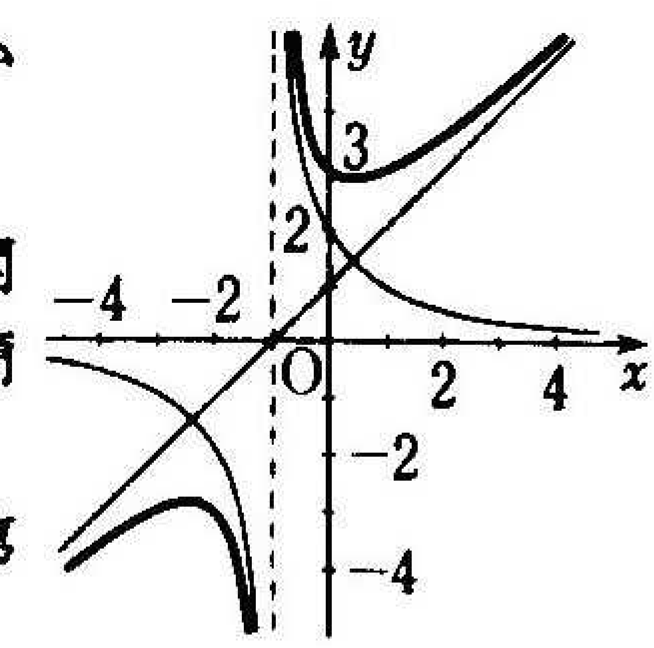
◆ 次は，第2の場合です。

■練習 3. $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ の漸近線を求めよ。

ヒント 分子を分母で割ると

$$y=x+1+\frac{2}{x+1}$$

$x=-1$ はもちろんで，もう1つは $y=x+1$ です。$y=x+1$ と $y=\dfrac{2}{x+1}$ のグラフを合成してみると，よくわかります。



注 このように有理関数の漸近線は割り算で簡単に求められるのです。

実は第1のタイプも第2に含まれます。

＊　＊　＊

◆ 第3は，いよいよ一般の場合です。

このときには

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

となるような a，b があれば $y=f(x)$ は $x\longrightarrow+\infty$ において $y=ax+b$ に漸近的に近づくし，

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

となるような a，b があれば $y=f(x)$ は $x\longrightarrow-\infty$ において $y=ax+b$ に漸近的に近づくのです。

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

ならばもちろん $x\longrightarrow+\infty$ においても，$x\longrightarrow-\infty$ においても，$y=f(x)$ は $y=ax+b$ に漸近的に近づくのです。

練習3. なら次のようになりましょう。

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x+1}-(ax+b)\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-a)x^2+(2-a-b)x+(3-b)}{x+1}$$

これが0になるための条件は

$$1-a=0,\ 2-a-b=0$$

$$\therefore\ a=1,\ b=1$$

ゆえに $y=x+1$ が $x\longrightarrow+\infty$ においても $x\longrightarrow-\infty$ においても漸近線になるのです。しかし，このようにめんどうにやらないでも，練習3. のようにできたのでした。しかし，次はそうはいきませんよ。

練習 4. $y=\sqrt[3]{x^2(x+3)}$ の漸近線を求めよ。

（解）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{\sqrt[3]{x^2(x+3)}-(ax+b)\}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(x+3)-(ax+b)^3}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}+(ax+b)\sqrt[3]{x^2(x+3)}+(ax+b)^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-a^3)x+(3-3a^2b)-\dfrac{3ab^2}{x}-\dfrac{b^3}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^2}+\left(a+\dfrac{b}{x}\right)\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}}+\left(a+\dfrac{b}{x}\right)^2}$$

$$=\begin{cases}a\neq1 : \pm\infty\\ a=1 : 1-b\end{cases}$$

であるから，これが0になるための条件は

$$a=1,\ b=1$$

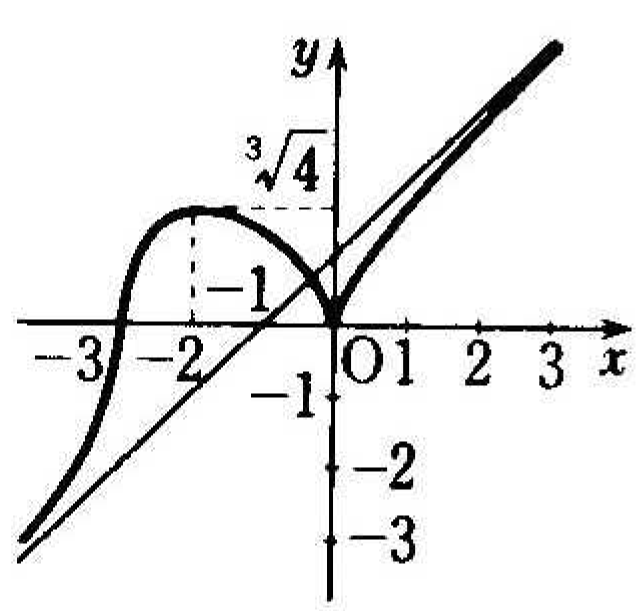
である。よって，求める漸近線は

$$y=x+1$$

である。

（注）参考のためグラフをかいてみると，右のようになります。

では，もう1つ——



練習 5. 曲線 $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ の漸近線を求めよ。

（ヒント）$x=1$ が漸近線であることは明らかです。さて，問題は y 軸に平行でない漸近線を求めること!!　さて：——

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-(ax+b)\right\}$ は $a\leqq0$ のとき $+\infty$ ですから，$a>0$ のときだけ考えれば十分!!　ところで，それは：——

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-(ax+b)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}-(ax+b)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^3+(2ab-a^2)x^2+(-2ab+b^2)x+b^2}{\sqrt{x-1}\{x\sqrt{x}+(ax+b)\sqrt{x-1}\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x+(2ab-a^2)+\dfrac{-2ab+b^2}{x}+\dfrac{b^2}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\left\{1+\left(a+\dfrac{b}{x}\right)\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right\}}$$

さて，詳しくはいうまい。これが0となるのは

$$1-a^2=0 \text{ かつ } 2ab-a^2=0$$

のとき，したがって，

$$a=1,\ b=\frac{1}{2}$$

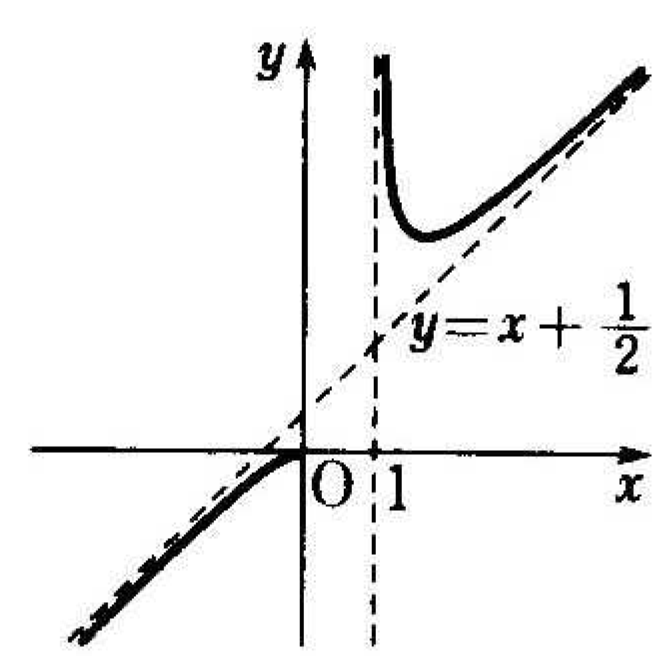
ゆえに $x\longrightarrow+\infty$ における漸近線は

$$y=x+\frac{1}{2}$$

次は $x\longrightarrow-\infty$ の漸近線です。

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-(ax+b)\right\}$$

は $a\leqq0$ のとき $-\infty$ ですから $a>0$ のときだけ考えれば十分です。そして，それは上とまったく同じに扱えるのです。自信のある人は，ぜひともやっておいてください。なお，グラフは右のようです。これは，意外とめんどうでしたね。では，最後に，もう1つ。



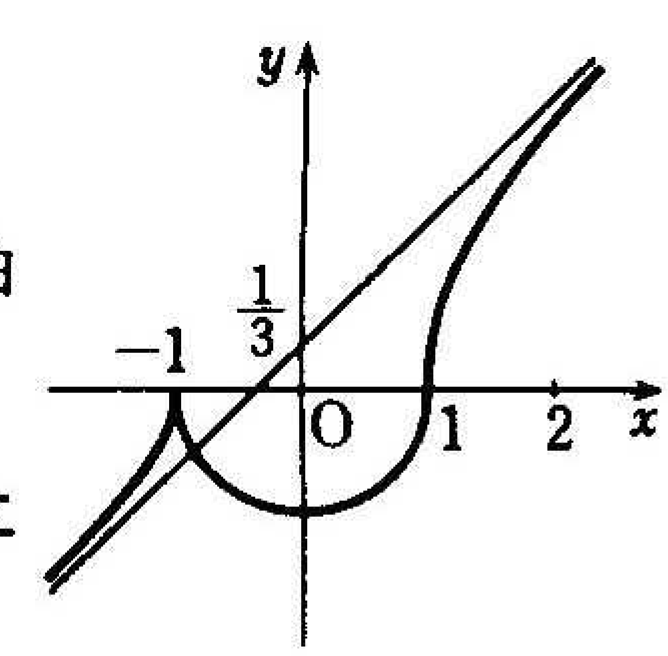
練習 6. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}-(ax+b)\}=0$ となる実数 a，b を求め，かつ，この a，b によってきまる直線 $y=ax+b$ と曲線 $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ との関係を調べよ。

（福岡教育大）

（ヒント）$a=1,\ b=\dfrac{1}{3}$

直線 $y=x+\dfrac{1}{3}$ は曲線の漸近線である。

グラフの右のようになります。



● 整方程式・不等式への微分法の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆整方程式を扱うのに，分数方程式を使うことによってスゴク楽になることも多いのです。微積が基解にまさるゆえんです。

◆ 整方程式や不等式へ微分法を使うことは基解でも数多くやってあるハズですが，微積を使うことによって著しく簡単になることも多いのです。何はともあれ，具体的な問題にいきましょう。

練習 1. $x^3-3ax+1=0$ の実数解の個数を求めよ。ただし，a は実数の定数である。

(ヒント) 基解であれば，ふつう

$$f(x)=x^3-3ax+1$$

のグラフをかいて，x 軸との交点を調べるところですが，次のようにやるほうがラク。

(解)
$$x^3-3ax+1=0$$
$$\therefore\ x^3+1=3ax$$

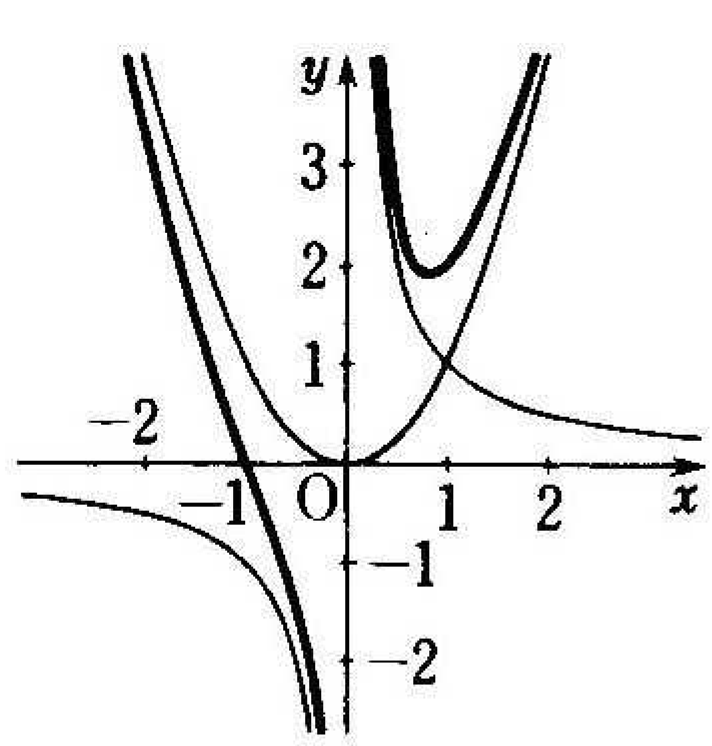
$x \neq 0$ であるから，両辺を x で割ると

$$x^2+\frac{1}{x}=3a$$

$$y=x^2+\frac{1}{x}$$

とおくと，

$$y'=2x-\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{2x^3-1}{x^2}$$



ゆえに $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ で極小値 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ をとる。そのグラフの概形は上のようである。ゆえに

$a>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ のとき　3つの異なる実数解

$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ のとき　2つの実数解
（1つは重複解）

$a<\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ のとき　1つの実数解

をもつ。

練習 2. 方程式 $x^3+ax+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(ヒント) a を孤立させます。それには，

$$x^3=-(x+1)a$$

$x \neq -1$ だから

$$\frac{x^3}{x+1}=-a$$

ここで両辺のグラフをかいて共通点の個数を調べればいいでしょう。いや，右辺の − は左辺につけておいたほうがいい（この理由わかるかな？）。すなわち

$$-\frac{x^3}{x+1}=a$$

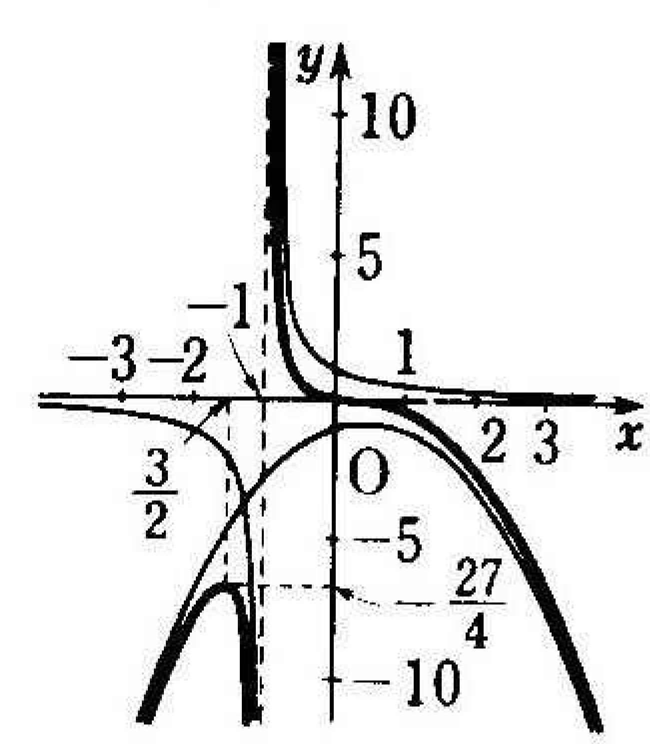
さて，

$$f(x)=-\frac{x^3}{x+1}=-\left(x^2-x+1+\frac{-1}{x+1}\right)$$
$$=(-x^2+x-1)+\frac{1}{x+1}$$

ですから，

$$y=-x^2+x-1$$

と $y=\dfrac{1}{x+1}$ のグラフを合成して，概形は右図のようになります。そして，



$$f'(x)=-2x+1-\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-2x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)^2}$$

ですから，極大点は $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{27}{4}\right)$ です。

かくて $a<-\dfrac{27}{4}$ のとき 3 個，$a=-\dfrac{27}{4}$ のとき 2 個，$a>-\dfrac{27}{4}$ のとき 1 個となります。

◆ では，やや総合的な問題をやってみましょう。まず，これです。

練習 3. $x>0$, $r>1$ のとき

$$(1+x)^r>1+x^r$$

を示せ。　　　　　　　　　　　（東京電機大）

（解） $f(x)=(1+x)^r-(1+x^r)$

とおくと

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1}-rx^{r-1}$$
$$=r\{(1+x)^{r-1}-x^{r-1}\}$$

$x>0$, $r>1$ であるから

$$f'(x)>0$$

ゆえに $f(x)$ は増加関数である。そして $f(0)=0$ であるから

$$x>0 \text{ に対して }\quad f(x)>0$$

よって，証明された。

Q. E. D.

（注） rは1より大きい実数，というだけですから整多項式ではありませんが，まったく同じに扱えるので，ここに入れたのです。

練習 4. nは自然数とし，

$$f(x)=1+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

とする。このとき $-1\leqq x\leqq1$ において，$1\leqq f(x)<2$ であることを証明せよ。

（ヒント） 何はともあれ $f(x)$ の増減を調べてみることでしょう。

$$f'(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}$$

オヤオヤ，これの符号がすぐわかるとも思えない。そこで，改めて，$f'(x)$ の増減を調べてみるとしようか。

$$f''(x)=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}$$

そこで，$x\neq1$ のとき

$$f''(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$$

なるほど，これなら $-1\leqq x<1$ において $f''(x)\geqq0$ だ。ゆえに，$f(x)$ は下に凸で，しかも $f'(0)=0$ ですから $f(x)$ は $x=0$ で最小値1をとることがわかります。

また $f(-1)<f(1)$ であることは明らかでしょう。だから，

$$1\leqq f(x)<f(1)$$

ところが，

$$f(1)=1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=2-\frac{1}{n+1}<2$$

なるほど，うまくいった。では，もう1つやってみましょう。

練習 5. (1) xについての方程式

$$x(x-3)(x+3)+3k(x-1)(x+1)=0$$
$$(k>0)$$

は3つの実数解をもつことを証明せよ。

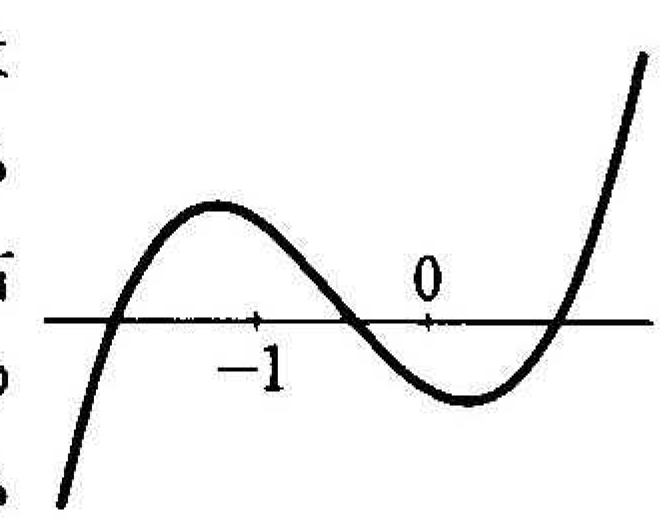
(2) 上の方程式の正の解はただ1つで，1と $1+\dfrac{2}{k}$ との間にあることを証明せよ。

（京大）

（ヒント） $f(x)=x(x-3)(x+3)+3k(x-1)\times(x+1)$ とおいてみますと

$$f(-1)=8>0,\quad f(0)=-3k<0$$

で，しかも，$f(x)$ は3乗の係数が正である3次関数ですから，右の図のような右上りの曲線が得られ，もちろん3つの実数解をもつことがわかります。



そして，その解は $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$ に1つずつあります。つまり，正の解は1つだけです。

そして，$f(1)=-8<0$ で，

$$f\left(1+\frac{2}{k}\right)=\frac{8}{k^3}+\frac{12}{k^2}+4>0$$

ですから，正の解は1と $1+\dfrac{2}{k}$ の間にあることがわかります。答案をキチンと書くことはキミにやってもらうとしましょう。

分数方程式・不等式への微分法の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈固有の分数方程式はいうまでもないが，整方程式だって，分数方程式に変形してから扱うとウマクいくことが多いのだ。

◆ このセクションでは分数方程式や分数の不等式に微分法を応用することを考えてみましょう。何はともあれ，これを：——

練習 1. 分数方程式

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=a$$

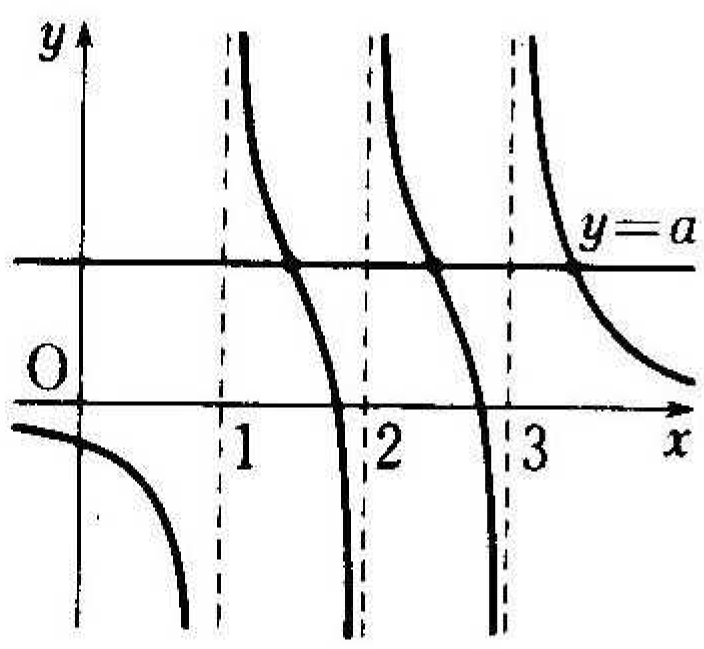
の実数解の個数を調べよ。

ヒント $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$

とおきますと，$y=f(x)$ のグラフは右のようになります。したがって

$a=0$ のとき 2 個，
$a\neq 0$ のとき 3 個

あることがわかります。



練習 2. 方程式 $\dfrac{x}{x^3+1}=k$ が 3 つの異なる実数解をもつように k の値の範囲を求めよ。　　　　(明治大)

解 $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{(x^3+1)\cdot 1-x\cdot(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$=\frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}$$

