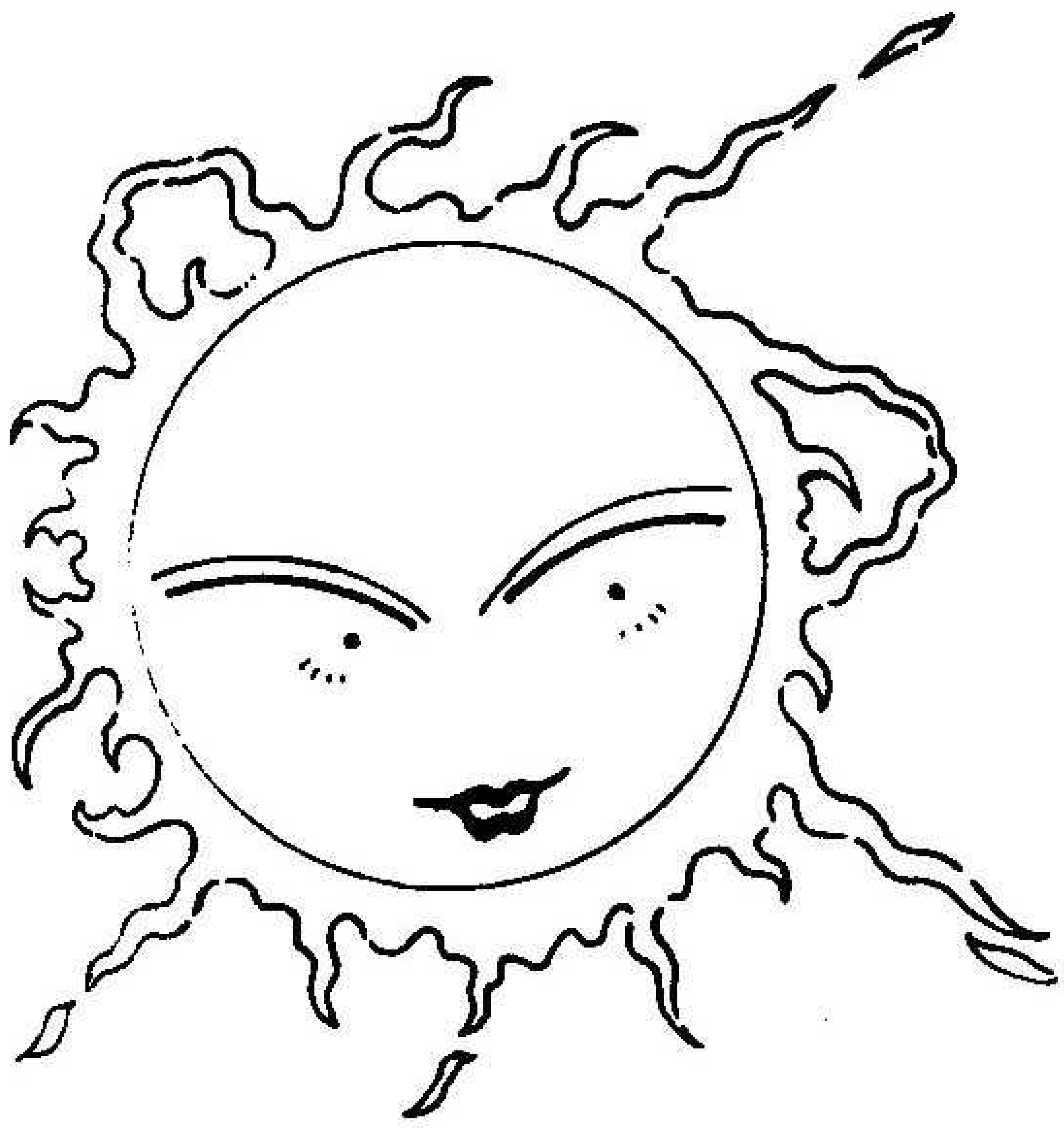
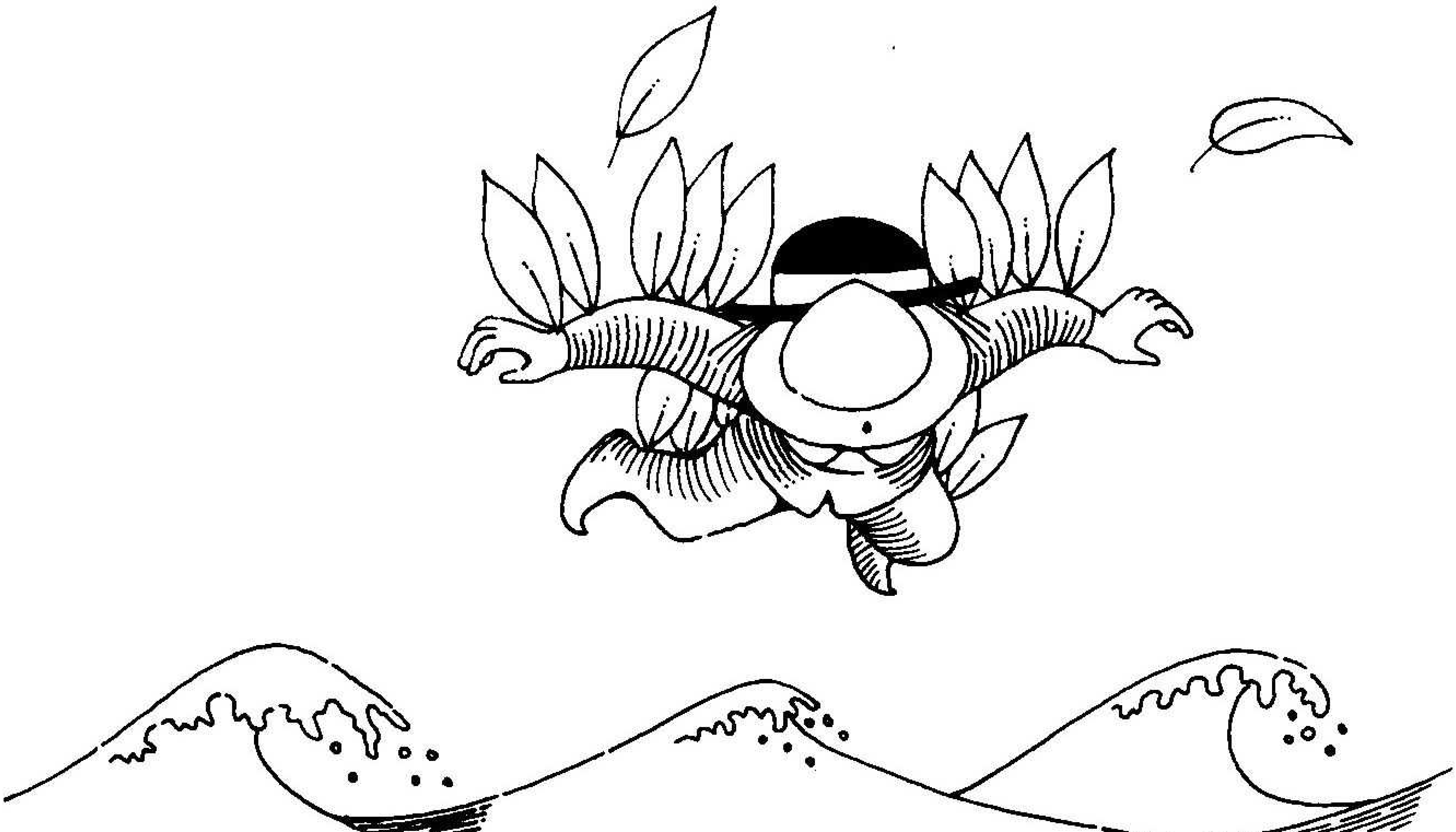
第1章

極　限





① 数列の極限とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆数列の極限を求めるコツは，まず，小学生にかえってやってみることだ。そして，それではできないというとき高校生になるべし。

1/10

◆ 数をある規則によって並べたもの

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

を **数列** といいます。もちろん，数列はその規則によってきまりますから，a_n は n の関数です。だから

$$a_n=f(n)$$

の形に表されるでしょう。さて，

数列の極限：$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} f(n)$ がある≪有限で≫≪確定した≫値に近づくとき，その値を数列 $\{a_n\}$ の極限値

というのです。そして，極限値があるとき，この数列は **収束する** といい，極限値がないとき，**発散する** といいます。

こんな抽象的なことをいってもピンときませんね。では，具体的な問題をやってみようではありませんか。

1/10

練習 1. 数列 $\left\{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right\}$ の収束・発散について調べ，収束するならば，その極限値を求めよ。

ヒント　要するに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

が存在するかどうか。もっと，具体的にいうと，数列 $\left\{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right\}$ が，有限で確定した値に近づくかどうか，というのです。ところで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=1\cdot2=2$$

答　収束，2

1/10

練習 2. 次の数列は収束するか，収束するならば，その極限値を求めよ。

$$\frac{5}{1},\ \frac{8}{2},\ \frac{11}{3},\ \frac{14}{4},\ \cdots\cdots$$

解　この数列の分母は初項1，公差1の等差数列であるから，その第 n 項は n である。また，分子は初項5，公差3の等差数列であるから，その第 n 項は

$$5+(n-1)\cdot3=3n+2$$

である。したがって，与えられた数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=\frac{3n+2}{n}$$

で与えられ，したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3$$

である。

答　収束する。極限値 3

1/10

練習 3. 次の数列は収束するか，発散するか吟味せよ。収束するならば，その極限値を求めよ。

$$1,\ -3,\ 3^2,\ -3^3,\ \cdots\cdots$$

解　第 n 項を a_n とすると

$$a_n=1\cdot(-3)^{n-1}$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot3^{n-1}$$

であるから，$n\longrightarrow\infty$ のとき，符号は $+$，$-$ を交互にとり，つまり振動し，その絶対値は無限に大きくなる。

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty\ \text{(発散)}$$

答　発散する。

ナニゴトによらず，このように具体的に考えてみるのがコツです。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

$\frac{1}{10}$

D練習 4. 次の条件を満たす数列の例を1つずつあげよ。

(1) すべての n について $a_n<0$ で
$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

(2) すべての n について $a_n<b_n<1$ で
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=1$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は収束しなくて
$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^2=1$$
（阪大）

ヒント (1) $a_n=-\frac{1}{n}$ でもいいし，$a_n=-\frac{1}{n!}$ でもいいし，$a_n=-\frac{1}{n(n+1)}$ でもいい，いろいろありましょう。

(2) $a_n=1-\frac{1}{n}$，$b_n=1-\frac{1}{n^2}$

はどうだろう。$n=1$ のとき $a_n=b_n$ となるから，ダメだ。じゃ，
$$a_n=1-\frac{1}{n+1},\ b_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$
はどうだ。これならいい。ちょっとした細工だなあ。しかし，これでもいいじゃないか。
$$a_n=1-\frac{2}{n},\ b_n=1-\frac{1}{n}$$
こうしてみると，いくらでも作れるようだな。

(3) $a_n=(-1)^n$ なんかどうだ。これは振動するが収束しない。しかし，$a_n{}^2=(-1)^{2n}=1$ だから，もちろん1に収束することがわかる。$a_n=\cos n\pi$ はどうだ？　いいようだな，そんなら $a_n=\sec n\pi$ だっていいわけだ。いろいろできそうだなあ。

$\frac{1}{10}$

練習 5. 次の事項は正しいか。正しくないときには，それが成り立たない例をあげよ。

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ ならば，数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ とは同一の極限値に収束する。
（静岡大）

ヒント 正しくないのです。例えば，
$$a_n=1+n,\ b_n=\frac{n}{n+1}+n$$
ならば
$$a_n-b_n=\frac{1}{n+1}$$
ですから $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ ですが，$\lim_{n\to\infty} a_n$ も $\lim_{n\to\infty} b_n$ も発散してしまう。

このようなものはいくらでも考えられましょう。例えば
$$a_n=\frac{2^n}{1+2^n}+2^n,\ b_n=\frac{3^n}{1+3^n}+2^n$$
もそうです。

では，もう1つ：——

$\frac{1}{10}$

D練習 6. 次の事がらは正しいか。正しくないものは，その成り立たない例をあげよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n{}^2=a^2$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n=a$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$ ならば
$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=-\infty$$
（東大）

ヒント (1) 正しくありません。例えば $a_n=\frac{1-n}{n}$ のとき
$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{n}\right)^2=1$$
ですが，$\lim_{n\to\infty} a_n=-1$ となります。このほかにも反例を考えてみてください。

(2) 正しい。

*　*　*

◆ 一般に，ここにあげたようなものはキラワレル。というのも，きまった考え方，というものがないからでしょう。運がわるいと，なかなか反例が思い浮かばない，といったこともあります。

しかし，あまりめんどうに考えずに，いわば，算術的に考えてみるのがコツというものです。ともあれ，しっかりやってくださいよ。

*　*　*

9

○数列の極限の求め方

1回目 年 月 日
2回目 年 月 日
3回目 年 月 日

◈数列の極限を求めるにあたって，まず，タイプをはっきりつかむことが大切。その上で，各個撃破の実をあげるべし。

◈ 数列の極限を求める問題は大きく分けて2つあります。1つは

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} k>0: & +\infty \\ k=0: & 1 \\ k<0: & 0 \end{cases}$$

を使うものです。いや，この3つをオボエナクテモカマワナイ!!

