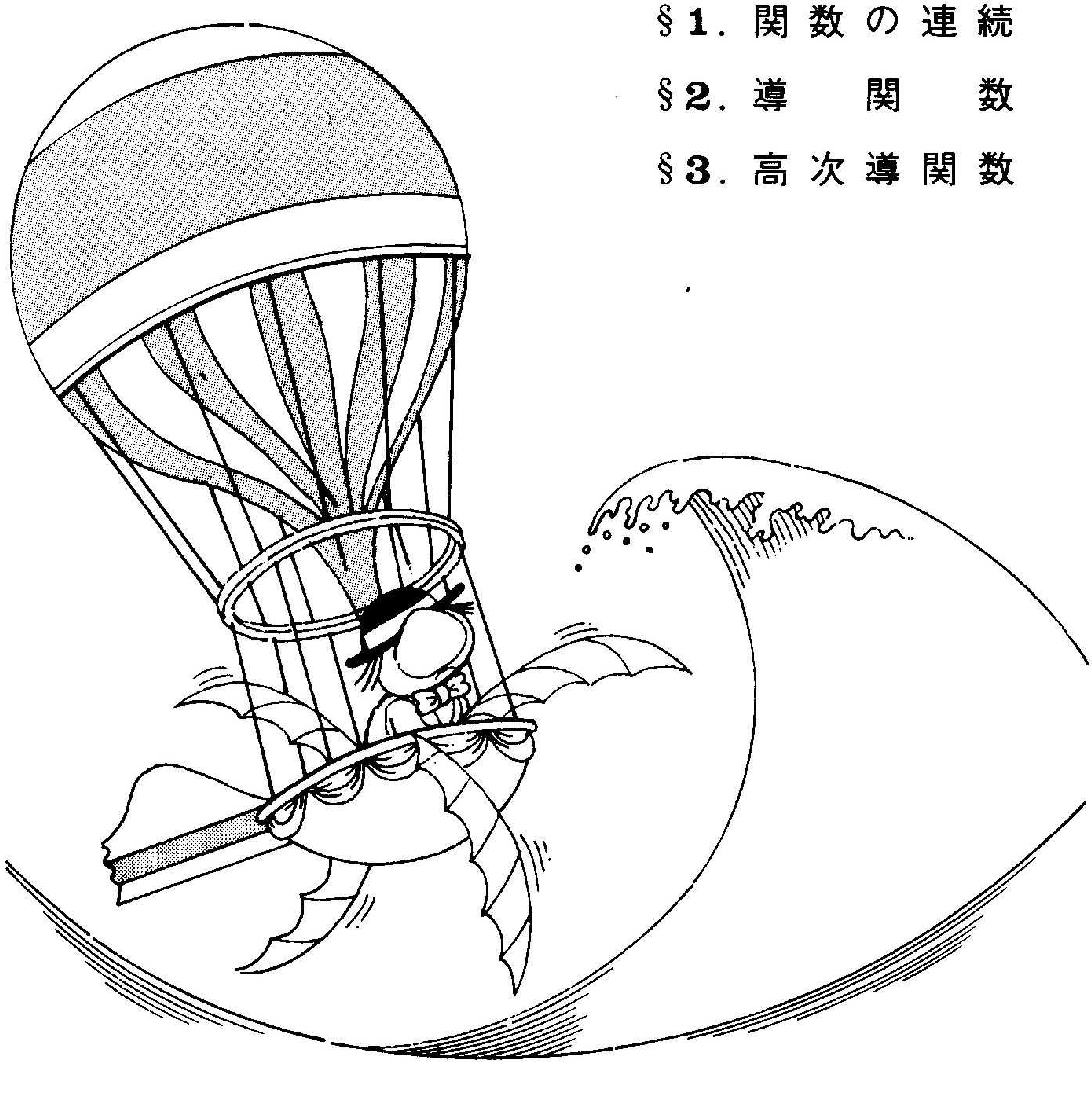
第2章

微　分　法



①（関数の）連続とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈切れ目がないのを連続という。ここまでは直観的でよくわかる。しかし，もう1歩進んで，lim がなんとやら，となると突然……

◆ 曲線に切れ目がないとき連続であるといいます。では，まず，これを：——

-1/10 **■練習 1.** 次の関数が，すべての x に対して連続であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (x\geqq 1) \\ ax+b & (0\leqq x<1) \\ x^2 & (x<0) \end{cases}$$

（ヒント） $x>1$ のとき e^x は連続です。

$0<x<1$ のとき $ax+b$ は連続です。

$x<0$ のとき x^2 は連続です。

だから，問題になるのは，$x=1$ と $x=0$ のところ。さて：——

$x=1$ では

$$e^1=a\cdot 1+b$$

$x=0$ では

$$a\cdot 0+b=0^2$$

なら，連続になるハズ。さては

$$a=e,\ b=0$$

が求める値であろう。

答　$a=e$，$b=0$

*　*　*

◆ 上のようにすぐわかる場合はいいのですが，こんなのは困ります。

≪$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

で与えられる関数は $x=0$ で連続か≫

というのです。やってみればわかるが，原点の付近でグラフをかくことはできません。そこで，この場合にも使えるように連続の定義を拡張するのです。

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

であるとき $f(x)$ は $x=a$ において連続であるという。

このような定義では，上のような問題も解けるのです。つまり：——

1/10 **■練習 2.** 次のように定義された関数 $f(x)$ は $x=0$ において連続であるか。

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

（解） $x=0$ において　$f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

（コレヲ，ドウシテカ，ナドト考エテハイケマセン。$\sin\dfrac{1}{x}$ ハセイゼイ1ト−1ノ間ヲウロウロスルバカリ，ソレニ0ニナルモノヲ掛ケルノダカラ0ニ近ヅクコトハマチガイナシ）

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

ゆえに，$f(x)$ は $x=0$ において連続である。

Y **■練習 3.** $f(x)=x^3+\dfrac{x^3}{1+x^2}+\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}+\cdots$

で与えられる関数は不連続点をもつか。

（解） $x\neq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{x^3}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=x(1+x^2)$$

$x=0$ のとき

$$f(x)=0$$

したがって，

$$f(x)=\begin{cases} x\neq 0: & x(1+x^2) \\ x=0: & 0 \end{cases}$$

答　不連続点はない。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 4. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ が x のすべての値に対して連続であるように a，b の値を定めよ。　（横浜国大）

ヒント　≪連続≫など忘れて，極限値を求めよ，という問題に徹するのです。その上で，連続を考えるのです。ところで：——

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}1<x: & +\infty\\ x=1: & 1\\ -1<x<1: & 0\\ x=-1: & \text{振動}\ (\pm1)\\ x<-1: & \text{振動}\ (\pm\infty)\end{cases}$$

でしたね。（詳しくは ☞ p. 16 参照）

そこで，

$|x|>1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{n-2}}+\dfrac{b}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

$|x|<1$ のとき

$$f(x)=ax^2+bx$$

$x=1$ のとき

$$f(x)=\frac{a+b+1}{2}$$

$x=-1$ のとき

$$f(x)=\frac{a-b-1}{2}$$

そこで，$f(x)$ が不連続になるのは $x=1$ と $x=-1$ のところです。そこでつなぎ目で切れないための条件は

$x=1$ では

$$1=\frac{a+b+1}{2}=a+b$$

$x=-1$ では

$$-1=\frac{a-b-1}{2}=a-b$$

これを解いて

$$a=0,\ b=1$$

答　$a=0$，$b=1$

（注）連続の条件をマトモに使うと

$x=1$ では

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(ax^2+bx)=a+b$$

$$f(1)=\frac{a+b+1}{2}$$

$$\therefore\ 1=\frac{a+b+1}{2}=a+b$$

とやるべきですが，そこまで厳密にやることもないでしょう。

練習 5. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}$ のグラフをかき，不連続点をいえ。ただし，n は正の整数である。　（東大）

ヒント　これはふしぎとできない人が多いのです。$n\longrightarrow\infty$ のとき，$\sin^2\pi x\neq0$ ならば分母 $\longrightarrow+\infty$　$\therefore\ f(x)\longrightarrow0$ となりましょう。$\sin^2\pi x=0$ ならば 分母 $\longrightarrow\cos^2\pi x$ なんですから……

（解）$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}$

において，$x=$整数 のとき

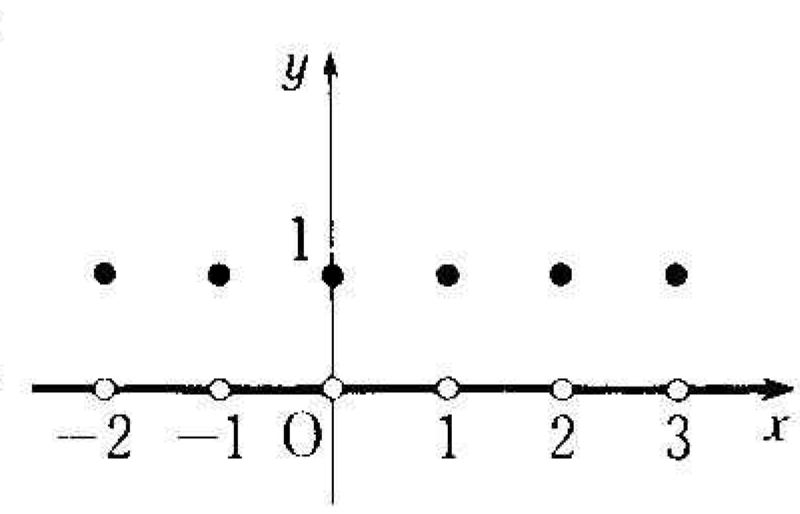
$$\sin^2\pi x=0\quad\text{かつ}\quad\cos^2\pi x=1$$

$$\therefore\ f(x)=1$$

$x\neq$整数 のとき　$\sin^2\pi x>0$

$$\therefore\ f(x)=0$$

よって求めるグラフは右のようになり，不連続点は $x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ である。



では，次はどうだろう。

練習 6. $y=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n+\sin x}{x^n+\cos x}$ のグラフをかき，不連続点を求めよ。

ヒント　$x=\pm1$ のところが迷うところ。

$x=1$ なら $y=\dfrac{1+\sin1}{1+\cos1}$ で，$\cos1$ や $\sin1$ の 1 はラジアンですから，ほぼ $60°$（正確には $57°\,17'44.8''$）に等しいことを忘れるな。

◑（関数の）連続とは何か（つづき）

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆連続とか不連続とかいう問題に出会うと，すぐヤル気がなくなる，という人が多い。切れ目がないといえば，たいていすむのに，……

◆ まず具体的な練習から出発しましょう。

練習 1. 次のように定義された関数 $f(x)$ のグラフがいたるところ切れ目がないように定数 a，b の値を求めよ。

$$f(x)=\begin{cases} x-a & (\pi\leqq x) \\ \sin x & (0<x<\pi) \\ -x+b & (x\leqq 0) \end{cases}$$

ヒント　$x-a$ も $\sin x$ も $-x+b$ も x のすべての値について切れ目はありませんから，切れ目ができるとすると $x=\pi$ のところと $x=0$ のところでしょう。

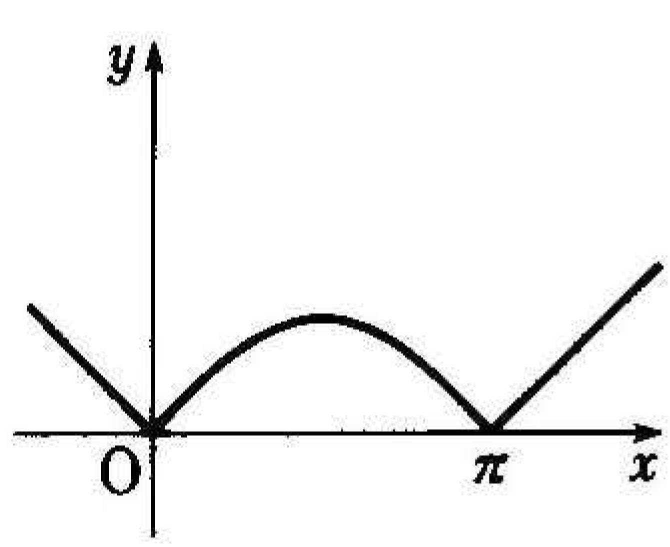
さて，$x=\pi$ で $x-a$ と $\sin x$ がうまく接触するためには $\pi-a=\sin\pi$ となること，つまり $a=\pi$ であることが条件です。