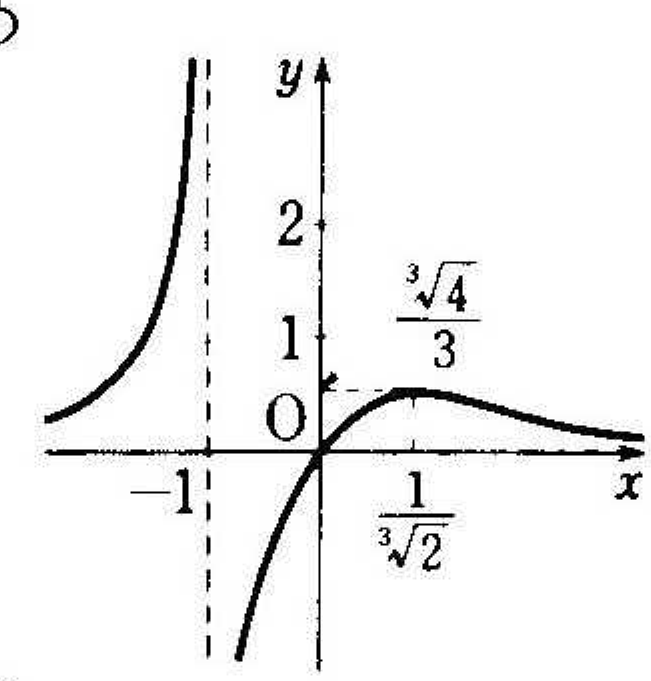
ゆえに増減表を作ると下のようになる。

x		-1		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		∞
$f'(x)$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ (極大)	$\searrow$	0

したがって $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。ゆえに，求める k の範囲は

$$0<k<\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

である。



＊　＊　＊

◆ 次は，不等式への応用です。さあ，これをやってみませんか。

練習 3. $a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ r\leqq 1$ のとき

$$(a+b)^r\leqq a^r+b^r$$

を証明せよ。　　　　(信州大)

ヒント 与えられた不等式の両辺を a^r+b^r で割ってみますと

$$\frac{(a+b)^r}{a^r+b^r}\leqq 1$$

左辺の分母・分子を b^r で割って $\dfrac{a}{b}=x$ とおきますと，$x\geqq 0$ で

$$\frac{(x+1)^r}{x^r+1}\leqq 1$$

となりましょう。($b=0$ のときは割れないがその場合は明らか！)

さて，

$$f(x)=\frac{(x+1)^r}{x^r+1}\quad (x\geqq 0)$$

の増減を調べてみればどうなるか？

$$f'(x)$$

$$=\frac{(x^r+1)\cdot r(x+1)^{r-1}-(x+1)^r\cdot rx^{r-1}}{(x^r+1)^2}$$

$$=\frac{r(x+1)^{r-1}(1-x^{r-1})}{(x^r+1)^2}$$

したがって，$x=1$ で極大値をとり，それは 1 ですから，もはやいうこともなし。

＊　＊　＊

◆ では，総合的な問題を練習してみませんか。

練習 4. (1) $y=x^2-3+\dfrac{1}{x}$ のグラフの概形をかけ。

(2) このグラフを利用して，方程式

$$x^3-3x+1=a(x^2-x)$$

の実数解の数を調べよ。ただし，a は実数で定数とする。

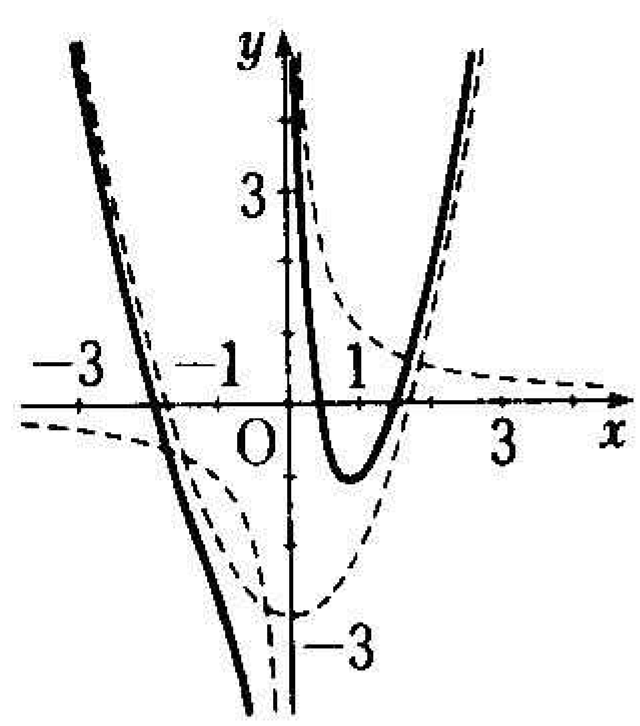
(3) この方程式が -2 と 2 の間に3つの実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。 (慶大)

ヒント (1) $y=x^2-3$ のグラフと $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを合成するとグラフの大体の形がわかります。また，

$y'=2x-\dfrac{1}{x^2}=0$ から

$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ で，極小値

$\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}-3(\fallingdotseq-1.1)$ を



とることもわかります。グラフは上のようになります。

(2) $x^3-3x+1=a(x^2-x)$

の両辺を x で割りますと

$$x^2-3+\frac{1}{x}=a(x-1)$$

そこで，$y=x^2-3+\dfrac{1}{x}$ と $y=a(x-1)$ のグラフの交点を調べてみますと，a の値にかかわらず3つあります。直線 $y=a(x-1)$ が点 $(1,0)$ を通ることに目をつけてください。

(3) $x=2$ のとき $y=x^2-3+\dfrac{1}{x}$ の値は$\dfrac{3}{2}$，$x=-2$ のときには $\dfrac{1}{2}$ であることから，a の値は $\dfrac{3}{2}$ および $-\dfrac{1}{6}$ の間に入ればよい。

$$\therefore\ -\frac{1}{6}<a<\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

練習 5. k を実数の定数，$f(x)=x^2(x+8)$，$g(x)=(x^2-1)(x+4)$ とするとき，x に関する方程式 $f(x)-kg(x)=0$ の相異なる実数解の個数を求めよ。 (東大)

ヒント $x^2(x+8)-k(x^2-1)(x+4)=0$

を変形し，k を孤立させて

$$\frac{x^2(x+8)}{(x^2-1)(x+4)}=k$$

として，左辺のグラフをかいてみるほうがいいでしょう。かくして，問題の焦点は

$$y=\frac{x^2(x+8)}{(x^2-1)(x+4)}$$

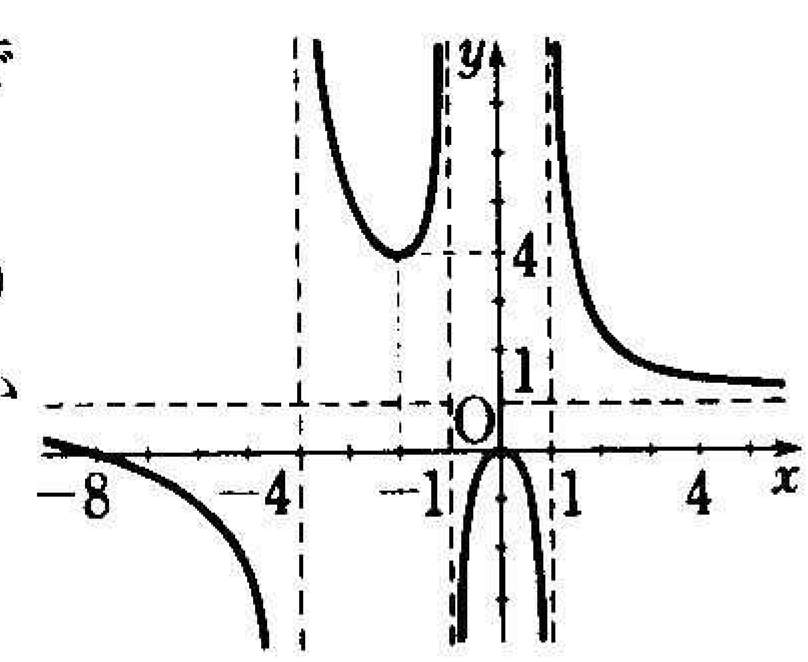
のグラフをかくことに移行したわけだ。

さて：——

$$y'=-\frac{2x(x+2)(2x^2-3x+16)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$

で，$2x^2-3x+16=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{119}{8}>0$ ですから，$x=-2$ で極小値4をとり，$x=0$ で極大値 0 をとることがわかります。また，

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=1$$



以上のことから，グラフは上の通りです。したがって

$4<k$ のとき 3個
$k=4$ のとき 2個
$1<k<4$ のとき 1個
$k=1$ のとき 0個
$0<k<1$ のとき 1個
$k=0$ のとき 2個
$k<0$ のとき 3個

ということになります。

このように，

k を孤立させて扱う

と，グラフをかくのは多少めんどうでも，あとの扱いはグッとラクになるものです。よく覚えて，そしてよく活用できるようにしてください。

① 無理方程式・不等式への微分法の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆無理方程式であろうと，分数方程式であろうと，微分法の応用に異なるところはありません。ただ，ともすると符号の吟味が……。

◆ このセクションでは無理方程式や無理不等式への，微分法の応用を練習するのが目的です。では：——

■練習 1. $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=a$ の解の数を吟味せよ。

(ヒント) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$ のグラフと $y=a$ のグラフの共通点の数を調べればいいでしょう。そして，そのためには，まず，

$$y=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$$

のグラフをかけばいいでしょう。

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

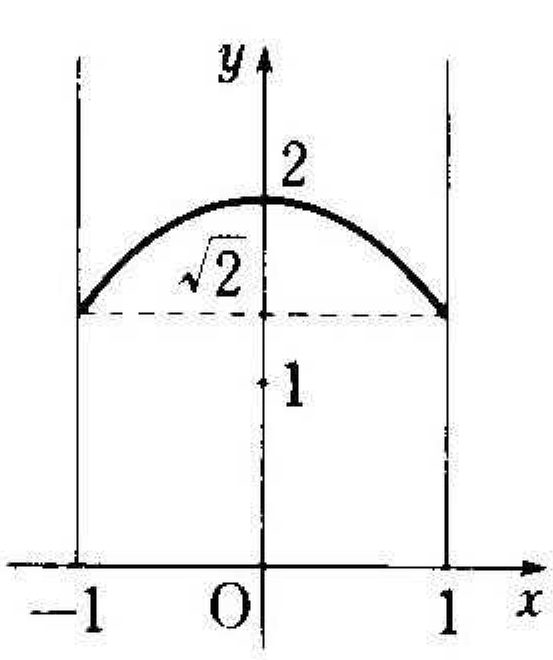
この符号を調べなければならないでしょう。それには分子を有理化するほうがいい。つまり，

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1})}$$

ゆえに y の増減表は下のようになります。

x	-1		0		1
y'		$+$		$-$	
y	$\sqrt{2}$	↗	2 (極大値)	↘	$\sqrt{2}$

したがって，グラフは右の通り。ゆえに



$2<a$ のとき解なし
$a=2$ のとき解1つ
$\sqrt{2}\leqq a<2$ のとき解2つ
$a<\sqrt{2}$ のとき解なし

ということになります。

(注) $a\geqq 0$ でなければ解がありません。そこで，与えられた方程式の両辺を2乗しても同値で，

$$(x+1)+(1-x)+2\sqrt{1-x^2}=a^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{a^2-2}{2}$$

と変形でき，これから吟味することもできます。これなら数Ⅰの範囲!!

■練習 2. $\sqrt{4-x^2}+x-a=0$ の解の個数を吟味せよ。

(解) $$\sqrt{4-x^2}+x=a$$

と変形し，

$$y=x+\sqrt{4-x^2}$$

とおくと

$$y'=1+\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

であるから

$-2<x\leqq 0$ のとき　$y'>0$

で，したがって，y は単調増加である。

また　$0<x$ のとき

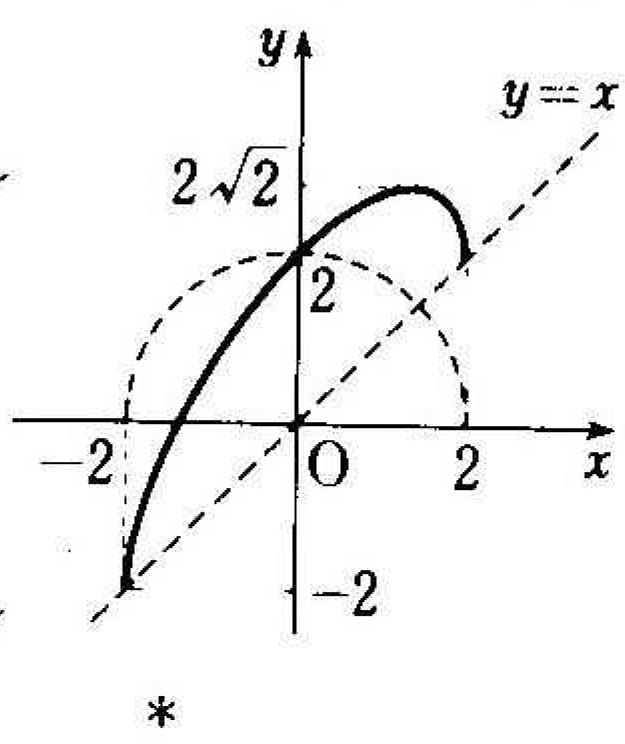
$$y'=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}(\sqrt{4-x^2}+x)}$$

であるから

$0<x<\sqrt{2}$ において　$y'>0$

$\sqrt{2}<x<2$ において　$y'<0$

ゆえに y は $x=\sqrt{2}$ において極(最)大値 $2\sqrt{2}$ をとり，$x=-2$ において最小値 -2 をとる。そして，グラフの概形は下の通り。したがって



$2\sqrt{2}<a$：解なし
$a=2\sqrt{2}$：1つ
$2\leqq a<2\sqrt{2}$：2つ
$-2\leqq a<2$：1つ
$a<-2$：解なし

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をとりあげてみましょう。まず，これです。

練習 3. 方程式

$$x^2-x=\sqrt{x^3+x^2+a} \qquad \cdots\cdots①$$

の両辺を2乗して整理した方程式を $f(x)=a$ とする。

(1) $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

(2) 方程式①がただ1個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

（九州工大）

解 (1) $x^2-x=\sqrt{x^3+x^2+a}$

の両辺を平方して変形すると

$$x^4-3x^3=a$$

となる。したがって，

$$f(x)=x^4-3x^3$$

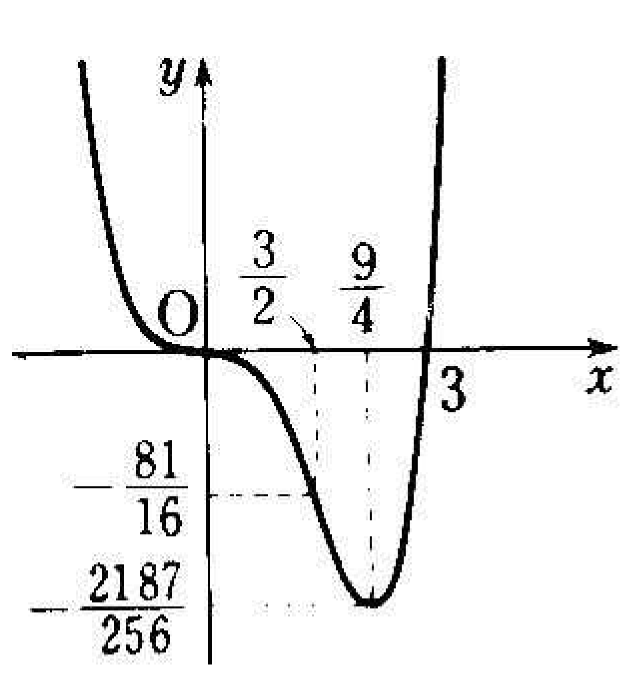
$$\therefore \quad f'(x)=4x^3-9x^2=x^2(4x-9)$$

$$f''(x)=6x(2x-3)$$

ゆえに，増減および凹凸は下の表のようになる。

x		0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↘		↘	$-\frac{2187}{256}$ (極小)	↗
	∪	0 (変曲点)	∩	$-\frac{81}{16}$ (変曲点)		∪	

ゆえに $y=f(x)$ のグラフは右のようになる。



(2) 方程式①の解については

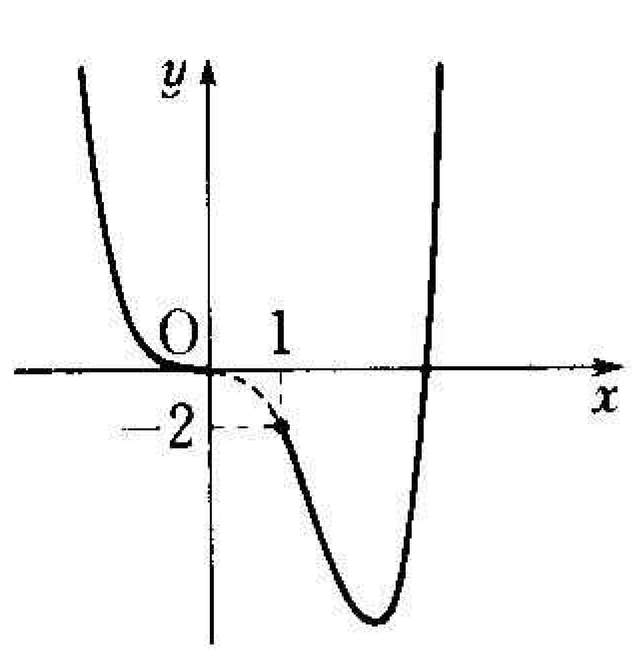
$$x^2-x\geqq 0$$

すなわち

$x\leqq 0$ あるいは $1\leqq x$

であるから，①がただ1個の実数解をもつための条件は

$$-2<a<0$$



練習 4. 次の問に答えよ。ただし，n は自然数，k は正の数とする。

(1) 関数 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}+k^{\frac{1}{n}}-(x+k)^{\frac{1}{n}}$ は $x\geqq 0$ の範囲で負にならないことを証明せよ。

(2) 三角形 ABC の3辺の長さを a, b, c とするとき

$$a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}>c^{\frac{1}{n}}$$

であることを証明せよ。（慶大）

ヒント (1)は，もちろん $f(x)$ の最小値が負にならないことをいえばいいでしょう。

さて，

$$f(x)=x^{\frac{1}{n}}+k^{\frac{1}{n}}-(x+k)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-\frac{1}{n}(x+k)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$=\frac{1}{n}\{x^{\frac{1}{n}-1}-(x+k)^{\frac{1}{n}-1}\}$$

ところが $0<x<x+k$, $\frac{1}{n}-1<0$ ですから

$$x^{\frac{1}{n}-1}>(x+k)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\therefore \quad f'(x)>0$$

つまり，$f(x)$ は増加関数です。

$$\therefore \quad f(x)\geqq f(0)=0$$

$$\therefore \quad f(x)\geqq 0$$

これで証明はすんだわけ。次は，おそらく(1)を使って(2)を証明せよ，というのであろう。

(2) (1)の不等式から得られる

$$x^{\frac{1}{n}}+k^{\frac{1}{n}}\geqq(x+k)^{\frac{1}{n}}$$

において，$x=a$, $k=b$ とおきますと

$$a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\geqq(a+b)^{\frac{1}{n}}$$

ところが，a, b, c は三角形の3辺だというのですから

$$a+b>c$$

$$\therefore \quad (a+b)^{\frac{1}{n}}>c^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \quad a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}>c^{\frac{1}{n}}$$

Q. E. D.

⑪ 三角方程式・不等式への微分法の応用

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆三角方程式や三角不等式の理論にはもちろん微分法が重要な役割を演ずるものです。だからといって，特に変わったことはないのだ!!