$k>0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$$

だけで十分，$k<0$ なら

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-k}} = 0$$

となるからです。

もう1つは

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1<x & : \ +\infty \\ x=1 & : \ 1 \\ -1<x<1 & : \ 0 \\ x=-1 & : \ 振動\ (\pm 1) \\ x<-1 & : \ 振動\ (\pm\infty) \end{cases}$$

です。どんな数列もこの2つのいずれかにもっていけると考えてよいのです。では，具体的な練習をしようではありませんか。

■練習 1. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n-4}{n^2+n+1}$$

（ヒント） n^2 で分母・分子を割ると

$$与式 = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{2}{1} = 2 \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注） 分母の **次数のもっとも大きいもの** で割るのがコツです。

■練習 2. 次の極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3}{n^4}$$

を求めよ。 （福島大）

（解） $$与式 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 3. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{1^2+3^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2}$$

（解） $$与式 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(4n^2-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{4-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注） 定積分を使っても求められますが，それは（☞ p. 220）を参照してください。

* * *

◈ 次は第2のタイプです。

■練習 4. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{5^n-1}$ を求めよ。

（解） $$与式 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$\boxed{答}$ 0

（注） このタイプも分母の次数のもっとも大きいもので割るのがコツです。では，もう1つ：——

■練習 5. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n}$ を求めよ。

$\boxed{答}$ 1

* * *

◆ では，やや総合的なものを練習してみませんか。

練習 6. 次の極限値

1/11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+\cdots\cdots+n\cdot1}{n^3}$$

を求めよ。

(解) 分子 $=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\{2n-(2k-1)\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+1)k\}$$

$$=-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$+(2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore\ \text{与式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}$$

答 $\frac{1}{3}$

(注) 積分を使ってもできます。(☞ p. 220)

1/11

練習 7. $S_n=1+2+\cdots\cdots+n$

$T_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$

とおくとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$$

(解) $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

答 $\frac{1}{2}$

＊　＊　＊

人

◆ 数列の極限というと，すぐ頭に浮かぶのは，漸化式で与えられた数列の極限でしょう。しかし，それは第 n 項を求めてしまえば，あとは極限としてのめんどうさはほとんどないのがふつう。だから，それぞれの項目を参照して，練習してください。しかし，ひとつもやらないというのは，いささかえこひいきの気がしますから，ここでやっておくとしましょう。

1/13

練習 8. 数列 $\{x_n\}$ において

$$x_1=a,\ \ x_{n+1}=a+\frac{1}{a}x_n\ \ (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

の関係がある。ただし，a は 0 でない定数とする。

(1) x_n を a と n の式で表せ。

(2) $n\longrightarrow\infty$ のとき，$\{x_n\}$ が収束するための a の値の範囲および $\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。　　(東京学芸大)

(ヒント)　$x_{n+1}=\frac{1}{a}x_n+a$　……①

の**平衡値**（☞「基礎解析」p. 144）を求めてみますと

$$x=\frac{1}{a}x+a\quad\text{を解いて}\quad x=\frac{a^2}{a-1}$$

が得られます。しかし，$a=1$ なら困る。これはべつにやるとしよう。

①の両辺から $\frac{a^2}{a-1}$ を引いて変形しますと

$$x_{n+1}-\frac{a^2}{a-1}=\frac{1}{a}\left(x_n-\frac{a^2}{a-1}\right)$$

ゆえに数列 $\left\{x_n-\frac{a^2}{a-1}\right\}$ は初項 $x_1-\frac{a^2}{a-1}$ $=a-\frac{a^2}{a-1}=\frac{-a}{a-1}$, 公比 $\frac{1}{a}$ の等比数列だから

$$x_n-\frac{a^2}{a-1}=\frac{-a}{a-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ x_n=\frac{a^2}{a-1}-\frac{a}{a-1}\cdot\frac{1}{a^{n-1}}$$

$$=\frac{a^2}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)$$

$a=1$ のとき，等差数列となって

$$x_n=n$$

$x_n=a+n-1$

(2) ここでやっと極限のお出ましだ。

$\left|\frac{1}{a}\right|<1$ つまり $|a|>1$, つまり $a>1$ または $a<-1$ のとき $\{x_n\}$ は収束し，その極限値は $\frac{a^2}{a-1}$ となります。

◐ 発散する数列と級数とは

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈発散する数列や級数をやったって仕様ないじゃありませんか，と，キミはいうかもしれない。しかし，実は役に立つのですよ。

◆ 数列 $\{a_n\}$ が $n \longrightarrow \infty$ において，有限なただ1つの値に限りなく近づくとき，**収束する** といい，収束しないとき **発散する** といいます。だから，発散するのは大きく分けて2つあります。1つは有限な値に近づかないとき，もう1つは有限ではあるがただ1つでないとき，です。

では，具体的な練習をやってみませんか。

練習 1. $\lim_{n\to\infty}(3^n+4^{-n})$ は収束するか。

(解) $\lim_{n\to\infty} 3^n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty} 4^{-n}=0$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty}(3^n+4^{-n})=+\infty$ （発散）

答　発散する

練習 2. $\lim_{n\to\infty} n(-1)^n$ は収束するか。

(ヒント) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ を入れてみると

$-1,\ +2,\ -3,\ +4,\ \cdots\cdots$

絶対値は無限に大きくなり，符号は交互に＋と－をとります。このとき $\pm\infty$ に **振動する** といいます。もちろん，発散です。

練習 3. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^n$ が収束するのはどんな場合か。

(解)
$$-1<\frac{x}{x+1}\leqq 1$$
のとき収束する。左半分から
$$(x+1)(2x+1)>0$$
$\therefore\ x>-\dfrac{1}{2}$ あるいは $x<-1$ ……①

右半分から
$$\frac{x}{x+1}\leqq 1$$
$\therefore\ x+1>0$　　$\therefore\ x>-1$ ……②

①，②より求める範囲は

$x>-\dfrac{1}{2}$ ……答

である。

＊　＊　＊

◆ 次に，数列の和，つまり級数については，第 n 項までの和 S_n について，数列 $\{S_n\}$ が収束するとき，この無限級数が収束するといい，$\{S_n\}$ が発散するとき，この無限級数が発散するといいます。では：――

練習 4. 無限級数

$1+2+3+\cdots\cdots$

は発散することを示せ。

(解) 第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(n+1)=+\infty$$

ゆえに，この無限級数は発散する。

練習 5. 無限級数

$1+(-2)+3+(-4)+\cdots\cdots$

は発散することを示せ。

(解) 第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=1+(-2)+3+(-4)+\cdots$（第 n 項まで）

で，$n=2m$ のとき

$$S_n=S_{2m}=1+(-2)+3+(-4)+\cdots$$
$$\cdots+(2m-1)+(-2m)$$
$$=(-1)+(-1)+\cdots\cdots+(-1)=-m$$

$n=2m+1$ のとき

$$S_n=S_{2m+1}=(-m)+(2m+1)=m+1$$

したがって，この無限級数は発散（振動）する。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習をしましょう。

練習 6. 一般項が次の式で表される数列の
1/15
収束，発散を調べよ。

$$a_n=\frac{x^{n+1}+2x^n-3}{x^{n+2}-4x^n+9}$$　（長崎大）

（解） $|x|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$$　（収束）

$x=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+2-3}{1-4+9}=0$$　（収束）

$x=-1$ のとき

$$\begin{cases} n：偶数 \quad a_n=\dfrac{-1+2-3}{1-4+9}=-\dfrac{1}{3} \\ n：奇数 \quad a_n=\dfrac{1-2-3}{-1+4+9}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

結局いずれにしても $-\frac{1}{3}$ である。（収束）

$x=2$ のとき

$$a_n=\frac{2^{n+2}-3}{9}$$　（発散）

$x=-2$ のとき

$$a_n=-\frac{1}{3}$$　（収束）

$|x|>1$，$x\neq\pm2$ のとき

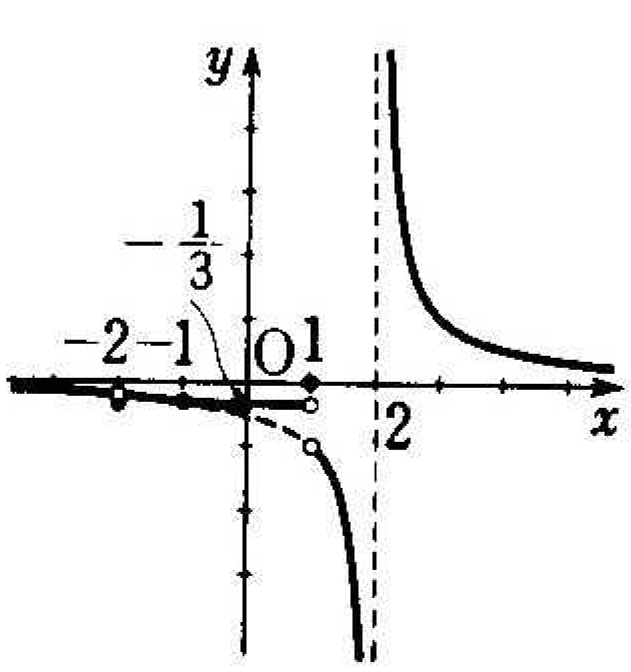
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+2-\dfrac{3}{x^n}}{x^2-4+\dfrac{9}{x^n}}=\frac{1}{x-2}$$　（収束）

ゆえに $x=2$ のとき発散，$x\neq2$ のとき収束する。

（注） $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ のグラフをかいてみると右のようになります。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}a_n$$

とおくと $f(x)$ は $x=-2$，1，2 で不連続になりますが $x=2$ を除いて a_n は収束しています。発散と不連続を混同しないようご注意ありたし。



練習 7. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$，……などを用いて
9

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ は発散することを示せ。

（ヒント） この問題は意味がわからなくて解けない人が多いものです。この式を分けて

$$1\left|\frac{1}{2}\right|\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left|\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right|\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{16}\Big|+\cdots\cdots$$

とします。すると，第1群は1，第2群は $\frac{1}{2}$，次は $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ で $\frac{1}{2}$ より大，次は $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ といったぐあいに，1個，1個，2個，4個，……とまとめてゆくと，第3群以下はすべて $\frac{1}{2}$ より大であることがわかります。これを無限に加えていけば $+\infty$ に発散することは確かです。なお $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ の発散することは積分を使えばスゴク簡単にできます。（☞ p. 217 を参照してください）

1/16

練習 8. 次の無限級数

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$$

は発散することを証明せよ。　（都立大）

（解） 第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$$
$$=-\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots$$
$$\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\}$$
$$=-(1-\sqrt{n+1})=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=+\infty$$

ゆえに，この無限級数は発散する。

（注） 練習8. のように第 n 項までの和が求められるときにはべつにめんどうはありませんが，練習7. のように和が求められないときは一般に困ってしまうのだ。

l

①　無限級数の和とは何か

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆有限な世界に住む有限な人間が無限を語ることのできるのはどうしてだろうか。考えてみるとふしぎではあるまいか。

◆　無限級数 $\{a_n\}$：

$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$

が与えられたとき，はじめの n 項の和

$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

を **部分和**（ぶぶんわ）といいます。そして

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が有限で確定した値 S

をとるとき，S のことをこの **無限級数 $\{a_n\}$ の和** といいます。また，記号

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

で表すこともあります。だから，無限級数の和を求めるには，まず，部分和 S_n を求めること，次に，その極限を求めること，これを正しく守ることが大切なのです。

-1/10

■練習 1. $1+(-2)+3+(-4)+\cdots\cdots$ は収束するか。

ヒント　まず，部分和を求めましょう。

$$S_{2m}=1+(-2)+3+(-4)+\cdots\cdots+(2m-1)+(-2m)$$
$$=(-1)+(-1)+\cdots\cdots+(-1)=-m$$
$$S_{2m+1}=-m+(2m+1)=m+1$$

ですから，

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ は $\pm\infty$ に振動（発散）

する。ゆえに和は存在しないのです。

答　発散

（参考） S_n を1つの式で表すこともできます。すなわち，

$S_n=1+(-2)+3+(-4)+\cdots\cdots$（第 n 項）

$=1+2(-1)+3(-1)^2+\cdots+n(-1)^{n-1}$

これは循環級数（☞ p. 28）です。だから，

$$\begin{array}{rl} S_n= & 1+2(-1)+3(-1)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(-1)^{n-1} \\ -)\ (-1)S_n= & \quad 1(-1)+2(-1)^2+\cdots\cdots+(n-1)(-1)^{n-1}+n(-1)^n \\ \hline 2S_n= & 1+(-1)+(-1)^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}-n(-1)^n \\ = & \dfrac{1\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}-(-1)^n n \end{array}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1-(-1)^n-2n(-1)^n}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\{1-(2n+1)(-1)^n\}$$

となります。ナルホド，これなら

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$　（振動）

となるわけだ。

*　*　*

◆　では，次に和の求められる場合をやってみましょう。もっとも典型的なのは無限等比級数の場合です。

1/10

■練習 2. $a+\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{3^2}+\cdots\cdots$ の和を求めよ。

（解）　第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}\longrightarrow\frac{3}{2}a\quad(n\longrightarrow\infty)$$

（注）　もちろん，公式からすぐ

$$S_\infty=\frac{a}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}a$$

としてもかまわないのです。

1/10

■練習 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ を求めよ。

（解）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\longrightarrow\frac{1}{4}$$

$(n\longrightarrow\infty)$　答　$\dfrac{1}{4}$

*　*　*

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。

練習 4. 次の無限級数の収束・発散について調べよ。

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots$$

（都立大）

（解） 第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$$

$$=\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\}$$

$$=-(1-\sqrt{n+1})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$$

ゆえに，この無限級数は $+\infty$ に発散する。

練習 5. 数列 $\frac{1}{2!}$, $\frac{2}{3!}$, $\frac{3}{4!}$, …… の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) 数学的帰納法によって $1-S_n$ を計算せよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。（滋賀大）

（解） (1) $n=1$ のとき

$$1-S_1=1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2!}$$

(2) $n=k$ のとき

$$1-S_k=\frac{1}{(k+1)!}$$

と仮定すると

$$1-S_{k+1}=1-S_k-\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{(k+2)!}$$

ゆえに，一般に

$$1-S_n=\frac{1}{(n+1)!}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。

(2) $\lim_{n\to\infty}(1-S_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=1$$

答 1

（注） 「数学的帰納法によって～を計算せよ」という表現はあまりしないようだ。こんなときには，常識的に考えてみることだ。では，もう1つ：

練習 6. $g(x)=\frac{x}{1+|x|}$

$$f(x)=g(x+1)-g(x)$$

なるとき，次の無限級数の和を求めよ。

$$f(x)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots\cdots$$

（東京工大）

（ヒント） $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x-k)$

とおきますと

$$f(x-k)=g(x-k+1)-g(x-k)$$

ですから，

$$\sum_{k=0}^{n}f(x-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}g(x-k+1)-\sum_{k=0}^{n}g(x-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}g(x-(k-1))-\sum_{k=0}^{n}g(x-k)$$

$$=\sum_{k=-1}^{n-1}g(x-k)-\sum_{k=0}^{n}g(x-k)$$

$$=g(x+1)+g(x)+\cdots+g(x-(n-1))$$
$$-\{g(x)+g(x-1)+\cdots+g(x-n)\}$$

$$=g(x+1)-g(x-n)$$

$$=\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1-|x-n|}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

$$=\frac{x+1}{1+|x+1|}-\lim_{n\to\infty}\frac{x-n}{1+|x-n|}$$

$$=\frac{x+1}{1+|x+1|}+1\quad\cdots\cdots\text{答}$$

⑪ 分数数列の和の極限

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆分数数列の和はキマッタことをキマッタようにやるだけです。そのキマリをまずオボエルのだ!!

◆ 分数数列の和の極値を求めるには，

第 n 項までの和 S_n を求め，

ついで $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求める

のです。そして，S_n を求めることは基解の問題なのですから，微積としてのめんどうさはまったくありません。では，これです。

■**練習 1.** 次の無限級数の和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

(解) 第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

答　1

■**練習 2.** 次の無限級数の和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

(解) 第 n 項の分母は

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots\cdots+n(n+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots\cdots+n(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{3}{4}$$　……答

(注) 次のように書くと少しラクです。

$$S_n=\cdots\cdots=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\longrightarrow\frac{3}{4}\ (n\longrightarrow\infty)$$　答　$\frac{3}{4}$

しかし，$\lim_{n\to\infty} S_n\longrightarrow\frac{3}{4}$ と書いてはいけませんよ。記号を混同しないように!!