また，$x=0$ で $\sin x$ と $-x+b$ がうまくつながるためには $\sin 0=-0+b$，すなわち $b=0$ となることが条件です。

結局，求める答は $a=\pi$，$b=0$ となりましょう。

注　このように切れ目のない場合，この関数はいたるところ連続であるといいます。

では，もう1つやってみませんか。



練習 2. 次の無限級数の和で表される関数 $f(x)$ のグラフをかき，不連続点を指摘せよ。

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots$$

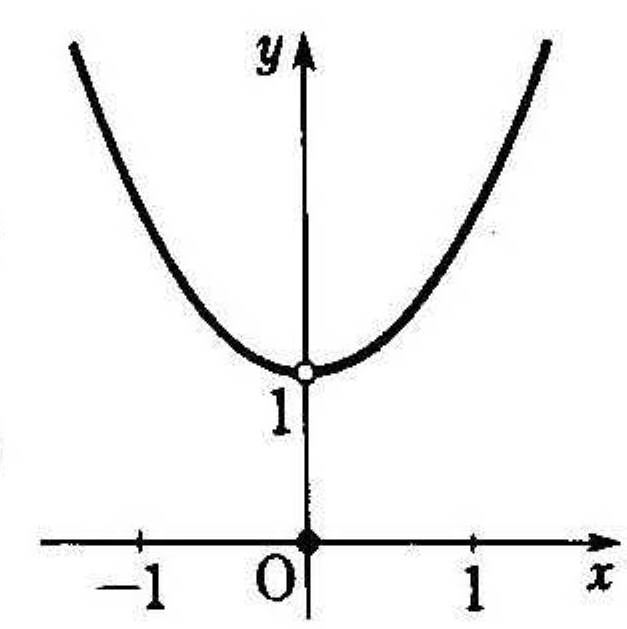
ヒント　$x\neq 0$ のときは公比 $\dfrac{1}{1+x^2}$ の絶対値が1より小であるから収束するハズ。その和は

$$\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)-1}=x^2+1$$

です。また，$x=0$ のときには，すべての項が0ですから

$$f(x)=0$$

そこで，グラフは右の通り。このグラフをみると一目瞭然，$x=0$ において不連続です。



練習 3. 関数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

が x のすべての実数値に対して連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。

ヒント　x^{2n} と x^{2n-1} はそれぞれ x の偶数乗，奇数乗ですから，扱い方は容易。さて：——

$$f(x)=\begin{cases} x>1:\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x} \\ x=1:\ \dfrac{a+b+1}{2} \\ -1<x<1:\ ax^2+bx \\ x=-1:\ \dfrac{a-b-1}{2} \\ x<-1:\ \dfrac{1}{x}\quad\left(x>1\text{ の場合と同じ}\right) \end{cases}$$

x のすべての点で連続になるためには，

$$x=1:\quad \frac{1}{1}=\frac{a+b+1}{2}=a+b$$

$$x=-1:\quad a-b=\frac{a-b-1}{2}=\frac{1}{-1}$$

これを解いて

$$a=0,\ b=1 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

◆ 連続・不連続の考えをもっと広くするために，グラフから判定できない場合でも適用できるように定義されています。

それは

関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていて，かつ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ のとき，$f(x)$ は $x=a$ において連続である

といいます。したがって，不連続な場合は4つあります。

(1) $f(a)$ が存在しないとき

(2) $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しないとき

(3) $f(a)$ も $\lim_{x\to a} f(x)$ も存在しないとき

(4) $f(a)$ も $\lim_{x\to a} f(x)$ も存在するが等しくないとき

です。では，次に具体的な練習をやってみましょう。

1/13

練習 4. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

は $x=0$ において連続であるか。

(解) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$

また

$$f(0)=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

ゆえに，$x=0$ において連続である。

1/13

練習 5. $0<x\leqq 1$ で定義された関数

$$f(x)=a_n x^n$$

$$\left(\frac{1}{n+1}<x\leqq\frac{1}{n},\ n=1,\ 2\cdots\right)$$

が連続となるように a_n を定めよ。ただし，$a_1=1$ とする。 (岐阜大)

(ヒント) 問題をみるとすぐイヤだな，と感ずる人が多いだろう。しかし，それはいけない。

$n=1$ のとき

$$f(x)=a_1x\quad\left(\frac{1}{2}<x\leqq\frac{1}{1}\right)$$

となるし，$n=2$ のとき

$$f(x)=a_2x^2\quad\left(\frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{2}\right)$$

となるし，$n=3$ のとき

$$f(x)=a_3x^3\quad\left(\frac{1}{4}<x\leqq\frac{1}{3}\right)$$

となるだろう。

だから，$x=\dfrac{1}{2}$ で連続であるためには

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} a_1x=\lim_{x\to\frac{1}{2}} a_2x^2$$

つまり

$$\frac{1}{2}a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2 a_2$$

つまり

$$a_2=2a_1$$

でなければならない。同じように $x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，……で調べてみるわけだ。

(解) $x=\dfrac{1}{n+1}$ で連続であるための条件：

$\dfrac{1}{n+1}<x\leqq\dfrac{1}{n}$ で $f(x)=a_nx^n$

$\dfrac{1}{n+2}<x\leqq\dfrac{1}{n+1}$ で $f(x)=a_{n+1}x^{n+1}$

であるから

$$\lim_{x\to\frac{1}{n+1}} a_nx^n=\lim_{x\to\frac{1}{n+1}} a_{n+1}x^{n+1}$$

が必要である。

$$\therefore\ a_n\frac{1}{(n+1)^n}=a_{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\therefore\ a_n(n+1)=a_{n+1}$$

ところが

$$a_1=1$$

$$\therefore\ a_2=1\cdot 2$$

$$a_3=1\cdot 2\cdot 3$$

一般に $a_n=n!$

(答) $a_n=n!$

(注) 厳密にいえば数学的帰納法で証明するところだが，いうなれば明白!! それほどのこともなかろう。ちょっとみるとめんどうそうだが，べつにどうということはなかったなあ。nに幻惑されてはいけません。

⑪ 微分可能性の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆微分可能と漢字で書くから不安になる。微分ガデキルとかなで書けばいい，いやこれは中途半ばだ。ビブンケイスウガアルといえ!!

◆ 関数 $f(x)$ が $x=a$ において **微分可能** であるというのは

$f'(a)$ が存在する

ということです。つまり，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき **微分可能** だ，というのです。

もっと，具体的にいうと

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が共に有限で確定した同一の値をとる

ということなのです。さて：——

■練習 1. 関数 $f(x)$ は

1/15

$x\neq 0$ のとき $x^2\sin\dfrac{1}{x}$；$x=0$ のとき 0

で定義されている。$x=0$ において微分可能性を吟味せよ。　（東京工大）

(ヒント) $f'(0)$ が存在するかどうかを調べればよいのです。ところで：——

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

ゆえに $f'(0)$ は存在する。ゆえに $x=0$ において微分可能である。

1/15

■練習 2. 関数 $f(x)$ は $x\neq 0$ のとき $x\sin\dfrac{1}{x}$ で，$x=0$ のとき 0 で定義されている。$x=0$ で微分可能か。

(ヒント) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sin\dfrac{1}{h}$

は存在しない。すなわち，$x=0$ において微分不可能である。

＊　＊　＊

◆ 微分可能となるための条件を求める問題もいろいろあります。例えば：——

1/16

■練習 3. 次のような関数 $f(x)$ が x のすべての値に対して微分可能であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$$f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2 & (x\geqq 1)\\ 4ax+b & (x<1)\end{cases}$$

(ヒント) まず，x^3+ax^2 は $x>1$ なるすべての x について微分可能であることはいうまでもありません。また $x<1$ なるすべての x に対して $4ax+b$ は微分可能です。

そこで，問題となるのは $x=1$ のところだけです。

まず，この点で切れていてはいけない。つまり，連続でなければなりません。そして，そのための条件は

$$1^3+a\cdot 1^2=4\cdot a\cdot 1+b$$

$$\therefore\quad 3a+b=1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

です。

次に，その点における微分係数の値が等しくなければならない。

$$(3x^2+2ax)_{x=1}=(4a)_{x=1}$$

$$\therefore\quad 3+2a=4a$$

$$\therefore\quad a=\frac{3}{2}$$

そこで $(*)$ から

$$b=1-\frac{9}{2}=-\frac{7}{2}$$

(答) $a=\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{7}{2}$

(注) 2つは点 $\left(1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ で接しているわけ。

＊　＊　＊

◆ では，総合的な問題をやってみませんか。

1/18

練習 4. 次の関数について $x=0$ での連続性および微分可能性を吟味せよ。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

（解） $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ は $\dfrac{+0}{+\infty}$ の形となり 0 に等しい。

また，

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{-0}{1}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)=0$$

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ において連続である。

次に，

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\dfrac{h}{1+2^{\frac{1}{h}}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{h}}}=0$$

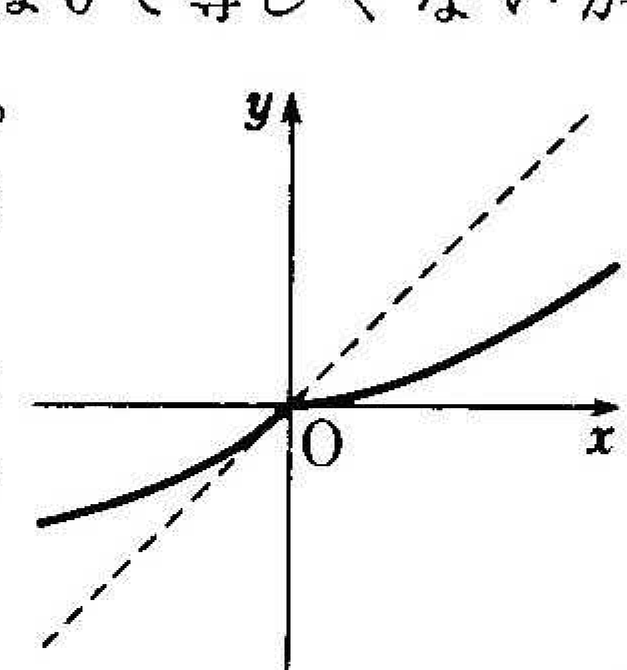
また，

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{h}{1+2^{\frac{1}{h}}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{h}}}=1$$

ゆえに $x=0$ における $f(x)$ の左方微分係数は 1，右方微分係数は 0 で等しくないから，微分可能ではない。

（注） $f(x)$ のグラフは右のようになります。$x=0$ において連続ではあるが，微分可能でないことがよくわかるでしょう。



1/20

練習 5. a，b，c および d を実数の定数とするとき，x の関数 $f(x)$ が次のように定義されている。

$$\begin{cases} x<1 \text{ で } f(x)=x+1\\ 1\leqq x<3 \text{ で } f(x)=ax^2-4ax+4a+b\\ 3\leqq x \text{ で } f(x)=\dfrac{c}{3}x^3-3cx^2+8cx+d\end{cases}$$

(1) $f(x)$ が連続となるように a と b との関係式および c と d との関係式を求めなさい。

(2) $f(x)$ が微分可能であるように a, b, c, d の値を求めなさい。

(3) a, b, c, d が (2) で定められた値をとるとき，$f(x)$ の極大値および極小値を求めなさい。　（千葉工大）

（解） (1) $x=1$ において連続であるための必要かつ十分な条件は

$$1+1=a-4a+4a+b$$

$x=3$ において連続であるための必要かつ十分な条件は

$$9a-12a+4a+b=9c-27c+24c+d$$

である。そして，$x\neq 1$，$x\neq 3$ においては $f(x)$ は到るところ連続であるから，求める条件は

$$a+b=2 \qquad \cdots\cdots①$$

$$6c+d=2 \qquad \cdots\cdots②$$

(2) $x=1$ において微分可能な条件は

$$\lim_{x\to1-0}(x+1)'=\lim_{x\to1+0}(ax^2-4ax+4a+b)'$$

$$\therefore\quad 1=2a-4a \qquad \cdots\cdots③$$

$x=3$ において微分可能な条件は

$$\lim_{x\to3-0}(ax^2-4ax+4a+b)'$$

$$=\lim_{x\to3+0}\left(\frac{c}{3}x^3-3cx^2+8cx+d\right)'$$

$$\therefore\quad 6a-4a=9c-18c+8c \qquad \cdots\cdots④$$

①，②，③，④を解いて

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=1,\ d=-4$$

(3) $x\leqq 1$，$1\leqq x\leqq 3$，$3\leqq x$ について関数形が定まるから $y=f(x)$ の増減を調べて，

極大値は $f(2)=\dfrac{5}{2}$，極小値は $f(4)=\dfrac{4}{3}$

である。

ロル(Rolle)の定理とは何か

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆こんな，アタリマエのことでも，定理と名がつくと，オドロオドロしくなる。これが数学というものの宿命であるらしい。

◆ まず名前から：——

Rolle の定理：これを **ロールの定理** と書いてあるのもあれば **ロルの定理** という人もある。どっちがより正しいのかわかりませんが，ここではロルの定理ということにしましょう。さて，それは：——

関数 $f(x)$ が次の3つの条件を満足するとき，a と b との間に $f'(x)=0$ となる x の値が少なくとも1つある。

(1) $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ において連続

(2) $f(x)$ は区間 $(a,\ b)$ において微分可能

(3) $f(a)=0,\ f(b)=0$

* * *

◆ では，ロルの定理の具体例を：——

■練習 1. 3次方程式 $f(x)=0$ の3つの実数解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$ とするとき，$f'(x)=0$ の解は区間 $(\alpha,\ \beta)$，$(\beta,\ \gamma)$ にあることを示せ。

(解) $f(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で連続かつ微分可能でかつ $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ であるから，ロルの定理により $f'(x)=0$ となる解は $(\alpha,\ \beta)$ および $(\beta,\ \gamma)$ にそれぞれ少なくとも1個ある。

ところが $f(x)=0$ は3次方程式であるから $f'(x)=0$ は2次方程式で，したがって，$(\alpha,\ \beta)$，$(\beta,\ \gamma)$ に1個ずつあることがわかる。 Q. E. D.