◆ 三角方程式の解の存在を吟味したり，三角不等式を証明したりするときに，微分法は役に立ちます。そのような例をとりあげて練習することにしましょう。

練習 1. 次の方程式の実数解の個数を求めよ。

$$2x+\sin x=0$$

（ヒント） $y=2x$ と $y=-\sin x$ のグラフの共通点を調べてみてもよいでしょうし，左辺全部：$y=2x+\sin x$ のグラフと x 軸との共通点の数を調べてもよいでしょう。

ここでは，あとの方法でやってみます。

（解） $y=2x+\sin x$

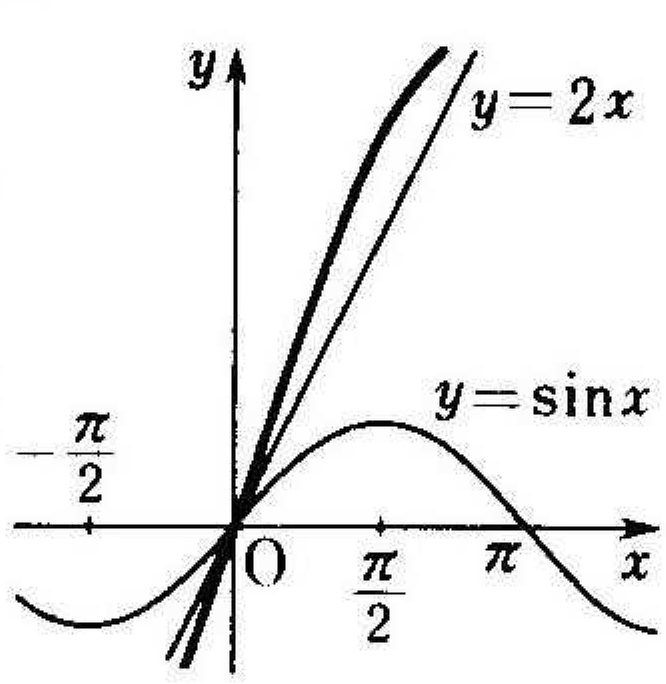
とおくと，

$$y'=2+\cos x>0$$

ゆえに $y=2x+\sin x$ は x のすべての値に対して単調増加である。そして

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty$$

で，しかも連続であるから，x 軸とただ1点で交わる。



ゆえに，求める実数解は1個である。

答　1個

練習 2. a が1でない実数のとき，方程式

$$x^2+ax=\sin x$$

はちょうど2つの実数解をもつことを証明せよ。（名大）

（ヒント） $f(x)=x^2+ax-\sin x$

とおいてみますと

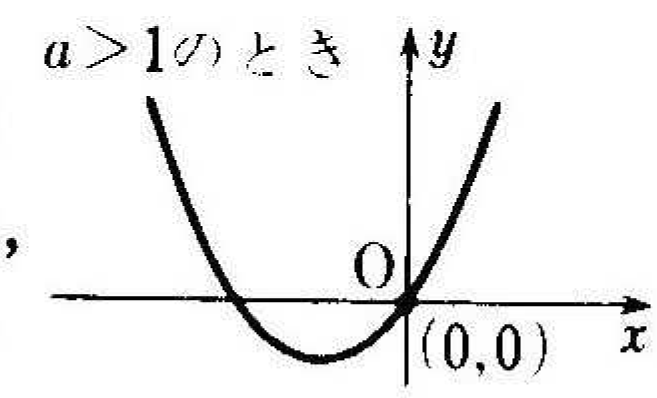
$$f'(x)=2x+a-\cos x$$
$$f''(x)=2+\sin x>0$$

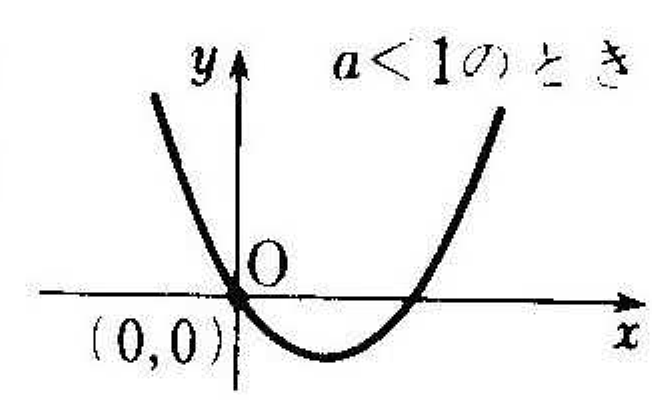
ですから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸になります。

また，$f(0)=0$ であるから，少なくも1つの解0をもつことがわかります。そして

$$f'(0)=a-1\neq0$$

ですから，$y=f(x)$ のグラフは，下に凸で，点 (0, 0) において x 軸を斜めに切るのですから，必ず2つの解があるハズ。しかし，解答としては，何かスッキリしないものがあります（もちろんマチガイではありませんが）。





そこで，次のように **a を孤立させる** とスッキリいくのです。

（解） 明らかに $x=0$ なる解があるから $x\neq0$ なる解がただ1つあることを証明すれば十分である。

さて，与えられた方程式を変形して

$$a=\frac{\sin x-x^2}{x} \quad\cdots\cdots①$$

と書けるから，①の右辺$=f(x)$ とおくと

$$f(x)=\frac{\sin x-x^2}{x}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{x(\cos x-2x)-(\sin x-x^2)\cdot1}{x^2}$$
$$=\frac{x\cos x-\sin x-x^2}{x^2}$$

この分子を $g(x)$ とおくと

$$g(x)=x\cos x-\sin x-x^2$$
$$g'(x)=x(-\sin x)+1\cdot\cos x-\cos x-2x$$
$$=-x(\sin x+2)$$

ゆえに $g(x)$ は $x=0$ でただ1つの極大値

$g(0)=0$ をもつから，$x\neq 0$ のとき $g(x)<0$，したがって $x\neq 0$ において，$f'(x)<0$，したがって $x\neq 0$ において①はただ1つの解をもつ。ところが，

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-x\right)=1$$

であるから，$a\neq 1$ のとき①はただ1つの解をもつ。

よって，証明された。

＊　＊　＊

◆ 次に不等式の証明についていくつか練習しましょう。

練習 3. $0<x<\pi$ において，$\sin x$ と $x\cos x$ の大小を吟味せよ。　　（岡山大）

（解）$f(x)=\sin x-x\cos x$

とおけば，

$$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)$$
$$=x\sin x>0$$

ゆえに，$0<x<\pi$ において $f(x)$ は単調増加である。

$$\therefore\ f(x)>f(0)=0$$
$$\therefore\ f(x)>0$$
$$\therefore\ \sin x>x\cos x \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注）このほか，いろいろなやり方がありましょう。例えば，$\frac{\pi}{2}\leqq x<\pi$ においては $\sin x>0$，$\cos x\leqq 0$ ですから，当然

$$\sin x>x\cos x$$

ですし，$0<x<\frac{\pi}{2}$ では

$$x<\tan x$$

を証明すれば，これからすぐ

$$x\cos x<\sin x$$

が出る，といったぐあいです。

次は，ちょっとめんどうですよ。

練習 4. $0<x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\pi<\frac{\sin\pi x}{x(1-x)}\leqq 4$$

（茨城大）

（解）$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(1-x)}$ とおけば

$$f'(x)=\frac{\pi x(1-x)\cos\pi x-(1-2x)\sin\pi x}{x^2(1-x)^2}$$

となる。分子を $p(x)$ とおくと

$$p'(x)=\{2-\pi^2x(1-x)\}\sin\pi x$$

したがって，$p(x)$ の $0<x\leqq\frac{1}{2}$ における増減表は次のようになる。

x	(0)		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8}{\pi^2}}$		$\frac{1}{2}$
$p'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	$-$
$p(x)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

ゆえに $p(x)\geqq 0$ で，したがって $f(x)$ は単調増加である。そして

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\pi}{1-x}=\pi$$

で，

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=4$$

であるから

$$\pi<f(x)\leqq 4$$

である。

Q. E. D.

練習 5. すべての正の数 x に対して

$$f(x)=\cos x+mx^2-1>0$$

ならば，$m\geqq\frac{1}{2}$ であることを示せ。

（新潟大）

（ヒント）m を孤立させるのがコツです。つまり，$x>0$ に対して

$$\cos x+mx^2-1>0$$

ならば，これを変形して

$$m>\frac{1-\cos x}{x^2}$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ の値の変化を調べてみますと，

$$\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}\quad かつ\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

ですから，$m\geqq\frac{1}{2}$ なのです。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◐ 対数方程式・不等式への微分法の応用

◆方程式や不等式に対数が入ってくるととかくめんどうになりすぎることが多い。そこで，かえってラクなものしか出題されないのだ。

◆ 対数方程式や対数不等式を扱うのに微分法が応用されます。このセクションでは，その練習をやってみよう，というわけ。

では，これを：——

■練習 1. $x+\log x=2$ の実数解はいくつあるか。

（ヒント） もちろんグラフをかいてみるのがいいでしょう。ただ何のグラフをかくのがいいか。それが問題点です。

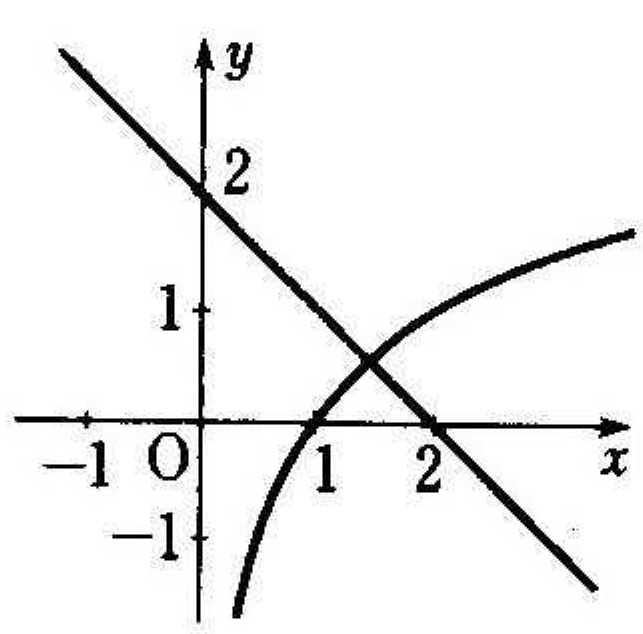
$$\log x=2-x$$

と変形し，

$$y_1=\log x,\quad y_2=2-x$$

のグラフをかいてみたらどうだろう。

さて，その結果は右の通り。どうやら，1と2の間に1つの解があるらしい!!



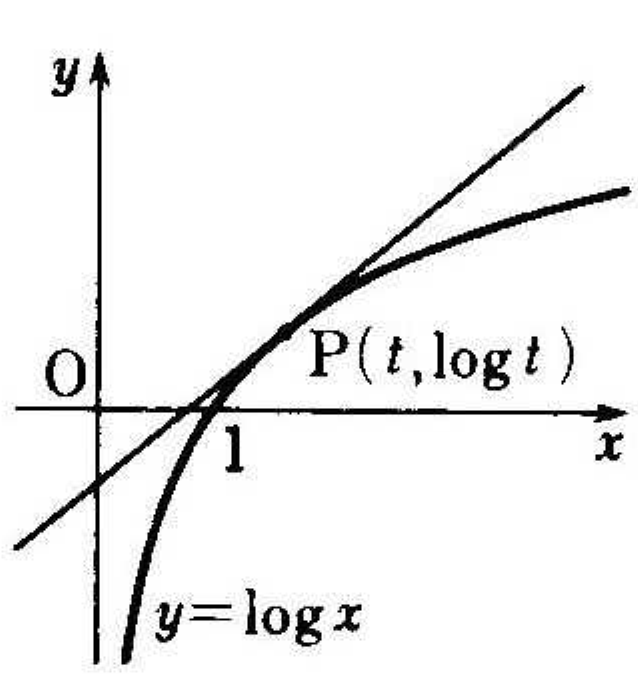
答　1個

■練習 2. 方程式 $ax=\log x$ の解の数を吟味せよ。

（ヒント） $y_1=ax$，$y_2=\log x$ の共通点の数を吟味するのもいいし，

$$\frac{\log x}{x}=a$$

と変形して，$y_1=\dfrac{\log x}{x}$ と $y_2=a$ の共通点の数を調べてもよさそうです。



（解） 1. $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$$

で，これが原点を通るための条件は

$$-\log t=-1$$

$$\therefore\quad t=e$$

ゆえに，原点から $y=\log x$ に引いた接線の傾きは $\dfrac{1}{e}$ である。

したがって

$$\text{答}\begin{cases} a\leqq 0 \text{ のとき1個} \\ 0<a<\dfrac{1}{e} \text{ のとき2個} \\ a=\dfrac{1}{e} \text{ のとき1個} \\ \dfrac{1}{e}<a \text{ のときなし} \end{cases}$$

（解） 2.　$ax=\log x$

を変形すれば

$$\frac{\log x}{x}=a$$

となる。そこで，

$$y=\frac{\log x}{x}$$

について

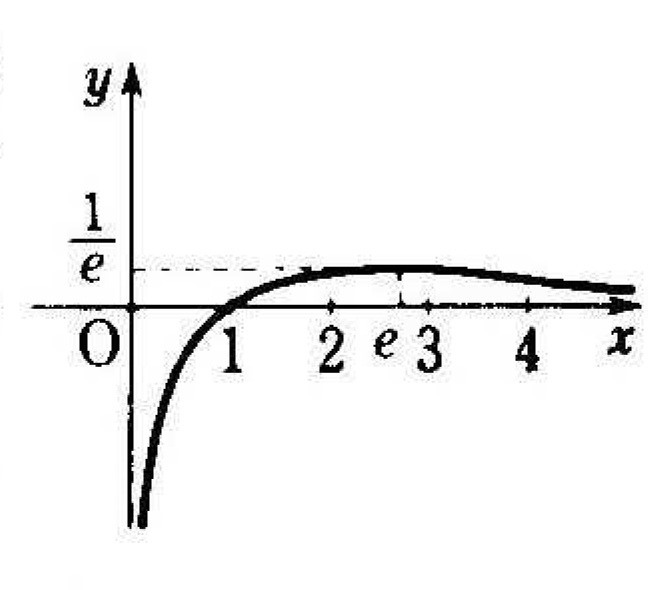
$$y'=\frac{1-\log x}{x^2}$$

ゆえに $x=e$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

また，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

よって，そのグラフは右の通り。したがって $a>\dfrac{1}{e}$ で解なし，$a=\dfrac{1}{e}$ で1つ，$0<a<\dfrac{1}{e}$ で2つ，$a\leqq 0$ で1つ，であることがわかる。



＊　＊　＊

◆ では，次に不等式についてやってみようじゃないか。

練習 3. $t>0$ のとき $t\log t \geqq t-1$ であることを証明せよ。ただし，対数は自然対数である。（札幌医大）

ヒント　$t\log t \geqq t-1$ を証明するには

$$f(t)=t\log t-(t-1)\geqq 0$$

を証明すればいいにちがいない。そのためには $f(t)$ の最小値が正または0であることをいえばいいだろう。そして，そのためには $f(t)$ の増減を調べてみればいいだろう，というわけだ。

解　$f(t)=t\log t-(t-1)$

とおけば

$$f'(t)=t\cdot\frac{1}{t}+1\cdot\log t-1=\log t$$

ゆえに，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)		1	
$f'(t)$		$-$		$+$
$(f)t$		↘	0 極小	↗

ゆえに $f(t)$ は $t=1$ において最小値を0とる。

$$\therefore\quad t\log t\geqq t-1 \qquad \text{Q. E. D.}$$

練習 4. $0<x<1$ のとき，

$$\log(1+x)<\frac{x}{1-x}$$

が成り立つことを証明せよ。（名大）

ヒント　$f(x)=\dfrac{x}{1-x}-\log(1+x)$

とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x}$$

ですから，$0<x<1$ において

$$\frac{1}{(1-x)^2}>1>\frac{1}{1+x}$$

を考慮して $f'(x)>0$ となり，したがって $f(x)$ は増加関数であることがわかります。したがって

$$f(x)>f(0)=0$$

$$\therefore\quad \log(1+x)<\frac{x}{1-x}$$

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。

練習 5. 平面上に点 $(x,\ y)$ がある。このとき，$y\leqq\log x$ が成り立つための必要十分条件は

$$y\leqq\frac{1}{a}(x-a)+\log a$$

がすべての正の数 a について成り立つことである。これを証明せよ。（お茶の水女大）

解　$f(a)=\dfrac{1}{a}(x-a)+\log a \qquad (a>0)$

とおくと

$$f'(a)=\frac{a(-1)-(x-a)\cdot 1}{a^2}+\frac{1}{a}$$
$$=\frac{-(x-a)}{a^2}$$

であるから，$0<a<x$ のとき $f'(a)<0$ で，$x<a$ のとき $f(a)>0$ である。

ゆえに $f(a)$ は $a=x$ のとき最小値をとり，その値は

$$f(x)=\frac{1}{x}(x-x)+\log x=\log x$$

である。

$$\therefore\quad f(a)\geqq\log x$$

ゆえに，すべての正の数 a に対して
$y\leqq f(a)$ ならば $y\leqq\log x$ である。

逆に，$y\leqq\log x$ とすると，すべての $a(>0)$ に対して

$$y\leqq f(a)$$

である。

ゆえに，$y\leqq\log x$ であるための必要十分条件は，「すべての a の正の値に対して

$$y\leqq\frac{1}{a}(x-a)+\log a$$

が成り立つ」ことである。

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

● 指数方程式・不等式への微分法の応用

◆指数方程式の理論はあまり多くは現れない。というのも，おきかえるとふつうの整方程式に還元されてしまうからであろう。

◆ 指数関数の入った方程式や不等式に微分法を応用するのがこのセクションの目的です。では，まず，これを：——

■練習 1. $x^2=ke^x$ の解の数を吟味せよ。k は正の定数である。($\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ を使ってよい)

ヒント $y=x^2$ と $y=ke^x$ のグラフの共通点を調べるよりは，

定数 k を孤立させる

ほうがラクです。すなわち，変形して

$$\frac{x^2}{e^x}=k$$

とし，

$$y=\frac{x^2}{e^x}$$

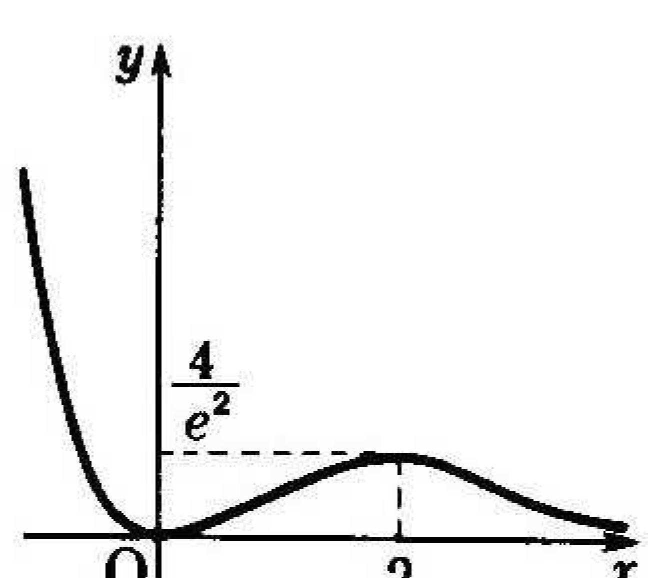
とおきますと

$$y'=\frac{e^x\cdot 2x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{-x(x-2)}{e^x}$$

ゆえに $x=0$ で極小値0を，$x=2$ で極大値 $\frac{4}{e^2}$ をとるでしょう。また，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\infty$$

ですから，$y=\frac{x^2}{e^x}$ の概形は右のようになります。ゆえに，



$\frac{4}{e^2}<k$ のとき1つ

$k=\frac{4}{e^2}$ のとき2つ

$0<k<\frac{4}{e^2}$ のとき3つ

の解があることがわかります。

■練習 2. x の方程式 $x-e^{-\frac{x}{2}}=0$ はただ1つの実数解をもち，それは0と1の間にあることを証明せよ。 (神戸大)

(解) 1. $x-e^{-\frac{x}{2}}=0$

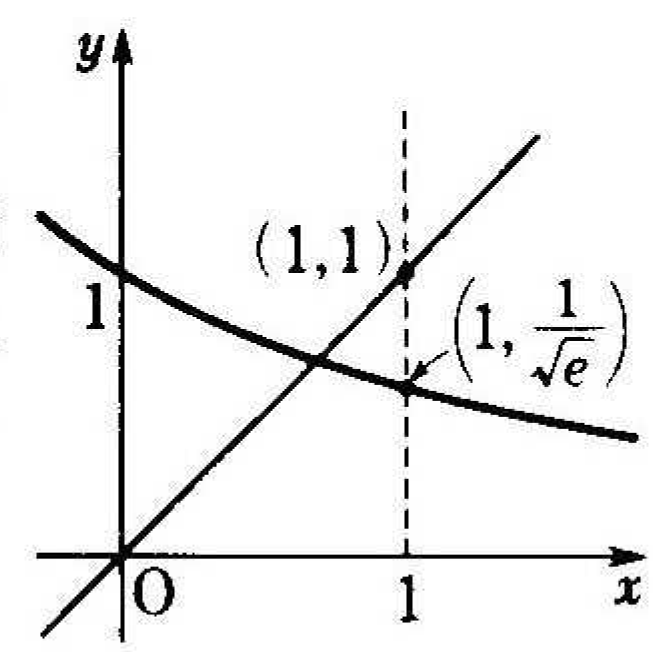
を変形して

$$x=e^{-\frac{x}{2}}$$

いま，

$y_1=x,\ y_2=e^{-\frac{x}{2}}$

とおくと，そのグラフは右のようになり，明らかに交点は $0<x<1$ の範囲に1個あるだけである。



よって証明された。

(解) 2. $f(x)=x-e^{-\frac{x}{2}}$

とおくと

$$f'(x)=1+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}>0$$

ゆえに $y=f(x)$ のグラフは単調増加である。そして

$$f(0)=-1<0,\ f(1)=1-\frac{1}{\sqrt{e}}>0$$

ゆえに，$0<x<1$ において，ただ1つの実数解をもつ。

* * *

◆ 次に不等式について練習しましょう。

■練習 3. $x>0$ のとき

$$1+x<e^x$$

を証明せよ。

ヒント $f(x)=e^x-x-1$

とおいて $x>0$ のとき $f(x)>0$ であること

を示せばいいにちがいない。そして，それには増減を調べてみればよいだろう。さて，

$$f'(x)=e^x-1>0 \quad (\because \quad x>0)$$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加です。

$$\therefore \quad f(x)>f(0)=0$$

ナルホド，うまくいった。これを一般的にすると次の問題のようになります。

練習 4. n を任意の正の整数とするとき，$x>0$ ならば

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

が成り立つ。このことを数学的帰納法によって証明せよ。　　（金沢大）

ヒント　$n=1$ のときは前問でやりましたね。もういいでしょう。

$n=k$ のとき成り立つとしますと

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!} \qquad \cdots\cdots(*)$$

です。これを用いて

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

を証明したい，というわけ。

さて，

$$f(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

としますと，

$$f'(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)$$

ところが，これは仮定 (*) により正です。

$$\therefore \quad f'(x)>0$$

だから，$f(x)$ のグラフは単調増加です。

$$\therefore \quad f(x)>f(0)=e^0-1=0$$
$$\therefore \quad f(x)>0$$

ナルホド，$n=k$ のとき成り立つとすると $n=k+1$ のときにも成り立つわけなんだなあ。どうやら，証明はすんだ。あとは，これを解答ふうに書くのはキミの義務ですよ。さあ，必ずやってください!!