*　*　*

◆ 分数数列の変わり種を2つやっておきましょう。

■**練習 3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}$ を求めよ。

(ヒント) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}$ は無限級数の和を表す記号です。

さて，まず $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ を求めなければなりません。

$$\frac{1}{2!}=\frac{2-1}{2!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}$$

$$\frac{2}{3!}=\frac{3-1}{3!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

など。一般に

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

ですから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}\longrightarrow 1\ (n\longrightarrow\infty)$$

答　1

(注) こうしてみるとわかるように，微積としてのめんどうさは，ここにはないのだ!!

◆ では，もう1つ：──

練習 4. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6}+\cdots$(無限項)

の和を求めよ。　(東京医歯大)

(解) 第n項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+3)-1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k)(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k)(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{18}=\frac{7}{36}$$

答　$\dfrac{7}{36}$

*　*　*

◆ では，やや総合的な練習を：──

練習 5. 次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するものはその和を求めよ。

$$\frac{x}{1\cdot(x+1)}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{x}{(2x+1)(3x+1)}+\cdots\cdots+\frac{x}{\{(n-1)x+1\}(nx+1)}+\cdots\cdots\quad(x\neq 0)$$

(東京電機大)

(ヒント) 第n項までの和を S_n としますと

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{nx+1}\longrightarrow 1\ (n\longrightarrow\infty)$$

ゆえに収束し，その和は1であることがわかります。では，もう1つ：──

練習 6. 初項から第n項までの和が $\dfrac{n^2+7n}{2}$ で与えられる数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するものは，その和を求めよ。

(イ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$

(ロ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$　(愛知工大)

(ヒント) (1) 第n項までの和がわかっているとき，その第n項を求めるのは次の3段階でやるのでしたね。

第1は，初項を求めること。これは

$$a_1=S_1=\frac{1^2+7\cdot 1}{2}=4$$

第2は，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+7n}{2}-\frac{(n-1)^2+7(n-1)}{2}=n+3$$

第3は，これは $n=1$ とおいてみると4になるのですから，一般に

$$a_n=n+3\quad\cdots\cdots\text{答}$$

となります。そこで(2)の(イ)の第n項までの和を T_n としますと

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)(k+4)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\longrightarrow\frac{1}{4}\ (n\longrightarrow\infty)$$

(ロ)は分母を有理化すると，第n項までの和は $\sqrt{n+4}-2$ となって発散することがわかります。これは分数とは名ばかり，べつにめんどうではありません。

① 無限等比級数の和で表された関数

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈無限に加えることはできないが，加えてしまうことはできる，という。このふしぎさ，キミはどう思う？

◆ 無限等比数列の和は収束する場合に限りある関数を表し，意味をもつのです。ここではそのような関数について考えてみることにしましょう。

ところで，無限等比級数の収束するのは2つの場合があります。すなわち，

無限級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots$ は

(1) $|r|<1$ のとき収束し，和は $\dfrac{a}{1-r}$

(2) $a=0$ のとき収束し，和は 0

となります。この(2)の場合は r が何であろうとも成り立ち，ウッカリすると忘れてしまう。これが困るのです。

では，これを：――

■練習 1. 無限等比数列の和で表される関数

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots$$

のグラフをかけ。　（一橋大）

ヒント　初項 x^2，公比 $\dfrac{1}{1+x^2}$ の等比数列ですから，

(i) $x\neq 0$ ならば

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right|<1$$

ゆえに収束します。そして，その和は

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}$$

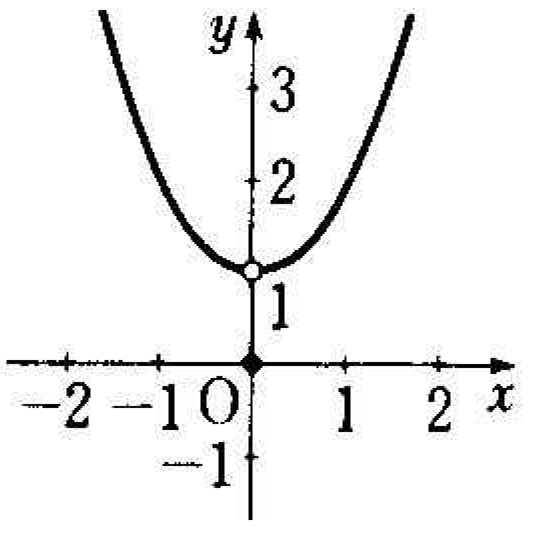
$$=\frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)-1}=1+x^2$$

(ii) $x=0$ のときは公比 1，しかし，初項 0，みんな 0，したがって，

$$f(0)=0$$

となります。

かくして求めるグラフは下の通り。



（注） こんな変なことが起こるわけが気になって仕方がない，という人のため，ひとこと。

$f(x)$ の部分和

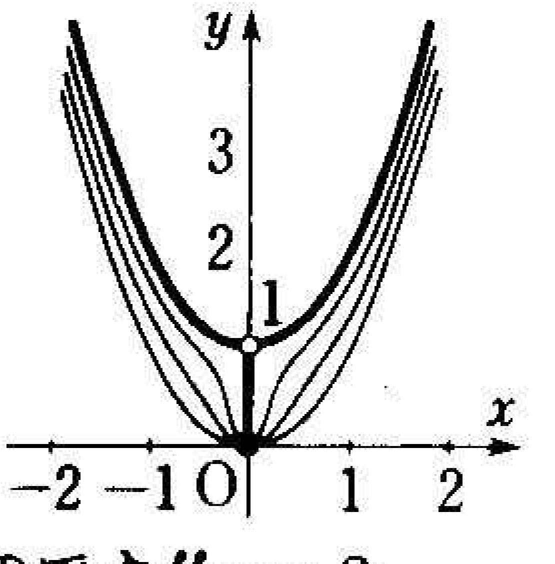
$$f_1(x)=x^2$$

$$f_2(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f_3(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f_4(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}$$

などのグラフをかいてみると下の通り。つまり，しだいにやせてゆく。n が800万にもなると (0, 1) のところから垂れ下がったようになる。そして，やがて $n\longrightarrow\infty$ になると，この細い部分が音もなく切れて，ポタリと下にしたたるのです!!……？



■練習 2. 無限級数

$$f(x)=1+x(1-x)+x^2(1-x)^2+\cdots\cdots$$

のグラフをかけ。

（解） $f(x)$ が収束するためには

$$|x(1-x)|<1$$

$$\therefore\ -1<x(1-x)<1$$

これを解いて

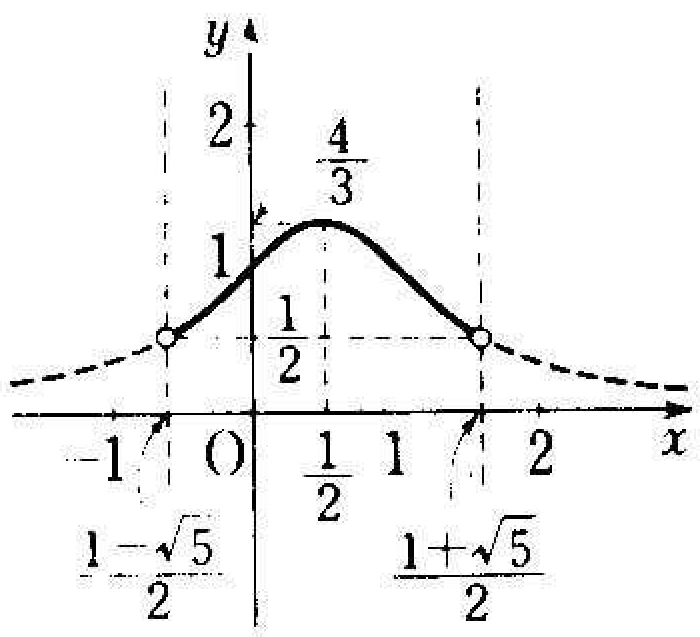
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

そして，このとき

$$f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}$$

$$=\frac{1}{x^2-x+1}$$

であるから，グラフは次のようになる。



（注） このグラフは全体としてなだらかな曲線ですが

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

で突然切れてしまうのも妙なもの。

$$\sum_{k=1}^{n}\{x(1-x)\}^{k-1}$$

の n を 1, 2, 3, …… としてグラフをかいてみると，おもしろい結果が得られるでしょう。

練習 3. 次の無限級数で与えられる関数のグラフをかけ。

$$f(x)=\sin^2x+\frac{\sin^2x}{1+\sin^2x}+\frac{\sin^2x}{(1+\sin^2x)^2}+\cdots\cdots$$

（横浜国大）

（ヒント） $\sin x \neq 0$ つまり $x\neq n\pi$ のときには

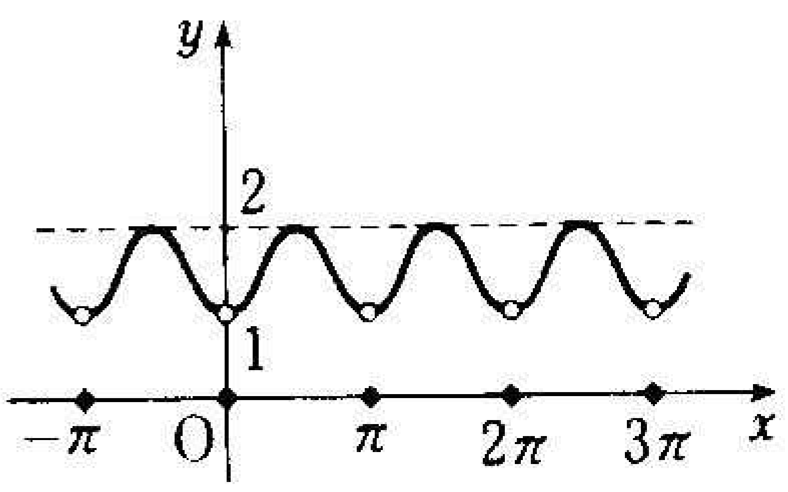
$$f(x)=1+\sin^2x=1+\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{3-\cos 2x}{2}$$

$\sin x=0$ つまり $x=n\pi$ のときには

$f(x)=0$

ですから，グラフは右のようになります。



ところが，ふしぎとたいていの人は，計算はキチンと正しくやるのに，グラフをかく段階になって $\sin x=0$ になる点を忘れてしまうのです。ご注意ありたし。

次も同じく，計算はできるのに，グラフをかけない人が多いものです。では，やってみませんか。

練習 4. $f(x)$

$$=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}+\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots$$

のグラフの概形をかけ。ただし，$x\geqq 0$.

（ヒント） 初項 $\sqrt{x}$，公比 $\frac{1}{1+x^2}$ の無限等比数列の和ですから

$x\neq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{\sqrt{x}(1+x^2)}{x^2}$$

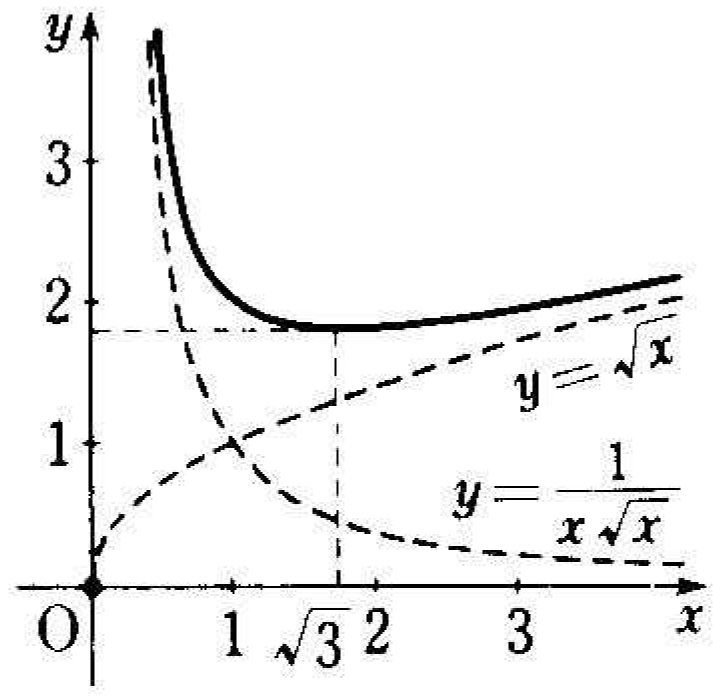
$x=0$ のとき

$$f(x)=0$$

さて，$f(x)=\frac{\sqrt{x}(1+x^2)}{x^2}$ のグラフは

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}+\sqrt{x}$$

と分けられますからグラフは右の通りになります。



そこで，極値を求めるために微分してみますと

$$f'(x)=\frac{x^2-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

ゆえに $x=\sqrt{3}$ で，極小値

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}}}+\sqrt[4]{3}\ (\fallingdotseq 1.8)$$

をとるのです。

* * *

◆ 無限等比級数の和で表される関数で大切なことは，収束する条件を忘れないこと。それから，初項が 0 の場合に特に注意することです。では，最後にもう 1 つ：

練習 5. 第 k 項が実数 $\frac{(x-1)\sqrt{x+2}}{x^k}$ で表される数列がある。

(1) 初項から第 n 項までの和 S_n をなるべく簡単な式で表せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}S_n$ が存在するための x の範囲を求めよ。

(3) (2)の極限値を $f(x)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

（群馬大）

（ヒント）

$$f(x)=\begin{cases}-2\leqq x<-1,\ 1<x \text{ で } \sqrt{x+2}\\ x=1 \text{ で } 0\end{cases}$$

循環小数とは何か

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈循環小数は公式としてオボエルよりは，あくまで無限等比数列の和としてとらえるのがコツです。

◆ 循環小数に関する具体的な問題は2つあります。1つは分数を循環小数で表すこと，もう1つは循環小数で表された数を分数で表すことです。では，さっそくやってみませんか。

練習1. $\dfrac{1}{3}$を循環小数で表せ。

(ヒント) 1を3で割ってみますと，右に示すように

0.333……

となります。このときこの小数を$0.\dot{3}$で表し，循環小数というのです。

$$\begin{array}{r} 0.333\cdots\cdots \\ 3\,\overline{)\,10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \cdots \end{array}$$

練習2. $\dfrac{4}{11}$を循環小数で表せ。

(ヒント) 4を11で割ってみますと，右に示すようです。つまり

0.363636……

このとき，これを$0.\dot{3}\dot{6}$で表すのです。そして，このくり返す部分を循環節（じゅんかんせつ）というのです。

$$\begin{array}{r} 0.3636\cdots\cdots \\ 11\,\overline{)\,40} \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 40 \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 4 \\ \cdots \end{array}$$

練習3. $\dfrac{41}{333}$を循環小数で表せ。

[答] $0.\dot{1}2\dot{3}$

(注) 0.123123123……のとき$0.\dot{1}2\dot{3}$で表します。$0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}$と書く人が少なからずいますが，これはマチガイ!!