■練習 2. $f(x)=(x-1)^2(x-3)^3(x-5)^2$ のとき $f'(x)=0$ の解および $f''(x)=0$ の解の存在範囲を調べよ。

(解) $f(1)=0,\ f(3)=0,\ f(5)=0$ で，$f(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ において連続かつ微分可能であるから，ロルの定理によって $f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0$ なる $\alpha,\ \beta$ が $(1,\ 3)$ および $(3,\ 5)$ に少なくとも1つずつある。また，

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-1)(x-3)^3(x-5)^2\\&\quad+(x-1)^2\cdot3(x-3)^2(x-5)^2\\&\quad+(x-1)^2(x-3)^3\cdot2(x-5)\\&=(x-1)(x-3)^2(x-5)\{\times\times\times\}\end{aligned}$$

であるから，$f'(x)=0$ は 1, 3, 3, 5 なる解をもつ。これと $\alpha,\ \beta$ と合わせて合計6個で，$f'(x)=0$ は6次方程式であるから，これで全部である。

次に $f'(x)=0$ の解が

$$1<\alpha<3=3<\beta<5$$

であるから，ロルの定理により，$f''(x)=0$ は $(1,\ \alpha)$，$(\alpha,\ 3)$，$(3,\ \beta)$，$(\beta,\ 5)$ に1個ずつある。また，$f'(x)=(x-3)^2g(x)$ の形であるから，

$$\begin{aligned}f''(x)&=(x-3)^2g'(x)+2(x-3)g(x)\\&=(x-3)\{\times\times\times\times\}\end{aligned}$$

したがって $x=3$ なる解がある。$f''(x)=0$ は5次方程式で，解は合計5個あるからこれですべてである。

■練習 3. $f(x)=(x-a)^2(x-b)^3\ (0<a<b)$ とするとき，方程式 $f'(x)=0$ は相異なる3つの実数解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ (\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$ を有し，方程式 $f''(x)=0$ は相異なる3つの実数解 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\ (\beta_1<\beta_2<\beta_3)$ を有することを証明し，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ を大きさの順に並べよ。 (東京農工大)

(ヒント) 練習2.と同じです!!

* * *

◆ ロルの定理の重要な応用は **平均値の定理** の証明です。

練習 4. (平均値の定理) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ において連続で，かつ，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるときには

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

であるような x の値 ξ が a と b の間に少なくとも1つ存在することを証明せよ。

(解) $F(x)$

$$=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

とおくと，$F(x)$ は区間 $[a,\ b]$ において連続でかつ区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるから

$$F'(x)=-f'(x)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

で，しかも

$$F(a)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)$$
$$=0$$
$$F(b)=f(b)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-b)$$
$$=0$$

であるから，ロルの定理により $F'(\xi)=0$ となるような ξ が $(a,\ b)$ の間に少なくとも一つ存在する。この ξ に対して

$$-f'(\xi)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$
$$\therefore\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\therefore\quad f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

Q. E. D.

練習 5. $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で $f''(x)$ が存在するような関数とするとき

$$f(b)-f(a)$$
$$=(b-a)f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2f''(\xi)$$

なる ξ が a と b の間にあることを証明せよ。

(ヒント) 平均値の定理を拡張したものらしいことはすぐわかるでしょう。とすると，証明もほぼ同じようにできるのでしょう。では，やってみませんか。

(解) $F(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)$
$$-\frac{1}{2}(b-x)^2k$$

とおく。ここに k は

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+k(b-a)^2$$

を満足する定数である。

このとき $F(x)$ は $[a,\ b]$ において連続で微分可能であるから

$$F'(x)=-f'(x)-(b-x)f''(x)+f'(x)$$
$$+(b-x)k$$

で，しかも

$$F(a)=0,\ F(b)=0$$

であるからロルの定理により，a と b の間に $F'(x)=0$ ならしめる x がある。これを ξ とすると

$$F'(\xi)=0$$
$$\therefore\quad (b-\xi)(k-f''(\xi))=0$$

しかるに

$$b\neq\xi\qquad\therefore\quad k=f''(\xi)$$
$$\therefore\quad f(b)-f(a)$$
$$=(b-a)f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2f''(\xi)$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ ロルの定理は，このように重要な役割を果たすのですが，表面立ってはなばなしい，というわけにはいきません。なお，**コーシーの平均値の定理** (☞ p.167 を参照) でも使われます。

ともあれ，少なくともこのページは，自分で考えてできる，というわけにいきません。いうなれば暗記ものです。なるべくなら覚えておいてください。

なお，$[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能といった [ ] と ( ) の使いわけなどは，あまり気にしないこと。とはいっても数学科志望の人は別ですよ。

————そこでは，それこそが大切となるからです。

◐ 合成関数の微分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆合成関数を微分するとき，イチイチおきかえてやっているようではいけません。形式的に，サリゲナクやれるまで練習すること!!

◆ $f\circ g(x)$ つまり $f(g(x))$ のような関数を **合成関数** ということはおなじみのことですが，これを微分することは微積ではじめて出会うものです。

さて，

$$F(x)=f(g(x))$$

のとき，

$$F'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

です。さあ，この公式の使い方をものにするのが，このセクションの目的です。

y.d

■練習 1. $y=(2x^2+1)^2$ を微分せよ。

ヒント　$y=x^2$ と $y=2x^2+1$ の合成です。これでは紛らわしい，というのであれば

$$f(x)=x^2,\ g(x)=2x^2+1$$
$$y=F(x)=f(g(x))$$

なんです。だから

$$y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$=2(2x^2+1)\cdot(4x)$$
$$=8x(2x^2+1)$$

というわけ。

■練習 2. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ を微分せよ。

ヒント　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'$

ところが，

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{(x+1)\cdot1-(x-1)\cdot1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$
$$\therefore\quad y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

■練習 3. $f(x)=\sin(\cos x)$ を微分せよ。

解　$f'(x)=\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)$
$=-\sin x\cos(\cos x)$

答　$-\sin x\cos(\cos x)$

*　*　*

◆ $x=f(y)$ のとき，これから $\dfrac{dy}{dx}$ を求めるには $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ を使います。例えば，これです。

y.d

■練習 4. $x=y^2+y+1$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

解
$$\frac{dx}{dy}=2y+1$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y+1}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

注　このようにやらないで，陰関数の微分法を使ってもいいのです。つまり

$$x=y^2+y+1$$

の両辺を x で微分しますと

$$1=(2y+1)\frac{dy}{dx}$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y+1}$$

といったぐあいにです。

■練習 5. $y=\log(x^2+x+1)^4$ を微分せよ。

ヒント　このままやれば，

$$y'=\frac{1}{(x^2+x+1)^4}\cdot4(x^2+x+1)^3\cdot(2x+1)$$
$$=\frac{4(2x+1)}{x^2+x+1}$$

となります。

*　*　*

◈ では，総合的な練習をいくつかやってみましょう。

1/2く

練習 6. $y=(x+\sqrt{x^2+1}\ )^n$ のとき
$(x^2+1)y''+xy'-n^2y=0$ を証明せよ。

（解）
$$y'=n(x+\sqrt{x^2+1})^{n-1}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\frac{n(x+\sqrt{x^2+1})^n}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{ny}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\therefore\quad y''=\frac{n}{x^2+1}\left\{\sqrt{x^2+1}\,y'-y\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}$$
$$\therefore\quad (x^2+1)y''+\frac{ny}{\sqrt{x^2+1}}x-n\sqrt{x^2+1}\,y'=0$$
$$\therefore\quad (x^2+1)y''+xy'-n^2y=0$$

Q. E. D.

1/2く

練習 7. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ のとき，
$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ を求めよ。　　（名古屋市大）

（解）
$$f'(x)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left\{-\frac{(-2x)x}{2\sqrt{1-x^2}}-(1-\sqrt{1-x^2})\right\}$$
$$=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}$$
$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}f'(x)=\frac{1}{2}$$

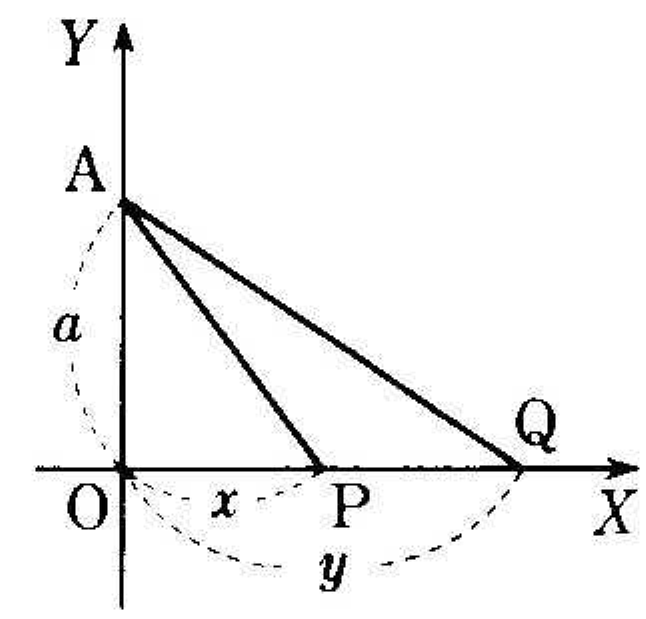
答　$\dfrac{1}{2}$

1/26

練習 8. AはY軸上の定点で，原点Oとは異なるものとする。点 P，Q は AP+AQ を一定に保ちながらX軸の正の部分を動く。OP$=x$，OQ$=y$ を時間 t の関数とみなすとき，次の式が成り立つことを示せ。
$$\frac{dx}{dt}\cos\angle\mathrm{APO}+\frac{dy}{dt}\cos\angle\mathrm{AQO}=0$$

（お茶の水女大）

（ヒント）これは，ちょっととっつきにくい問題ですね。何はともあれ AP+AQ=一定 というのを式で表すことが必要でしょう。そこで，OA$=a$ とおいてみますと，
$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+a^2}=l\qquad\cdots\cdots(*)$$
と表せます。ここに l は一定の値です。



ところで，証明したい式には $\dfrac{dx}{dt}$ や $\dfrac{dy}{dt}$ が入っていますから，上の (*) を t で微分してみたらどうだろう，ということになります。

そこで (*) の両辺を t で微分しますと
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$
ところが
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}=\cos\angle\mathrm{APO}$$
$$\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{AQ}}=\cos\angle\mathrm{AQO}$$
ですから，
$$\frac{dx}{dt}\cos\angle\mathrm{APO}+\frac{dy}{dt}\cos\angle\mathrm{AQO}=0$$

Q. E. D.

こうしてみると思いのほかラクだったなあ。

*　*　*

◈ 最後に，ひと言注意を：――

合成関数を微分するとき，いちいちおきかえてやる人があります。例えば
$u=\{(2x-3)^5+1\}^{\frac{1}{3}}$ のとき，$y=2x-3$，$z=y^5+1$ とおくと，$u=z^{\frac{1}{3}}$ となりますから
$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot 5y^4\cdot 2$$
$$=\frac{10}{3}(2x-3)^4\{(2x-3)^5+1\}^{-\frac{2}{3}}$$
といったぐあい。しかし，こういちいちおきかえるのはかえって計算まちがいのもとです。暗算で答を書き下すように練習するほうが，速くて正確なものです。

◑陰関数の微分法

1 回目 年 月 日
2 回目 年 月 日
3 回目 年 月 日

◈陰関数をそのままで微分できるということ，これは，まさに驚くべき事実だ。そのものをとり出さないで性格だけぬき出せる!!