＊　＊　＊

◆　では，もう1問を：——

練習 5. 曲線 $y=e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$ $(a>0)$ に原点を通る接線が2本引けるとき，

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　曲線の接点の間の部分に変曲点がただ1つあることを示し，その変曲点を求めよ。　　（北大）

ヒント　(1)　$y=e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$

$$\therefore \quad y'=e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\cdot\{-(x-a)\}$$
$$=-(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$

いま，曲線上の点 $(\alpha,\ e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}})$ における接線を l としますと，

$$l: y-e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}=-(\alpha-a)e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}(x-\alpha)$$

これが原点を通るための条件は $x=y=0$ を代入して

$$-e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}=-(\alpha-a)e^{-\frac{(\alpha-a)^2}{2}}(-\alpha)$$
$$\therefore \quad 1=\alpha(a-\alpha)$$
$$\therefore \quad \alpha^2-a\alpha+1=0$$

これが相異なる2つの実数解をもつというのですから，判別式を D とすると

$$D=a^2-4>0$$
$$\therefore \quad a>2 \quad (\because \quad a>0)$$

さあ，これで前半は終わり，です。

(2)　$y''=\cdots\cdots$

$$=\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}\times e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$

ゆえに $x=a-1,\ a+1$ が変曲点の x 座標です。

ところで，2つの接点の x 座標は

$$f(x)=x^2-ax+1=0$$

の解で，そして，

$$f(a-1)=(a-1)^2-a(a-1)+1$$
$$=-a+2<0 \quad ((1)による)$$
$$f(a+1)=a+2>0$$

よって，……

答　$\left(a-1,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

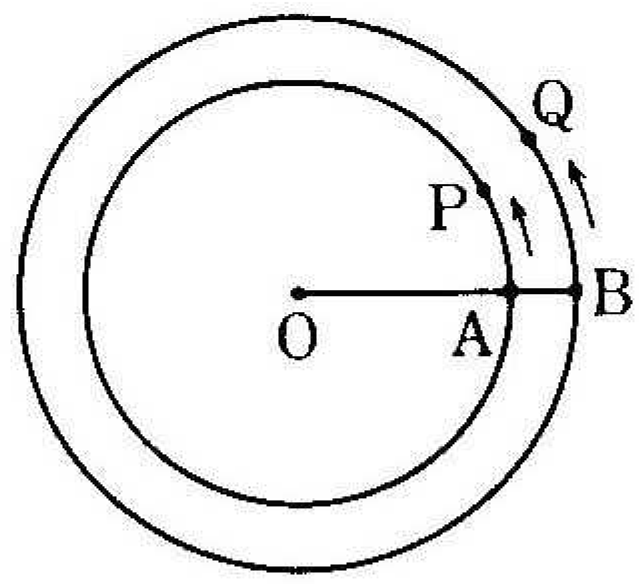
(いろいろな)変化量への微分法の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈微分法は変化を表現する学である。してみると，すべての変化量への応用が考えられるハズだ。

◆ このセクションでは，微分法の演習としていろいろな変化量に関する問題に当たっておこう，というのです。さっそくながら，これをやってみませんか。

練習1. 2点 P，Q はそれぞれ点Oを中心とした半径3 cm，4 cm の同じ円の周上を図に示す向きにそれぞれ毎秒$\frac{1}{3}$ラジアン，$\frac{1}{2}$ラジアンの等角速度で動くものとする。



(1) 点P，Qがそれぞれ A，B の位置から出発するものとし，t 秒後の P，Q 間の距離を x として，x と t の関係式を導け。ただし，$0 \leqq t \leqq 10$ とする。

(2) (1)において $\angle POQ$ が $\frac{\pi}{2}$ となる瞬間の x の変化率を求めよ。（北大）

（解） Oを座標原点とし，OA を x 軸にとると，t 秒後の P，Q の座標は

$$P\left(3\cos\frac{t}{3},\ 3\sin\frac{t}{3}\right),\ Q\left(4\cos\frac{t}{2},\ 4\sin\frac{t}{2}\right)$$

で与えられるから

$$x=\sqrt{\left(4\cos\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{3}\right)^2+\left(4\sin\frac{t}{2}-3\sin\frac{t}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{16+9-24\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{t}{3}\right)}=\sqrt{25-24\cos\frac{t}{6}}$$

答 $x=\sqrt{25-24\cos\frac{t}{6}}$

(2) $0 \leqq t \leqq 10$ に対して $\angle POQ=\frac{t}{6}$ が $\frac{\pi}{2}$ となるのは $t=3\pi$ のときだけである。

ところで，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{12\times\frac{1}{6}\sin\frac{t}{6}}{\sqrt{25-24\cos\frac{t}{6}}}$$

であるから $t=3\pi$ のときには $\frac{2}{5}$ に等しい。

答 $\frac{2}{5}$

練習2. Aが毎時 a km の一定の速さで，ある地点を出発し，l km 進んだ後，Bが同一地点を出発し，同一の路を経て一定の速さでAを追う。BがAに追いつくまでの疲労を最小にするにはどんな速さで進めばよいか。ただし，疲労は速さの2乗と時間とに比例するものとする。（京大）

（解） Bの速さを毎時 x km とすると，Bの疲労の大きさ $f(x)$ は kx^2t に等しい。ここに t はBが出発してから追いつくまでに要する時間で，k (>0) は比例定数である。

当然 $x>a$ で，追いつくに要する時間 t は $t=\frac{l}{x-a}$ に等しいから

$$f(x)=kx^2t=kl\frac{x^2}{x-a}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{klx}{(x-a)^2}(x-2a)$$

増減表は

x	a		$2a$	
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		↘		↗

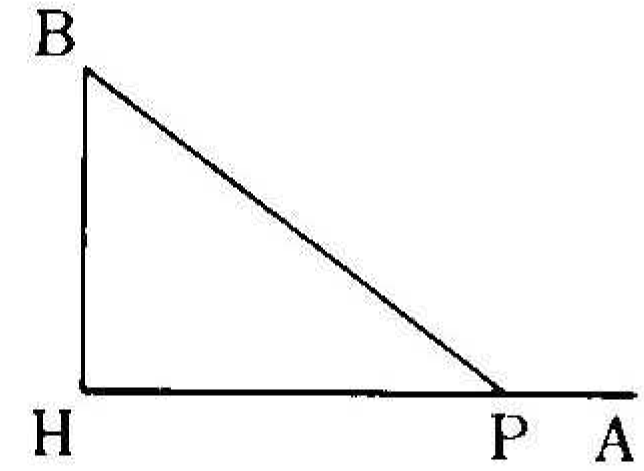
であるから，$f(x)$ は $x=2a$ で最小となる。

答 $2a$ km/h

＊　＊　＊

◆　次は，やや計算がめんどうですよ。

練習 3. 水平面上に $8a$ cm だけ離れた2定点A，Hがあり，Hの真上には高さ a cm のところに点Bがある。線分 AH 上に点Pをとり，最初Bに静止していた動点が線分 BP，PA に沿って，BからAまで動くとき，BP 上では等加速度 $\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BP}}g$ cm/sec^2 で進み，PA 上では，動点がPに達したときの速度の水平成分に等しい等速度で進む。



動点がBからAまで最短時間で到達するには HP をいくらにすればよいか。ただし，g は正の定数である。　（東大）

ヒント　どうもゴタゴタしていて，一度読んだだけではピンとこない人が多いことでしょう。とにかく BP 間に t 秒要し，PA 間に T 秒要したとしましょう。

また，BP 上の一定な加速度を α としますと，$\alpha=\dfrac{ag}{\mathrm{BP}}$ で，点Pで斜面に沿う速さは $\dfrac{agt}{\mathrm{BP}}$ で与えられます。したがって，P点でA方向に向かう速さは HP$=x$ として

$$\frac{agt}{\mathrm{BP}}\times\frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{BP}}=\frac{agtx}{\mathrm{BP}^2}$$

で与えられるハズ。したがって，PA 間に要する時間 T は

$$T=\frac{(8a-x)}{\dfrac{agtx}{\mathrm{BP}^2}}=\frac{(8a-x)\mathrm{BP}^2}{agtx}$$

で与えられます。したがって，全所要時間 y は

$$y=t+T=t+\frac{(8a-x)\mathrm{BP}^2}{agtx}$$
$$=t+\frac{(8a-x)(a^2+x^2)}{agtx}$$

ところで，この t を x で表さなければなりません。それには

$$\mathrm{BP}=\int_0^t\frac{agt}{\mathrm{BP}}dt=\frac{agt^2}{2\mathrm{BP}}$$

を使って，

$$t=\sqrt{\frac{2}{ag}(a^2+x^2)}$$

となりましょう。かくして，

$$y=\sqrt{\frac{2(a^2+x^2)}{ag}}+\frac{(8a-x)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{2ag}\,x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2ag}}\left[\sqrt{a^2+x^2}+\frac{8a\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right]$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2ag}}$$
$$\times\left[\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{8a\left\{\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}-\sqrt{a^2+x^2}\right\}}{x^2}\right]$$
$$=\frac{x^3-8a^3}{\sqrt{2ag(a^2+x^2)}\,x^2}$$

ゆえに，$x=2a$ で極小（かつ最小）となりましょう。

それにしてもやり甲斐があったなあ，このような多少とも **ムリな問題に時間をかけて何度もやってみる** のは，たまにはいいことなのです!!

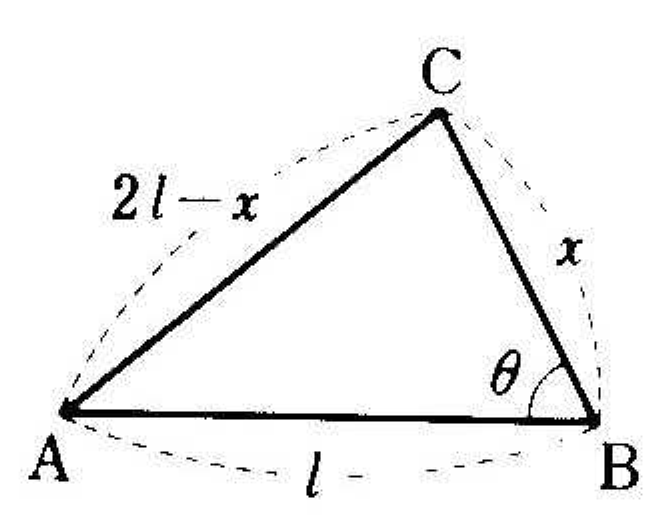
*　　*　　*

◆　では，もう1つ：——

練習 4. △ABC において AB の長さは一定，BC+CA=2AB であって，∠B が一定の速さで増加していく。∠B$=\dfrac{\pi}{3}$ のときの面積の増加する速さを求めよ。（群馬大）

ヒント　右図において

$$S=\frac{1}{2}lx\sin\theta$$



また，

$$(2l-x)^2$$
$$=l^2+x^2-2lx\cos\theta$$

から

$$S=\frac{3}{4}\cdot\frac{l^2\sin\theta}{2-\cos\theta}$$
$$\therefore\quad \frac{dS}{dt}=\frac{3l^2}{4}\cdot\frac{2\cos\theta-1}{(2-\cos\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

答　0

① 速度と微分法

1回目　　年　　月　　日
2回目　　年　　月　　日
3回目　　年　　月　　日

◆平均速度が瞬間速度に脱皮したとき，事態はまさに革命的に変革した。科学も技術も思想も不連続に変わったのだ。

◆ 数直線上を動く点の座標xが時間tの関数であるとき，速度vは

$$v=\frac{dx}{dt}$$

で与えられます。また，平面上を動く点P$(x,\ y)$の座標が時間tの関数であるとき，Pの速度ベクトルを$(u,\ v)$とすると

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt}$$

で与えられます。これは，基解でやってあることであり，微積では指数関数や三角関数が入ってくるのがちがうだけです。では：——

練習1. 数直線上を運動する点の時刻tにおける位置xが次のように与えられるとき，$t=2$における速度を求めよ。

$$x=\sin\frac{\pi}{3}t+\cos\frac{\pi}{3}t$$

（解）
$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t$$
$$=\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t-\sin\frac{\pi}{3}t\right)$$
$$\therefore\quad v_{t=2}=\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{(1+\sqrt{3})}{6}\pi$$

答　速さは $\dfrac{(1+\sqrt{3})\pi}{6}$ で，x軸上負の方向に向かう。

練習2. 点P$(x,\ y)$の座標$x,\ y$が，時間の関数 $x=4(t-\sin t)$，$y=4(t-\cos t)$ で与えられているとき，$t=\dfrac{\pi}{2}$ における速度を求めよ。

（解）速度成分を$(u,\ v)$とすると

$$u=\frac{dx}{dt}=4(1-\cos t)$$
$$v=\frac{dy}{dt}=4(1+\sin t)$$

ゆえに $t=\dfrac{\pi}{2}$ においては速度ベクトルは

$$(4,\ 8)$$

で与えられる。

答　速度ベクトル$(4,\ 8)$

（注）あるいは速さ$4\sqrt{5}$，進行方向がx軸となす角をθとすると$\tan\theta=2$，と答えてもよい。

練習3. 等速円運動する点P$(x,\ y)$が次式で与えられている。

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t\quad (R>0)$$

点Pの速度を求めよ。

（解）$x=R\cos\omega t$，$y=R\sin\omega t$

$$u=\frac{dx}{dt}=-R\omega\sin\omega t$$
$$v=\frac{dy}{dt}=R\omega\cos\omega t$$
$$\sqrt{u^2+u^2}=R|\omega|$$

また，内積を考えると

$$(u,\ v)\cdot(x,\ y)$$
$$=(-R\omega\sin\omega t)(R\cos\omega t)$$
$$+(R\omega\cos\omega t)(R\sin\omega t)$$
$$=0$$

ゆえに，速度ベクトルは大きさ$R|\omega|$でOPに垂直である。

（注）OPに垂直というだけでは向きがわからないが，$\omega>0$なら反時計まわり，$\omega<0$なら時計まわりであることは明らかでしょう。これはまた

$$u=-\omega y,\quad v=+\omega x$$

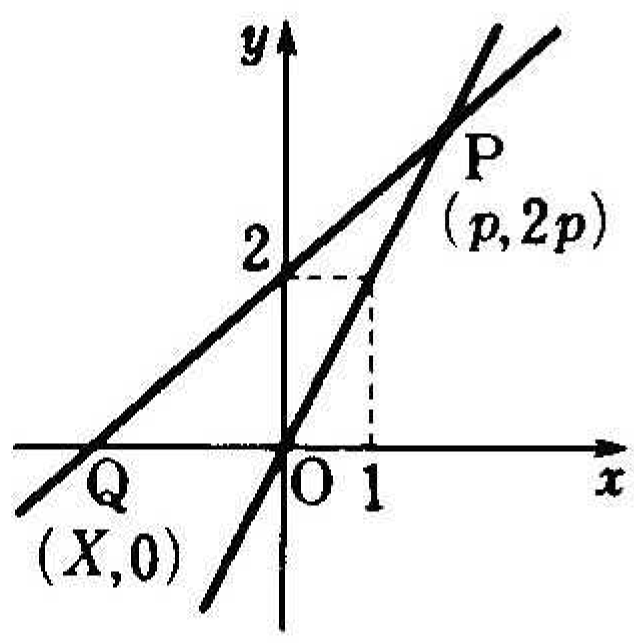
からもわかります。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

■練習 4. 動点Pが直線 $y=2x$ 上を一定の速さ v で x の増す向きに運動している。点 $(0,\ 2)$ と P とを結ぶ直線が x 軸と交わる点をQとする。Pが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通るとき，Qの速さはいくらか。　（富山大）

（解） 時刻 t において動点 P の座標を $(p,\ 2p)\ (p>0)$ とすると，Pと点 $(0,\ 2)$ を通る直線の方程式は



$$y=\frac{2(p-1)}{p}x+2$$

で与えられる。したがって，点Qの座標は

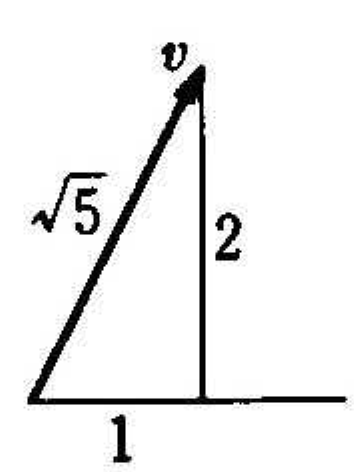
$$\left(\frac{p}{1-p},\ 0\right)$$

である。したがって，Qの x 座標を X とすると

$$X=\frac{p}{1-p}$$

$$\therefore\quad \frac{dX}{dt}=\frac{dX}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}=\frac{1}{(1-p)^2}\cdot\frac{dp}{dt}$$

ところが $\dfrac{dp}{dt}$ はPの速度の x 成分であるから



$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{\sqrt{5}}v$$

$$\therefore\quad \frac{dX}{dt}=\frac{v}{\sqrt{5}(1-p)^2}$$

ゆえに，Pが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通るときには

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{X=\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}v=\frac{4\sqrt{5}}{5}v$$

である。

答　$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}v$

■練習 5. 直線上で原点から出発して t 秒後における速度が

$$v=\cos t+\cos 2t\ \ (\mathrm{cm/秒})$$

で与えられるような運動をしている点がある。これについて，

(1) 出発してから t 秒後の点の位置を求めよ。

(2) 出発時における加速度を求めよ。

(3) 出発してから π 秒後までの間に点の動く範囲を求めよ。　（名大）

（解） (1) t 秒後の点の座標を x とすれば

$$v=\frac{dx}{dt}=\cos t+\cos 2t$$

より

$$x=\int_0^t(\cos t+\cos 2t)dt$$
$$=\left[\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^t$$
$$=\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\therefore\quad x=\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t \qquad \cdots\cdots 答$$

(2) 加速度を α とすると

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=-\sin t-2\sin 2t$$

であるから，$t=0$ においては

$$\alpha_{t=0}=(-\sin t-2\sin 2t)_{t=0}=0$$

ゆえに出発時における加速度は 0 $(\mathrm{cm/s^2})$ である。

答　0

(3) $x=\sin t+\dfrac{1}{2}\sin 2t$ の $0\leqq t\leqq\pi$ における最大値を求めればよい。

$$\frac{dx}{dt}=\cos t+\cos 2t=0$$

から，これを解いて

$$\cos t=\frac{1}{2},\ -1$$

$$\therefore\quad t=\frac{\pi}{3},\ \pi \qquad (\because\ 0\leqq t\leqq\pi)$$

で，最大値は $x_{t=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，最小値は $x_{t=0}=x_{t=\pi}=0$ である。

ゆえに，点の動く範囲は

$$0\leqq x\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \cdots\cdots 答$$

*　*　*

◐ 加速度と微分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微分法を使えば何でもない加速度が，これを使わないばかりにヒドクめんどうになることは物理学ですでに経験ずみのハズだ。

◆ 数直線上を動く動点の座標xが，時刻tの関数であるとき，**速度$\boldsymbol{v}$** および **加速度$\boldsymbol{\alpha}$** は次のように与えられます。

$$v=\frac{dx}{dt},\quad \alpha=\frac{d^2x}{dt^2}$$

では，何はともあれ，次の練習をやってみませんか。

■練習 1. $x=t^3-3t$ で与えられるとき，$t=2$ における速度および加速度を求めよ。

（解） $x=t^3-3t$

$$\therefore\quad v=\frac{dx}{dt}=3t^2-3,\quad \alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=6t$$

$$\therefore\quad v_{t=2}=9,\quad \alpha_{t=2}=12$$

答 速度：9，加速度：12

■練習 2. x軸上を運動する点Pの座標xが時刻tの3次の奇関数で与えられているとき，点Pの加速度αは時間に比例することを示せ。

（解） $x=at^3+bt\quad(a\neq 0)$

とおくと，

$$\frac{dx}{dt}=3at^2+b,\quad \alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=6at$$

$$\therefore\quad \alpha\propto t$$

■練習 3. 単振動 $x=a\sin(\omega t+\tau)$ において加速度は原点からの距離に比例することを示せ。ここに，a，ω，τ は定数である。

（解） $x=a\sin(\omega t+\tau)$

$$\therefore\quad v=\frac{dx}{dt}=a\omega\cos(\omega t+\tau)$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\sin(\omega t+\tau)$$

$$\therefore\quad \alpha=-\omega^2x\qquad \therefore\quad \alpha\propto x$$

Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ 左の欄で扱ったのは直線運動だけですが，平面運動では次のようになります。

動点Pのx座標，y座標が時刻tの関数で与えられているとき，時刻における速度・加速度は次のようになります。

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\quad \boldsymbol{\alpha}\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

■練習 4. 点 P(x, y) の運動が，時間tの関数 $x=t^2-2t$，$y=t^2+2t$ で与えられるとき，時刻 $t=1$ における速度，加速度を求めよ。

（解） $$\frac{dx}{dt}=2t-2,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=2$$

$$\frac{dy}{dt}=2t+2,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=2$$

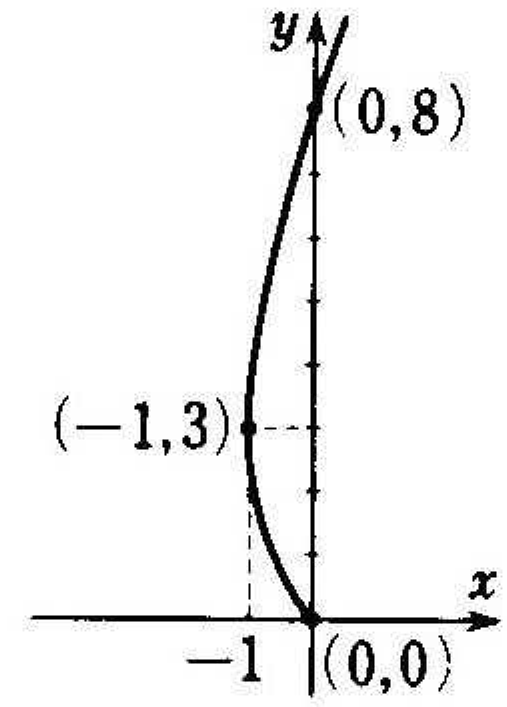
であるから，速度ベクトルを$\boldsymbol{v}$，加速度ベクトルを$\boldsymbol{\alpha}$とすると

$$\boldsymbol{v}_{t=1}=(0,\ 4),\quad \boldsymbol{\alpha}_{t=1}=(2,\ 2)$$

である。

答 (0, 4), (2, 2)