*　*　*

◆ 次は，循環小数を分数で表すことをやってみましょう。これは，結局無限等比級数の和を求めることになります。

練習4. 循環小数$0.\dot{7}$を分数で表せ。

(解) $0.\dot{7}=0.777\cdots\cdots$

$=0.7+0.07+0.007+\cdots\cdots$

$=\dfrac{0.7}{1-0.1}=\dfrac{0.7}{0.9}=\dfrac{7}{9}$

[答] $\dfrac{7}{9}$

(注) 次のようにやることもできます。

$x=0.\dot{7}$

とおくと

$10x=7.\dot{7}=7+x$

$\therefore\ 9x=7\quad\therefore\ x=\dfrac{7}{9}$

しかし，これにはちょっと欠点があります。というのは，例えば

$x=777\cdots\cdots$

という数を考えてみましょう。

$10x=777\cdots\cdots=x$

$\therefore\ 9x=0\quad\therefore\ x=0$

これは明らかにおかしい。つまり，収束しないのに $=x$ とおいたのがいけないのです。だから，上の解は$0.\dot{7}$が収束する，という仮定のもとにやった，ということになりましょう。

練習5 循環小数$0.\dot{1}\dot{2}$を分数で表せ。

(解) $0.\dot{1}\dot{2}=0.121212\cdots\cdots$

$=0.12+0.0012+0.000012+\cdots\cdots$

$=\dfrac{0.12}{1-0.01}=\dfrac{0.12}{0.99}=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$

[答] $\dfrac{4}{33}$

練習　循環小数0.61を分数で表せ。

[答] $\dfrac{11}{18}$

*　*　*

◆ 次に循環小数の変わりだねを：――

1/25

練習 7. 3 進法の循環小数 $0.\dot{1}\dot{2}$ を 10 進法の分数で表せ。

ヒント 3 進法の $0.\dot{1}\dot{2}$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}}+\frac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

答 $\frac{5}{8}$

注 $\frac{5}{8}$を小数で表すと 0.625 となります。つまり 3 進法では循環小数でも10進法では循環小数でなくなるのも，思えばふしぎ!!

1/25

練習 8. 10進法の 0.4 を 3 進法で表せ。

ヒント $0.4=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\cdots$

と表せたとしますと，両辺に 3 を掛けて

$$1.2=a_1+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots\cdots$$

ゆえに，$a_1=1$ で，そして

$$0.2=\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3^2}+\frac{a_4}{3^3}+\cdots\cdots$$

両辺に 3 を掛けて

$$0.6=a_2+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{3^2}+\cdots\cdots$$

ゆえに，$a_2=0$，そして両辺に 3 を掛けると

$$1.8=a_3+\frac{a_4}{3}+\frac{a_5}{3^2}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_3=1$$

そして，……

答 3 進法で $0.\dot{1}01\dot{2}$

注 わかってしまえば，もっと楽に，機械的にできますが，それほどの必要もないでしょう。

*　　*　　*

◆ では，次に，やや総合的な問題をやってみませんか。

1/26

練習 9. 次の計算の結果を循環小数で表せ。

$$0.\dot{3}0\dot{5}\div 0.3\dot{0}\dot{8}$$

（神奈川大）

ヒント 与式$=\frac{305}{999}\div\frac{305}{990}=\frac{990}{999}=0.\dot{9}9\dot{0}$

答 $0.\dot{9}9\dot{0}$

1/26

練習 10. 2 つの循環小数 $0.\dot{2}$ と $0.0\dot{4}$ とがある。$0.\dot{2}$ を初項に，$0.0\dot{4}$ を第 2 項にもつような無限等比級数の和を循環小数で表せ。（埼玉大）

解 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$，$0.0\dot{4}=\frac{4}{90}$

ゆえに，公比は

$$\frac{4}{90}\div\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$$

したがって，この無限等比級数の和は

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{18}=0.2\dot{7}$$

答 $0.2\dot{7}$

練習 11. ある正の数Nを 5 進法で表すと，整数部分が 2 けたの循環小数 $xy.\dot{z}$ となる。また，$N-1$ を 7 進法で表すと，整数部分が 2 けたの循環小数 $zy.\dot{x}$ となる。このとき，x，y，z の値を求めよ。（金沢大）

ヒント $1\leqq x\leqq 4$，$0\leqq y\leqq 4$，$1\leqq z\leqq 4$ はいうまでもなし。

$$N=5x+y+\left(\frac{z}{5}+\frac{z}{5^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=5x+y+\frac{z}{4}$$

$$N-1=7z+y+\left(\frac{x}{7}+\frac{x}{7^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=7z+y+\frac{x}{6}$$

Nを消去して，xについて解くと（☞「数Ⅰ」p. 160）

$$x=\frac{81z+12}{58}=z+\frac{23z+12}{58}$$

よって，……

答

x	3	3	3	3	3
y	0	1	2	3	4
z	2	2	2	2	2

●循環級数の収束する条件

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

◆循環級数は一種の暗記もの。べつにめんどうはありません。しかし，計算マチガイはスゴク多いんだなあ。

◆ 循環級数という名前などはどうでもいいのですが，この収束条件はほとんどの人がマチガッテ理解しているのです。暗記ものと考えて，覚えておいてください。

練習 1. $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$(無限項)
の和を求めよ。ただし，$|x|<1$ とする。
(金沢大)

ヒント 無限等比数列以外は，n 項までの和を求めて，その上で $n\longrightarrow\infty$ とした極限値を求めなければなりません。

さて，

$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+\ nx^{n-1}$

とおくと

$xS_n=\qquad 1x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$

となります。辺々相減ずると

$$(1-x)S_n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

ここで100人中99人までは，

$|x|<1$ だから $\lim_{n\to\infty}x^n=0$，ゆえに $\lim_{n\to\infty}nx^n=0$

とやるのです。前者はいい，しかし，後者が問題だ。大部分の人は $x^n\longrightarrow0$ になるから $n\times0=0$ だという。しかし，これはまちがいです。

$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n}=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2}{n}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n^2}=0$$

であることから明らかでしょう。では，どうするか？

$|x|<1$ ですから $|x|=\dfrac{1}{1+a}\quad(a>0)$

とおくことができます。

そして：――

$$n|x|^n=\frac{n}{(1+a)^n}$$

$$=\frac{n}{1+na+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2+\cdots}$$

$$<\frac{n}{\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2}=\frac{2}{(n-1)a^2}$$

ですから，$n\geqq2$ のとき

$$0<n|x|^n<\frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\therefore\quad 0\leqq\lim_{n\to\infty}n|x|^n\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n|x|^n=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

注 同じように，$|x|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}n^2x^n=0,\ \lim_{n\to\infty}n^3x^n=0$$

などを証明することができます。

なお，ついでながら，次のようにやるのはもちろんまちがいです。

$$\begin{array}{rl} S_\infty= & 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots \\ -)\quad xS_\infty= & \quad\ 1x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots \\ \hline (1-x)S_\infty= & 1+x+x^2+\cdots\cdots \\ = & \dfrac{1}{1-x} \\ \therefore\quad S_\infty= & \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{array}$$

なぜ，まちがいなのか。無限級数の和の定義にしたがっていないからです。

以上の2点は，くれぐれもよくオボエテおいてください。なお，答案の書き方については次の練習 2. の解をみてください。

*　*　*

◆ では，同種の問題ですが，形を変えてもう1つやってみませんか。

1/29

練習 2. 無限級数

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\cdots$$

の和を求めよ。（慶大）

（解） $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}$ ……①

とおいて，両辺に $\dfrac{1}{2}$ を掛けると

$$\frac{1}{2}S_n=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}} \quad\cdots\cdots②$$

①−②を作ると

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore\quad S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

ところが

$$\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}$$

$$=\frac{n}{1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+\cdots\cdots}$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{1\cdot2}}=\frac{2}{n-1}$$

$$\therefore\quad 0\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}\right)=2$$

答 2

* * *

◆ 次も本質的には同じですが，計算がややめんどうです。では：——

1/29

練習 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^k}$ を求めよ。

（ヒント） $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3^k}$ の和を求めてからやるのです。そして和を求めるには循環級数の定石通りやるより仕方がない。

（解） $S_n=\dfrac{1^2}{3}+\dfrac{2^2}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n^2}{3^n}$

とおくと，

$$\frac{1}{3}S_n=\qquad\frac{1^2}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2}{3^n}+\frac{n^2}{3^{n+1}}$$

辺々相減じて

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}}$$

さらに，

$$T_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$$

とおくと，

$$\frac{1}{3}T_n=\qquad\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

辺々相減じて

$$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$\therefore\quad T_n=1-\frac{1}{2\cdot3^{n-1}}-\frac{2n-1}{2\cdot3^n}$$

したがって

$$S_n=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2\cdot3^{n-1}}-\frac{2n-1}{2\cdot3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}}\right)$$

ところが

$$\frac{n}{3^n}=\frac{n}{(1+2)^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{1\cdot2}2^2}=\frac{1}{2(n-1)}$$

$$\frac{n^2}{3^{n+1}}=\frac{n^2}{(1+2)^{n+1}}$$

$$<\frac{n^2}{\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^3}=\frac{3n}{4(n^2-1)}$$

を考慮して，求める和 S_∞ は

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2\cdot3^{n-1}}-\frac{2n-1}{2\cdot3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

答 $\dfrac{3}{2}$

l

(隣接2項の)漸化式で与えられた数列の極限

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆漸化式の与えられた数列の扱い方はすでに基解でやってあることです。微積では，それに極限がつけ加わるだけのこと，と知るべし。

◆ 隣接2項の漸化式が与えられた数列の扱い方は基解でやってあります。(☞「基礎解析」p. 148を参照) 微積では，極限だけが新しいところなのです。

ﾒ/ﾊ

練習 1. 数列 $\{a_n\}$ において $a_1=2$,
$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+4$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(解) $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+4$

を変形すれば

$$a_n-6=\frac{1}{3}(a_{n-1}-6)$$

ゆえに数列 $\{a_n-6\}$ は初項 $-4(=2-6)$, 公比$\frac{1}{3}$の等比数列をなす。

$$\therefore\quad a_n-6=(-4)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=6-4\cdot\frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n=6 \qquad \cdots\cdots\text{答}$$

-/ﾊ

練習 2. 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=2$,
$a_n=\frac{5a_{n-1}}{2a_{n-1}+3}$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

ヒント これも扱い方はきまっています。**平衡値を使う** のもよい，**逆数をとる** のもよい。ここでは後者の方法でやってみましょう。

(解) $\frac{1}{a_n}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{2}{5}$

これを変形して

$$\frac{1}{a_n}-1=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-1\right)$$

ゆえに，

$$\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a^n}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=1 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n=1$$

ﾒ/ﾊ

練習 3. $a_1=a$, $a_n=a_{n-1}{}^2-2a_{n-1}+2$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ が収束するための条件を求め，かつ極限値を求めよ。

(解) 漸化式を変形すれば

$$a_n-1=(a_{n-1}-1)^2$$

ゆえに

$$a_n-1=(a-1)^{2^{n-1}}$$

$$\therefore\quad a_n=1+(a-1)^{2^{n-1}}$$

ゆえに $a-1=1$ すなわち $a=2$ のとき a_n は収束して極限値は 2,

$-1<a-1<1$ すなわち $0<a<2$ のとき a_n は収束して極限値は 1,

$a-1=-1$ すなわち $a=0$ のとき a_n は収束して極限値は 2，である。

$$\text{答}\quad \begin{cases} a=0,\ 2 \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty} a_n=2 \\ 0<a<2 \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty} a_n=1 \end{cases}$$

ﾒ/ﾊ

練習 4. $a_1=2$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}+30}$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

ヒント これもきまっていましたね。平衡値は6ですから，両辺から6を引いて不等式を作るのだった。つまり，

$$a_n-6=\sqrt{a_{n-1}+30}-6$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+30}+6}(a_{n-1}-6)$$

$$\therefore\quad |a_n-6|=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+30}+6}|a_{n-1}-6|$$
$$<\frac{1}{6}|a_{n-1}-6|$$

$$\therefore\ |a_n-6|<\frac{1}{6}|a_{n-1}-6|$$

同様にして

$$|a_{n-1}-6|<\frac{1}{6}|a_{n-2}-6|$$

…………

$$|a_3-6|<\frac{1}{6}|a_2-6|$$

$$\times)\ \underline{|a_2-6|<\frac{1}{6}|a_1-6|}$$

$$|a_n-6|<\frac{4}{6^{n-1}}$$

$$\therefore\ 0\leqq\lim_{n\to\infty}|a_n-6|\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{4}{6^{n-1}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}|a_n-6|=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=6 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

ℓ

練習 5. r, s を正の数とし，数列 $\{a_n\}$ が次のように与えられているとする。

7/

$$a_1=1,\ a_{n+1}=(1+r)a_n-s \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 一般項 a_n を n, r, s を用いて表せ。

(2) $a_n=0$ となる s の値 s_n を n, r を用いて表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。　（東京女大）

解 (1) $a_1=1$, $a_{n+1}=(1+r)a_n-s$

（平衡値ヲ求メルト $\frac{s}{r}$ トナルカラ，両辺カラ $\frac{s}{r}$ ヲ引イテ）

$$\therefore\ a_{n+1}-\frac{s}{r}=(1+r)\left(a_n-\frac{s}{r}\right)$$

ゆえに，数列 $\left\{a_n-\frac{s}{r}\right\}$ は初項 $1-\frac{s}{r}$, 公比 $1+r$ の等比数列をなす。

$$\therefore\ a_n-\frac{s}{r}=\left(1-\frac{s}{r}\right)(1+r)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{r}\{s+(r-s)(1+r)^{n-1}\}$$

(2) $a_1\neq0$ であるから $n\geqq2$ のとき，$a_n=0$ とおくと

$$s_n+(r-s_n)(1+r)^{n-1}=0$$

$$\therefore\ s_n=\frac{r(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}-1}$$

(3) $r>0$ であるから　$1+r>0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^{n-1}}}=r$$

7/

ℓ

練習 6. (1) x を実数とするとき $x=\frac{1}{4}\cos2x$ はただ1つの解（これを α とする）をもつことを示せ。

(2) $x_0=0$, $x_n=\frac{1}{4}\cos2x_{n-1}$ ($n=1$, 2, 3, …) で定義された数列 $\{x_n\}$ について，次のことを示せ。

(ア) $|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|$

(イ) $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$　（近畿大）

ヒント (1)は $f(x)=x-\frac{1}{4}\cos2x$ とおくと $f'(x)=1+\frac{1}{2}\sin2x>0$ から $f(x)$ は単調増加であることがわかります。そして，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