◆ x の関数 y が

$$y=x^2e^x$$

といった形に表されているとき，この y を x の **陽関数**（ようかんすう）というのでしたね。そして，

$$x^2+xy+y^2=1$$

といった形に表されているとき（つまり，$y=\times\times\times$ という形でないとき），y を x の **陰関数**（いんかんすう）というのでした。

さて，ここでは，y が x の陰関数で表されているときの微分法をマスターするのが目的です。

* * *

◆ y が x の関数であるとき，これを x で微分したのが，

$$y' \text{ つまり } \frac{dy}{dx}$$

です。y^n を x で微分するなら

$$\underline{ny^{n-1}y'}$$

となることは合成関数の微分法の公式から当然でしょう。（☞ p. 70）

だから，次のようになります。

練習 1. $x^2+y^2=1$ のとき y' を求めよ。ここに y' は $\dfrac{dy}{dx}$ を表すものとする。

（解） $x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると

$$2x+2yy'=0$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{x}{y} \quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

（注） 答はこれでいいのですが，特に，y' を x で表せ，と要求されてあるときは

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

を代入して

$$\frac{dy}{dx}=\mp\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

とすべきです。もちろん，答は $\pm\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ としておくほうがいいのです。

練習 2. $x^2+xy+y^2=1$ のとき y' を求めよ。

（解） $x^2+xy+y^2=1$ の両辺を x で微分して

$$2x+xy'+1\cdot y+2yy'=0$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\boxed{答}\quad y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$$

練習 3. $\sin x+\sin y=1$ のとき，y' を求めよ。

（解） $$\sin x+\sin y=1$$

の両辺を x で微分すると

$$\cos x+\cos y\cdot y'=0$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{\cos x}{\cos y} \quad\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

* * *

◆ 微分係数を求めるのも同じこと。

では，これをやってみませんか。

練習 4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ のとき $x=\dfrac{1}{9}$ における微分係数を求めよ。

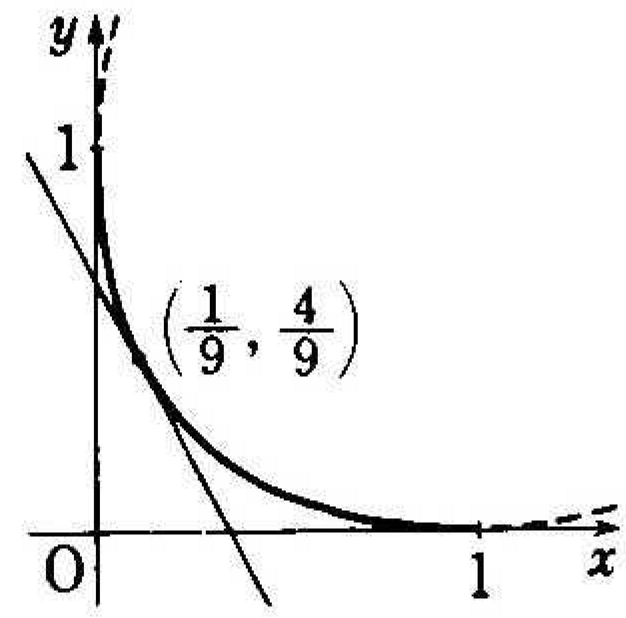
（解） $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ において $x=\dfrac{1}{9}$ とおくと

$$\frac{1}{3}+\sqrt{y}=1 \quad\therefore\quad \sqrt{y}=\frac{2}{3} \quad\therefore\quad y=\frac{4}{9}$$

さて，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$$

$$\therefore \quad y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$



ゆえに求める微分係数は

$$-\sqrt{\frac{4/9}{1/9}}=-2 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

である。

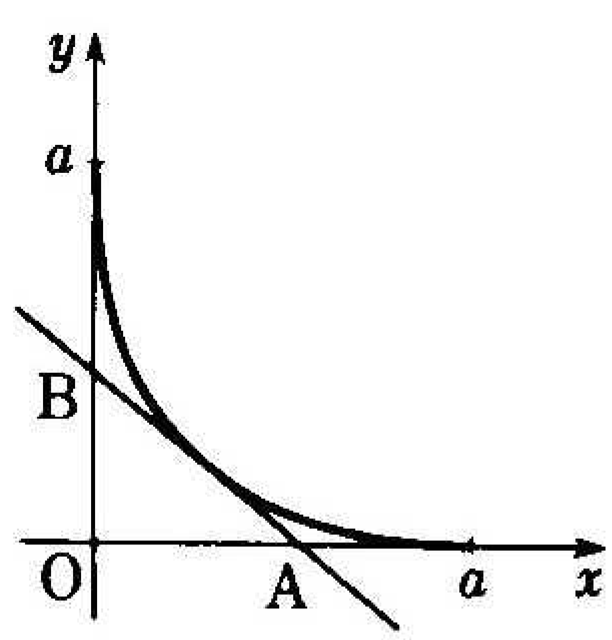
* * *

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

■練習 5. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ の任意の接線が x 軸，y 軸と交わる点を A，B とするとき，$\overline{OA}+\overline{OB}$ は一定であることを証明せよ。ただし，Oは原点とする。

(解) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

の両辺を x で微分して



$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$$

$$\therefore \quad y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

ゆえに，曲線上の点 P$(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は

$$y-\beta=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}(x-\alpha)$$

$$\therefore \quad \sqrt{\beta}x+\sqrt{\alpha}y=\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$$

$$\therefore \quad \sqrt{\beta}x+\sqrt{\alpha}y=\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{a}$$

したがって A，B の座標は

$$A(\sqrt{\alpha}\sqrt{a},\ 0),\ B(0,\ \sqrt{\beta}\sqrt{a})$$

$$\therefore \quad \overline{OA}+\overline{OB}=\sqrt{\alpha}\sqrt{a}+\sqrt{\beta}\sqrt{a}$$

$$=\sqrt{a}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=\sqrt{a}\sqrt{a}$$

$$=a \quad (一定)$$

Q. E. D.

■練習 6. 点 $(1,\ 2)$ からだ円 $x^2+4y^2=4$ に引いた接線は直交することを示せ。

(ヒント) 2つの接線の傾きを求め，その積が -1 に等しいことを示せばいい。では，その傾きをどうして求めるか。それが問題だ!!

(解) $x^2+4y^2=4$

の両辺を x で微分しますと

$$2x+8y\cdot y'=0$$

$$\therefore \quad y'=-\frac{x}{4y}$$

ゆえに曲線上の点 P$(\alpha,\ \beta)$ における接線の傾き m は

$$m=-\frac{\alpha}{4\beta} \quad \cdots\cdots ①$$

で与えられる。したがって，接線の方程式は

$$y-\beta=-\frac{\alpha}{4\beta}(x-\alpha)$$

$$\therefore \quad 4\beta y-4\beta^2=-\alpha x+\alpha^2$$

$$\therefore \quad \alpha x+4\beta y=4 \quad (\because \quad \alpha^2+4\beta^2=4)$$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$\alpha+8\beta=4 \quad \cdots\cdots ②$$

また，$(\alpha,\ \beta)$ はだ円上にあるから

$$\alpha^2+4\beta^2=4 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③より α を消去すると

$$(4-8\beta)^2+4\beta^2=4$$

$$\therefore \quad 17\beta^2-16\beta+3=0$$

この2つの解を β_1，β_2；それに対応する α の値を α_1，α_2 とすると，

$$m_1m_2=\left(-\frac{\alpha_1}{4\beta_1}\right)\left(-\frac{\alpha_2}{4\beta_2}\right)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{16\beta_1\beta_2}$$

$$=\frac{(4-8\beta_1)(4-8\beta_2)}{16\beta_1\beta_2}$$

$$=\frac{1-2(\beta_1+\beta_2)+4\beta_1\beta_2}{\beta_1\beta_2}$$

$$=\left(1-2\cdot\frac{16}{17}+4\cdot\frac{3}{17}\right)\Big/\left(\frac{3}{17}\right)$$

$$=-1$$

Q. E. D.

(注) この問題は数Iの方法，つまり判別式を使ってもできます。いや，判別式を使ってならできる人も，微分してやるとなると，かえってできないものなんです。では，もう1つ：——

■練習 7. 点Pから，だ円 $x^2+4y^2=4$ に引いた2接線が直交する。点Pの軌跡を求めよ。 $\boxed{答}$ $x^2+y^2=5$

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

⑪ パラメーターで表された関数の微分法

◆パラメーターがあるのは，パラメーターが便利な事情があるからです。すぐ，追い出そうとしてはいけません，ネ。

◆ x，y が t の関数であるとき，すなわち

$$\boldsymbol{x=x(t),\ y=y(t)}$$

であるとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

なる関係があります。では，具体的な問題をやってみませんか。

■練習 1. $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。$(a\neq 0)$

(解) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t$

答　$-\cot t$

■練習 2. $x=\dfrac{2t}{t^2+1}$，$y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(解) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{(t^2+1)(2t)-(t^2-1)2t}{(t^2+1)^2}$

$$=\frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

また，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(t^2+1)2-(2t)2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\Big/\frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}=\frac{-2t}{t^2-1}$$

答　$\dfrac{-2t}{t^2-1}$

■練習 3. $x=t^2+1$，$y=t^4-t^2+1$ のとき，$x=10$，$y=73$ における y' の値を求めよ。

(解) $x=10$，$y=73$ のとき

$$t^2+1=10,\quad t^4-t^2+1=73$$

$$\therefore\quad t^2=9,\quad t=\pm 3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3-2t}{2t}=2t^2-1$$

ゆえに，求める値は

$$2\times 9-1=18-1=17$$

答　17

■練習 4. $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(ヒント) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

このままでもわるくはないが，2倍角の公式を使って

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$$

としたほうがいいでしょう。ところで，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}$$

とやる人がスゴク多い。これはとんでもないマチガイです。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{t}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{cosec}^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}$$

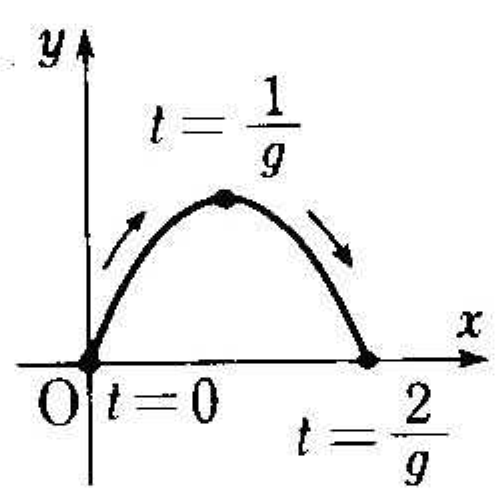
$$=-\frac{1}{4}\mathrm{cosec}^4\frac{t}{2}\qquad\cdots\cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 次に，総合的な問題をやってみましょう。

練習 5. 時刻 t における点 P の位置 $(x,\ y)$ が次の方程式(1)〜(3)によって与えられている。各場合について，t が 0 から 2π まで変わるとき点 P の描く軌跡を下の例にならって図示せよ。

(例) $\begin{cases} x=t \\ y=t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{2}{g}\right)$



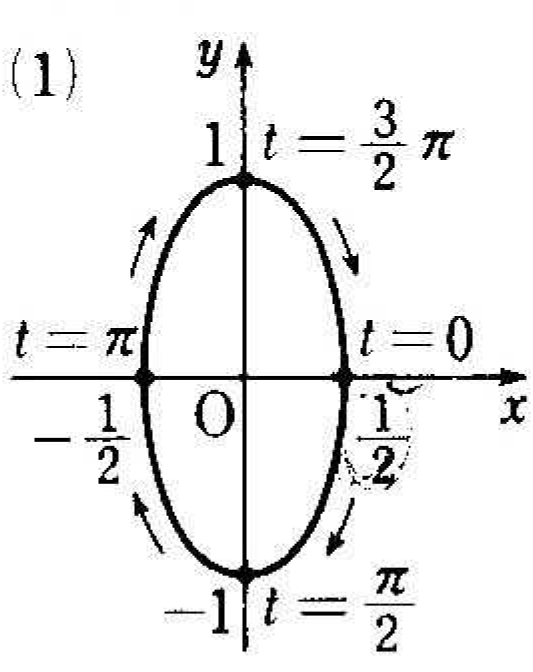
(1) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\cos(t+\pi) \end{cases}$

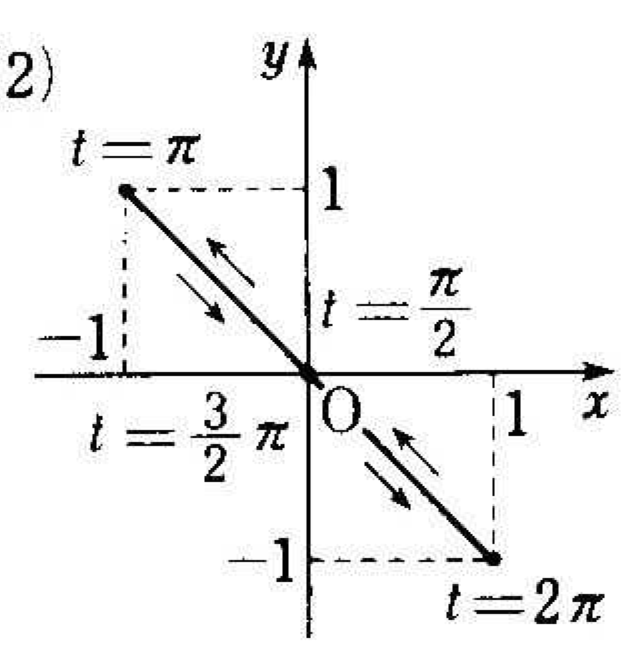
(3) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$　（東大）

(ヒント) (1)，(2)は結果だけ，(3)だけ説明しておきましょう。

(1)



(2)



(3)　$x=\cos t$

$$y=\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\sin 2t$$
$$=-2\sin t\cos t$$
$$\therefore\quad y^2=4\sin^2 t\cos^2 t$$
$$=4x^2(1-x^2)$$