（注） 速度ベクトルを成分で表して (0, 4) とする代わりに大きさ4で，y軸の正の方向に向いているといってもよいのです。加速度ベクトルについても成分で表して (2, 2) とする代わりに，大きさ$2\sqrt{2}$で，x軸と $+45°$ の角をなす方向といってもよいのです。



なお，この問題で点Pの経路はtを消去して得られます。

すなわち，

$8(x+y)=(x-y)^2$ ……(＊)

となります。

しかし，このグラフをかくには，(＊) のグラフ

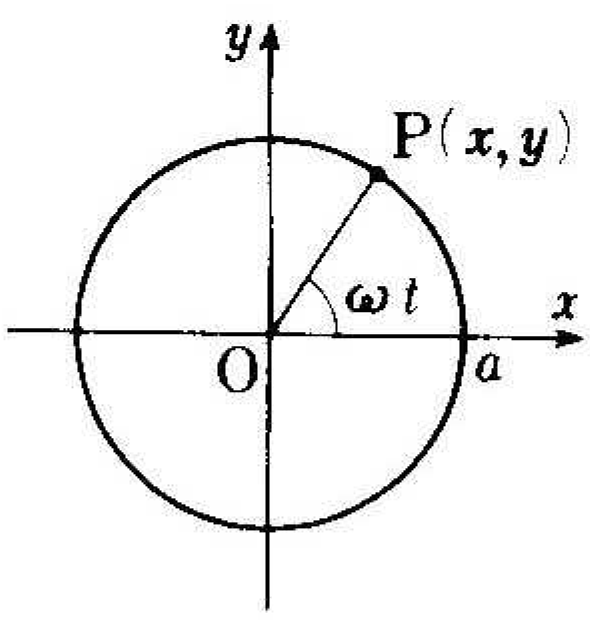
を直接かくよりも，$x=t^2-2t$，$y=t^2+2t$ において，$t=0$，1，2，……など値を代入して，点 $(0,0)$，$(-1,3)$，$(0,8)$ などを求め，なめらかに結ぶほうがいいでしょう。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 5　半径 a の円周上を一定の角速度 ω で運動する点の，速度および加速度を求めよ。

（解）点 $(a,\ 0)$ から出発したとして，時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(v_x,\ v_y)$，加速度 $\boldsymbol{\alpha}(\alpha_x,\ \alpha_y)$，を求めよう。



点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は

$$x=a\cos\omega t,\quad y=a\sin\omega t$$

で与えられるから

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t$$
$$v_y=\frac{dy}{dt}=a\omega\cos\omega t$$
$$\alpha_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\cos\omega t$$
$$\alpha_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-a\omega^2\sin\omega t$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=-a\omega(\sin\omega t,\ -\cos\omega t)\\ \boldsymbol{\alpha}&=-a\omega^2(\cos\omega t,\ \sin\omega t)\end{aligned}\right\}\quad \boxed{答}$$

（注）上の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\boldsymbol{v}=(a\cos\omega t,\ a\sin\omega t)\cdot(-a\omega\sin\omega t,\ a\omega\cos\omega t)=0$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\boldsymbol{v}$$

となることもわかりますし，また

$$\boldsymbol{\alpha}=-\omega^2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{v}$$

であることもわかります。これらの結果は，物理では微分法を使わないでやるものだから，スゴクゴタゴタしたやり方になったはず!!　上の結果はもう少し一般的に成り立つのです。

練習 6.　平面上で速さが一定の運動では，速度ベクトルと加速度ベクトルは垂直であることを示せ。

（解）点Pの座標を $(x,\ y)$ としますと，速度ベクトルの大きさは

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=一定$$

両辺を t で微分すると

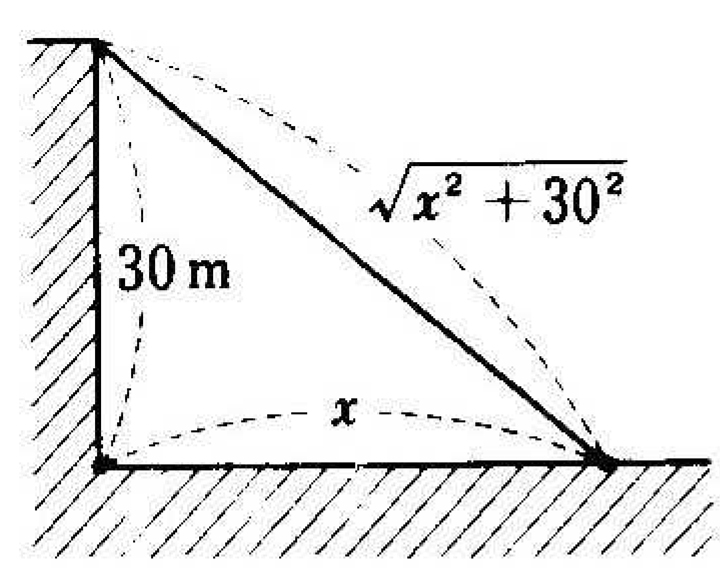
$$2\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}+2\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2y}{dt^2}=0$$
$$\therefore\quad \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$$

ゆえに速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ は垂直である。　　Q. E. D.

＊　＊　＊

◆ では，もう1つちょっと変わった問題をやってみましょう。

練習 7.　水面から30mの高さの岸壁から，長さ58mの綱で舟を引き寄せている。毎秒4mの速さで綱をたぐるとき，2秒後の舟の速さと加速度の大きさを求めよ。



（ヒント）右上の図で $\sqrt{x^2+30^2}$ の 4m/s 速さで小さくなるとき $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=2}$ と $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=2}$ を求めよ，というわけだ。ただし，$t=0$ のとき $\sqrt{x^2+30^2}=58$ という条件があるのです。

さて，

$$\sqrt{x^2+30^2}=58-4t$$
$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}}\cdot\frac{dx}{dt}=-4$$
$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=-\frac{4\sqrt{x^2+30^2}}{x}=-\frac{4(58-4t)}{x}$$
$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-4\cdot\frac{x(-4)-(58-4t)\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$t=2$ において $x=40$ ですから，

$$\therefore\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=2}=-5(\mathrm{m/s})$$
$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=2}=-\frac{9}{40}(\mathrm{m/s^2})$$

○平均値の定理とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆なぜ，こんなものに平均値の定理などと大ゲサな名前をつけたのか。大学の数学科を出てもまだわからない人が多いものなんです。

◆ **平均値の定理** はいろいろな表し方をされています。すなわち，

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)$$

となる点 c が少なくとも1つ存在する。

あるいは

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ a+h]$ で微分可能ならば，

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

となるような θ が $0<\theta<1$ の範囲に存在する。

(注) ここで閉区間 $[a,\ b]$，つまり $a\leqq x\leqq b$ で微分可能とあるが，開区間 $(a,\ b)$，つまり $a<x<b$ ではなぜいけないのでしょうか？

*　*　*

◆ では，小手調べを：——

■練習 1. 平均値の定理

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$$

における c の値を次の場合に求めよ。

$$f(x)=\sqrt{x},\ a=1,\ b=9$$

(解) $f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore\quad \sqrt{9}=\sqrt{1}+(9-1)\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$$\therefore\quad \frac{4}{\sqrt{c}}=2\qquad\therefore\quad c=4$$

答　$c=4$

■練習 2. $f(x)=x^2+x+1$ のとき，平均値の定理

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),\ 0<\theta<1$

における θ を求めよ。

(解) $f(x)=x^2+x+1,\ f'(x)=2x+1$

$$\therefore\quad (a+h)^2+(a+h)+1$$
$$=a^2+a+1+h\{2(a+\theta h)+1\}$$
$$\therefore\quad a^2+2ah+h^2+a+h+1$$
$$=a^2+a+1+2ah+2\theta h^2+h$$
$$\therefore\quad 2\theta h^2=h^2$$
$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{2}\quad(\because\quad h\neq 0)$$

*　*　*

◆ では，ややめんどうなものをやってみませんか。

■練習 3. $f(x)=x^3$ のとき，等式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

における θ について，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ。

(ヒント) $f(x)=x^3,\ f'(x)=3x^2$

$$\therefore\quad (a+h)^3=a^3+h\cdot 3(a+\theta h)^2$$
$$\therefore\quad a^3+3a^2h+3ah^2+h^3$$
$$=a^3+3a^2h+6ah^2\theta+3h^3\theta^2$$
$$\therefore\quad 6a\theta=3a+h-3h\theta^2$$

$h\longrightarrow 0$ のときの両辺の極限をとると，

$$6a\lim_{h\to 0}\theta=3a+\lim_{h\to 0}h+3\lim_{h\to 0}(h\theta^2)$$

ところが $0<\theta<1$ ですから $0<\theta^2<1$ で，したがって

$$\lim_{h\to 0}h\theta^2=0\quad\therefore\quad \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

答　$\dfrac{1}{2}$

■練習 4. $f(x)=e^x$ のとき，平均値の定理における θ について $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ。

(解) $f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x$

$$\therefore\quad e^{a+h}=e^a+he^{a+\theta h}$$
$$\therefore\quad e^h=1+he^{\theta h}$$

$$\therefore\quad e^{\theta h}=\frac{e^h-1}{h}$$

$$\therefore\quad \theta h=\log\frac{e^h-1}{h}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\log\dfrac{e^h-1}{h}}{h}$$

$h\longrightarrow 0$ のとき 分母 $\longrightarrow 0$, 分子 $\longrightarrow 0$ であるから, **ロピタルの定理**（☞ p. 166参照）を使って

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{e^h-1}}{1}\cdot\frac{he^h-(e^h-1)\cdot 1}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{he^h-e^h+1}{he^h-h}$$

これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ の形であるから，再びロピタルの定理を使って

$$=\lim_{h\to 0}\frac{he^h}{e^h-1+he^h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h}{2+h}=\frac{1}{2}$$

答 $\dfrac{1}{2}$

*　　*　　*

◆ 次は平均値の定理ではありませんが同じ扱いができますので，やってみませんか。

練習 5　$f(x)=x^3$ のとき

$$f(a+h)$$
$$=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$$
$$(0<\theta<1)$$

が成り立つという。θ の値を求めよ。

（解）　$f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$

ですから

$$(a+h)^3=a^3+h\cdot 3a^2+\frac{h^2}{2}\cdot 6(a+\theta h)$$

$$\therefore\quad h^3=3\theta h^3\quad \therefore\quad \theta=\frac{1}{3}$$

練習 6.　$f(x)=e^x$ のとき

$$f(a+h)$$
$$=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$$
$$(0<\theta<1)$$

を満足する θ が存在する。θ を求めよ。

（解）　$f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$

であるから

$$e^{a+h}=e^a+he^a+\frac{h^2}{2}\cdot e^{a+\theta h}$$

両辺を e^a で割ると

$$e^h=1+h+\frac{1}{2}h^2e^{\theta h}$$

$$\therefore\quad e^{\theta h}=\frac{2\{e^h-(1+h)\}}{h^2}$$

$$\therefore\quad \theta h=\log\frac{2\{e^h-(1+h)\}}{h^2}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{h}\log\frac{2\{e^h-(1+h)\}}{h^2}$$ ……答

*　　*　　*

◆ 平均値の定理はいろいろと応用の範囲が広いのです。極限値を求めるとき，不等式の証明に，あるいは誤差の限界をきめるときなど。詳しくは（☞ p. 154）を参照してください。ここには1例だけあげておくことにしましょう。

それは，これです：——

練習 7. 平均値の定理を述べなさい。次にこの定理を用いて $\log_e 4.03$ の近似値を求めなさい。ただし，$\log_e 4=1.3863$ とする。（帯広畜産大）

（ヒント）　$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$

において

$$f(x)=\log x,\quad a=4,\quad h=0.03$$

とおきますと

$$\log 4.03=\log 4+0.03\times\frac{1}{4+0.03\theta}$$

$$=1.3863+\frac{0.03}{4+0.03\theta}$$

ところが $4<4+0.03\theta<4.03$ ですから

$$\frac{0.03}{4.03}<\frac{0.03}{4+0.03\theta}<\frac{0.03}{4}$$

つまり

$$0.0074\cdots\cdots<\frac{0.03}{4+0.03\theta}<0.0075$$

$$\therefore\quad \log_e 4.03\fallingdotseq 1.3937$$ ……答

平均値の定理の応用

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆平均値の定理を使おうとしても気ばかりあせって時間を浪費するのに，突如として向こうからやってくることがある。このフシギさ。

◆ **平均値の定理**は知っているものとし，ここでは，平均値の定理の応用例を練習することにしましょう。もっとも多いのは極限値を求める問題への応用，第2は不等式の証明，そして，第3は誤差の見積りです。

練習1. 関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で微分可能でつねに $f'(x)=0$ ならば，この区間で $f(x)$ は定数であることを示せ。

ヒント　平均値の定理でやってみましょう。

区間 $[a,\ b]$ の x に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c),\quad a<c<x$$

なる c が存在する。

というのが平均値の定理でした。さて，この場合は $f'(c)=0$ ですから

$f(x)-f(a)=0 \qquad \therefore\quad f(x)=f(a)$

ゆえに $f(x)$ は定数に等しいのです。

この種のものは，あまりに簡単なために，かえってわからないことが多いのです。

練習2. $f(x)$ が x の任意の値に対して微分可能で，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha$ ならば，

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\alpha$$

であることを示せ。

解　区間 $[x,\ x+1]$ で平均値の定理を適用すると

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(c)\quad (x<c<x+1)$$

なる c が存在する。そして $x\longrightarrow\infty$ のとき $c\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=\lim_{c\to\infty}f'(c)=\alpha$$

Q. E. D.

注　これも簡単ですが，抵抗を感じるひとが多いでしょう。

*　*　*

◆ 次はめんどうですが，かえって抵抗を感ずることが少ないもの：——

練習3. 平均値の定理を使って

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$$ を求めよ。

解　平均値の定理により

$$\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\cos c$$

ただし，$x^2<c<x$，または $x<c<x^2$.

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\lim_{c\to0}\cos c=\cos 0=1$$

答　1

練習4. 平均値の定理を使って

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$$ を求めよ。

（福島医大）

解　$f(t)=\sin t$ とおくと，$f(t)$ は $[-\infty,\ \infty]$ で微分可能であるから，平均値の定理を適用して

$$\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\cos c$$

ここに，

$x<c<\sin x<0$ または $0<\sin x<c<x$

である。

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{c\to0}\cos c=1$$

答　1

注　このように，極限値を求める際に大きな力を発揮することが少なくありません。平均値の定理を使わないで，上の練習をやってみませんか。

*　*　*

◆ 次は不等式への応用です。では：——

練習 5 平均値の定理を利用して，$x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

ただし，対数は自然対数とする。（慶大）

ヒント 平均値の定理

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$, $0<\theta<1$

において

$$f(x)=\log x,\quad a=x,\quad h=1$$

としますと

$$\log(x+1)=\log x+1\cdot\frac{1}{x+\theta\cdot 1}$$

つまり

$$\log(x+1)-\log x=\frac{1}{x+\theta}$$

となります。ところが $0<\theta<1$ ですから

$$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x+\theta}<\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

Q. E. D.

練習 6. $0<x_1<x_2<x_3\leqq\pi$ のとき

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$$

を証明せよ。（横浜市大）

解 平均値の定理

$f(a)-f(b)=(a-b)f'(\xi)$ $(b<\xi<a)$

において

$$f(x)=\sin x,\quad a=x_2,\quad b=x_1$$

としますと，$x_1<\xi_{12}<x_2$ に対して

$$\sin x_2-\sin x_1=(x_2-x_1)\cos\xi_{12}$$

が成り立つ。

$$\therefore\quad \frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\cos\xi_{12}$$

まったく同様にして，$x_2<\xi_{23}<x_3$ に対して

$$\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_1}=\cos\xi_{23}$$

が成り立つ。

しかるに

$$0<x_1<\xi_{12}<x_2<\xi_{23}<x_3\leqq\pi$$

であるから

$$\cos\xi_{12}>\cos\xi_{23}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$$

Q. E. D.

*　　*　　*

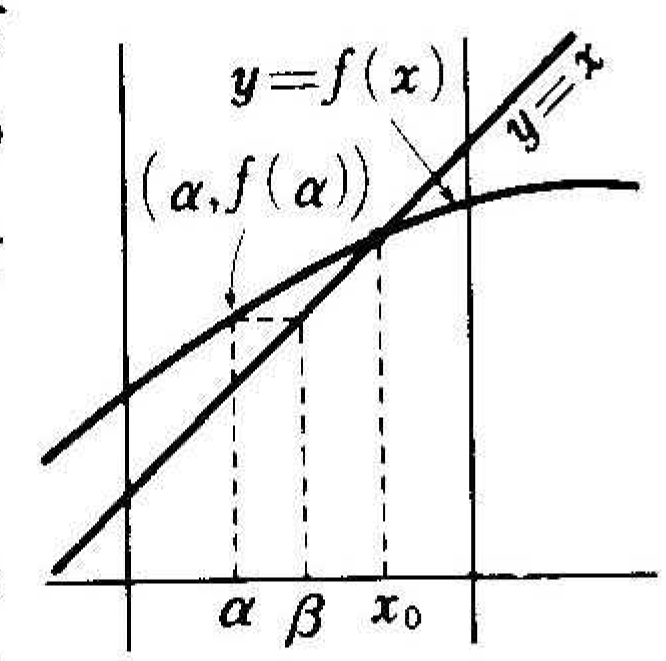
◆ 次は近似値の問題への応用です。近似値や誤差についての詳しいことは（☞ p. 158, 160）を参照してください。

では，これを：——

練習 7. ある区間において，関数 $f(x)$ は微分することができて，$|f'(x)|<1$ で，かつ方程式 $x=f(x)$ が実数解をもつものとする。このとき，α をその区間内の実数解の近似値とすれば，$\beta=f(\alpha)$ は α よりよい近似値となることを証明せよ。

（福井大）

ヒント これはちょっとイヤな問題ですね。しかし，グラフをかいてみると，少なくも直観的には明らかです（右図参照）。これをどのように証明するか，それが問題です。



さて：——

実数解を x_0 とすると平均値の定理により

$$f(x_0)-f(\alpha)=(x_0-\alpha)f'(\xi)$$

ここに ξ は x_0 と α の間の適当な値です。

$$\therefore\quad |f(x_0)-f(\alpha)|=|x_0-\alpha||f'(\xi)|$$

ところが

$$f(x_0)=x_0,\quad f(\alpha)=\beta,\quad |f'(\xi)|<1$$

ですから，

$$|x_0-\beta|<|x_0-\alpha|$$

ゆえに β は α よりよい近似値であることがわかります。

このように，ちょっとみると平均値の定理の使えそうもない問題にスンナリ使えるところがおもしろいところです。

近似式の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈正確な値，正確な式でなくていい。近似式を求めたい。この態度をもっと数学の中に広げたいものだ，これはまさに思想の問題だ!!