なるほど，実数解は1つであることがわかります。

(2) $|\alpha-x_n|=\frac{1}{4}|\cos2\alpha-\cos2x_{n-1}|$

$$=\frac{1}{4}|2\cdot\sin(\alpha+x_{n-1})\sin(\alpha-x_{n-1})|$$

ところが

$$|\sin(\alpha+x_{n-1})|\leqq1$$

ですから，

$$|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\sin(\alpha-x_{n-1})|$$

ところが（ヤレヤレ，また，ところがだ）

$|\sin\theta|\leqq\theta$（等号は $\theta=0$ のとき）

ですから，

$$|\alpha-x_n|\leqq\frac{1}{2}|\alpha-x_{n-1}|$$

…………

1 回目　年　月　日
2 回目　年　月　日
3 回目　年　月　日

(隣接3項の)漸化式で与えられた数列の極限

◈漸化式で与えられた数列，それは基解の範囲でした。それにちょっとばかり微積の極限をつけ加えただけのことなんです。

◆ 隣接３項の漸化式が与えられた数列の扱い方は基解でやってあるハズ（☞「基礎解析」p. 164を参照)。では，まず，これをやってみませんか。

■練習 1. $a_1=0,\ \ a_2=1,\ \ a_{n+2}=\dfrac{2a_{n+1}+a_n}{3}$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で与えられる数列がある。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(ヒント) (1)は基解の範囲，(2)だけが微積というわけです。さて，

$$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+a_n}{3}$$

を変形しますと，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\left(-\frac{1}{3}\right)(a_{n+1}-a_n)$$

ゆえに数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $1(=a_2-a_1)$，公比 $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ の等比数列をなすことがわかります。ゆえに

$$a_{n+1}-a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4\ \cdots\cdots\ a_n \\ & 1 & & \left(-\frac{1}{3}\right) & & \left(-\frac{1}{3}\right)^2 & \cdots\cdots \end{array}$$

ゆえに

$$a_n=0+\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

となる。いいですか，ここまでは基解なんですよ。そして，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots\boxed{答}$$

■練習 2. $a_1=0,\ \ a_2=1,$

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}+6$$

のとき a_n を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(解) $a_n-a_{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(a_{n-1}-a_{n-2})+6$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$$b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)b_{n-1}+6$$

となる。これを変形すれば

$$b_n-4=\left(-\frac{1}{2}\right)(b_{n-1}-4)$$

$$\therefore\quad b_n-4=(b_1-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=4+(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad(\because\quad b_1=1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4\cdots\cdots \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & \end{array}$$

$$\therefore\quad a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{4+(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=4(n-1)+(-3)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=4(n-1)-2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$

$$\boxed{答}\ \left\{\begin{array}{l} a_n=4n-6+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-2}} \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \text{ は発散 }(+\infty) \end{array}\right.$$

(注) 結局めんどうなのは，基解の範囲．微積はいうなればほんのつけ足しです!!

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。さあ，まずこれです。

2/4

練習 3. $a_1=2,\ a_2=1,\ a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ $(n\geqq 2)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問に答えよ。

(1) $\{a_n\}$ はどんな数列か。

(2) n 項までの和 S_n を求め，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。　（日本大）

ヒント　$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ の両辺の対数をとると

$$\log a_n=\frac{1}{2}(\log a_{n-1}+\log a_{n+1})$$

ゆえに $\log a_n=b_n$ とおくと

$$2b_n=b_{n-1}+b_{n+1}$$

つまり

$$b_{n+1}=2b_n-b_{n-1}$$

$$\therefore\quad b_{n+1}-b_n=b_n-b_{n-1}=\cdots\cdots=b_2-b_1=-\log 2$$

もうここまでくれば b_n もわかる，a_n もわかる，というものだ。

答　(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

(2) $S_n=4\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=4$$

2/5

練習 4. $a_0=a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots)$ によって数列 $\{a_n\}$ を定義する。

(1) $a_n\leqq\left(\dfrac{5}{3}\right)^n (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ であることを示せ。

(2) $|x|\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を求めよ。　（芝浦工大）

解　(1)　$a_n\leqq\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$　……(A)

を数学的帰納法によって証明する。

まず，$n=0,\ 1$ のとき明らかに成り立つ。次に $n\leqq k$ のとき(A)が成り立つとすると

$$a_k\leqq\left(\frac{5}{3}\right)^k,\quad a_{k-1}\leqq\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$$

であるから

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+a_{k-1}\\&\leqq\left(\frac{5}{3}\right)^k+\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\\&=\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{3}+1\right)\\&=\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{8}{3}<\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

ゆえに，すべての n に対して(A)は成り立つ。

(2)　$f_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ とおけば

$$xf_n(x)=a_0x+a_1x^2+\cdots\cdots+a_nx^{n+1}$$

$$\therefore\quad x^2f_n(x)=a_0x^2+a_1x^3+\cdots\cdots+a_nx^{n+2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(x+x^2)f_n(x)\\&=a_0x+(a_0+a_1)x^2+(a_1+a_2)x^3+\cdots\cdots\\&\qquad+(a_{n-1}+a_n)x^{n+1}+a_nx^{n+2}\\&=a_0x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\\&\qquad+a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^{n+2}\\&=f_n(x)-1+a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^{n+2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f_n(x)=\frac{1-a_{n+1}x^{n+1}-a_nx^{n+2}}{1-x-x^2}$$

しかるに $a_n\leqq\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ であるから

$$|a_nx^n|\leqq\left(\frac{5}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}|a_nx^n|=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{1}{1-x-x^2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

注　このように，見かけ上めんどうな問題もありますが，本質的にはすべて基解の範囲で，極限をとる部分だけが微積というわけです。そこのところをよく認識しないと，基解はまあまあだが，微積がわからない，などということになるのです。

では，最後にもう1つ：——

練習 5. $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n+1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$ の値を求めよ。　（埼玉大）

ヒント　$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2n+1$

答　$\dfrac{1}{3}$

⑩ 二重数列の極限の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

✎二重数列さえわかれば，もはや，事もなし。ナニ!! 二重数列がわからない，だって。これはキミ基解なんだぜ。

◆ 二重数列の扱い方は，すでに基解でやってあることなのですが，ここではその極限を求める練習をやっておこうというのです。二重数列の扱い方については「基礎解析」(☞p. 168) を参照してください。

練習 1. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，

$$a_1=1,\ b_1=0$$

$$a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}b_{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

$$b_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{3}{4}b_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ および $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

(ヒント) まず，何はともあれ，a_n，b_n を求めずばなるまい。

①＋②：　$a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

$\therefore\ a_n+b_n=a_1+b_1=1 \quad \cdots\cdots③$

①－②：　$a_n-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})$

$$\therefore\ a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}} \quad \cdots\cdots④$$

$\{③+④\}\div 2$：　$a_n=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$\{③-④\}\div 2$：　$b_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\text{答}$$

＊　＊　＊

◆ 次にやや複雑なものをとりあげてみようか。

練習 2. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，

$a_1=1$，$b_1=0$ かつ

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{2}{3}b_{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

$$b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3}b_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ および $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

(ヒント) このような場合の扱い方は3通りありました。1つの方法は次のようです。

①＋②×k を作ってみますと

$$a_n+kb_n=\frac{1}{2}(1+k)a_{n-1}+\frac{1}{3}(2+k)b_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}(1+k)\left\{a_{n-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2+k}{1+k}b_{n-1}\right\}$$

ですから

$$k=\frac{2}{3}\cdot\frac{2+k}{1+k} \quad \cdots\cdots③$$

となるように k を選ぶのでしたね。③を解くと $k=1,\ -\dfrac{4}{3}$ となります。かくして：――

(解) ①＋②：$a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

$\therefore\ a_n+b_n=(a_1+b_1)=1$

また，①－②×$\dfrac{4}{3}$：

$$a_n-\frac{4}{3}b_n=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(a_{n-1}-\frac{4}{3}b_{n-1}\right)$$

$$\therefore\ a_n-\frac{4}{3}b_n=\left(a_1-\frac{4}{3}b_1\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{6^{n-1}}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{6^{n-1}}$$

$$b_n=\frac{3}{7}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{6^{n-1}}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{7},\ \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{3}{7} \cdots\cdots\text{答}$$

(注) a_n，b_n を上のようにして求めないで，b_n を消去し，a_n，a_{n-1}，a_{n-2} の漸化式を求めてやるのも便利な方法の1つです。これについては，余裕があったらやってみるとよいでしょう。

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な練習をやってみませんか。

練習 3. x，y 平面上の点の全体を X とし，X から X への写像 f，g を次のように定める。

2/12

$$f:(x,\ y)\longrightarrow\left(11x,\ \frac{1}{2}y+3\right)$$

$$g:(x,\ y)\longrightarrow\left(7x,\ \frac{1}{3}y+4\right)$$

このとき

(1) $f\circ g=g\circ f$ を示せ。

(2) 点列 $(x_n,\ y_n)(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が $(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$

$$g(x_{n-1},\ y_{n-1})=f(x_n,\ y_n)$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，x_n，y_n を n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ。

（宮城教育大）

解 (1) $f\circ g:(x,\ y)\longrightarrow(x',\ y')$

$g\circ f:(x,\ y)\longrightarrow(x'',\ y'')$

とすると，

$$x'=11(7x)=77x$$

$$x''=7(11x)=77x$$

$$\therefore\quad x'=x''$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y+4\right)+3=\frac{1}{6}y+5$$

$$y''=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}y+3\right)+4=\frac{1}{6}y+5$$

$$\therefore\quad y'=y''$$

$$\therefore\quad f\circ g=g\circ f$$

(2) $(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$ ……①

$$\left(7x_{n-1},\ \frac{1}{3}y_{n-1}+4\right)=\left(11x_n,\ \frac{1}{2}y_n+3\right)$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

であるから

$$x_n=\frac{7}{11}x_{n-1},\quad \frac{1}{3}y_{n-1}+4=\frac{1}{2}y_n+3$$

$$\therefore\quad y_n=\frac{2}{3}y_{n-1}+2$$

$$\therefore\quad y_n-6=\frac{2}{3}(y_{n-1}-6)$$

$$\therefore\quad x_n=\left(\frac{7}{11}\right)^n x_0=\left(\frac{7}{11}\right)^n$$

$$y_n-6=-6\left(\frac{2}{3}\right)^n\qquad\therefore\quad y_n=6-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3) (2)から，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=6$$

2/13

練習 4. $x_{n+1}=\dfrac{2x_n-\sqrt{2}\,y_n}{6}$，

$y_{n+1}=\dfrac{8y_n+\sqrt{2}\,x_n}{12}$，$x_1=1$，$y_1=-2\sqrt{2}$

を満たす平面上の点の列 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ がある。このとき

(1) 数列 $\{2^n x_n\}$ は等差数列をなすことを示せ。

(2) x_n，y_n をそれぞれ n で表せ。

(3) 原点を O とするとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_n$ を求めよ。

（広島大）

ヒント (1)は y_n に関係がないから y_n を消去してみましょうか。

$x_{n+1}=\dfrac{2x_n-\sqrt{2}\,y_n}{6}$ より

$$y_n=-3\sqrt{2}\,x_{n+1}+\sqrt{2}\,x_n$$

$$\therefore\quad y_{n+1}=-3\sqrt{2}\,x_{n+2}+\sqrt{2}\,x_{n+1}$$

これを第２の漸化式に代入して

$$12(-3\sqrt{2}\,x_{n+2}+\sqrt{2}\,x_{n+1})$$

$$=8(-3\sqrt{2}\,x_{n+1}+\sqrt{2}\,x_n)+\sqrt{2}\,x_n$$

$$\therefore\quad 4x_{n+2}-4x_{n+1}+x_n=0$$

$x_n=u^n$ とおいてみると（☞「基礎解析」p. 162 参照）

$$4u^{n+2}-4u^{n+1}+u^n=0$$

$$\therefore\quad u=\frac{1}{2}\quad（重複解）$$

$$\therefore\quad x_n=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+Bn\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ところが

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{2x_1-\sqrt{2}\,y_1}{6}=1,\cdots$$

これから $x_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$ となります。また，

$$y_n=-\frac{\sqrt{2}(n+3)}{2^n},\quad \lim_{n\to\infty}\cos\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_n=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

が求まります。

◎数列の極限と図形の扱い方

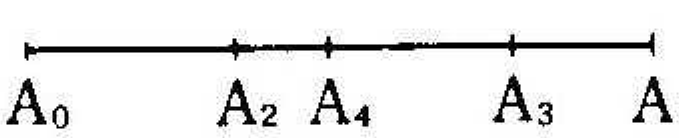
1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈やさしい数列とやさしい図形を結びつけると急にめんどうになるのは，どういうことなのであろうか。

◆　このセクションでは，数列の図形への応用を練習するのが目的です。

では，まずこれから：——

練習 1.　長さ1の線分 A_0A_1 を $1:2$ に内分する点を A_2 とし，線分 A_1A_2 を $1:2$ に内分する点を A_3，A_2A_3 を $1:2$ に内分する点を A_4，……；一般に A_kA_{k+1} $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を $1:2$ に内分する点を A_{k+2} とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{A_0A_n}$ を求めよ。



ヒント　いろいろな考え方がありましょう。ここでは，座標を使ってみましょうか。

数直線の原点に A_0 を，座標1の点に A_1 をおきますと，

A_2 の座標は　$\dfrac{1\cdot1+2\cdot0}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

A_3 の座標は　$\dfrac{1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot1}{1+2}=\dfrac{7}{3^2}$

A_4 の座標は　$\dfrac{1\cdot\frac{7}{3^2}+2\cdot\frac{1}{3}}{1+2}=\dfrac{13}{3^3}$

といったぐあい，これから A_n を推定して，さらに数学的帰納法で証明することもできます。あるいは A_k の座標を a_k としますと

$$a_{k+2}=\frac{1\cdot a_{k+1}+2\cdot a_k}{1+2}$$

$$\therefore\quad a_{k+2}=\frac{a_{k+1}+2a_k}{3}$$

$$\therefore\quad a_{k+2}-a_{k+1}=\left(-\frac{2}{3}\right)(a_{k+1}-a_k)$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=(a_1-a_0)\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