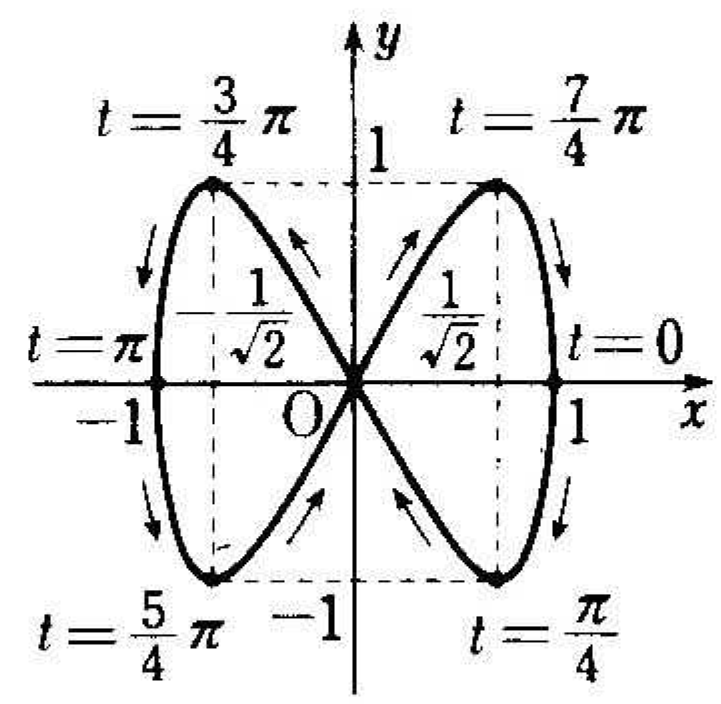
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	π
x	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
y	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-2\cos 2t}{-\sin t}=0$$

となるのは

$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$

のところで，ここで極値をとることがわかります。グラフは右のようです。



*　*　*

◆ さて，次はどうです。

練習 6. 媒介変数 θ による表示が

$$x=\sin\theta\cos\theta \qquad \left(\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$y=\sin^3\theta+\cos^3\theta$$

で与えられる曲線をかけ。　（新潟大）

(解) $x=\sin\theta\cos\theta$

であるから

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2x$$
$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{1+2x}$$
$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{1+2x}(1-x)\qquad\cdots\cdots①$$

ゆえに与えられた曲線は x 軸に関して対称である。また，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{2}\leqq 2\theta\leqq\frac{5\pi}{2}$$
$$\therefore\quad -\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$$

さて，　$y=\sqrt{1+2x}(1-x)\qquad\cdots\cdots②$

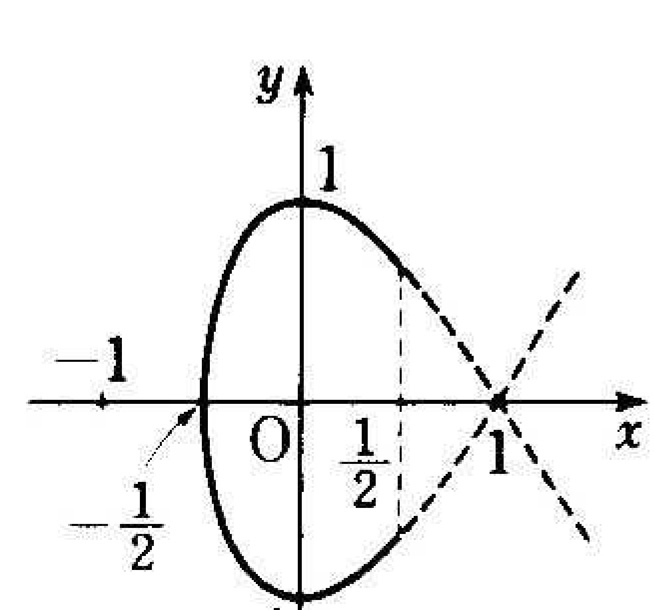
のとき

$$y'=\frac{1-x}{\sqrt{1+2x}}-\sqrt{1+2x}=\frac{-3x}{\sqrt{1+2x}}$$

ゆえに②は $x=0$ で極大値 1 をとる。また，

$$y''=\frac{-3(x+1)}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ において $y''<0$，したがって上に凸。グラフは右のようです。



◐ 無理関数の微分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈無理関数の微分法にべつに困難はありませんが，いくつかの積となると，対数微分法の有効なこともあります。念のため。

◆ 無理関数を微分するのに，べつにめんどうはありません。

α が実数なら

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$$

を使うだけのこと。あとは，必要に応じて置換すること。ただ，問題によっては対数微分を使うと便利なことがあります（☞ p. 80）。

では，順次やってみるとしましょう。

＊　＊　＊

◆ では，まず，これです。

■練習 1. $y=\sqrt[3]{x}$ の導関数を求めよ。

（解）
$$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\quad y'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

答　$y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

（注） 阪大には≪$\sqrt[3]{x}$ を定義にしたがって微分せよ≫というのが出ています。このときには次のようになります。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

■練習 2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$ を微分せよ。

（解）
$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$$
$$=x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}$$

であるから

$$f'(x)=-\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}+\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}}$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$$
$$=-\frac{1}{12x}\left(\frac{2}{\sqrt[6]{x}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\quad\cdots\cdots\text{答}$$

（注） もちろん結果は通分してもかまいませんよ。そのときには

$$-\frac{2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[6]{x}}{12x\sqrt[12]{x^5}}$$

となりましょう。

＊　＊　＊

◆ 次は合成関数の場合です。

■練習 3. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ の導関数を求めよ。

（解）
$$f(x)=\sqrt{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+1)'$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cdot 2$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

答　$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

■練習 4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分せよ。

（解）
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\therefore\quad f'(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)'$$
$$=-\frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$$
$$=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

（注） 答は $-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ としてもよい。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみるとしましょう。まず，これです。

1/3

練習 5. 微分係数の定義によって

$f(x)=\sqrt{a(a+x)}$ $(a\neq 0)$ の $x=0$ における微分係数を求めよ。 （金沢大）

（解） $f(x)=\sqrt{a(a+x)}$

$$\therefore\quad f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(a+0+h)}-\sqrt{a(a+0)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h(\sqrt{a^2+ah}+\sqrt{a^2})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a^2+ah}+\sqrt{a^2}}=\frac{a}{2|a|}$$

答 $\begin{cases} a>0 \text{ のとき } \dfrac{1}{2} \\ a<0 \text{ のとき } -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2/1

練習 6. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}$ を対数微分法を使って微分せよ。

（解） $\log|y|=\dfrac{1}{3}\{\log|x+1|+\log(x^2+1)\}$

両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}\right\}$$

$$=\frac{3x^2+2x+1}{3(x+1)(x^2+1)}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+2x+1}{3\{\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}\}^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

（注） 3乗根の根号内は負にもなれますから y や $x+1$ が負となることもあります。このとき $\log y$ や $\log(x+1)$ は困る！ そこで

$$|y|=\sqrt[3]{|x+1|(x^2+1)}$$

としてから微分するといい。そして

$$\frac{d}{dx}\log|x|=\frac{1}{x}$$

となりますから，絶対値をとったための欠陥はないのです。

2/1

練習 7. $y=x+\sqrt{x^2+a^2}$ のとき

$$(y-x)y'=y$$

であることを示せ。 （茨城大）

（解） 1. $y=x+\sqrt{x^2+a^2}$

$$\therefore\quad y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{y}{y-x}$$

$$\therefore\quad y'=\frac{y}{y-x}$$

$$\therefore\quad (y-x)y'=y$$

Q. E. D.

（解） 2. $y=x+\sqrt{x^2+a^2}$

$$\therefore\quad (y-x)^2=x^2+a^2$$

$$\therefore\quad y^2-2xy=a^2$$

陰関数の微分法（☞ p. 72）により両辺を x で微分すると

$$2yy'-2(xy'+1\cdot y)=0$$

$$\therefore\quad (y-x)y'=y$$

Q. E. D.

2/1

練習 8. 関数

$$f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$$

について

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2+1}$$

を証明せよ。

（ヒント） このまま微分してもよいが，それよりは次のほうがよいでしょう。

$$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)}$$

を使って

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$$

の両辺を3乗しますと

$$y^3=(x+\sqrt{x^2+1})+(x-\sqrt{x^2+1})$$
$$+3\sqrt[3]{x^2-(x^2+1)}\cdot y$$

$$\therefore\quad y^3=2x-3y$$

両辺を x で微分しますと

$$3y^2y'=2-3y'$$

$$\therefore\quad y'=\frac{2}{3(y^2+1)}\qquad \text{Q. E. D.}$$

* * *

◆ 最後にちょっと注意を：——

はじめに述べたように $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ を使えばよいのですから，べつに公式をオボエル必要はありませんが，$y=\sqrt{x}$ だけはよく出るので，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ をオボエテおくべきだ。

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◑三角関数の微分法

◆三角関数それ自体の微分にめんどうはありません。しかし，他のものと混ざってくると，突然悪魔に変貌することがあるのだ。

◆ 三角関数の導関数の公式をまずあげておきましょう。

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x,\ (\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$$

(注) $\sec x$ や $\mathrm{cosec}\,x$ の導関数はオボエルほどのこともありますまい。そのつど計算することにしておくほうがよいでしょう。

では，これを：——

7/3

■練習 1. $y=\sin^3 x$ を微分せよ。

(ヒント) $y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'$
$=3\sin^2 x\cos x$ ……(*)

答 $3\sin^2 x\cos x$

(注) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ によって

$$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$$

ですから，

$$(\sin^3 x)'=\frac{1}{4}\{3\cos x-3\cos 3x\} \quad \cdots\cdots(**)$$
$$=\frac{1}{4}\{3\cos x-3(4\cos^3 x-3\cos x)\}$$
$$=\frac{1}{4}(12\cos x-12\cos^3 x)=3\cos x-3\cos^3 x$$
$$=3\cos x(1-\cos^2 x)=3\sin^2 x\cos x$$

となって，実は(*)と(**)はまったく同じものなのです。

7/3

■練習 2. $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ を微分せよ。

(解) $f'(x)$

$$=\frac{(1+\cos x)(-\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(注) もうちょっと簡単になるような気もするが，どうにもならないような感じ。では，ここでいいとしようか。

■練習 3. $y=\mathrm{cosec}\,x$ を微分せよ。

7/2

(ヒント) $\mathrm{cosec}\,x=\dfrac{1}{\sin x}$ ですから

$$y'=\frac{\sin x\cdot 0-1\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=-\mathrm{cosec}\,x\cot x$$

答 $-\mathrm{cosec}\,x\cot x$

7/3

■練習 4. $y=\sin\sqrt{x^2+x+1}$ を微分せよ。

(解) $y'=(\cos\sqrt{x^2+x+1})\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cos\sqrt{x^2+x+1} \quad \cdots \text{答}$$

*　*　*

◆ 以上で基礎的なことは終わりですが，ここでは，定義にしたがって微分する練習をしておきましょう。

7/3

■練習 5. $f(x)=\sin x$ を定義にしたがって微分せよ。

(解) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x \quad \cdots\cdots \text{答}$$

9

7/4

■練習 6. $f(x)=\sin^2 x$ を定義にしたがって微分せよ。

(ヒント) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin^2(x+h)-\sin^2 x}{h}$

$=\cdots\cdots$

答 $\sin 2x$

*　*　*

◆ では，次に総合的な問題を：——

練習 7. $f(x)=x^2e^{-x}\sin x$ のとき，

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}$ を求めよ。（東北学院大）

1/4

（解） $f'(x)=x^2e^{-x}\cos x-x^2e^{-x}\sin x$
$+2xe^{-x}\sin x$

であるから

$$与式=\lim_{x\to 0}\left(e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x+\frac{2e^{-x}\sin x}{x}\right)$$
$$=1+0+2=3$$

答 3

1/5

練習 8. $\sin x$ は x の多項式で表すことができないことを示せ。

（解） $\sin x=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$
$(a_n\neq 0)$

と x の多項式で表せるとすると不合理になることを示す。

両辺を x で n 回微分すると

$$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=n!a_n$$

を得る。左辺は x の周期関数，右辺は定数であるから不合理である。

よって $\sin x$ を x の多項式で表すことはできない。 Q. E. D.