◆ 近似式を求めることは，基解でもやったハズ。微積では，２次の近似式をも求められなければなりません。まず１次の近似式からやってみましょう。

さて，関数の近似値を求めるのに用いられる式を **近似式** といいます。

$|x|$ が微小のとき

$$\boldsymbol{f(a+x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)x} \quad \cdots\cdots(*)$$

なる関係があります。これを **1次の近似式** といいます。では，これを：——

練習 1. $|x|$ が微小のとき $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ の近似式を導け。

(ヒント) $x=0$ なら $f(x)=1$ ですから，x が0に近い数のとき $f(x)$ は1に補正したようなものになるのでしょう。

$(*)$ から

$$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)\cdot x$$

ところが $f(0)=1$，$f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ から

$$f'(0)=1$$

$$\therefore \quad f(x) \fallingdotseq 1+x$$

(答) $f(x) \fallingdotseq 1+x$

(注) この結果を求めるだけなら割算でもできます。つまり

$$\begin{array}{r}
1+x+x^2 \\
1-x\,\big)\overline{\,1 } \\
\underline{1-x } \\
x \\
\underline{x-x^2 } \\
x^2 \\
\underline{x^2-x^3}
\end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

$$\fallingdotseq 1+x$$

練習 2. $\sqrt{1+x}$ の $x=3$ の近くで用いる近似式を求めよ。

(ヒント) $x=3+h$ とおくと $|h|$ は微小で，近似式 $(*)$ が使えます。

(解) $x=3+h$ とおくと，$|h|$ は微小で，

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{4+h}\\
&\fallingdotseq \sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4+0}}h\\
&=2+\frac{1}{4}(x-3)\\
&=\frac{x+5}{4}
\end{aligned}$$

(答) $f(x) \fallingdotseq \dfrac{x+5}{4}$

(注) $x=3.1$ としますと，$\dfrac{x+5}{4}=2.025$ となります。正しい値は $\sqrt{4.1}=2.0248\cdots\cdots$ で，かなりいい近似といえましょう。

練習 3. $f(x)=\sin x$ の $x=\dfrac{\pi}{6}$ の近くで用いる近似式を求めよ。

(解) $x=\dfrac{\pi}{6}+h$ とおくと，$|h|$ は微小で，

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\\
&\fallingdotseq \sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)h\\
&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{6-\sqrt{3}\pi}{12} && \cdots\cdots(*)\\
&\fallingdotseq 0.866x+0.047 && \cdots\cdots(**)
\end{aligned}$$

(答) $f(x) \fallingdotseq 0.866x+0.047$

(注) 答として $(*)$ をとるか $(**)$ をとるかという問題もおきますが，近似式なのですから $(**)$ のほうが妥当といえます。

*　*　*

◆ 次は **2次の近似式** です。

$|x|$ が微小のとき

$$\boldsymbol{f(a+x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)x+\frac{1}{2}f''(a)x^2}$$

を2次の近似式といいます。では，これをやってみませんか。

練習4. $x\fallingdotseq 0$ のとき，近似式

$$\sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

が成り立つことを示せ。

(ヒント) x^2 の項までありますから，2次の近似式を採用すればよいにちがいありません。

さて，上の近似式で

$$f(x)=\sqrt{x},\quad a=1$$

としますと，

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\quad f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

ですから

$$f(1)=1,\quad f'(1)=\frac{1}{2},\quad f''(1)=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

となります。

練習5. $x\fallingdotseq 0$ のとき $\sqrt[3]{1+x}$ の2次の近似式を導け。

(解) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}$$

であるから，

$h\fallingdotseq 0$ のとき

$$f(1+h)\fallingdotseq f(1)+f'(1)h+\frac{1}{2}f''(1)h^2$$

$$=1+\frac{1}{3}h-\frac{1}{9}h^2$$

改めて h の代わりに x と書くと

$$\sqrt[3]{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$$

である。

(答) $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$

*　*　*

◆ 最後に **近似式の誤差** について簡単にふれておくことにしましょう。

さて，

(i) $f(a+h)\fallingdotseq f(a)$ を採用したとき，誤差の絶対値は，ほぼ

$$|\boldsymbol{hf'(a)}|$$

(ii) $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+hf'(a)$ を採用したとき，誤差の絶対値は，ほぼ

$$\left|\boldsymbol{\frac{h^2}{2}f''(a)}\right|$$

(iii) $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}f''(a)h^2$

を採用したとき，誤差の絶対値は，ほぼ

$$\left|\boldsymbol{\frac{h^3}{6}f'''(a)}\right|$$

で与えられます。

では，これを：——

練習6. $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値とその誤差の絶対値を求めよ。ただし，近似式としては2次のものを求めよ。

(ヒント) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ a=1,\ h=0.1$

とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{1.1}\fallingdotseq 1+0.1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}\right)(0.1)^2$$

$$\fallingdotseq 1.0322$$

誤差の絶対値は

$$\left|\frac{0.1^3}{6}\times\frac{10}{27}\right|\fallingdotseq 0.00007$$

となります。

(答) 1.0332 , 0.00007

近似値の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆近似値を求める問題はとかくいやがられる。というのも，近似ということのアイマイサからくる。しかし，ああ，しかし，だ。

◆ 近似値の求め方は，数Ⅰでも基解でもやりましたが，微積では，**誤差**についても知っておきたい。それがちがう点です。あとは計算だけ。さて，

hが微小のとき，$f(a+h)$の近似値として，

$$f(a)+f'(a)h$$

をとれば，誤差は，ほぼ $\dfrac{|f''(a)|}{2}h^2$ である。

では，具体的な練習をしてみましょう。

練習1. $\sqrt{101}$ の近似値と誤差を求めよ。

（ヒント） $\sqrt{101}=\sqrt{100+1}$

$$=\sqrt{100\left(1+\frac{1}{100}\right)}$$

$$=10\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

と変形できますから，$\sqrt{1+\dfrac{1}{100}}$ を求めてみれば，あとは10倍するだけのこと。

さて，$f(x)=\sqrt{x}$ としますと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\quad f\left(1+\frac{1}{100}\right)=f(1)+\frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{100}$$

$$=1+0.005=1.005$$

さあ，次は誤差だ！

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ですから

$$|誤差|\fallingdotseq\frac{1}{2}|f''(1)|\left(\frac{1}{100}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{100^2}$$

$$=0.125\times10^{-4}=0.0000125<0.00002$$

そこで　$\sqrt{101}\fallingdotseq10.05$

の誤差は0.0002より小ということになります。なお，正しい値は

$$\sqrt{101}=10.0498756\cdots\cdots$$

練習2. $\sqrt[3]{730}$ の近似値を求めよ。また誤差の限界を求めよ。

（解）　$730=729+1=9^3+1$

であるから

$$\sqrt[3]{730}=9\sqrt[3]{1+\frac{1}{729}}$$

いま $f(x)=\sqrt[3]{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

であるから，

$$f\left(1+\frac{1}{729}\right)=f(1)+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\cdot\frac{1}{729}$$

$$=1+\frac{1}{2187}=1.0004572\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad\sqrt[3]{730}=9.00411$$

$$|誤差|\fallingdotseq\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9\sqrt[3]{1^5}}\cdot\left(\frac{1}{729}\right)^2\times9$$

$$=0.0000019\cdots\cdots$$

$$<0.000002$$

答　9.00411，誤差の限界 0.000002

練習3. $\sqrt[3]{8.06}$ の近似値として 2.005 をとるとき，誤差の絶対値は 0.000025 以下であることを示せ。（茨城大）

（ヒント）　$\sqrt[3]{8.06}=\sqrt[3]{8+0.06}$

$$=\sqrt[3]{8(1+0.0075)}$$

$$=2\sqrt[3]{1+0.0075}$$

そこで $f(x)=\sqrt[3]{x}$ とおいて考えるとよいでしょう。

*　*　*

◆ 次には，やや総合的なものをとりあげてみましょう。

練習 4. xの3次方程式

$$(x-1)(x-2)(x-5)=h$$

（hは絶対値の小さい実数の定数）はそれぞれ1，2，5に近い3つの解をもつ。このことを既知として，その3つの解の近似値をhの1次式の形で求めよ。（京都府医大）

解 1. 1に近い解を $1+k$ とおいて代入すると

$$k(k-1)(k-4)=h$$

$$\therefore\quad k^3-5k^2+4k=h$$

k^2，k^3 は $4k$ に比べて無視してよいから

$$4k\fallingdotseq h \qquad \therefore\quad k\fallingdotseq\frac{h}{4}$$

したがって1に近い解は $1+\dfrac{h}{4}$ で与えられる。同様に，他の2つは $2-\dfrac{h}{3}$，$5+\dfrac{h}{12}$ で与えられる。

答 $1+\dfrac{h}{4}$，$2-\dfrac{h}{3}$，$5+\dfrac{h}{12}$

解 2.
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)$$
$$=x^3-8x^2+17x-10$$

とおくと，$|k|$ が十分小さいとき

$$f(a+k)\fallingdotseq f(a)+f'(a)k$$

である。ところが

$$f'(x)=3x^2-16x+17$$

であるから，$a=1$ のとき

$$f(1+k)\fallingdotseq f(1)+f'(1)k=4k\fallingdotseq h$$

$$\therefore\quad k\fallingdotseq\frac{h}{4}$$

ゆえに1の近くの解は $1+\dfrac{h}{4}$ で与えられる。同様に他のものも，

$$2-\frac{h}{3},\quad 5+\frac{h}{12}$$

で与えられる。

練習 5. xの関数

$$F(x)=\int_0^x(\tan t+xt+\sqrt{x+t})dt$$

$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ において，xの値が1から1.05になるとき，$F(x)$ の値の増加の量の近似値を求めよ。ただし，$\tan 1=1.56$ とする。（京都府医大）

ヒント
$$F(x)=\int_0^x\tan t\,dt+x\int_0^x t\,dt+\int_0^x\sqrt{x+t}\,dt$$
$$=\int_0^x\tan t\,dt+\frac{x^3}{2}+\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)x^{\frac{3}{2}}$$

となります。

ところで1次の近似式を採用しますと

$$F(1.05)=F(1)+0.05F'(1)$$

となります。つまり，

$$F(1.05)-F(1)=0.05F'(1)$$

となります。

さて，

$$F'(x)=\tan x+\frac{3}{2}x^2+(2\sqrt{2}-1)x^{\frac{1}{2}}$$

ですから

$$F'(1)=\tan 1+\frac{3}{2}+(2\sqrt{2}-1)$$
$$=1.56+2\sqrt{2}+0.5$$
$$=2.06+2\sqrt{2}$$

となります。

ゆえに，求める増加量は

$$0.05(2.06+2\sqrt{2})\fallingdotseq 0.244$$

となります。

答 0.244

* * *

◆ 近似値の問題はとかくスッキリしなくてイヤなものが多いのですが，自分なりに対応する方法をきめておいて，それを強引に適用するようにつとめるのが上達の早道です。臨機応変がもっともまずい勉強法です。

もう1つ，「**xが微小であるとき**」という表現も気になるでしょう。xが微小というのは x^2，x^3，……のついた項はxに比べて省略できる，という意味です。「$|x|$ が十分小さいとき」というのも同じです。

◐誤差とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数学を何かに使おうとすれば，近似値や誤差がすぐ浮かび上がってくるハズ。もっと，誤差に生き生きした活力を与えたいものだ!!

◆ **真の値** をA，その **近似値** をaとするとき$A-a$を **誤差** といいます。したがって誤差をΔaと書けば

$$\Delta a=A-a$$

と表せます。また，

$$\left|\frac{\Delta a}{A}\right|$$

のことを **相対誤差** といいます。相対誤差は百分率で表すこともありますから，注意してください。

では，これをやってみませんか。

練習1. 1辺の長さ約10cmの正方形の面積を相対誤差が1％以内になるように求めたい。辺の長さをどの程度まで測ればよいか。

（ヒント）正方形の面積は約100cm²ですから，誤差をΔaとしますと

$$\left|\frac{\Delta a}{100}\right|\leqq 0.01$$

にしたい。つまり

$$|\Delta a|\leqq 1$$

にしたい。

ところで1辺の長さをlとしますと，面積の誤差Δaは

$$\Delta a=100-l^2$$

ですから

$$|100-l^2|\leqq 1$$

$$\therefore\quad -1\leqq 100-l^2\leqq 1$$

$$\therefore\quad 99\leqq l^2\leqq 101$$

$$9.949\cdots\leqq l\leqq 10.049\cdots \qquad\cdots\cdots(*)$$

つまり，lを0.04cmまで正確に測ればよいことがわかります。

（注）lを0.04cmまで正確に測らなくても，0.049cmまででもいいわけです。しかし，安全性も考えて0.04cmとしたわけですが，技術的に0.045cmまで正確に測れるものならそれでもいいわけ。つまり，そこは数学の問題ではなく，測定技術と関係してくるわけです。だから，(*)が得られれば，あとは，人によって多少ちがうのはかまわないのです。

練習2. ある鉄球を熱したら，体積が1％増した。表面積はどれだけ増したか。

（解）半径をr，体積をV，表面積をSとすれば

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad S=4\pi r^2$$

であるから，第1式から

$$3V=4\pi r^3$$

$$\therefore\quad 9V^2=16\pi^2r^6 \qquad\cdots\cdots①$$

第2式から

$$S^3=64\pi^3r^6 \qquad\cdots\cdots②$$

②÷①より

$$\frac{S^3}{9V^2}=4\pi$$

$$\therefore\quad S^3=36\pi V^2 \qquad\cdots\cdots③$$

両辺をVで微分すると

$$3S^2\frac{dS}{dV}=36\pi\cdot 2V \qquad\cdots\cdots④$$

④÷③を変形して

$$\frac{dS}{S}=\frac{2}{3}\cdot\frac{dV}{V}$$

微小変化をΔS，ΔVで表すと

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}$$

ところが$\dfrac{\Delta V}{V}=1$％であるから

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{2}{3}\cdot 1(\%)=\frac{2}{3}(\%) \qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

(注) 一般に，$y=f(x)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

となりますが，近似的に

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

$$\therefore\quad \Delta y=f'(x)\Delta x$$

なる関係が成り立つのです。ここに，Δx, Δy は x の微小変化，y の微小変化を表すのです。

*　*　*

◆ では，次に総合的な問題にアタッテみましょう。

練習 3. $f(\theta)=\log\tan\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)$

$(0^\circ\leqq\theta<90^\circ)$ のとき，$f(1)$ の値を四捨五入して，小数第4位まで求めよ。ただし，対数は自然対数，$\pi=3.1416$, $\sec 1^\circ=1.0002$ とする。　(宮崎大)

(ヒント) まず，角を弧度で表しますと

$$f(\theta)=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\theta\right)$$

となります。ところで近似式から

$$f(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{1}{2}f''(t)\cdot 1^2$$

ただし，$0<t<1$

なる関係がありますから，

$$f(1)\fallingdotseq f(0)+f'(0)$$

とおきますと，その誤差 d は

$$d=\frac{1}{2}f''(t)$$

で与えられます。ところが

$$f'(\theta)=\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\theta\right)}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\theta\right)}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$=\frac{\pi}{180}\sec\left(\frac{\pi}{180}\theta\right)$$

$$f''(\theta)=\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\sec^2\left(\frac{\pi}{180}\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{180}\theta\right)$$

で，$0<t<1$ のとき

$$0<\sin\frac{\pi}{180}t<\frac{\pi}{180}t<\frac{\pi}{180}$$

なる関係がありますし，その上

$$\pi=3.1416,\quad \sec\frac{\pi}{180}=\sec 1^\circ=1.0002$$

ですから，

$$\sec\frac{\pi}{180}t<\sec\frac{\pi}{180}=1.0002$$

$$0.01745<\frac{\pi}{180}<0.01746$$

で，したがって，

$$|d|=\frac{1}{2}|f''(t)|$$

$$<\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\times 1.0002^2$$

$$<\frac{1}{2}\times(0.02)^3\times 1.00041<0.00001$$

ですから，$f(1)\fallingdotseq\dfrac{\pi}{180}$ とおいても

$$0.01745<f(1)<0.01746+0.00001$$

$$\therefore\quad f(1)\fallingdotseq 0.0175$$

となりましょう。

(答) 0.0175

なお，ここで用いた近似式については，(☞ p. 158) を参照してください。

*　*　*

◆ では，もう1つ：——

練習 4. n を正の整数とする。$\sqrt{1+\dfrac{1}{10^n}}-1$ を小数で表すとき，初めて0でない数字が現れるのは小数第何位か。また，はじめて現れる0でない数字は何か。　(名大)

(ヒント)　$\sqrt{1.1}-1=0.04\cdots\cdots$

$\sqrt{1.01}-1=0.004\cdots\cdots$

$\sqrt{1.001}-1=0.0004\cdots\cdots$

から，はじめて0でない数字が現れるのは小数第 $(n+1)$ 位で，はじめて現れる0でない数字は4だろうと見当がつきます。そして，それを証明するには

$$\frac{4}{10^{n+1}}\leqq\sqrt{1+\frac{1}{10^n}}-1<\frac{5}{10^{n+1}}$$

を示せばいいでしょう。

測定値と誤差の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆正しい値を知りたいからこそ測定する。しかし正しい値を知らないでは誤差はわからない。何か，おかしいぞ!!

◆ 測定値と誤差の関係について，一般には2つの立場から扱われています。1つは，微分法を応用して誤差を見積るもの，もう1つは統計学を応用して多数回測定した場合の誤差を調べるものです。ここでは，まず，前者から練習してみることにしましょう。

*　*　*

◆ 微分法では平均値の定理およびその拡張された近似式がありました。それは

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)$$

で，いずれも $0<\theta<1$ です。だから

$|h|$ が十分小さいとき

$$\left.\begin{array}{l} f(a+h)\fallingdotseq f(a) \\ \text{誤差}:E=hf'(a+\theta h) \end{array}\right\}(*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a+h)\fallingdotseq f(a)+hf'(a) \\ \text{誤差}:E=\dfrac{h^2}{2!}f''(a+\theta h) \end{array}\right\}(**)$$

となります。もっと詳しい式もありますが，ふつう上の2つだけで十分です。

では，具体的な練習を：——

■練習1. 球の半径を測って体積を求めるのに，測定の相対誤差を1%以下にすると，体積の相対誤差は約何%以下となるか。

ヒント　Aの近似値をaとしたとき

$|A-a|$ を 絶対誤差

$\left|\dfrac{A-a}{A}\right|$ を 相対誤差

といいます。この場合には半径の相対誤差を知って，体積の相対誤差を求めよ，というわけです。

なお，相対誤差は百分率（%）で表すことが多く，このとき，**百分誤差** ということもあります。

さて，体積をV，半径をrとしますと

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \cdots\cdots①$$

です。

$$\therefore\ \frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2=4\pi r^2$$

です。いま半径rの誤差をΔr，体積Vの誤差をΔVとしますと，

$$\frac{dV}{dr}\fallingdotseq\frac{\Delta V}{\Delta r}$$

ですから

$$\frac{\Delta V}{\Delta r}=4\pi r^2$$

$$\therefore\ \Delta V=4\pi r^2\Delta r \qquad \cdots\cdots②$$

となります。これは，左の(*)に対応しています。②の両辺を①の両辺で辺々相割ると

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{4\pi r^2\Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3\Delta r}{r}$$

つまり

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right|=3\left|\frac{\Delta r}{r}\right|$$

なる関係が得られます。ところが半径の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|$ が1%以下というのですから

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right|\leqq 0.01 \quad \therefore\ \left|\frac{\Delta V}{V}\right|\leqq 0.03$$

つまり，体積の相対誤差は3%以下であることがわかります。では，もう1つ。

■練習2. 直径が約23.5cmの円がある。この円の面積を測定し，相対誤差が1%以内であるようにしたい。直径をどの程度詳しく測ればよいか。　（京大）

ヒント　面積をS，直径をlとしますと

$$S=\frac{\pi}{4}l^2$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta S}{\Delta l}\doteqdot\frac{dS}{dl}=\frac{\pi}{2}l$$

$$\therefore\quad \left|\frac{\Delta S}{S}\right|=2\left|\frac{\Delta l}{l}\right|$$

これを0.01以下にしたいというのですから

$$2\left|\frac{\Delta l}{l}\right|<0.01\qquad\therefore\quad\left|\frac{\Delta l}{l}\right|<0.005$$

$$\therefore\quad |\Delta l|<0.005\times23.5=0.1175$$

このことから，求める結果は，直径を0.1 cmまで，つまり，直径をmmの位まで測ればよいことがわかったのです。

＊　＊　＊

◆ 第2は統計の問題です。例えば，これです。

■練習 3. ある金属棒の長さを10回測定して次の値を得た。

24.4, 23.9, 24.3, 24.6, 24.0, 24.3
24.1, 23.9, 24.5, 24.4　(単位cm)

測定の誤差を求めよ。この誤差を半分以下にするには何回くらいの測定が必要か。ただし，95%の信頼度で調べよ。

ヒント　測定値には必ず誤差があります。そして，測定の回数を多くすれば，しだいに真の値の近づいてゆくものと考えます。そうすると，この問題は平均値を推定する問題ということになります。ところが，信頼度95%では，標本平均を$\overline{x}$，(真の) 平均をm，標本の標準偏差をsとしますと

$$|\overline{x}-m|\leqq1.96\frac{s}{\sqrt{n}}$$

なる関係があるのでした。もちろんnは標本の数です。さて，この場合には

$$n=10,\quad \overline{x}=24.24,\quad s=0.237$$

ですから

$$|24.24-m|<0.147$$

つまり

$$m=24.24\pm0.15\ (\mathrm{cm})$$

となります。

ゆえに，誤差は0.15 (cm) です。

次に，この誤差を半分以下にするには

$$1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{2}\times1.96\times\frac{s}{\sqrt{10}}$$

となるようにnを選べばよいハズ。

$$\therefore\quad 2\sqrt{10}\leqq\sqrt{n}$$

$$\therefore\quad 40\leqq n$$

つまり40回以上測定すればよいことがわかります。こうしてみると，同じ誤差という言葉で表されていても，2つの立場はまったくちがうものであることがわかるでしょう。

これを混同しないことが肝心です。では，もう1つ：——

■練習 4. 平均m，分散4の正規母集団から大きさnの任意標本を抽出して，その標本平均を$\overline{x}$とするとき，次の問に答えよ。

(1)　$n=100$，$\overline{x}=10$のとき，信頼度95%での信頼区間を求めよ。

(2)　$|\overline{x}-m|\leqq\frac{1}{2}$となる確率が95%以上であるようにしたい。$n$をどのようにすればよいか。　(神戸大)

ヒント　(1)　95%の信頼度でmの信頼区間は

$$\overline{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}}$$

そこで$\overline{x}=10$，$n=100$，$s=\sqrt{4}=2$とおきますと，

$$10-1.96\times\frac{2}{10}\leqq m\leqq10+1.96\times\frac{2}{10}$$

$$\therefore\quad 9.6\leqq m\leqq10.4\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

(つまり，誤差は0.4というわけです)

(2)　$|\overline{x}-m|\leqq\frac{1}{2}$ということは

区間$\left(\overline{x}-\frac{1}{2},\ \overline{x}+\frac{1}{2}\right)$が，区間

$$\left(\overline{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

を含むことですから

$$1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{2},\quad s=2$$

$$\therefore\quad n\geqq62\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

導関数を用いて極限値を求めること

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆導関数の定義を用いて極限値を求めることができます。いや，できることが少なくありません。いや，それよりロピタルの定理を，だ。

◆ $f(x)$ の導関数とは

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

のことでした。この定義式の大事な点は

h のところに同じものがあって，それが 0 に近づく

ということなのです。だから，

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h^2}$$

でもあるわけです。では，これを：——

練習 1. $f(x)$が$(-\infty,\ \infty)$ で微分できるとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-3h)}{h}$$

（解）与式

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-3h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+3\cdot\frac{f(x+(-3h))-f(x)}{(-3h)}\right\}$$

$$=f'(x)+3f'(x)=4f'(x)$$

答　$4f'(x)$

練習 2. $f(x)$ がいたるところ微分可能であるとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h}$$