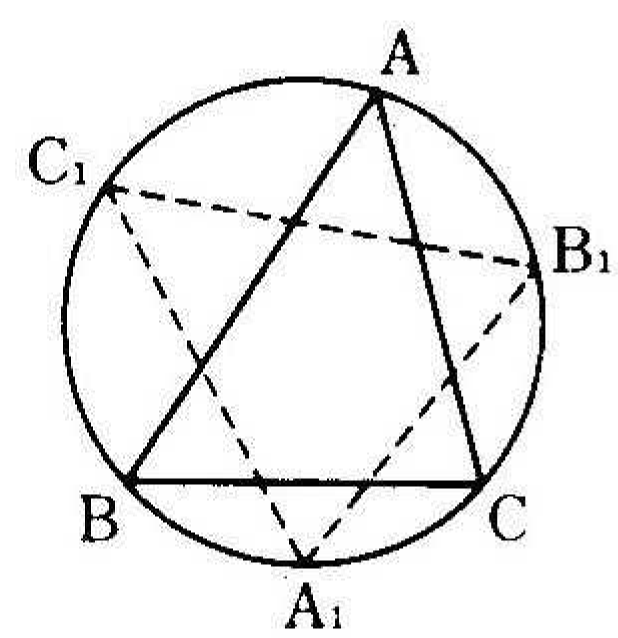
$$\therefore\quad a_n=0+1+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cdots$$

$$\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{5}\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

練習 2.　右の図のように $\triangle ABC$ の外接円の周上に A_1，B_1，C_1 をとり，それぞれ弧 BC，CA，AB の中点におく。同じようにして，一般に $\overset{\frown}{B_kC_k}$，$\overset{\frown}{C_kA_k}$，$\overset{\frown}{A_kB_k}$ の中点をそれぞれ A_{k+1}，B_{k+1}，C_{k+1} とするとき，$\triangle A_nB_nC_n$ は $n\to\infty$ のとき，どんな三角形に近づくか。　　（京大）



ヒント　$\angle B_kA_kC_k=\angle B_kA_kA_{k-1}+\angle C_kA_kA_{k-1}$

$=\angle B_kB_{k-1}A_{k-1}+\angle C_kC_{k-1}A_{k-1}$

$=\dfrac{1}{2}\angle C_{k-1}B_{k-1}A_{k-1}+\dfrac{1}{2}\angle B_{k-1}C_{k-1}A_{k-1}$

$=\dfrac{1}{2}(\angle C_{k-1}B_{k-1}A_{k-1}+\angle B_{k-1}C_{k-1}A_{k-1})$

$=\dfrac{1}{2}(\pi-\angle A_{k-1})=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\angle A_{k-1}$

つまり $\angle B_kA_kC_k=u_k$ とおくと

$$u_k=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}u_{k-1}$$

これならできるハズ!!

$$u_k-\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(u_{k-1}-\frac{\pi}{3}\right)$$

かくて，……　　$\boxed{答}$　正三角形

*　*　*

◆ 結局この種の問題は，数列がめんどうなのではなく，図形の取り扱いにとまどうことが多いだけなんです。つまり，図形的な部分が主眼なのです。そして，それはまさに基解の範囲なんですよ。だから，いつでも，これは基解なんだ，と自分にいいきかせながらやるのがコツというもの。

では，やってみませんか。

練習 3. 1辺の長さ a の正三角形 ABC と角 θ ($0<\theta<30°$) が与えられている。いま，辺 BC，辺 CA，辺 AB 上にそれぞれ点 A_1，B_1，C_1 を

$$\angle BAA_1=\angle CA_1B_1=\angle AB_1C_1=\theta$$

となるように定める。次に辺 BC，辺 CA，辺 AB 上にそれぞれ点 A_2，B_2，C_2 を

$$\angle BC_1A_2=\angle CA_2B_2=\angle AB_2C_2=\theta$$

となるように定め，同様にして A_n，B_n，C_n ($n=3,\ 4,\ \cdots\cdots$) を定める。

(1) BA_1 の長さを b とし，BA_n, CB_n および AC_n の長さを a，b で表せ。

(2) $n\to\infty$ のとき点 A_n，B_n，C_n がそれぞれ辺 BC，辺 CA，辺 AB 上の定点に限りなく近づくことを示せ。

(3) (2)において，A_n，B_n が限りなく近づく定点をそれぞれ A_0，B_0 とするとき，線分 A_0B_0 の長さを求めよ。

（阪大）

ヒント 右の図で

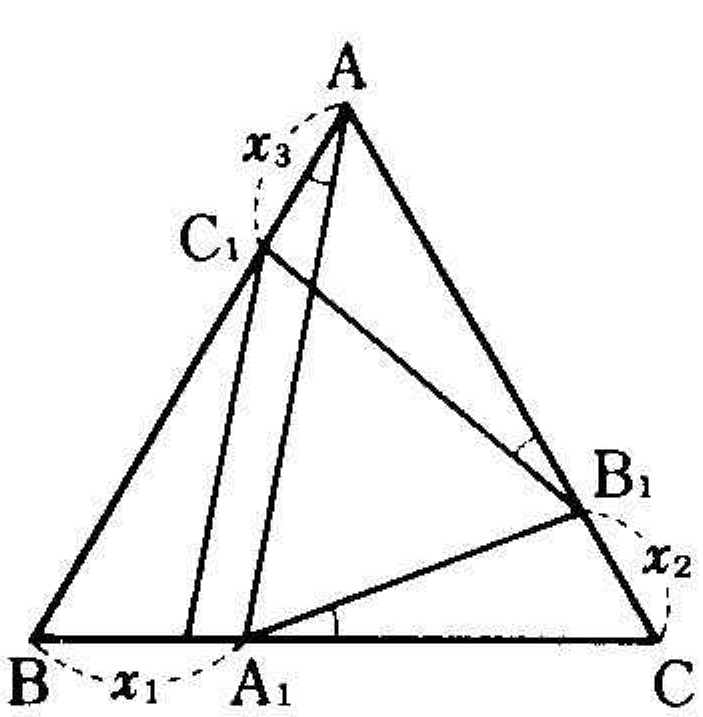
$$\triangle ABA_1\backsim\triangle A_1CB_1$$

ですから

$$\frac{AB}{BA_1}=\frac{A_1C}{CB_1}$$

となります。つまり

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x_1}{x_2}$$



これで，x_2 が x_1 ($=b$) で表せます。まったく同様にして，x_3 は x_2 で，x_4 は x_3 で，というふうに，順次求められるようだ。

実は，次のようにやると，もっとやさしくなります。つまり，

$$\triangle ABA_1\backsim\triangle A_1CB_1\backsim\triangle B_1AC_1\backsim\cdots\cdots$$

ですから，

$$BA_1=x_1(=b),\ CB_1=x_2,\ AC_1=x_3,\ \cdots\cdots$$

とおいて

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x_1}{x_2}=\frac{a-x_2}{x_3}=\cdots\cdots=\frac{a-x_n}{x_{n+1}}=\cdots\cdots$$

ですから

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x_n}{x_{n+1}}$$

ナルホド，もうできたではないか。

$$x_{n+1}=\frac{-bx_n+ab}{a}\qquad\cdots\cdots①$$

これならキマッタタイプだ。（☞「基礎解析」p. 148 参照）。ここでは，次のように解答しよう。

両辺から x_n を引くと

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{b}{a}(x_n-x_{n-1})$$

$$\therefore\ x_{n+1}-x_n=(x_2-x_1)\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}$$

ところが，

$$x_2-x_1=\frac{b(a-b)}{a}-b=-\frac{b^2}{a}$$

なんですから

$$x_{n+1}-x_n=b\left(-\frac{b}{a}\right)^n\qquad\cdots\cdots②$$

①，②から x_{n+1} を消去すると x_n が出るね。結果は

$$x_n=\frac{ab}{a+b}\left\{1-\left(-\frac{b}{a}\right)^n\right\}$$

ゆえに

$$BA_n=x_{3n-2}=\frac{ab}{a+b}\left\{1-\left(-\frac{b}{a}\right)^{3n-2}\right\}$$

$$CB_n=x_{3n-1}=\frac{ab}{a+b}\left\{1-\left(-\frac{b}{a}\right)^{3n-1}\right\}$$

$$AC_n=x_{3n}=\frac{ab}{a+b}\left\{1-\left(-\frac{b}{a}\right)^{3n}\right\}$$

しかるに，……

もういいでしょう。そして

$$A_0B_0=\frac{a\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a+b}$$

となります。

◑ベクトルの極限の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆ベクトルの極限などというといかめしいが，成分に分ければ二重数列のそれにすぎないし，分けなければ定義通り，というわけだ。

◆ ベクトルだからといってべつに変わったことはありませんが，ここでは，ベクトルの極限を求める問題を練習しましょう。大きく分けて２つあります。１つはベクトル列，１つはベクトル関数です。

＊　＊　＊

◆ まず，**ベクトル列** をとりあげてみましょう。

2/18

■練習 1. ベクトル列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ において，

$$\boldsymbol{a}_n=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{n-1}+2\boldsymbol{a}\quad(n\geqq 2),\ \boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}$$

のとき $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n$ を求めよ。

ヒント 数列の場合とまったく同じに扱うことができます。$\boldsymbol{a}_n$ も $\boldsymbol{a}_{n-1}$ も $\boldsymbol{x}$ とおいてみますと

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{3}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{a}\qquad\therefore\quad\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}$$

ですから，**平衡値** は $3\boldsymbol{a}$ です。これを与えられた漸化式の両辺から引いて

$$\boldsymbol{a}_n-3\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_{n-1}-3\boldsymbol{a})$$

$$\therefore\quad\boldsymbol{a}_n-3\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a})\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad\boldsymbol{a}_n=3\boldsymbol{a}-\frac{2}{3^{n-1}}\boldsymbol{a}$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=3\boldsymbol{a}$$

答　$3\boldsymbol{a}$

2/18、

■練習 2. ベクトル列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の成分 $(x_n,\ y_n)$ が次のように与えられている。

$$x_n=\frac{3}{4}x_{n-1}+\frac{1}{4}y_{n-1},\ y_n=\frac{1}{4}x_{n-1}+\frac{3}{4}y_{n-1}$$

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}=(1,\ 0)$ として，$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$ を求めよ。

ヒント ベクトル列とはいうものの，二重数列の問題にすぎない。してみると，やり方はきまっている。

$$x_n+y_n=x_{n-1}+y_{n-1}$$

$$x_n-y_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}-y_{n-1})$$

ところが

$$x_1+y_1=1+0=1,\ x_1-y_1=1-0=1$$

ですから，

$$x_n+y_n=1$$

$$x_n-y_n=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore\quad x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n},\ y_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

……答

＊　＊　＊

◆ 次は **ベクトル関数の極限** をとりあげてみましょう。

2/19

■練習 3. $f(t)=|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|$ について次の極限値を求めよ。(ただし，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ は定ベクトル)

$$\lim_{t\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{b}|}{t}$$

ヒント

$$\lim_{t\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{b}|}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{t\{|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|\}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}t^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t}{t\{|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|\}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}t+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{b}|}$$

$$=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}}$$

答　$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}}$

＊　＊　＊

◆ では，総合的な問題を練習してみませんか。

練習 4. ベクトルはすべて原点を始点とす 位置ベクトルとする。

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(s,\ t)$, $\vec{b}=(u,\ v)$ のなす角を θ とし，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を2辺とする三角形の面積を S とする。$\sin\theta$, S を s, t, u, v で表せ。

(2) $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$ とする。

$\vec{a_1}=\vec{e_1}+\vec{e_2}$
$\vec{a_{2n}}=\vec{a_{2n-1}}+2n\vec{e_2}$
$\vec{a_{2n+1}}=\vec{a_{2n}}+(2n+1)\vec{e_1}$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義されるベクトルの列がある。$\vec{a_{2n}}$ を $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ で表せ。

(3) $\vec{a_{2n-1}}$, $\vec{a_{2n}}$ を2辺とする三角形の面積を S_n, $\vec{a_{2n}}$, $\vec{a_{2n+1}}$ を2辺とする三角形の面積を T_n で表すとき，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}$ を求めよ。 (北大)

ヒント (1) ベクトルのなす角といえば内積を使うにきまっています。すなわち，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2}\cos\theta$$

また，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(s,\ t)\cdot(u,\ v)=su+tv$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{su+tv}{\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{|sv-tu|}{\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}|sv-tu|$$

これで(1)は終わりです。

(2) $$\vec{a_{2n}}=\vec{a_{2n-1}}+2n\vec{e_2}$$

ところが，

$$\vec{a_{2n-1}}=\vec{a_{2n-2}}+(2n-1)\vec{e_1}$$

だというのですから

$$\vec{a_{2n}}=\vec{a_{2n-2}}+(2n-1)\vec{e_1}+2n\vec{e_2}$$

そこで，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ n$ を入れて辺辺相加えますと

$$\vec{a_{2n}}=\vec{a_2}+\{3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}\vec{e_1}$$
$$+2(2+3+\cdots\cdots+n)\vec{e_2}$$

ところが

$$\vec{a_1}=\vec{e_1}+\vec{e_2},\quad \vec{a_2}=\vec{a_1}+2\vec{e_2}$$

ですから

$$\vec{a_{2n}}=\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}\vec{e_1}$$
$$+\{3+2(2+3+\cdots\cdots+n)\}\vec{e_2}$$
$$=n^2\vec{e_1}+(n^2+n+1)\vec{e_2}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

（ヤレヤレ，コレハ案外ゴタゴタシテルナ）

(3) 上の結果を

$$\vec{a_{2n+1}}=\vec{a_{2n}}+(2n+1)\vec{e_1}$$

に代入すると $\vec{a_{2n+1}}$ が得られ，したがって $\vec{a_{2n-1}}$ が求められます。あるいは

$$\vec{a_{2n}}=\vec{a_{2n-1}}+2n\vec{e_2}$$

に代入すれば，直接 $\vec{a_{2n-1}}$ が求められます。

こうして

$$\vec{a_{2n-1}}=(n^2,\ n^2-n+1)$$
$$\vec{a_{2n}}=(n^2,\ n^2+n+1)$$
$$\vec{a_{2n+1}}=((n+1)^2,\ n^2+n+1)$$

$$\therefore\quad S_n=n^3,\quad T_n=\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+3n+1)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{2n^3+3n^2+3n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=1$$

答 1

注 特にめんどうというところはないが，どこかで1か所ケアレス・ミスをすると，もはや救われない，といった感じ。

ベクトルがめんどうにあらず，数列もめんどうにあらず，ただ，それが交叉するところで急にめんどうになってしまうのだ。

なお，二重数列や，平面上の点列の問題などはすべてベクトルの問題にホンヤクできるわけですから，この系統のものは，割合多いのです。計算練習と思って，慎重にやってくださいよ。

* * *

◆ 余談ながら，ベクトルの極限がわかれば，いま1歩でベクトルを微分する問題にいくだろう。それから直ちにベクトルの積分に進む。これらは≪ベクトル解析学≫となるのだ。

◑行列の極限に関する問題も

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆行列の極限といっても，べつにめんどうなし，各成分の極限を成分とする行列を求めるだけなんですから。

◆ 行列の計算と極限の組み合わさった問題をとりあげて練習するのがこのセクションの目的です。では，やってみませんか。

2/14

■練習 1. $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) A^n を計算せよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ。