（注） 上のようなやり方は $\log x$ や e^x や $\sqrt{1+x}$ などが x の多項式で表せないことを証明するのにそのまま使うことができます。

1/6

練習 9. 関数 $f(x)$ に対して，

$F(x)=f(x)\cos x$，$G(x)=f(x)\sin x$

とおく。2つのベクトル

$\vec{a}=(F(x),\ G(x))$，$\vec{b}=(F'(x),\ G'(x))$

のなす角を $\theta(0\leqq\theta<\pi)$ とするとき，次に答えよ。

(1) $\tan\theta$ を $f(x)$，$f'(x)$ を用いて表せ。

(2) $f(x)=\sqrt{\cos 2x}\left(0\leqq x<\frac{\pi}{4}\right)$ のとき，θ を x で表せ。（九州工大）

（ヒント） べつにめんどうはありません。ただただていねいに計算するだけです。

(1) $F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

$G'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$

ゆえに

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=F(x)F'(x)+G(x)G'(x)$$
$$=f(x)f'(x)(\cos^2x+\sin^2x)$$
$$=f(x)f'(x)$$

また，

$$|\vec{a}|^2=\{F(x)\}^2+\{G(x)\}^2=\{f(x)\}^2$$
$$|\vec{b}|^2=\{F'(x)\}^2+\{G'(x)\}^2$$
$$=\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2$$

となりましょう。ところが，内積の定義から

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

ですから，

$$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$
$$=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}-1=\frac{\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2}{\{f'(x)\}^2}-1$$
$$=\frac{\{f(x)\}^2}{\{f'(x)\}^2}$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\pm\frac{f(x)}{f'(x)}$$

しかし，実は，この複号±のうち，−はダメです。なぜなら，$0\leqq\theta<\pi$ では $\tan\theta$ と $\cos\theta$ の符号が等しく，$\cos\theta$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$，したがって $f(x)$ と $f'(x)$ の符号が等しいからです。

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{f(x)}{f'(x)}\quad\cdots\cdots 答$$

(2) $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$ なら

$$f'(x)=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

ですから

$$\tan\theta=-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-\cot 2x$$
$$=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$$

ところが $0\leqq\theta<\pi$，$0\leqq x<\frac{\pi}{4}$ ですから，

$$\theta=\frac{\pi}{2}+2x\quad\cdots\cdots 答$$

対数微分法とは

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆対数微分法は効力絶大である。効力絶大のものはとかく使用法を誤まるとまちがいのもとである。乱用することなかれ。

◆ **関数が複雑な積からなっている** とき，その関数を直接微分しないで，まず，対数をとって，その上で微分する方法を **対数微分法** というのです。つまり，

$$y=y_1y_2$$

なら

$$|y|=|y_1||y_2|$$

$$\therefore\quad \log|y|=\log|y_1|+\log|y_2|$$

両辺を y で微分しますと

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{y_1}y_1'+\frac{1}{y_2}y_2'$$

$$\therefore\quad y'=\left(\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}\right)y_1y_2$$

$$=y_2y_1'+y_1y_2'$$

となります。これなら積の微分の公式です。

* * *

◆ では，具体的な例をやってみませんか。

つい

練習 1. $y=(x+2)^3(x+3)^2(x+4)$ を微分せよ。

（解） $|y|=|x+2|^3|x+3|^2|x+4|$

両辺の対数をとると

$$\log|y|=3\log|x+2|+2\log|x+3|+\log|x+4|$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+4}$$

$$\therefore\quad y'=\left(\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)y$$

$$=\{3(x+3)(x+4)+2(x+2)(x+4)+(x+2)(x+3)\}(x+2)^2(x+3)$$

$$=2(x+2)^2(x+3)(3x^2+19x+29)$$

答 $2(x+2)^2(x+3)(3x^2+19x+29)$

* * *

◆ さて，これを対数微分法を使わないならどうなるでしょうか。

$$y'=(x+2)^3(x+3)^2\cdot 1+(x+2)^3\cdot 2(x+3)\times(x+4)+3(x+2)^2(x+3)^2(x+4)$$

$$=(x+2)^2(x+3)\{(x+2)(x+3)+2(x+2)(x+4)+3(x+3)(x+4)\}$$

$$=2(x+2)^2(x+3)(3x^2+19x+29)$$

これでは対数微分法のほうがかえってめんどうではありませんか。しかし，分数関数になると対数微分法のほうがラクなことが多いのです。例えば，これです。

4/n

練習 2. $y=\dfrac{x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}$ を微分せよ。

（解） 両辺の対数をとると

$$\log|y|=\log|x+3|-2\log|x+1|-3\log|x+2|$$

$$\therefore\quad \frac{y'}{y}=\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}$$

$$\therefore\quad y'=\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}\right\}$$

$$=\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}\times\frac{-(4x^2+19x+19)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

答 $y'=-\dfrac{4x^2+19x+19}{(x+1)^3(x+2)^4}$

* * *

◆ **指数に変数が入っているとき** も対数微分法の活躍場です。例えば：——

つい

練習 3. $y=x^x$ を微分せよ。

（ヒント） $\log y=x\log x$

この両辺を x で微分するとよいでしょう。

すなわち，

$$\frac{1}{y}y'=x\cdot\frac{1}{x}+\log x$$

$$\therefore\quad y'=x^x(1+\log x) \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

（注） 対数微分法を使わないでもできます。それには x^x を e を使って表すのです。つまり

$$x=e^{\log x}$$

ですから

$$y=x^x=(e^{\log x})^x=e^{x\log x}$$

です。だから，

$$\therefore\quad y'=e^{x\log x}\left(x\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\log x\right)$$
$$=x^x(1+\log x)$$

となります。

7/11

練習 4. $y=2^x$ を微分せよ。

（解） 両辺の対数をとると

$$\log y=x\log 2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}y'=\log 2$$

$$\therefore\quad y'=(\log 2)y$$

$$\therefore\quad y'=(\log 2)2^x \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

（注） 対数微分法を使わないなら

$$y=2^x=(e^{\log 2})^x=e^{(\log 2)x}$$

$$\therefore\quad y'=e^{(\log 2)x}\cdot(\log 2)$$
$$=2^x\log 2 \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

となりましょう。では，もう1つ：——

7/11

練習 5. $y=x^{\log x}$ を微分せよ。

（解） 両辺の対数をとって

$$\log y=\log x\cdot\log x=(\log x)^2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\cdot y'=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\log x$$

$$\therefore\quad y'=x^{\log x}\cdot\frac{2}{x}\log x$$
$$=2x^{\log x-1}\cdot\log x$$

（注） うっかりすると $x^{\log x-1}$ を $x^{\log(x-1)}$ と混同ないし読みちがいするキケンあり。その点からは $y'=2x^{-1+\log x}\cdot\log x$ のほうが安全です。

*　　*　　*

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。例えば，これです。

7/11

練習 6. $x=t^{\sin t}$，$y=t^{\cos t}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

（ヒント） x も y も t の関数ですから，パラメーターで表された関数の微分公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

を使えばよいハズ。そして，$\dfrac{dy}{dt}$ や $\dfrac{dx}{dt}$ を求めるには対数微分法が使える，というわけです。さて：——

$$\log x=\sin t\log t$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=(\sin t)\cdot\frac{1}{t}+\cos t\log t$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=t^{\sin t}\left(\frac{\sin t}{t}+\cos t\log t\right)$$

次に，

$$\log y=\cos t\log t$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=(\cos t)\frac{1}{t}+(-\sin t)\log t$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dt}=t^{\cos t}\left(\frac{\cos t}{t}-\sin t\log t\right)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{t^{\cos t}\left(\dfrac{\cos t}{t}-\sin t\log t\right)}{t^{\sin t}\left(\dfrac{\sin t}{t}+\cos t\log t\right)}$$
$$=t^{\cos t-\sin t}\frac{\cos t-t\sin t\log t}{\sin t+t\cos t\log t}$$

$$\cdots\cdots\text{答}$$

*　　*　　*

◆ 対数微分法にはべつにめんどうはありませんから，イヤガラズに使いこなすことが大切です。

では最後に1つ，次の練習7を，対数微分法を使う方法と使わない方法の2通りやってみませんか。

7/11

練習 7. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ を微分せよ。

（注） 答は，2通りの方法でやったのが一致したら安心してよい!!

⑩ 対数関数の微分法

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対数関数を微分するにめんどうはない。しかしだ。微分してからの処理にめんどうなものが少なくない。ご用心あれ。

◆ 対数関数の微分公式は次のようです。

$$\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}\quad(\text{ただし，底は } e)$$

なお，a を定数とするとき，一般に

$$\frac{d}{dx}(\log ax)=\frac{1}{x}$$

です。$\log ax=\log x+\log a$ だから当然のこと。また，

$$\frac{d}{dx}\log|x|=\frac{1}{x}$$

です。なぜなら，

$x>0$ のとき

$$\frac{d}{dx}\log|x|=\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$$

$x<0$ のとき

$$\frac{d}{dx}\log|x|=\frac{d}{dx}\log(-x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

だからです。後者は東京理大に出題されています。

*　*　*

◆ さて，問題に入りましょう。

2/1

練習 1. $f(x)=\log_2 x$ の導関数を求めよ。

ヒント　底が2ですから $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ にはなりません。

底を変える公式

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$$

を使って，底を e として

$$f(x)=\frac{1}{\log 2}\cdot\log x$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{x}$$

答　$\dfrac{1}{(\log 2)x}$

2/1

練習 2. $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{x+b}{x+a}}$ の導関数を求めよ。

ヒント　まず変形してから微分したほうがいいでしょう。つまり

$$f(x)=\log\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{x+b}{x+a}$$

$$=\frac{1}{2}\{\log(x+b)-\log(x+a)\}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right)$$

$$=\frac{a-b}{2(x+a)(x+b)}$$

なお，まともにやるなら

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+b}{x+a}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{x+b}{x+a}}\right)'$$

$$=\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+b}{x+a}}}\cdot\left(\frac{x+b}{x+a}\right)'$$

$$=\frac{(x+a)}{2(x+b)}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{a-b}{2(x+a)(x+b)}$$

となって，当然のことながら，同じ結果になります。

2/1

練習 3. $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ の導関数を求めよ。

解　$f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2+a^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

答　$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみましょう。まず，これです。

2/12

練習 4. $y=e^{\sqrt{x}}\cdot(\log ax)^5$ を微分せよ。

（解） 積の微分法の公式により

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sqrt{x}}\cdot5(\log ax)^4\cdot\frac{1}{x}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}(\log ax)^5$$

$$=e^{\sqrt{x}}(\log ax)^4\left(\frac{5}{x}+\frac{\log(ax)}{2\sqrt{x}}\right)$$

……答

2/13

練習 5. $y=\log_a\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ を微分せよ。

（解） 底を e に直すと

$$y=\frac{1}{\log a}\times\log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

$$=\frac{1}{\log a}\times\frac{1}{2}\{\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\}$$

$$\therefore\quad y'=\frac{1}{2\log a}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\right)$$

$$=\frac{1}{2\log a}\cdot\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{(\log a)\cos x}$$

……答

＊　＊　＊

◆ 次はかなり難しい問題です。初心者はもちろん敬遠するに如くはなし，だ。

2/15

練習 6. (1) 区間 $0<x<\frac{\pi}{2}$ の任意の x に対して，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\log\cos\frac{x}{2^k}$ は収束することを証明せよ。ただし，log は自然対数を表す。

(2) この無限級数の和を $S(x)$ とおくとき，$S(x)$ の導関数を求めよ。（金沢大）

（ヒント） (1)ができれば(2)は簡単。そして(1)は，要するに三角関数の計算が主役というわけです。必要な公式は

$$2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$$

を使うだけなのです。

（解） (1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\cos\frac{x}{2^k}$

$$=\log\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$$

さて，

$$T_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

とおくと，両辺に $2^n\sin\frac{x}{2^n}$ を乗じて

$$2^n\sin\frac{x}{2^n}T_n$$

$$=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=2^{n-2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=2^1\cos\frac{x}{2}\cdot2\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}$$

$$=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$$

$$\therefore\quad T_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{\infty}\log\cos\frac{x}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\log\frac{\sin x}{x}$$

ゆえに無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\log\cos\frac{x}{2_k}$ は収束する。

(2) $S(x)=\log\frac{\sin x}{x}=\log\sin x-\log x$

であるから

$$S'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}$$

$$=\cot x-\frac{1}{x}$$

答　$\cot x-\frac{1}{x}$

（注） ヤレヤレ，微分法という立場からは，まさに泰山鳴動ネズミ一匹，ではあったわい。

9

⑩ 指数関数の微分法

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈指数関数を微分するのにめんどうなことはないが，その代わり，いろいろと応用的な問題の源泉地となるのだ。

◆ 指数関数 e^x の導関数はやはり e^x で，これほど簡単なものはありません。しかし，他の関数と結びつくと，それなりにめんどうになるものです。

では，とりあえず，これを：——

7/18

■練習 1. 関数 $f(x)=e^{4x}$ を微分せよ。

(解) $$f(x)=e^{4x}$$

$$\therefore\quad f'(x)=e^{4x}(4x)'=4e^{4x}$$

答 $4e^{4x}$

7/18

■練習 2. $f(x)=e^{\sin x}$ を微分せよ。

(解) $$f'(x)=e^{\sin x}(\sin x)'$$
$$=(\cos x)e^{\sin x}$$

答 $(\cos x)e^{\sin x}$

7/18

■練習 3. 5^x を微分せよ。

(ヒント) 2つの方法があります。1つは対数微分法，1つは $5^x=e^{x\log 5}$ であることを使うもの，です。

(解) 1. $y=5^x$ とおき，両辺の対数をとると

$$\log y=x\log 5$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\log 5 \quad \therefore\quad y'=(\log 5)y$$

$$\therefore\quad y'=(\log 5)\cdot 5^x \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

(解) 2. $\underbrace{5^x=e^{(\log 5)x}}$ であるから

$$(5^x)'=(\log 5)e^{(\log 5)x}$$
$$=(\log 5)\cdot 5^x \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

7/18

■練習 4. $f(x)=e^x\sin x$ を微分せよ。

(解) $$f'(x)=e^x\cos x+e^x\sin x$$
$$=e^x(\sin x+\cos x)$$
$$=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

(注) $e^x(\sin x+\cos x)$ でやめてわるいということもありませんが，

$$\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

までやっておきたいものだ!!