（解）与式$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h^2)-f(x)}{h^2}\cdot h$

$=f'(x)\lim\limits_{h\to0}h=0$　　答　0

＊　＊　＊

◆ $f(x)$ の $x=a$ における微分係数の定義はふつう 2 つ使われています。もちろん，内容は同じで，ただその表現がちがうだけなんですが，……

さて，1 つは

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

で，もう 1 つは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

です。では，これを：——

練習 3. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h^2+3h)-f(a)}{h}$ を求めよ。

（解）与式

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2+3h)-f(a)}{h^2+3h}\times\frac{h^2+3h}{h}$$

$$=f'(a)\lim_{h\to0}\frac{h+3}{1}=3f'(a)$$

答　$3f'(a)$

（注）これは導関数の場合と本質的なちがいはありませんね。では，……

練習 4. $f(x)$ が $x=a$ で微分できるとき $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ の極限値を求めよ。

（ヒント）$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ を作るのがコツ。

（解）与式

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}-f(a)(x^2-a^2)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)(x+a)\right\}$$

$$=a^2f'(a)-2af(a)$$

（注）ロピタルの定理（☞ p. 166）を使ってもできます。つまり

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2f'(x)-2xf(a)}{1}=\cdots\cdots$$

*　*　*

◆ では，やや総合的なものをやってみませんか。

練習 5. $a>0$, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)>0$ と

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=c$ とがわかっているとき，$\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ を求めよ。

（都立大）

（解）$\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}$$

$$=c\cdot\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{f(a)}}$$

$$=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{f(a)}}$$

答　$\dfrac{c\sqrt{a}}{\sqrt{f(a)}}$

練習 6. $x=a$ で，$f(x)$, $g(x)$ は微分できるものとする。

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(a+h^2)g(a+h^3)-f(a)g(a)\}$$

を求めよ。　（長崎大）

（解）$\dfrac{1}{h}\{f(a+h^2)g(a+h^3)-f(a)g(a)\}$

$$=\frac{1}{h}[g(a)\{f(a+h^2)-f(a)\}$$
$$+f(a+h^2)\{g(a+h^3)-g(a)\}]$$
$$=hg(a)\cdot\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$$
$$+h^2f(a+h^2)\cdot\frac{g(a+h^3)-g(a)}{h^3}$$
$$=0\cdot g(a)\cdot f'(a)+0\cdot f(a)\cdot g'(a)=0$$

答　0

*　*　*

◆ 次の問題はちょっとみると，同じ系統のものとは思えないでしょう。しかし，まさにそれなんです。

練習 7. 2直線 $y=\alpha x+e^{-\alpha}$, $y=\beta x+e^{-\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$ について

(1) 交点の座標を求めよ。

(2) β が α に限りなく近づくとき，この交点はどのような点に近づくか。

（広島大）

（解）(1) $y=\alpha x+e^{-\alpha}$　……①

$y=\beta x+e^{-\beta}$　……②

②－①を作ると

$$(\beta-\alpha)x+e^{-\beta}-e^{-\alpha}=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-(e^{-\beta}-e^{-\alpha})}{\beta-\alpha}$$

これを①に代入して y を求めると

$$y=\frac{\beta e^{-\alpha}-\alpha e^{-\beta}}{\beta-\alpha}$$

ゆえに交点は

$$\left(-\frac{e^{-\beta}-e^{-\alpha}}{\beta-\alpha},\ \frac{\beta e^{-\alpha}-\alpha e^{-\beta}}{\beta-\alpha}\right)$$

である。

(2) $\lim_{\beta\to\alpha}\left(-\dfrac{e^{-\beta}-e^{-\alpha}}{\beta-\alpha}\right)$

（コレハマサニ微分係数ヲ求メル第2ノタイプデハナイカ）

$$=-\left[\frac{de^{-x}}{dx}\right]_{x=\alpha}=\left[e^{-x}\right]_{x=\alpha}=e^{-\alpha}$$

これを①に代入して，求める点の y 座標は

$$\alpha e^{-\alpha}+e^{-\alpha}=(\alpha+1)e^{-\alpha}$$

となる。つまり $(e^{-\alpha},\ (\alpha+1)e^{-\alpha})$ に近づく。

練習 8. $\lim_{x\to a}\dfrac{e^x\cos a-e^a\cos x}{x-a}$ を求めよ。

（解）与式

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos a(e^x-e^a)-e^a(\cos x-\cos a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{\cos a\frac{e^x-e^a}{x-a}-e^a\frac{\cos x-\cos a}{x-a}\right\}$$
$$=\cos a\left[\frac{de^x}{dx}\right]_{x=a}-e^a\left[\frac{d\cos x}{dx}\right]_{x=a}$$
$$=\cos a[e^x]_{x=a}-e^a[-\sin x]_{x=a}$$
$$=e^a\cos a-e^a(-\sin a)$$
$$=e^a(\sin a+\cos a)$$

答　$e^a(\sin a+\cos a)$

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

ロピタルの定理とは何か

ロピタルの定理を使ってもいいでしょうか，とよく聞かれる。やらないよりいいじゃないか，と答えることにしている。

◆ **ロピタルの定理** とは次の定理です。

$f(x)$，$g(x)$ が連続で微分可能な関数で $f(a)=g(a)=0$ かつ $g'(x)\neq 0$ であるとき，$\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(x)}$ が確定であれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ。

簡単にいえば，不定形 $\frac{0}{0}$ のときには分母，分子を別々に微分して極限をとってもよい，ということです。$\frac{\infty}{\infty}$ の場合も使えます。では，具体的な例にいきましょう。

* * *

■練習 1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(\sin x)}$ を求めよ。

ヒント $x\longrightarrow 0$ のとき 分母 $\longrightarrow 0$，分子 $\longrightarrow 0$ つまり不定形 $\frac{0}{0}$ です。

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(\sin x)\cdot\cos x}$$

またもや不定形 $\frac{0}{0}$ ですが，$\cos x\longrightarrow 1$ を考慮して

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(\sin x)}$$

（ここでロピタルの定理を使って）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos(\sin x)\cdot\cos x}=\frac{2}{1\cdot 1}=2$$

■練習 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$ を求めよ。

（福島県医大）

ヒント 福島県医大では平均値の定理の応用としてやるようになっていたのですが，ここではロピタルの定理を適用しましょう。

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

（ロピタルの定理を使って）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{1-\cos x}\qquad\cdots\cdots(*)$$

（ロピタルの定理を使って）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

（ロピタルの定理を使って）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cdot\cos x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos(\sin x)=1$$

注 実はロピタルの定理を3回も使うことはないのです。例えば（＊）のところから

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1-\cos(\sin x)}{\sin^2 x}$$

これは（☞ p. 50）

$$=2\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=1$$

とできるからです。

* * *

◆ 次は $\frac{\infty}{\infty}$ の場合です。

■練習 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。（東京医歯大）

ヒント $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

■練習 4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+2}$ を求めよ。

解 $x\longrightarrow\infty$ のとき

分母 $\longrightarrow\infty$，分子 $\longrightarrow\infty$

$$\therefore\quad 与式=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x}=0$$

◆ では，ロピタルの定理の証明です。ムリにやることもありませんが，まず，「**コーシーの平均値の定理**」を証明しましょう。それは，これです!!

練習 5. $f(x)$，$g(x)$ がいずれも区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能でかつ $g'(x)\neq 0$ とする。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad a<c<b$$

となる c が存在することを証明せよ。

(解)
$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$F(x)=f(x)-f(a)-k\{g(x)-g(a)\}$$

とおくと，$F(x)$ は $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能である。そして，

$$F(a)=0$$

$$\begin{aligned}F(b)&=f(b)-f(a)\\&\quad-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(b)-g(a)\}\\&=\{f(b)-f(a)\}-\{f(b)-f(a)\}\\&=0\end{aligned}$$

であるから，**ロルの定理**（☞ p. 68）により

$$F'(c)=0,\quad a<c<b$$

なる c が存在する。この c に対して

$$\therefore\quad F'(c)=f'(c)-kg'(c)=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Q. E. D.

(注) 上のような解が思いつかないからといって嘆くことはありませんよ。これは，暗記ものです。さて，いよいよ，本番です。

練習 6. $f(x)$，$g(x)$ がいずれも区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能で $g'(x)\neq 0$ とする。この区間 $(a,\ b)$ の α に対して $f(\alpha)=0$，$g(\alpha)=0$ でかつ

$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が確定であれば

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

であることを証明せよ。

(解) コーシーの平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$(\alpha<\xi<x \text{ あるいは } x<\xi<\alpha)$$

なる ξ が存在する。

また，仮定により $f(\alpha)=0$，$g(\alpha)=0$ であるから

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

しかるに $x\longrightarrow\alpha$ のとき $\xi\longrightarrow\alpha$ であるから

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Q. E. D.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ のときの証明はちょっとめんどうです。ここでは省略しましょう。

* * *

◆ ロピタルの定理の使えない場合を1つあげておきましょう。

練習 7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \sin^2 t\,dt}{x}$ を求めよ。

(ヒント) $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$ ですから

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^x\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

これでできたわけです。さて，

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \sin^2 t\,dt=+\infty$$

であるから，ロピタルの定理を使いますと，

$$\text{与式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{1}$$

これは振動します。つまり，「確定でない」，ロピタルが使えなかったハズです!!

* * *

◆ このように，ロピタルの定理を使って求めた結果が「**確定でない**」ときには，**ロピタルの定理は使えない**のです。お忘れなく。

⑩ (微分・積分に現れる)いろいろな関数

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆基解と微積のちがいの最たるものは，現れてくる関数の多いことです。大学の理系にゆくと，さらに多くの関数に出会うのだが。

◆ 関数とは何か，ということは中学校でもやったし，高校でもやっている，大学でもくり返しやることになるでしょう。いま，その定義はともかくとして，微積に現れてくるいろいろな関数をまとめておくことにしましょう。

＊　＊　＊

◆ まず，第1はなんといっても，**整関数**です。例えば，

$$f(x)=x^{10}+2x^4+\sqrt{3}x-4$$

といったぐあい，係数には無理数や分数がついてもよいが，xに根号がついたり，xが分母に入っていたりしてはいけません。

また，定数は整関数の特別の場合として扱うことがあります。例えば：——

$$f(x)=5 \quad は \quad f(x)=0\cdot x+5$$

だと考えるわけです。

ついでながら，≪関数 $f(x)$ の微分係数がつねに0に等しいときには，$f(x)$ は定数である≫という問題をもってきて，関数 $f(x)$ が定数でもいいなら，$f(x)$ と書くのはおかしいじゃないか，と，1時間以上も喰いつかれて困ったことがあるのです。

＊　＊　＊

◆ 第2は分数で分母にxの入っているものです。これを **分数関数**，あるいは **有理関数** といいます。そして，分母，分子がxの1次式であるとき，1次の有理関数といいます。

1次の有理関数の一般形は

$$f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$$

ですが，これは分子を

$$\begin{array}{r} \dfrac{c}{a} \\ ax+b\,\overline{)\,cx+d} \\ cx+\dfrac{bc}{a} \\ \hline d-\dfrac{bc}{a} \end{array}$$

分母で割って

$$f(x)=\frac{c}{a}+\frac{d-\dfrac{bc}{a}}{ax+b}$$

$$=\frac{c}{a}+\frac{\dfrac{d}{a}-\dfrac{bc}{a^2}}{x+\dfrac{b}{a}}$$

つまり

$$f(x)=A+\frac{C}{x+B}$$

という形に書けます。こうすると，**複雑な計算がスゴク楽になることが多い** ものです。

では，これを：——

練習 1.　$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$　$(abcd\neq 0)$

の微分方程式を作れ。

（ヒント）　$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$

を変形して

$$y=A+\frac{C}{x+B}$$

とすることができます。もちろんAもBもCも0ではありません。

$$\therefore\quad y'=\frac{-C}{(x+B)^2}$$

$$\therefore\quad x+B=\pm\sqrt{-C}(y')^{-\frac{1}{2}}=D(y')^{-\frac{1}{2}}$$

ここに $D=\pm\sqrt{-C}$ はもちろん定数です。この両辺をxで微分しますと，

$$1=D\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)y'^{-\frac{3}{2}}y''\right\}$$

$$\therefore\quad y'^{-\frac{3}{2}}y''=-\frac{2}{D}$$

両辺をxで微分しますと，

$$-\frac{3}{2}y'^{-\frac{5}{2}}(y'')^2+y'^{-\frac{3}{2}}y'''=0$$

これを変形すると，次のようになります。

$$2y'y'''=3(y'')^2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

*　*　*

◆ 第3は **無理関数** です。無理関数で忘れてはならないことは，根号内は負にならないことです。

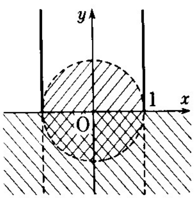
練習 2. $y=\sqrt{x^2+y^2-1}$ のグラフをかけ。

(解) $y=\sqrt{x^2+y^2-1}$

の両辺を2乗すると

$$y^2=x^2+y^2-1 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

$y\geqq 0$, $x^2+y^2-1\geqq 0$ であるから，求めるグラフは右のような2直線になる。



(注) 実はこの場合 $x^2+y^2-1\geqq 0$ は不要なのです。なぜなら

$$y=\sqrt{x^2+y^2-1}$$

の両辺を2乗して

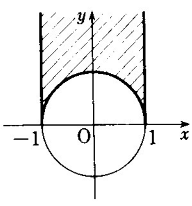
$$y^2=x^2+y^2-1$$

としたのですから，左辺 y^2 は $\geqq 0$，したがって，これに等しい右辺 x^2+y^2-1 も $\geqq 0$ となっているからです。しかし，不等式の場合には，この関係が成り立たないからご用心!!

練習 3. 不等式

$$y\geqq\sqrt{x^2+y^2-1}$$

を満足する領域を求めよ。



[答] 右の斜線を引いた部分で，境界線上の点を含む。

*　*　*

◆ 第4は **三角関数** です。微積では，計算公式が急に氾濫するものですから，対応にとまどう。しかし，そのつど，ひとつひとつ計算力をつけていくのがコツです。

練習 4. $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ のとき，次式を証明せよ。

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\leqq\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(解) $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$

$$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ところが，$0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ であるから

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0,\quad 1\geqq\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

よって証明された。特に，等号の成り立つのは $\alpha=\beta$ のときである。

*　*　*

◆ 第5は **指数関数** です。微積の諸公式はたいてい e^x といった形になっていますから，一般に a^x を $e^{\times\times}$ に書きかえる方法をオボエテおくことが必要です。

練習 5. $5^x=e^{x\log 5}$ を導け。

(解) $u=5^x$ とおいて，両辺の対数をとれば

$$\log u=\log 5^x=x\log 5$$

$$\therefore \quad u=e^{x\log 5}$$

$$\therefore \quad 5^x=e^{x\log 5}$$

*　*　*

◆ 第6は **対数関数** です。微積では，特に断らない限り底は e（自然数の底）を使います。だから，

底を変換する公式

$$\log_a x=\frac{\log_m x}{\log_m a}$$

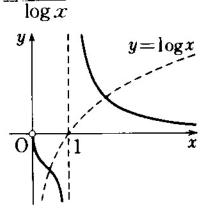
は不可欠!!

練習 6. $y=\log_x e$ のグラフをかけ。

(ヒント) $y=\log_x e=\dfrac{\log e}{\log x}=\dfrac{1}{\log x}$

$$\therefore \quad y'=-\frac{1}{(\log x)^2 x}$$

$$\lim_{x\to+0} y'=-\infty$$



などから，グラフは右の通りです。

◑（自然対数の底）eとは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈ eは無理数の一種で円周率πなどと同類なんです。そして超越数といわれるものです。また，おそるべき怪物でもある!!

◆ 高校では特殊な記号で表される数は2つだけ。1つは円周率π，もう1つは **自然対数の底e** です。

ここではeの定義や性質をまとめて練習しておくのが目的です。さて：——

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$は収束し，この極限値を$e$で表す。そして，$e$の値は

$$e=2.718\cdots\cdots$$

（に ないや）

練習 1. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ であることを用いて $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ を求めよ。

（解）$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^3=e^3$

［答］ e^3

練習 2. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ であることを用いて $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x$ を求めよ。

（解）$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}$$

［答］ $\sqrt[4]{e}$

練習 3. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ であることを用いて $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$を求めよ。

（解）$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ において $x=-t$ とおくと，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$=\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^t$$

$$=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

であるから，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

$$=e\cdot 1=e$$

［答］ e

*　*　*

◆ 上に示したように，

$x\to\pm\infty$ で $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e$

という性質は重要です。例えば，次をやってみませんか。

練習 4. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ。

（解）$x=\frac{1}{u}$ とおくと，

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$$

（注）$x\to 0$ なのに $u\to\pm\infty$ となるわけ，わかりますか。詳しく書けば

$x\to+0$ のとき $u\to+\infty$

$x\to-0$ のとき $u\to-\infty$

となります。では，もう1つ：——

練習 5. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}$ を求めよ。

（大阪教育大）

（解）与式$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)$

$$=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$$

［答］ $\log_a e$

*　*　*

◆ 考えてみると変なことがいろいろあるものです。1を何度掛けても1，0をいくつ加えても0，当たりまえといえばそれまでですが，

e^x は微分しても積分しても e^x

というのも同じ感じではありませんか。おや，もしかしたら，これらを含む大きなワケがあるのでは？ と思うようなら，キミはもう数学者である!! では，これを：——

練習 6. $f(x)=e^x$ を定義にしたがって微分せよ。

(解) $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$e^h=u$ とおいて，両辺の対数をとると

$$h=\log u$$

であるから，

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{\log u}$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{k}{\log(1+k)}=\lim_{k\to0}\frac{1}{\log(1+k)^{\frac{1}{k}}}$$

$$=\frac{1}{\log e}=1\quad(\because\quad \lim_{k\to0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e)$$

$$\therefore\quad f'(x)=e^x$$

ヤレヤレ，意外とめんどうだった!!

(注) (*)以下を，**ロピタルの定理**（☞ p. 166）を使って

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h}{1}=\frac{1}{1}=1$$

などとやってはいけません。なぜなら，e^x の導関数を求めるのに，e^h を微分することなどできないわけなのですから。

＊　＊　＊

◆ ところで，$\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ の収束することの証明はめんどうです。高校ではやらなくていいのですが，次に，その要点を書いておきましょう。無理に理解することもありませんよ。

練習 7. n が自然数のとき

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

は増加関数であることを示せ。

(ヒント) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

を証明すればいいわけ。二項定理を使って展開してみますと，

左辺

$$=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots1}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

右辺

$$=1+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{(n+1)n}{1\cdot2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n+1)n\cdots\cdots2}{1\cdot2\cdots\cdots n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$+\frac{(n+1)n\cdots\cdots1}{1\cdot2\cdots\cdots n(n+1)}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=1+1+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdots\cdots n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots$$

$$\times\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{(n+1)\cdots\cdots1}{1\cdot2\cdots\cdots(n+1)}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

上の2つを比較すると，第1，2項は同じ。第3～第$(n+1)$項は右辺のほうが大，その上右辺にだけ最後の項があるのですから，右辺のほうが大きい。よって $f(n)$ は増加関数であることがわかります。

(注) こうして $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は増加関数であること，さらに **ある値を越えない（有界である）** ことが証明され，さらに任意の実数についても証明できるのです。

○自然対数表

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆対数の発見は偉大である。天文学者はこれで10年寿命が伸びたとさえいわれる。電子計算機の進歩は，事情を一変させたが，……

◆ 対数表の引き方については「基礎解析」(☞ p.76) を参照してください。

◆自　然　対　数　表◆

x	$-\log_e x$	x	$-\log_e x$	x	$\log_e x$	x	$\log_e x$	x	$\log_e x$
0.00	—	.90	.10536	1.00	.00000	1.90	.64185	2.80	1.02962
.02	3.91202	.92	.08338	1.02	.01980	1.92	.65233	2.82	1.03674
.04	3.21888	.94	.06188	1.04	.03922	1.94	.66269	2.84	1.04380
.06	2.81341	.96	.04082	1.06	.05827	1.96	.67294	2.86	1.05082
.08	2.52573	.98	.02020	1.08	.07696	1.98	.68310	2.88	1.05779
.10	2.30259	1.00	.00000	1.10	.09531	2.00	.69315	2.90	1.06471
.12	2.12026			1.12	.11333	2.02	.70310	2.92	1.07158
.14	1.96611			1.14	.13103	2.04	.71295	2.94	1.07841
.16	1.83258			1.16	.14842	2.06	.72271	2.96	1.08519
.18	1.71480			1.18	.16551	2.08	.73237	2.98	1.09192
.20	1.60944			1.20	.18232	2.10	.74194	3.00	1.09861
.22	1.51413			1.22	.19885	2.12	.75142	3.02	1.10526
.24	1.42712			1.24	.21511	2.14	.76081	3.04	1.11186
.26	1.34707			1.26	.23111	2.16	.77011	3.06	1.11841
.28	1.27297			1.28	.24686	2.18	.77932	3.08	1.12493
.30	1.20397			1.30	.26236	2.20	.78846	3.10	1.13140
.32	1.13943			1.32	.27763	2.22	.79751	3.12	1.13783
.34	1.07881			1.34	.29267	2.24	.80648	3.14	1.14422
.36	1.02165			1.36	.30748	2.26	.81536	3.16	1.15057
.38	.96758			1.38	.32208	2.28	.82418	3.18	1.15688
.40	.91629			1.40	.33647	2.30	.83291	3.20	1.16315
.42	.86750			1.42	.35066	2.32	.84157	3.22	1.16938
.44	.82098			1.44	.36464	2.34	.85015	3.24	1.17557
.46	.77653			1.46	.37844	2.36	.85866	3.26	1.18173
.48	.73397			1.48	.39204	2.38	.86710	3.28	1.18784
.50	.69315			1.50	.40547	2.40	.87547	3.30	1.19392
.52	.65393			1.52	.41871	2.42	.88377	3.32	1.19996
.54	.61619			1.54	.43178	2.44	.89200	3.34	1.20597
.56	.57982			1.56	.44469	2.46	.90016	3.36	1.21194
.58	.54473			1.58	.45742	2.48	.90826	3.38	1.21788
.60	.51083			1.60	.47000	2.50	.91629	3.40	1.22378
.62	.47804			1.62	.48243	2.52	.92426	3.42	1.22964
.64	.44629			1.64	.49470	2.54	.93216	3.44	1.23547
.66	.41552			1.66	.50682	2.56	.94001	3.46	1.24127
.68	.38566			1.68	.51879	2.58	.94779	3.48	1.24703
.70	.35667			1.70	.53063	2.60	.95551	3.50	1.25276
.72	.32850			1.72	.54232	2.62	.96317	3.52	1.25846
.74	.30111			1.74	.55389	2.64	.97078	3.54	1.26413
.76	.27444			1.76	.56531	2.66	.97833	3.56	1.26976
.78	.24846			1.78	.57661	2.68	.98582	3.58	1.27536
.80	.22314			1.80	.58779	2.70	.99325	3.60	1.28093
.82	.19845			1.82	.59884	2.72	1.00063	3.62	1.28647
.84	.17435			1.84	.60977	2.74	1.00796	3.64	1.29198
.86	.15082			1.86	.62058	2.76	1.01523	3.66	1.29746
.88	.12783			1.88	.63127	2.78	1.02245	3.68	1.30291