ヒント (1) $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ とおきますと

$$A=\frac{1}{3}B \qquad \therefore \quad A^n=\frac{1}{3^n}B^n$$

ところで B^n の計算法について詳しいことは代幾でやってあるハズ（☞「代幾」p. 108 を参照してください）。ここでは，数列を使ってやっておきましょう。

B^n はいわゆる対称行列で

$$B^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\b_n&a_n\end{pmatrix}$$

とおくことができます。

そして，$B^n=BB^{n-1}$ から

$$\begin{pmatrix}a_n&b_n\\b_n&a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}&b_{n-1}\\b_{n-1}&a_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$$
$$b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n+b_n=3(a_{n-1}+b_{n-1})$$
$$=(a_1+b_1)3^{n-1}=3^n$$
$$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}$$
$$=a_1-b_1=1$$

これを解いて

$$a_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$$

$$b_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

$$\therefore \quad B^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{3^n}&1-\frac{1}{3^n}\\1-\frac{1}{3^n}&1+\frac{1}{3^n}\end{pmatrix}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

（参考） 実は次のようなモデルを考えると，この結果の意味がよくわかります。

ある土地で天気を晴○と雨◉に分けて，○○と続く確率$\frac{2}{3}$，○◉と変わる確率$\frac{1}{3}$，◉○と変わる確率$\frac{1}{3}$，◉◉と続く確率を$\frac{2}{3}$としますと，この天気変化は行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\bigcirc & \bullet\end{array}\\ A= \begin{array}{c}\bigcirc\\ \bullet\end{array} & \begin{pmatrix}2/3&1/3\\1/3&2/3\end{pmatrix}\end{array}$$

で与えられます。そして A^2 は

$$A^2=\begin{array}{c}\bigcirc\\ \bullet\end{array}\begin{pmatrix}5/9&4/9\\4/9&5/9\end{pmatrix}$$

は ○─→×─→○，つまり1日おいて○○となる確率が$\frac{5}{9}$であることを示します。だから A^{n+1} は n 日おいて○─→○となる確率というわけ。n─→∞ となると，一定値に近づくのも当然です。では，もう1つやってみませんか。なお，この（参考）は無理に理解する必要はありませんよ。

2/12

■練習 2. $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ のとき $\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ。

答 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

* * *

8

◆ では，やや複合された問題を練習してみませんか。

7/12✓

練習 3. 行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の n 個 $(n\geqq 1)$ の積を $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ とする。このとき，

(1) $a_n+b_n=1$，$c_{n+1}=a_n$，$d_{n+1}=b_n$ を示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限値 a を求めよ。

（東海大）

解 (1) $A^{n+1}=A^nA$

であるから

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n,\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \quad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$$

$$\therefore\quad a_n+b_n=a_1+b_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad\cdots\cdots②$$

次に，

$$A^{n+1}=\underline{AA^n}$$

であるから

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad c_{n+1}=a_n+0\cdot c_n=a_n$$
$$d_{n+1}=b_n+0\cdot d_n=b_n$$

(2) ①，②より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n=\frac{1}{2}a_n+(1-a_n)$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$$

これを変形して

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=(-1)^n\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$$

答 $a=\frac{2}{3}$

では，次はどうですか：——

7/25

練習 4. A_n を2次の正方行列とし，

$$A_1=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$A_n=\frac{1}{3}A_{n-1}+2E$$

とする。$\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

ヒント 数列 $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+2$ の場合とまったく同じようにできます。まず，平衡値（☞「基礎解析」p. 144）にあたるものは $3E$ でしょう。これを両辺から引いて

$$A_n-3E=\frac{1}{3}(A_{n-1}-3E)$$

$$\therefore\quad A_n-3E=(A_1-3E)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad A_n=3E+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(A_1-3E)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}A_n=3E=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

注 結局，初項 A_1 には関係がなかったわけです。では，ついでだ，もう1つ：——

7/25

練習 5. 2次の正方行列 A_n について

$$A_{n+1}=A_n(A_n+2E)$$

と定める。A_n を A_1 で表せ。

ヒント $A_{n+1}=A_n(A_n+2E)$

の両辺に E を加えて，$E=E^2$ を考えて

$$A_{n+1}+E=A_n{}^2+2A_nE+E^2$$

$$\therefore\quad A_{n+1}+E=(A_n+E)^2$$

$$\therefore\quad A_n+E=(A_1+E)^{2^{n-1}}$$

$$\therefore\quad A_n=-E+(A_1+E)^{2^{n-1}}$$

答 $A_n=-E+(A_1+E)^{2^{n-1}}$

注 このように行列の場合もかなりのものはふつうの数列と同じように扱えるのですから，まず，行列を数だと考えてみるのも有力な手です。

○関数の極限の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆関数の極限を求める問題をバカにしてはいけません。特に文字の入った場合はマチガイやすいのです。

◆ 極限の求めるに当たって，5つの場合があります。それを，ここで一応当たっておくことにしましょう。さて：——

第1は $\lim_{x\to a}$ といった型，つまり，x が有限な値に近づくときです。

2/25

■練習 1. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ を求めよ。

ヒント　$x\longrightarrow 0$ のとき $\sin\frac{1}{x}$ の値はきまりませんが -1 と 1 の間にあるハズ。それに，0に近づく x が掛けられているのですから，いうまでもなく $x\sin\frac{1}{x}\longrightarrow 0$ です。

2/27

■練習 2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ を求めよ。

ヒント　分母が $\sin x$ なのに，分子は $1-\cos x$，これでは，カミ合ワヌ。分子を $\sin x$ で表すのがコツ。これには2つの方法がありましょう。1つは

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ を使うもの

もう1つは，分母・分子に $1+\cos x$ を掛けるのです。

解 1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2}=0$$
答　0

解 2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

*　*　*

◆ 第2は $\lim_{x\to\infty}$ といった型，もちろん，$\lim_{x\to-\infty}$ といったものもこの部類です。

2/27

■練習 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+5x+1}{x^3+x^2+2x+4}$ を求めよ。

ヒント　分母の次数のもっとも大きいもの，ここでは x^3 で分母・分子を割るのがコツです。

$$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=3$$

答　3

2/27

■練習 4. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$ を求めよ。

ヒント　
$$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$
……答

*　*　*

◆ 第3は $\lim_{n\to\infty}$ の型，$x\longrightarrow\infty$ といい，$n\longrightarrow\infty$ といい，ちがいはないと思うかもしれませんが，これは，まったく意味がちがうのです。練習に入る前に，まずこれを：——

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases} x>1 \text{ のとき } +\infty & \text{発散}\\ x=1 \text{ のとき } 1 & \text{収束}\\ 1>x>-1 \text{ のとき } 0 & \text{収束}\\ x=-1 \text{ のとき振動 } (\pm 1) & \text{発散}\\ x<-1 \text{ のとき振動 } (\pm\infty) & \text{発散}\end{cases}$$

これは必ずオボエテおくこと!!

2/27

■練習 5. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{x^n+1}$ のグラフをかけ。

ヒント 何はともあれ5つに分けるのだ。

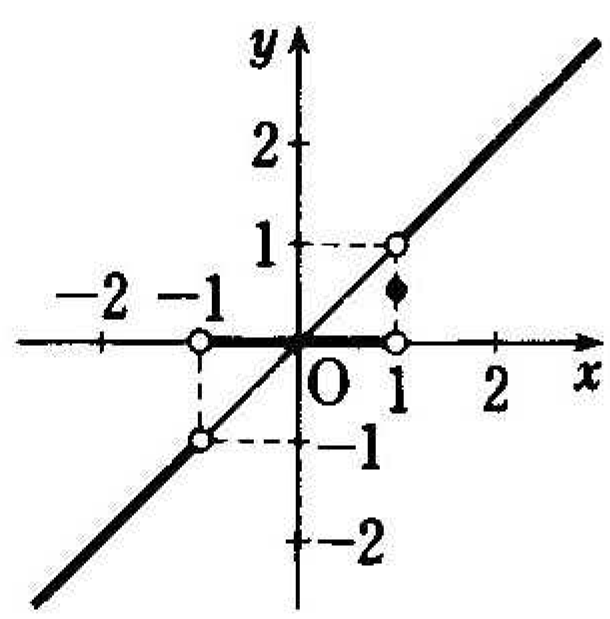
$x=1$ のときはすぐできる。

$|x|<1$ のときもすぐできる。

$x=-1$ のときは分母が2になったり0になったり，とんでもない，極限なし。

こうして残るのは $x>1$ のときと $x<-1$ のときなのだ。そして，このときには $|x|^n \longrightarrow +\infty$，つまり $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形，さては，分母の次数の大きいもの x^n で割ればいいだろう。

こうして解は右のようなグラフになるのです。



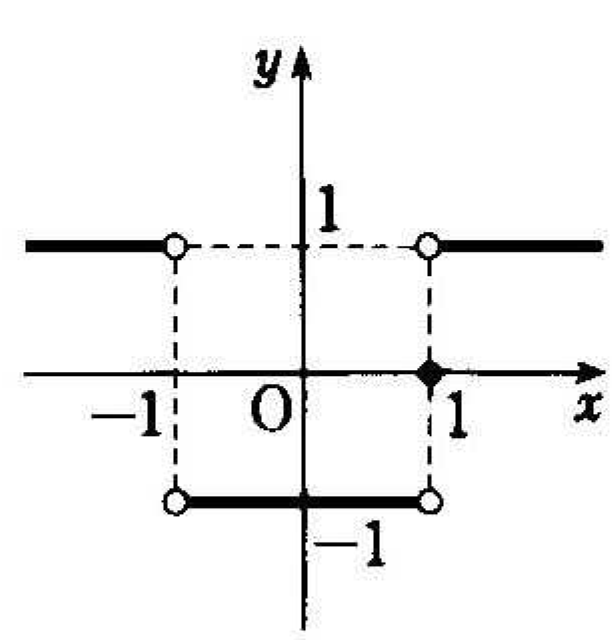
では，もう1つ。

練習 6. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$ のグラフをかけ。

ヒント

$$f(x)=\begin{cases} x>1 & : \quad 1 \\ x=1 & : \quad 0 \\ -1<x<1 & : \quad -1 \\ x=-1 & : \quad \text{なし} \\ x<-1 & : \quad 1 \end{cases}$$

結果は右の図の通りです。



くどいが $x=-1$ のとき n が偶数なら 0，n が奇数なら，なし，などとしてはいけませんよ!!

* * *

◆ 第4は微分係数や導関数の定義を用いる場合です。微分係数の定義は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

でしたね。あるいは

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

を使ってもかまいません。というよりも，2つとも知っていなければなりません。

導関数はただ1つ：——

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

では，これを：——

練習 7. $af(a)\neq 0$ であるとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x^2-a^2}$$

を求めよ。

解 与式

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)(x+a)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)})}$$

$$=f'(a)\cdot\frac{1}{2a\cdot 2\sqrt{f(a)}}$$

$$=\frac{f'(a)}{4a\sqrt{f(a)}}$$ ……答

* * *

◆ 第5は **ロピタルの定理** の応用です。これは極限値が $\dfrac{0}{0}$ か $\dfrac{\infty}{\infty}$ になるときには分母・分子をそれぞれ微分して極限値を求めてよいという定理です。ともあれ，具体的な問題にいきましょう。

練習 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}$ を求めよ。

ヒント $x\longrightarrow 1$ のとき分母 $\longrightarrow 0$，分子 $\longrightarrow 0$ ですから $\dfrac{0}{0}$（不定形）の形です。

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{100x^{99}}{1}=100$$

答 100

練習 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-x+4}{3x^3+2x^2+x+1}$ を求めよ。

ヒント $x\longrightarrow\infty$ のとき分母$\longrightarrow\infty$，分子$\longrightarrow\infty$ ですから $\dfrac{\infty}{\infty}$（不定形）の形です。

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-x+4}{3x^3+2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{9x^2+4x+1}$$

これも $\dfrac{\infty}{\infty}$ だから，そして次も，だ!!

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{18x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

しかし，これはくどいな。詳しくは（☞ p. 166）を参照。

◑不定形の極限値の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈極限を求める問題の華(はな)は何といっても不定形だ，といえば，ああ，どうしてこれが華なのか，と，彼は嘆くのだが，……

◆ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ は $\frac{0}{0}$ の形ですし，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ の形です。また，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ は 1^∞ の形です。このように

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ 0^0$$

などの形になるとき，これを **不定形** といいます。次に，その主なものを1つ，2つやってみましょう。

◆ $\frac{0}{0}$ **の場合**：——

練習 1. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 3x}{2x+\sin x}$ を求めよ。

(ヒント) $x\longrightarrow 0$ のとき分母も分子も0に近づきます。つまり $\frac{0}{0}$ なる不定形です。ところで $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ なる公式がありましたから

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{2+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+1\cdot 3}{2+1}=\frac{4}{3}$$

(答) $\frac{4}{3}$

練習 2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ を求めよ。　(阪大)

(解) 与式

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\frac{2}{3}$$

(答) $\frac{2}{3}$

(注) $\frac{0}{0}$ の形のときは **ロピタルの定理** が有効です。(☞ p. 166参照)

*　*　*

◆ $\frac{\infty}{\infty}$ **の場合**：——

練習 3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$ を求めよ。

(解) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$$

(答) $\frac{1}{3}$

練習 4. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5}{3^n+1}$ を求めよ。

(解) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{3^n}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{0+0}{1+0}=0$$

(答) 0

練習 5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-3}{x^3+2x^2+x+1}$ を求めよ。

(解) $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

*　*　*

◆ 1^∞ **の場合**：——

練習 6. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x}$ を求めよ。

(解) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{5}{2}}$

$=e^{\frac{5}{2}}$　　答　$e^{\frac{5}{2}}$

*　*　*

◆ $0\times\infty$ の場合：——

これはマチガイがスゴク多いのです。0を掛けるのだから0だと思いこむのです。しかし，そうはいきませんよ。

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{5}{n}=5,\quad \lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{3}{n}=\infty$$

をみればすぐわかるハズ。

練習 7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ を求めよ。

(ヒント) これは一種の暗記物，オボエテいなくてはできませんよ。

$$n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{n}{(1+2)^n}$$

$$=\frac{n}{1+n\cdot 2+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^2+\cdots\cdots}$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^2}=\frac{1}{2(n-1)}$$

$$\therefore\quad 0<n\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{2(n-1)}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$$

*　*　*

◆ 0^0 の場合：——

練習 8. $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x$ を求めよ。

(解) $u=x^x$ とおいて，両辺の対数をとると

$\log u=x\log x$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}\log u=\lim_{x\to+0}x\log x$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

これは $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ の形であるから，ロピタルの定理を使って

$$\lim_{x\to+0}\log u=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}\log u=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}u=1$$

答　1

*　*　*

◆ ∞^0 の場合：——

練習 9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ。

(ヒント)　$u=(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

とおいて，両辺の対数をとりますと

$$\log u=\frac{\log(1+3x)}{x}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\log u=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3x)}{x}$$

これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形ですから，ロピタルの定理を適用して

$$\lim_{x\to\infty}\log u=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{1+3x}}{1}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}u=1$$

答　1

練習 10. (1)　x を正の数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$(1+x)^n\geqq 1+nx$$

(2)　不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt[2n]{n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を証明せよ。

(3)　これを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ を求めよ。

(東京工大)

(ヒント) (1)　二項定理を適用せよ。

(2)　(1)において $x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とおいてみると

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\geqq 1+\frac{n}{\sqrt{n}}=1+\sqrt{n}$$

ここで $1+\sqrt{n}>\sqrt{n}$ を使う。

(3)　いよいよ本番は次を使う。

$$1\leqq\sqrt[n]{n}<\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

答　1

⑴ 分数関数の極限の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◈分数関数の極限に難問なしと心得よ。ただ，文字の入っているときの吟味だけが，数Ｉ的めんどうさをかもすのデス。

◆ 分数関数の極限を求める問題はべつにめんどうはないのです。ただ，とかく，場合分けの問題でひっかかることがあるのです。ご用心!!