* * *

◆ では，やや複合的なものを：——

7/18

■練習 5. $y=e^{mx}$ の n 次導関数を求めよ。

(解) $$y=e^{mx}$$
$$\therefore\quad y'=me^{mx}$$
$$y''=m^2e^{mx}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=m^ne^{mx} \quad\cdots\cdots \boxed{答}$$

7/18

■練習 6. $f(x)=e^{x\cos x}$ を微分せよ。

(解) $$f(x)=e^{x\cos x}$$
$$\therefore\quad f'(x)=e^{x\cos x}\{x(-\sin x)+1\cdot\cos x\}$$
$$=(-x\sin x+\cos x)e^{x\cos x}$$
$\cdots\cdots$ 答

7/18

■練習 7. $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

のとき $a^2y''=y$ を証明せよ。($a\neq 0$)

(解) $$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
$$\therefore\quad y'=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$$
$$\therefore\quad y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}+\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
$$=\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=\frac{1}{2a}\cdot\frac{2y}{a}$$
$$\therefore\quad a^2y''=y$$

Q. E. D.

* * *

ℓ

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 8. a，b を定数とするとき，関数

$$y=e^{-3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

が微分方程式

$$y''+3y'+y=-15e^{-3x}\cos 2x$$

を満足するように，a，b の値を定めよ。

（大阪府大）

解　$y=e^{-3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$

$$y'=e^{-3x}\{(-3a+2b)\cos 2x+(-2a-3b)\sin 2x\}$$

$$y''=e^{-3x}\{(5a-12b)\cos 2x+(12a+5b)\sin 2x\}$$

これらを代入して変形すると

$$(-3a-6b+15)\cos 2x+(6a-3b)\sin 2x=0$$

これがすべての x に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases}-3a-6b+15=0\\ 6a-3b=0\end{cases}$$

これから　$a=1$，$b=2$　……答

練習 9. 関数 $f(x)$ が

$$f'(x)=-2e^{2x}\sin 2x+2f(x)$$

$$f''(x)=-8e^{2x}\sin 2x+4e^{2x}$$

をみたすとき $f(x)$ を求めよ。（東北大）

ヒント　マトモにみると第1式は

$$y=f(x)$$

とおいて変形すると，微分方程式

$$\frac{dy}{dx}-2y=-2e^{2x}\sin 2x$$

になります。しかし，まさか，これを解けというのではあるまい。第1式を微分して第2式と比べてみたらどうだろう。

さて，第1式を微分して

$$f''(x)=-4e^{2x}\sin 2x-4e^{2x}\cos 2x+2f'(x)$$

が得られますが，この $f'(x)$ に第1式を代入してみますと，

$$f''(x)=-4e^{2x}\sin 2x-4e^{2x}\cos 2x-4e^{2x}\sin 2x+4f(x)$$

$$=-8e^{2x}\sin 2x-4e^{2x}\cos 2x+4f(x)$$

となります。これと第2式を比べると $f(x)$ が求まります。

答　$e^{2x}(\cos 2x+1)$

*　*　*

◆ 指数関数がパラメーターとして入っているものもあります。例えば：——

練習 10. 変数 x，y が媒介変数および異なる有理数 a，b によって次のように表されている。

$$x=\frac{1}{2}(e^{at}+e^{bt}) \quad \cdots\cdots①$$

$$y=\frac{1}{2}(e^{at}-e^{bt}) \quad \cdots\cdots②$$

(1)　x と y の関係を求めよ。

(2)　$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t を含まない式で表せ。

（山梨大）

ヒント　(1)　t を消去するには e^{at}，e^{bt} をまず求めてみたらよさそうだ。

①＋②より

$$x+y=e^{at} \quad \cdots\cdots③$$

①－②より

$$x-y=e^{bt} \quad \cdots\cdots④$$

③，④より t を消去して

$$(x+y)^b=(x-y)^a \quad \cdots\cdots⑤$$

(2)　⑤の両辺を x で微分しますと

$$b(x+y)^{b-1}\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=a(x-y)^{a-1}\left(1-\frac{dy}{dx}\right) \quad \cdots\cdots⑥$$

⑥の両辺を⑤の両辺で辺々割ってみると

$$\frac{b\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)}{x+y}=\frac{a\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)}{x-y}$$

これから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a-b)x+(a+b)y}{(a+b)x+(a-b)y}$$

あとは結果だけ示すと

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{4ab(a-b)(x^2-y^2)}{\{(a+b)x+(a-b)y\}^3}$$

となります。

高次導関数の証明

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆高次導関数を求めるのに２つの方法がありま す。その１つは逐次計算で，それにつきまとうのが，その証明法なのだ。

◆「n次導関数を求めよ」というのに比べて，「n次導関数が……であることを証明せよ」というのはグッと楽になります。結果がわかっているし，**数学的帰納法** を使って機械的にできるからです。

では，まず，これを：——

練習 1. $x^2+y^2=r^2$ のとき

$$1+y'^2+yy''=0$$

が成り立つことを示せ。

(解) $x^2+y^2=r^2$ の両辺をxで微分して

$$2x+2yy'=0$$

が得られる。

次に，$x+yy'=0$ の両辺をxで微分して

$$1+yy''+y'y'=0$$

$$\therefore\quad 1+y'^2+yy''=0 \qquad \cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 2. $y=e^{-2x}\cos 2x$ のとき，

$y''+4y'+8y=0$ であることを示せ。

(解) $y=e^{-2x}\cos 2x$

$$\begin{aligned}\therefore\quad y'&=-2e^{-2x}\cos 2x+e^{-2x}(-2\sin 2x)\\&=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)\\y''&=(-2)^2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)\\&\quad+(-2e^{-2x})(2\cos 2x-2\sin 2x)\\&=8e^{-2x}\sin 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &y''+4y'+8y\\&=e^{-2x}\{8\sin 2x+4(-2\sin 2x-2\cos 2x)\\&\qquad+8\cos 2x\}\\&=0\end{aligned}$$

Q. E. D.

*　*　*

◆ さあ，予備練習はこれくらいにして，いよいよ，本論にいくとしましょうか。

練習 3. $f(x)=\log x$ のとき，

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

を証明せよ。

(ヒント) 数学的帰納法でやるとしましょう。

1° $n=1$ のとき，左辺は $f^{(1)}(x)$，つまり $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ です。そして，右辺は

$$(-1)^{1-1}\frac{(1-1)!}{x^1}=\frac{1}{x}$$

なるほど，この等式は成り立つことがわかります。

2° $n=k$ のとき成り立つとすると

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)!}{x^k}$$

この両辺をxで微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{-(k-1)!kx^{k-1}}{(x^k)^2}\\&=(-1)^k\cdot\frac{k!}{x^{k+1}}\end{aligned}$$

この結果は $n=k$ のとき成り立つなら，$n=k+1$ のときにも成り立つことを示しています。

3° 1°，2° により，nのすべての自然数値に対して与えられた関係式の成り立つことがわかります。

では，これを答案の形にキチンと書いてみること。その上で次をやってください。

練習 4. $f(x)=a^x\quad(a>0,\ a\neq 1)$

のとき，

$$f^{(n)}(x)=a^x(\log a)^n$$

であることを証明せよ。

(ヒント) $n=k$ のとき成り立つとしますと

$$f^{(k)}(x)=a^x(\log a)^k \qquad \cdots\cdots(*)$$

ところが $a^x=e^{x(\log a)}$ ですから

$$(a^x)'=e^{x(\log a)}\cdot(\log a)=a^x(\log a)$$

ですから (*) の両辺を x で微分してみると，

$$f^{(k+1)}(x)=a^x(\log a)\cdot(\log a)^k$$
$$=a^x(\log a)^{k+1}$$

もう大丈夫。数学的帰納法でできるらしい。さあ，やってみてください。

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

1/v5

練習 5. $0<y<\pi$ のとき，$x=a\cot y$ に対して，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=b\sin^2 y\sin 2y$ および $\dfrac{d^3y}{dx^3}=c\sin^3 y\sin 3y$ とおくとき，b および c を a を用いて表せ。ただし，$a\neq 0$ で，a, b, c はいずれも x, y に無関係な定数である。　(福島県医大)

ヒント　$x=a\cot y$ の両辺を x で微分してもよいが，あるいは，次のようにしてもよいでしょう。

$$\tan y=\frac{a}{x} \qquad \cdots\cdots①$$

両辺を x で微分しますと

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②から

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{a}\sin^2 y \qquad \cdots\cdots③$$

が得られます。これさえでれば，あとは簡単。両辺を x で微分して③を使うと

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a}\cdot 2\sin y\cdot\cos y\frac{dy}{dx}$$
$$=-\frac{2}{a}\sin y\cos y\left(-\frac{1}{a}\sin^2 y\right)$$
$$=\frac{1}{a^2}\sin^2 y\sin 2y$$
$$\therefore\ b=\frac{1}{a^2}$$

✓ 同じ操作をくり返して $c=-\dfrac{2}{a^3}$ となります。

練習 6. 関数 $f(x)=\sin x$ に対し，関数 $f^{(n)}(x)$ を $f^{(0)}(x)=f(x)$, $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{df^{(n)}x}{dx}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$ により定める。任意の自然数 n について，2つの関数 $y=xf^{(n-1)}(x)$ および $y=f^{(n)}(x)$ のグラフを，それぞれ C_1, C_2 とする。P が C_1, C_2 の交点であれば，P における C_1, C_2 の接線 t_1, t_2 は互いに直交する。これを証明せよ。　(京大)

ヒント　$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$

であることがわかってしまえば (☞ p. 89)

$$C_1: y=x\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$C_2: y=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

ですから，交点 P の x 座標を α としますと

$$\alpha\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)$$

ところが

$$\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)$$

ですから，

$$-\alpha\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)\cdots\cdots(*)$$

なる関係があります。

さて，C_1 の P における接線の傾き m_1 は

$$m_1=\alpha\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)+\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$=\alpha\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)-\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)$$

で，C_2 の P における接線の傾き m_2 は

$$m_2=\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\pi\right)$$

ですから (*) により

$$m_1m_2=-1$$

すなわち t_1 と t_2 は直交します。

Q. E. D.

*　*　*

ℓ

高次導関数の求め方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◆高次導関数を求めることは一般にめんどうですが，いくつか重要なものは暗記物と観念してオボエルことだ。

◆ **高次導関数**，特に **n 次導関数** を求めるのは一般にめんどうです。しかし，それにはいくつか重要なタイプがありますので，それをオボエテしまうと，あとはなんとかなるもの。では，まずこれから：——

練習 1. $f(x)=x^5$ のとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(ヒント) $f'(x)=5x^4$

$f''(x)=5\cdot 4x^3=20x^3$

$f'''(x)=5\cdot 4\cdot 3x^2=60x^2$

$f^{(4)}(x)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x=120x$

$f^{(5)}(x)=120$

これを微分すれば0，つまり $k\geqq 6$ のとき

$f^{(k)}(x)=0$

答 $\begin{cases} n\leqq 5 \text{ のとき} \\ \quad f^{(n)}(x)=5\cdot 4\cdots(6-n)x^{5-n} \\ n\geqq 6 \text{ のとき } f^{(n)}(x)=0 \end{cases}$

練習 2. $f(x)=\dfrac{1}{x+a}$ のとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(ヒント) $f(x)=(x+a)^{-1}$ としてやるとラク!!