$\log_e .1 = -2.30259$　　$\log_e .01 = -4.60517$　　$\log_e .001 = -6.90776$

$\log_e .0001 = -9.21034$　　$\log_e .00001 = -11.51293$　　$\log_e .000001 = -13.81551$

x	$\log_e x$	x	$\log_e x$	x	$\log_e x$	x	$\log_e x$	x	$\log_e x$
3.70	1.30833	5.00	1.60944	6.30	1.84055	7.60	2.02815	8.90	2.18605
3.72	1.31372	5.02	1.61343	6.32	1.84372	7.62	2.03078	8.92	2.18830
3.74	1.31909	5.04	1.61741	6.34	1.84688	7.64	2.03340	8.94	2.19054
3.76	1.32442	5.06	1.62137	6.36	1.85003	7.66	2.03601	8.96	2.19277
3.78	1.32972	5.08	1.62531	6.38	1.85317	7.68	2.03862	8.98	2.19500
3.80	1.33500	5.10	1.62924	6.40	1.85630	7.70	2.04122	9.00	2.19722
3.82	1.34025	5.12	1.63315	6.42	1.85942	7.72	2.04381	9.02	2.19944
3.84	1.34547	5.14	1.63705	6.44	1.86253	7.74	2.04640	9.04	2.20166
3.86	1.35067	5.16	1.64094	6.46	1.86563	7.76	2.04898	9.06	2.20387
3.88	1.35584	5.18	1.64481	6.48	1.86872	7.78	2.05156	9.08	2.20607
3.90	1.36098	5.20	1.64866	6.50	1.87180	7.80	2.05412	9.10	2.20827
3.92	1.36609	5.22	1.65250	6.52	1.87487	7.82	2.05668	9.12	2.21047
3.94	1.37118	5.24	1.65632	6.54	1.87794	7.84	2.05924	9.14	2.21266
3.96	1.37624	5.26	1.66013	6.56	1.88099	7.86	2.06179	9.16	2.21485
3.98	1.38128	5.28	1.66393	6.58	1.88403	7.88	2.06433	9.18	2.21703
4.00	1.38629	5.30	1.66771	6.60	1.88707	7.90	2.06686	9.20	2.21920
4.02	1.39128	5.32	1.67147	6.62	1.89010	7.92	2.06939	9.22	2.22138
4.04	1.39624	5.34	1.67523	6.64	1.89311	7.94	2.07191	9.24	2.22354
4.06	1.40118	5.36	1.67896	6.66	1.89612	7.96	2.07443	9.26	2.22570
4.08	1.40610	5.38	1.68269	6.68	1.89912	7.98	2.07694	9.28	2.22786
4.10	1.41099	5.40	1.68640	6.70	1.90211	8.00	2.07944	9.30	2.23001
4.12	1.41585	5.42	1.69010	6.72	1.90509	8.02	2.08194	9.32	2.23216
4.14	1.42070	5.44	1.69378	6.74	1.90806	8.04	2.08443	9.34	2.23431
4.16	1.42552	5.46	1.69745	6.76	1.91102	8.06	2.08691	9.36	2.23645
4.18	1.43031	5.48	1.70111	6.78	1.91398	8.08	2.08939	9.38	2.23858
4.20	1.43508	5.50	1.70475	6.80	1.91692	8.10	2.09186	9.40	2.24071
4.22	1.43984	5.52	1.70838	6.82	1.91986	8.12	2.09433	9.42	2.24284
4.24	1.44456	5.54	1.71199	6.84	1.92279	8.14	2.09679	9.44	2.24496
4.26	1.44927	5.56	1.71560	6.86	1.92571	8.16	2.09924	9.46	2.24707
4.28	1.45395	5.58	1.71919	6.88	1.92862	8.18	2.10169	9.48	2.24918
4.30	1.45862	5.60	1.72277	6.90	1.93152	8.20	2.10413	9.50	2.25129
4.32	1.46326	5.62	1.72633	6.92	1.93442	8.22	2.10657	9.52	2.25339
4.34	1.46787	5.64	1.72988	6.94	1.93730	8.24	2.10900	9.54	2.25549
4.36	1.47247	5.66	1.73342	6.96	1.94018	8.26	2.11142	9.56	2.25759
4.38	1.47705	5.68	1.73695	6.98	1.94305	8.28	2.11384	9.58	2.25968
4.40	1.48160	5.70	1.74047	7.00	1.94591	8.30	2.11626	9.60	2.26176
4.42	1.48614	5.72	1.74397	7.02	1.94876	8.32	2.11866	9.62	2.26384
4.44	1.49065	5.74	1.74746	7.04	1.95161	8.34	2.12106	9.64	2.26592
4.46	1.49515	5.76	1.75094	7.06	1.95445	8.36	2.12346	9.66	2.26799
4.48	1.49962	5.78	1.75440	7.08	1.95727	8.38	2.12585	9.68	2.27006
4.50	1.50408	5.80	1.75786	7.10	1.96009	8.40	2.12823	9.70	2.27213
4.52	1.50851	5.82	1.76130	7.12	1.96291	8.42	2.13061	9.72	2.27419
4.54	1.51293	5.84	1.76473	7.14	1.96571	8.44	2.13298	9.74	2.27624
4.56	1.51732	5.86	1.76815	7.16	1.96851	8.46	2.13535	9.76	2.27829
4.58	1.52170	5.88	1.77156	7.18	1.97130	8.48	2.13771	9.78	2.28034
4.60	1.52606	5.90	1.77495	7.20	1.97408	8.50	2.14007	9.80	2.28238
4.62	1.53039	5.92	1.77834	7.22	1.97685	8.52	2.14242	9.82	2.28442
4.64	1.53471	5.94	1.78171	7.24	1.97962	8.54	2.14476	9.84	2.28646
4.66	1.53902	5.96	1.78507	7.26	1.98238	8.56	2.14710	9.86	2.28849
4.68	1.54330	5.98	1.78842	7.28	1.98513	8.58	2.14943	9.88	2.29051
4.70	1.54756	6.00	1.79176	7.30	1.98787	8.60	2.15176	9.90	2.29253
4.72	1.55181	6.02	1.79509	7.32	1.99061	8.62	2.15409	9.92	2.29455
4.74	1.55604	6.04	1.79840	7.34	1.99334	8.64	2.15640	9.94	2.29657
4.76	1.56025	6.06	1.80171	7.36	1.99606	8.66	2.15871	9.96	2.29858
4.78	1.56444	6.08	1.80500	7.38	1.99877	8.68	2.16102	9.98	2.30058
4.80	1.56862	6.10	1.80829	7.40	2.00148	8.70	2.16332	10.00	2.30259
4.82	1.57277	6.12	1.81156	7.42	2.00418	8.72	2.16562		
4.84	1.57691	6.14	1.81482	7.44	2.00687	8.74	2.16791		
4.86	1.58104	6.16	1.81808	7.46	2.00956	8.76	2.17020		
4.88	1.58515	6.18	1.82132	7.48	2.01223	8.78	2.17248		
4.90	1.58924	6.20	1.82455	7.50	2.01490	8.80	2.17475		
4.92	1.59331	6.22	1.82777	7.52	2.01757	8.82	2.17702		
4.94	1.59737	6.24	1.83098	7.54	2.02022	8.84	2.17929		
4.96	1.60141	6.26	1.83418	7.56	2.02287	8.86	2.18155		
4.98	1.60543	6.28	1.83737	7.58	2.02551	8.88	2.18380		

$\log_e 10 = 2.30259$ $\log_e 100 = 4.60517$ $\log_e 1000 = 6.90776$

$\log_e 10000 = 9.21034$ $\log_e 100000 = 11.51293$ $\log_e 1000000 = 13.81551$

○指数関数表

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

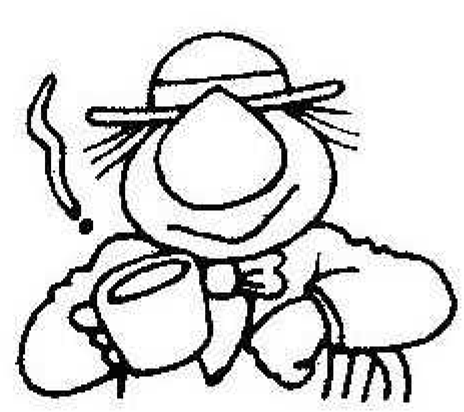
◈指数関数表を直接使うことはあまりありません。しかし，実際問題になると，よく出てくるのです。たまには使ってやってくださいよ。

◆ 表の使い方は常用対数表や三角関数表と同じです。これについては「基礎解析」(☞p.20, 22, 74, 76 など) を参照してください。

◆指数関数表◆

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.000000	0.86	2.3632	0.423162	1.72	5.5845	0.179066
0.02	1.0202	980199	0.88	2.4109	414783	1.74	5.6973	175520
0.04	1.0408	960789	0.90	2.4596	0.406570	1.76	5.8124	172045
0.06	1.0618	941765	0.92	2.5093	398519	1.78	5.9299	168638
0.08	1.0833	923116	0.94	2.5600	390628	1.80	6.0496	0.165299
0.10	1.1052	0.904837	0.96	2.6117	382893	1.82	6.1719	162026
0.12	1.1275	886920	0.98	2.6645	375311	1.84	6.2965	158817
0.14	1.1503	869358	1.00	2.7183	0.367879	1.86	6.4237	155673
0.16	1.1735	852144	1.02	2.7732	360595	1.88	6.5535	152590
0.18	1.1972	835270	1.04	2.8292	353455	1.90	6.6859	0.149569
0.20	1.2214	0.818731	1.06	2.8864	346456	1.92	6.8210	146607
0.22	1.2461	802519	1.08	2.9447	339596	1.94	6.9588	143704
0.24	1.2712	786628	1.10	3.0042	0.332871	1.96	7.0993	140858
0.26	1.2969	771052	1.12	3.0649	326280	1.98	7.2427	138069
0.28	1.3231	755784	1.14	3.1268	319819	2.00	7.3891	0.135335
0.30	1.3499	0.740818	1.16	3.1899	313486	2.02	7.5383	132655
0.32	1.3771	726149	1.18	3.2544	307279	2.04	7.6906	130029
0.34	1.4049	711770	1.20	3.3201	0.301194	2.06	7.8460	127454
0.36	1.4333	697676	1.22	3.3872	295230	2.08	8.0045	124930
0.38	1.4623	683861	1.24	3.4556	289384	2.10	8.1662	0.122456
0.40	1.4918	0.670320	1.26	3.5254	283654	2.12	8.3311	120032
0.42	1.5220	657047	1.28	3.5966	278037	2.14	8.4994	117655
0.44	1.5527	644036	1.30	3.6693	0.272532	2.16	8.6711	115325
0.46	1.5841	631284	1.32	3.7434	267135	2.18	8.8463	113042
0.48	1.6161	618783	1.34	3.8190	261846	2.20	9.0250	0.110803
0.50	1.6487	0.606531	1.36	3.8962	256661	2.22	9.2073	108609
0.52	1.6820	594521	1.38	3.9749	251579	2.24	9.3933	106459
0.54	1.7160	582748	1.40	4.0552	0.246597	2.26	9.5831	104350
0.56	1.7507	571209	1.42	4.1371	241714	2.28	9.7767	102284
0.58	1.7860	559898	1.44	4.2207	236928	2.30	9.9742	0.100259
0.60	1.8221	0.548812	1.46	4.3060	232236	2.32	10.176	098274
0.62	1.8589	537944	1.48	4.3929	227638	2.34	10.381	096328
0.64	1.8965	527292	1.50	4.4817	0.223130	2.36	10.591	094420
0.66	1.9348	516851	1.52	4.5722	218712	2.38	10.805	092551
0.68	1.9739	506617	1.54	4.6646	214381	2.40	11.023	0.090718
0.70	2.0138	0.496585	1.56	4.7588	210136	2.42	11.246	088922
0.72	2.0544	486752	1.58	4.8550	205975	2.44	11.473	087161
0.74	2.0959	477114	1.60	4.9530	0.201897	2.46	11.705	085435
0.76	2.1383	467666	1.62	5.0531	197899	2.48	11.941	083743
0.78	2.1815	458406	1.64	5.1552	193980	2.50	12.182	0.082085
0.80	2.2255	0.449329	1.66	5.2593	190139	2.52	12.429	080460
0.82	2.2705	440432	1.68	5.3656	186374	2.54	12.680	078866
0.84	2.3164	431711	1.70	5.4739	0.182684	2.56	12.936	077305

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2.58	13.197	0.075774	3.72	41.264	0.024234	4.86	129.02	0.007750
2.60	13.464	0.074274	3.74	42.098	023754	4.88	131.63	007597
2.62	13.736	072803	3.76	42.948	023284	4.90	134.29	0.007447
2.64	14.013	071361	3.78	43.816	022823	4.92	137.00	007299
2.66	14.296	069948	3.80	44.701	0.022371	4.94	139.77	007155
2.68	14.585	068563	3.82	45.604	021928	4.96	142.59	007013
2.70	14.880	0.067206	3.84	46.525	021494	4.98	145.47	006874
2.72	15.180	065875	3.86	47.465	021068	5.00	148.41	0.006738
2.74	15.487	064570	3.88	48.424	020651	5.02	151.41	006605
2.76	15.800	063292	3.90	49.402	0.020242	5.04	154.47	006474
2.78	16.119	062039	3.92	50.400	019841	5.06	157.59	006346
2.80	16.445	0.060810	3.94	51.419	019448	5.08	160.77	006220
2.82	16.777	059606	3.96	52.457	019063	5.10	164.02	0.006097
2.84	17.116	058426	3.98	53.517	018686	5.12	167.34	005976
2.86	17.462	057269	4.00	54.598	0.018316	5.14	170.72	005858
2.88	17.814	056135	4.02	55.701	017953	5.16	174.16	005742
2.90	18.174	0.055023	4.04	56.826	017597	5.18	177.68	005628
2.92	18.541	053934	4.06	57.974	017249	5.20	181.27	0.005517
2.94	18.916	052866	4.08	59.145	016907	5.22	184.93	005407
2.96	19.298	051819	4.10	60.340	0.016573	5.24	188.67	005300
2.98	19.688	050793	4.12	61.559	016245	5.26	192.48	005195
3.00	20.086	0.049787	4.14	62.803	015923	5.28	196.37	005092
3.02	20.491	048801	4.16	64.072	015608	5.30	200.34	0.004992
3.04	20.905	047835	4.18	65.366	015299	5.32	204.38	004893
3.06	21.328	046888	4.20	66.686	0.014996	5.34	208.51	004796
3.08	21.758	045959	4.22	68.033	014699	5.36	212.72	004701
3.10	22.198	0.045049	4.24	69.408	014408	5.38	217.02	004608
3.12	22.646	044157	4.26	70.810	014122	5.40	221.41	0.004517
3.14	23.104	043283	4.28	72.240	013843	5.42	225.88	004427
3.16	23.571	042426	4.30	73.700	0.013569	5.44	230.44	004339
3.18	24.047	041586	4.32	75.189	013300	5.46	235.10	004254
3.20	24.533	0.040762	4.34	76.708	013037	5.48	239.85	004169
3.22	25.028	039955	4.36	78.257	012778	5.50	244.69	0.004087
3.24	25.534	039164	4.38	79.838	012525	5.6	270.43	0.003698
3.26	26.050	038388	4.40	81.451	0.012277	5.8	330.30	003028
3.28	26.576	037628	4.42	83.096	012034	6.0	403.43	0.002479
3.30	27.113	0.036883	4.44	84.775	011796	6.2	492.75	002029
3.32	27.660	036153	4.46	86.488	011562	6.4	601.85	001662
3.34	28.219	035437	4.48	88.235	011333	6.6	735.10	001360
3.36	28.789	034735	4.50	90.017	0.011109	6.8	897.85	001114
3.38	29.371	034047	4.52	91.836	010889	7.0	1096.6	0.000912
3.40	29.964	0.033373	4.54	93.691	010673	7.2	1339.4	000747
3.42	30.569	032712	4.56	95.583	010462	7.4	1636.0	000611
3.44	31.187	032065	4.58	97.514	010255	7.6	1998.2	000500
3.46	31.817	031430	4.60	99.484	0.010052	7.8	2440.6	000410
3.48	32.460	030807	4.62	101.49	009853	8.0	2981.0	0.000335
3.50	33.115	0.030197	4.64	103.54	009658	8.2	3641.0	000275
3.52	33.784	029599	4.66	105.64	009466	8.4	4447.1	000225
3.54	34.467	029013	4.68	107.77	009279	8.6	5431.7	000184
3.56	35.163	028439	4.70	109.95	0.009095	8.8	6634.2	000151
3.58	35.874	027876	4.72	112.17	008915	9.0	8103.1	0.000123
3.60	36.598	0.027324	4.74	114.43	008739	9.2	9897.1	000101
3.62	37.338	026783	4.76	116.75	008566	9.4	12088	000083
3.64	38.092	026252	4.78	119.10	008396	9.6	14765	000068
3.66	38.861	025733	4.80	121.51	0.008230	9.8	18034	000055
3.68	39.646	025223	4.82	123.97	008067	10.0	22026	0.000045
3.70	40.447	0.024724	4.84	126.47	007907			



微積におけるニュートンの方法と蛇足

◈ニュートンの方法は基礎解析でやってあるハズですが，もちろん，微積の範囲でも使えます。

◆ ニュートンの方法については基解でやってあることとして，微積における応用例を練習しておきましょう。

練習 1. $\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\dfrac{1}{2}$ の解の近似値を求めよ。

ヒント　$1-e^{-x}=\dfrac{x}{2}$

$$\therefore\quad e^{-x}=1-\frac{x}{2}$$

$x=1,\ 2$ のとき e^{-x} の値はほぼ 0.3, 0.2, また $1-\dfrac{x}{2}$ の値は 0.5, 0 ですから x はほぼ 1.5くらいといえましょう。

そこで

$$f(x)=e^{-x}-1+\frac{x}{2}$$

について

$$f(1.5)=e^{-1.5}-1+\frac{1.5}{2}=\frac{1}{e\sqrt{e}}-1+0.75$$
$$\fallingdotseq 0.22-0.25$$
$$=-0.03$$

また，$f'(x)=-e^{-x}+\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\quad f'(1.5)=-e^{-1.5}+\frac{1}{2}\fallingdotseq -0.22+0.50$$
$$=0.28$$

ゆえに，点 $(1.5,\ -0.03)$ における接線は

$$y-(-0.03)=0.28(x-1.5)$$

これが x 軸と交わる点の座標は

$$1.5+\frac{0.03}{0.28}\fallingdotseq 1.61$$

といったことになります。かくて求める近似値は 1.61 です。実は，この問題は入試問題では次の形で出題されているのです。だからもっと楽なわけです。

≪方程式 $\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\dfrac{1}{2}$ の解に最も近い数値は次のうちどれか。ただし，e は自然対数の底で，$e=2.7182\cdots$，$e^{-2}=0.1353\cdots$ である。

①1.6, ②1.7, ③1.8, ④1.9, ⑤2.0≫

では，もういちど，おなじ問題をその立場でやってみましょう。

こんどは解の形式で：——

解　$f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ とおくと　……(*)

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}=1$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

そして　$f'(x)=\dfrac{x+1-e^x}{x^2e^x}$

ところが　$x+1<e^x$

$$\therefore\quad f'(x)<0$$

ゆえに，$f(x)$ は単調減少関数で

$$f(1)=1-\frac{1}{e},\ f(2)=\frac{1-e^{-2}}{2}$$

ゆえに $\mathrm{A}(1,\ f(1))$，$\mathrm{B}(2,\ f(2))$ とおくと，AB の方程式は

$$y-1+\frac{1}{e}=\left(\frac{1}{e}-\frac{e^{-2}}{2}-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

従って

$$y=-0.2x+0.83\quad\text{（近似式）}$$

ゆえに，$y=0.5$ とおくと，$x=1.65$

直線 $y=0.5$ と (*) との交点を P，AB との交点をQとすると，(*) は $x>0$ で下に凸だからPはQの左方にあり，Qの x 座標が 1.65 に十分近いから，Pの x 座標は 1.6 に近い。

ヤレヤレ，やはりニュートンの方が楽だったなァ。