$f'(x)=(-1)(x+a)^{-2}$

$f''(x)=(-1)(-2)(x+a)^{-3}$

$f'''(x)=(-1)(-2)(-3)(x+a)^{-4}$

……………………

$\therefore\ f^{(n)}(x)=(-1)(-2)(-3)\cdots$

$\cdots(-n)(x+a)^{-(n+1)}$

$=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ ……答

(参考) これの結果は重要です。例えば，

≪$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ の n 次導関数を求めよ≫

という問題ならば，

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$$

と変形できますから，

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{3}\left\{\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}$$

となりましょう。また

≪$f(x)=\dfrac{4x+1}{2x+3}$ の n 次導関数を求めよ≫

なら，$f(x)$ を変形して

$$f(x)=2+\frac{-5}{2x+3}=2+\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

と書けますから，

$$f^{(n)}(x)=\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{5}{2}\cdot n!}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$$

となります。

* * *

◆ 次は無理関数です：——

練習 3. $f(x)=\sqrt{x+a}$ の n 次導関数を求めよ。

(ヒント) $f(x)=(x+a)^{\frac{1}{2}}$ としてやるとラクです。つまり

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x+a)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)(x+a)^{-\frac{5}{2}}$

………………

$f^{(n)}(x)$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(x+a)^{-\frac{2n-1}{2}}$

$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-3)}{2^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+a)^{2n-1}}}$

*　　*　　*

◆ 次は，三角関数です。

練習 4. $f(x)=\sin x$ の n 次導関数を求めよ。

ヒント　$f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2}{2}\pi\right)$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(x+\frac{4}{2}\pi\right)$$

これから，

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

となりそうだ。その正しいことは数学的帰納法で証明できるだろう。あるいは次の練習5.ように考えることもできます。

練習 5. $f(x)=\cos x$ の n 次導関数を求めよ。

解　一般に

$$f(\theta)=\cos(\theta+\alpha)\quad(\alpha：定数)$$

のとき，

$$f'(\theta)=-\sin(\theta+\alpha)=\cos\left(\theta+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

ゆえに $f(x)=\cos x$ を微分するごとに $\frac{\pi}{2}$ を加えればよい。

$$\therefore\quad f'(x)=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

である。

答　$\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$

*　　*　　*

◆ 次は指数関数 $f(x)=e^{mx}(m\neq 0)$ の場合です。

練習 6. $f(x)=e^{mx}$ の n 次導関数を求めよ。

解　$f(x)=e^{mx}$

$f'(x)=me^{mx}$

$f''(x)=m^2e^{mx}$

以下同様にして，微分するごとに m がかかるから，

$$f^{(n)}(x)=m^ne^{mx}\quad\cdots\cdots 答$$

*　　*　　*

◆ 高次導関数を求める際に有用な **ライプニッツの定理** があります。これを使う問題をひとつやっておきましょう。（☞詳しくは p. 90 を参照してください）

練習 7. $f(x)=x^2e^x$ の n 次導関数を求めよ。

解　ライプニッツの定理によれば

$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+{}_nC_1f^{(n-1)}g'+{}_nC_2f^{(n-2)}g''+\cdots\cdots+{}_nC_rf^{(n-r)}g^{(r)}+\cdots\cdots+f\cdot g^{(n)}$$

である。いま $f=e^x$, $g=x^2$ とおけば，

$f^{(r)}=e^x\quad(r=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

$g'=2x,\ g''=2,\ g'''$ 以下は 0

であるから，

$$y^{(n)}=e^xx^2+{}_nC_1e^x(2x)+{}_nC_2e^x(2)$$
$$=e^x\{x^2+2nx+n(n-1)\}$$

答　$y^{(n)}=e^x\{x^2+2nx+n(n-1)\}$

注　ライプニッツの定理を知らなくてもできないことはありませんよ。

$f'(x)=x^2e^x+2xe^x=e^x(x^2+2x)$

$f''(x)=e^x(2x+2)+e^x(x^2+2x)$

$=e^x(x^2+4x+2)$

$f'''(x)=e^x(2x+4)+e^x(x^2+4x+2)$

$=e^x(x^2+6x+6)$

$f^{(4)}(x)=e^x(2x+6)+e^x(x^2+6x+6)$

$=e^x(x^2+8x+12)$

これから

$f^{(n)}(x)=e^x(x^2+a_nx+b_n)$

と推定できます。そして

$f^{(n+1)}(x)=e^x(2x+a_n)+e^x(x^2+a_nx+b_n)$

$=e^x\{x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n)\}$

から，$a_{n+1}=a_n+2$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ なる漸化式が得られるから……

◑ライプニッツの公式

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈高次導関数を求めるライプニッツの公式をムリに覚えることはありません。しかし，べつにめんどうでもないのだから……

◆ 高次導関数を求めるときに，しばしば役に立つのがこの **ライプニッツの公式** です。ムリに覚える必要はありません。しかし，オボエテおいてもいい公式ですよ。

■練習 1. $y=uv$ （u, v はxの関数）のとき

$$y'=uv'+u'v$$

を証明せよ。

（解） $u=u(x)$, $v=v(x)$ と書くと

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{u(x+h)\{v(x+h)-v(x)\}}{h}+\frac{v(x)\{u(x+h)-u(x)\}}{h}\right\}$$
$$=uv'+u'v$$

Q. E. D.

■練習 2. $y=uv$ のとき y'' を求めよ。

（解） $y=uv$

$$\therefore\ y'=uv'+u'v$$
$$\therefore\ y''=(uv''+u'v')+(u'v'+u''v)$$
$$=uv''+2u'v'+u''v \quad \cdots\cdots\boxed{答}$$

■練習 3. $y=uv$ のとき y''' を求めよ。

（解） $y=uv$

$$\therefore\ y''=uv''+2u'v'+u''v$$
$$\therefore\ y'''=(uv'''+u'v'')+2(u'v''+u''v')+(u''v'+u'''v)$$
$$=uv'''+3u'v''+3u''v'+u'''v$$

$\cdots\cdots\boxed{答}$

* * *

◆ 次はいよいよライプニッツの公式です。

■練習 4. $y=uv$ （u, v はxの関数）のとき

$$y^{(n)}={}_n\mathrm{C}_0uv^{(n)}+{}_n\mathrm{C}_1u^{(1)}v^{(n-1)}+{}_n\mathrm{C}_2u^{(2)}v^{(n-2)}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ru^{(r)}v^{(n-r)}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nu^{(n)}v$$

であることを証明せよ。

（ヒント） 数学的帰納法で証明しましょう。なお，$v^{(n)}$ はvのn次導関数を表しています。また，この公式は係数が二項定理とまったく同じですから覚えやすいハズ。なお，

$${}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r+1}={}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$$

を使う必要が出てきます。念のため。

（解） $n=1$ のとき

$$y'=1\cdot uv'+1\cdot u'v=uv'+u'v$$

であるから，明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つとすると

$$y^{(k)}={}_k\mathrm{C}_0uv^{(k)}+{}_k\mathrm{C}_1u^{(1)}v^{(k-1)}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_ru^{(r)}v^{(k-r)}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_ku^{(k)}v$$

$$\therefore\ y^{(k+1)}=({}_k\mathrm{C}_0uv^{(k+1)}+{}_k\mathrm{C}_0u^{(1)}v^{(k)})$$
$$+({}_k\mathrm{C}_1u^{(1)}v^{(k)}+{}_k\mathrm{C}_1u^{(2)}v^{(k-1)})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+({}_k\mathrm{C}_ru^{(r)}v^{(k-r+1)}+{}_k\mathrm{C}_ru^{(r+1)}v^{(k-r)})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+({}_k\mathrm{C}_ku^{(k)}v^{(1)}+{}_k\mathrm{C}_ku^{(k+1)}v)$$
$$={}_k\mathrm{C}_0uv^{(k+1)}+({}_k\mathrm{C}_0+{}_k\mathrm{C}_1)u^{(1)}v^{(k)}$$
$$+({}_k\mathrm{C}_1+{}_k\mathrm{C}_2)u^{(2)}v^{(k-1)}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_ku^{(k+1)}v$$

ところが，一般に

$${}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r+1}$$
$$=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r)}{1\cdot2\cdots\cdots r(r+1)}$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)(r+1)+k(k-1)\cdots\cdots(k-r)}{1.2\cdots\cdots r(r+1)}$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)\{(r+1)+(k-r)\}}{1\cdot2\cdots\cdots r(r+1)}$$

$$=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r(r+1)}$$

$$={}_{k+1}C_{r+1}$$

であるから ${}_kC_0={}_{k+1}C_0$, ${}_kC_k={}_{k+1}C_{k+1}$ を考慮して

$$y^{(k+1)}={}_{k+1}C_0uv^{(k+1)}+{}_{k+1}C_1u^{(1)}v^{(k)}+{}_{k+1}C_2u^{(2)}v^{(k-1)}+\cdots\cdots+{}_{k+1}C_{k+1}u^{(k+1)}v$$

が成り立つ。これは，与えられた等式が $n=k$ のとき成り立つとすれば $n=k+1$ のときにも成り立つことを示している。

ゆえに，一般に成り立つ。　Q. E. D.

*　*　*

◆ では，ライプニッツの公式の応用例をやってみませんか。

練習 5. ライプニッツの公式を用いて

$$y=e^{ax}\sin bx$$

の 2 次導関数を求めよ。

(解) u, v を x の関数とし，

$$y=uv$$

とすると，ライプニッツの公式は

$$y^{(2)}={}_2C_0uv^{(2)}+{}_2C_1u^{(1)}v^{(1)}+{}_2C_2u^{(2)}v$$

で与えられる。ところが

$u=e^{ax}$ とおくと

$$u^{(1)}=u'=ae^{ax},\quad u^{(2)}=u''=a^2e^{ax}$$

$v=\sin bx$ とおくと

$$v^{(1)}=v'=b\cos bx,\quad v^{(2)}=v''=-b^2\sin bx$$

であるから

$$y^{(2)}=e^{ax}(-b^2\sin bx)+2\cdot ae^{ax}\cdot b\cos bx+a^2e^{ax}\sin bx$$
$$=e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\}$$

答　$e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\}$

練習 6. $f(x)=x^3e^x$ の n 次導関数を求めよ。

(ヒント) $u=x^3$, $v=e^x$ とおくか，$u=e^x$, $v=x^3$ とおくか？　どちらでも同じというかもしれませんが，上の公式を使う限り $u=x^3$, $v=e^x$ とおいたほうがいいでしょう。

(解) $f^{(n)}(x)={}_nC_0x^3e^x+{}_nC_1\cdot3x^2\cdot e^x+{}_nC_2\cdot6x\cdot e^x+{}_nC_3\cdot6\cdot e^x$

$$=x^3e^x+3nx^2e^x+3n(n-1)xe^x+n(n-1)(n-2)e^x$$
$$=\{x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)\}e^x\quad\cdots\cdots\text{答}$$

(注) ここまでくると，ライプニッツの公式の有用性がはっきりしてきますね。では，もう 1 つ：

練習 7. $y=x^{n-1}\log x$ のとき $y^{(n)}$ を求めよ。

(ヒント) $u=x^{n-1}$, $v=\log x$ としますと

$$u'=(n-1)x^{n-2}$$
$$u''=(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般に，

$$u^{(k)}=\begin{cases}k\leqq n-1\ \text{のとき}\\ \quad(n-1)(n-2)\cdots(n-k)x^{n-k-1}\\ \quad n\leqq k\ \text{のとき}\ 0\end{cases}$$

また，

$$v'=\frac{1}{x}=x^{-1},\quad v''=(-1)x^{-2},\quad\cdots\cdots$$

一般に，

$$v^{(k)}=(-1)(-2)(-3)\cdots\cdots(-k+1)x^{-k}=-(k-1)!(-1)^kx^{-k}$$

ですから，ライプニッツの公式を用いて

$$y^{(n)}=-[{}_nC_0x^{n-1}\cdot(-1)^n(n-1)!x^{-n}+{}_nC_1(n-1)x^{n-2}\cdot(-1)^{n-1}(n-2)!x^{-n+1}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}(n-1)\cdots1\cdot x^0\cdot(-1)^0 0!x^{-n+(n-1)}]+0\cdot\log x$$

$$=-\frac{(n-1)!}{x}[{}_nC_0(-1)^n+{}_nC_1(-1)^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}(-1)]$$

$$=-\frac{(n-1)!}{x}[\{(-1)+1\}^n-1]$$

$$=\frac{(n-1)!}{x}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$ の極限と蛇足

◈これは簡単そうにみえてめんどうです。さあ，どうやるべきか。まず，30分は考えてみてもらいたいものだ。

◆ ≪$f(x)=\sin x$ のとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

の極限値を求めよ≫

といった問題はよく出題されています。ちょっとやってみますと

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-2\sin a+\sin(a-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(2\sin a\cos h-2\sin a)$$

$$=2\sin a\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h^2}$$

$$=2\sin a\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h^2(\cos h+1)}$$

$$=2\sin a\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\left(-\frac{1}{\cos h+1}\right)$$

$$=2(\sin a)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sin a$$

ハイ，できました。このように特別な関数形を与えなかったらどうしようか，もちろん，$f(x)$ の微分可能性といったことは満足されているとして，ですよ。

◆ ある人はこうやるかも知れませんね。

$$与式=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f'(a)-f'(a))=0$$

しかし，これがまちがいであることは，上の $f(x)=\sin x$ の場合から明らかなことです。これは困ったことになったわい。

*　*　*

◆ 今まで何度もでてきたロピタルの定理はどうだろう。

$$与式=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

オヤ，又もや，不定形 $\frac{0}{0}$ であるから，又，ロピタルの定理を使って

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$$

$$=\frac{f''(a)+f''(a)}{2}=f''(a)$$

ナルホド，コレデ形式的ニハデキタノダ。

*　*　*

◆ こんな方法もあります。

実は，平均値の定理を拡張すると

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta_1 h)\quad(0<\theta_1<1)$$

又，$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a-\theta_2 h)\quad(0<\theta_2<1)$$

$$\therefore\quad 与式=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+\theta_1 h)+f''(a-\theta_2 h)}{2}$$

θ_1，θ_2 は h の関数ですが，いずれも(0，1)が含まれていますから

$$\lim_{h\to 0}(\theta_1 h)=0,\quad \lim_{h\to 0}(\theta_2 h)=0$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$$

となって，おなじ結果が得られました。

*　*　*

◆ 平均値の定理を拡張した関係式の証明は省略しましたが，余裕があったら考えてみませんか。