＊　＊　＊

◆ まず，第1はxが有限な値に近づくときです。例えば，これです。

■練習 1. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2x}{(x-1)^2}$ を求めよ。

(ヒント) $x\longrightarrow1$ のとき，分子 $\longrightarrow+0$，分母 $\longrightarrow2$ ですから，もうわかるでしょう。

答 $+\infty$

■練習 2. $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{4}{x-2}$ を求めよ。

(ヒント) $x\longrightarrow2-0$ のとき 分母 $\longrightarrow-0$ ですから

与式$=-\infty$　　答 $-\infty$

■練習 3. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$ を求めよ。

(解) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x+2}$

$$=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

答 $-\dfrac{2}{3}$

(注) このように $\dfrac{0}{0}$ の形になるとき，**不定形**といいます。

■練習 4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{\sin5x}$ を求めよ。

(解) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{7x}\cdot\frac{5x}{\sin5x}\cdot\frac{7}{5}$

$$=1\cdot1\cdot\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

答 $\dfrac{7}{5}$

(注) 公式 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ については，(☞ p. 50) 参照。

■練習 5. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2+2x-3)}{\sin(x^2+x-2)}$ を求めよ。

(解) 与式

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2+2x-3)}{(x^2+2x-3)}\cdot\frac{(x^2+x-2)}{\sin(x^2+x-2)}\times\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

答 $\dfrac{4}{3}$

＊　＊　＊

◆ 次は文字の入った場合の扱い方です。

■練習 6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$ を求めよ。

(解) $x\longrightarrow0$ のとき 分母 $\longrightarrow0$，分子 $\longrightarrow1+a$ であるから

$a\neq-1$ のとき

与式$=\pm\infty$

$a=-1$ のとき

与式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}=\frac{3}{2}$$

答 $\begin{cases}a\neq-1 \text{ のとき} & \pm\infty\\ a=-1 \text{ のとき} & \dfrac{3}{2}\end{cases}$

(注) $a\neq-1$ の場合をていねいに書くなら，

$a>-1$ のとき

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}=-\infty$$

といったぐあい。$a<-1$ のときは逆になる!!

練習 7. $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$, $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$

および $\lim_{x\to0}f(x)=-4$ を満足する2次の整式 $f(x)$ を求めよ。（相模工大）

（解）$f(x)$ は $x-1$, $x-2$ なる因数をもたなければならないから

$$f(x)=a(x-1)(x-2)$$

とおくことができる。そして

$$\lim_{x\to0}f(x)=2a=-4 \text{ より } \quad a=-2$$

が必要で，したがって

$$f(x)=-2(x-1)(x-2)$$

でなければならない。

逆に，このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\{-2(x-2)\}=2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\{-2(x-1)\}=-2\neq2$$

となって，第2条件を満足しない。よって，求める $f(x)$ は存在しない。

答　解なし

*　*　*

◆ では，やや総合的なものをやってみませんか。

練習 8. $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)\sin x}{x-1}=0$, $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)\sin x}{x-2}=2$ となるような多項式 $f(x)$ のうち，次数の最も低いものを求めよ。（静岡大）

（解）$f(x)$ は多項式であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin x}{x}=\lim_{x\to0}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)=f(0)$$

$$\therefore\quad f(0)=1$$

次に，

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)\sin x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\sin1=0$$

であるから $f(x)$ は $(x-1)^2$ なる因数をもたなければならない。

同じく第3条件から $(x-2)$ なる因数をもたなければならない。ゆえに，

$$f(x)=(x-2)(x-1)^2g(x)$$

とおくことができる。ここに，$g(x)$ は多項式である。

そして，第1条件と第3条件から

$$2g(0)=-1$$

および

$$(\sin2)g(2)=2$$

を得る。$g(x)$ は多項式で，2つの条件が与えられているから，たかだか1次式のものを選ぶことができる。そこで

$$g(x)=Ax+B$$

とおくと

$$B=-\frac{1}{2},\ 2A+B=\frac{2}{\sin2}$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{\sin2}+\frac{1}{4}$$

ゆえに求める $f(x)$ は

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\sin2}\right)x-\frac{1}{2}\right\}$$

である。

練習 9. 2次式 $P(x)=ax^2+bx+c$ と3次式 $Q(x)=x^3+dx^2+ex+f$（係数はすべて実数）は次の性質を満たすとする。

(1) $Q(-2)=0$

(2) 方程式 $Q(x)=0$ と方程式 $P(x)+(x-1)R(x)=0$ とは共通解 $-1+i$ をもつ。ただし，$R(x)$ は $Q(x)$ を微分した式を表すものとし，i は虚数単位である。

(3) $\lim_{x\to-2}\dfrac{(x+2)P(x)}{Q(x)}=1$

このとき $P(x)$, $Q(x)$ の係数を求めると，まず(1), (2)より $d=\square$, $e=\square$, $f=\square$ である。また条件(3)より，c は a, b を用いて，$c=\square$ で表される。このことと(2)より $a=\square$, $b=\square$, $c=\square$ となる。（立命館大）

答 順に，4, 6, 4, $-4a+2b+2$,
5, 16, 14

◑無理関数の極限の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆無理関数の極限を求める計算にはかなりめんどうなものがあります。たかが有理化くらい，などと思っているとヒドイ目に会いますよ。

◆ 無理関数の入った極限の問題では，有理化することが焦点です。つまり

$$(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})=x-a$$

$$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})=x-a$$

の使い方です。

＊　＊　＊

◆ では，とりあえず，これを：――

■練習 1. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ を求めよ。

(解) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{2\cdot4}=\frac{1}{8}$$

答　$\dfrac{1}{8}$

(注) ロピタルの定理を使うのは，大げさですがやってみますと，

$$与式=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-0}{2x}=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

となります。

■練習 2. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+3}-2}$ を求めよ。

(解) 与式

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(注) ロピタルの定理を使えば

$$与式=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+8}}\Big/\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)=\frac{1}{6}\Big/\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$$

＊　＊　＊

■練習 3. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ を求めよ。　(阪大)

(ヒント) $\sqrt[3]{x}-1$ を有理化するために $\sqrt[3]{x}+1$ を分母・分子に掛ける人のいかに多きことよ!! これは，もちろん $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ を掛けるべきです。

(解) 与式

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2}{3}$$

答　$\dfrac{2}{3}$

(注) ロピタルの定理を使えば

$$与式=\lim_{x\to1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$$

となります。

＊　＊　＊

◆ では，次に $x\longrightarrow\infty$ における極限です。

■練習 4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ を求めよ。

(解) $\displaystyle 与式=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$

答　0

■練習 5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$ を求めよ。

(解) $\displaystyle 与式=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$ ……答

＊　＊　＊

◆ では，やや総合的な問題を練習してみませんか。

練習 6. 次の関数 $f(x)$ のグラフをえがけ。

$$f(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{ax\sin(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{\sqrt{ax^2+1}}$$

（阪大）

ヒント　$a\longrightarrow\infty$ のとき 分母 $\longrightarrow\infty$ ですが，分子は $ax\sin(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})$ がどのようになるかわからないのは困ったもの。そこで，まず $\sin(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})$ はどうなるのか，次に，さらに一歩を進めて $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$ がどうなるのか，が問題となりましょう。

さて：——

$$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{a\to\infty}\frac{\sin(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1$$

となりましょう。どうやら，ここまでくるとできそうだ。

(1)　$x\neq 0$ のとき

$$f(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{\sin(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\times\frac{2x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}\cdot\frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}$$

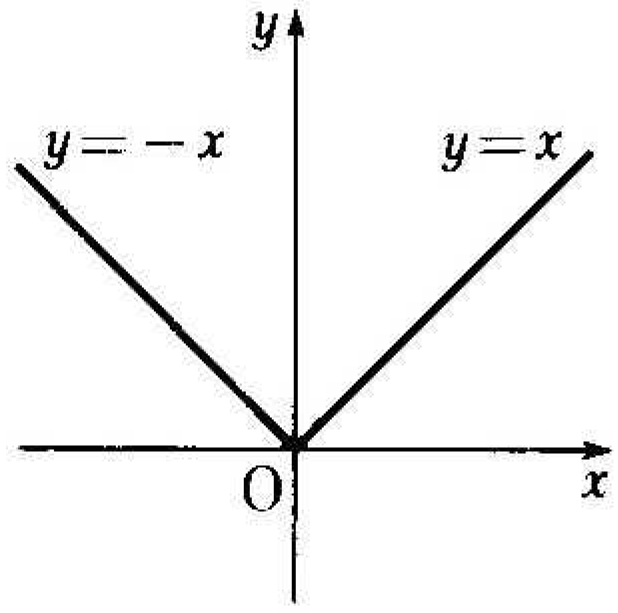
$$=1\cdot\lim_{a\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+\frac{x}{a}}+\sqrt{1-\frac{x}{a}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{a}}}$$

$$=\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x^2}{|x|}=|x|$$

(2)　$x=0$ のとき

$$f(0)=0$$

そこで求めるグラフは右のようになります。



注　上の解の前半で $x\neq 0$ をどこに使ったかわかりますか。$x=0$ のとき $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=0$ になるから……。

練習 7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+2x+3}-(ax+b)\}$ を求めよ。

解　$a\leqq 0$ のとき，明らかに

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+2x+3}-(ax+b)\}=+\infty$$

$a>0$ のときには

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+2x+3}-(ax+b)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+3)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(2-2ab)x+(3-b^2)}{\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x+(2-2ab)+\frac{3-b^2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}$$

$$=\begin{cases} a=1\ \text{のとき}\ \ \dfrac{2-2b}{2}=1-b \\ a>1\ \text{のとき}\ \ -\infty \\ 0<a<1\ \text{のとき}\ \ +\infty \end{cases}$$

上の結果をまとめて，求める答は

$1<a$ のとき　$-\infty$

$a=1$ のとき　$1-b$

$a<1$ のとき　$+\infty$

となります。

注　たいていの人は $a\leqq 0$ の場合をとり出さないで，すぐ有理化するために混乱してしまうのです。では，もう1つやって終わりにしましょう。

練習 8. $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=3n^2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2n-1}})$$

を求めよ。　（九大）

ヒント　$a_n=S_n-S_{n-1}=3(2n-1)\quad(n\geqq 2)$ を使って，

$$a_{2m}=3(4m-1),\quad a_{2m-1}=3(4m-3)$$

であることから

$$\text{与式}=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{3(2n^2+n)}-\sqrt{3(2n^2-n)}\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

答　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

◑ 三角関数の極限の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆極限を求めるものの中で，三角関数の入ったものには，とかくめんどうなのが出てくる。しかし，それは三角関数の計算に原因がある。

◆ 三角関数の入った極限の問題はほとんどすべてが次の公式

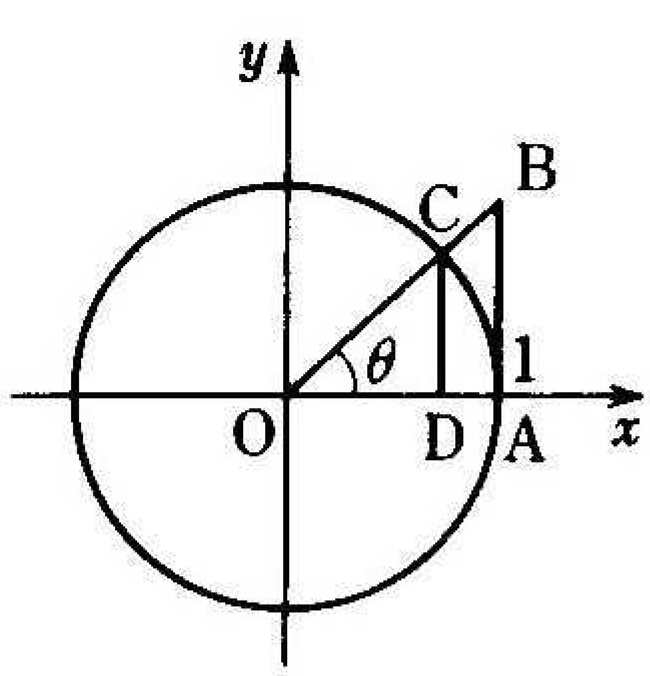
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad (\theta \text{はラジアン})$$

によって解けます。

では，まず，この公式の証明から：——

練習 1. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を証明せよ。

（信州大）



（解） 右の図において
$\triangle COD<$ 扇形OAC $<\triangle OBA$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cos\theta\cdot\sin\theta<\frac{1}{2}\theta\cdot 1^2<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta\sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \cos\theta<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\cos\theta\leqq\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\leqq\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

Q. E. D.

練習 2. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{\sin 3\theta}$ を求めよ。

（解） $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{\sin 3\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{5\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\cdot\frac{5}{3}$

$\displaystyle=1\cdot 1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$　　答　$\dfrac{5}{3}$

練習 3. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}$ を求めよ。

（解） $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$

$=1\cdot 1=1$　　答　1

＊　＊　＊

◆ さて，本質的には同じことですが，次に重要なタイプはこれです。

練習 4. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ を求めよ。

（ヒント） ここには $\cos\theta$ が入っていますが，公式（＊）を使うためには $\sin\theta$ の式に変形しなければなりません。

それには $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ **を使う** か，

あるいは $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ の **分母と分子に** $1+\cos\theta$ **を掛ける** かするのです。

（解） 1. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$　　答　$\dfrac{1}{2}$

（解） 2. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

答　$\dfrac{1}{2}$

練習 5. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 2\theta}{\sin^2 3\theta}$ を求めよ。

（解） 与式 $\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2\theta}{\sin^2 3\theta}$

$$=\lim_{\theta\to 0}2\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{(3\theta)^2}{\sin^2 3\theta}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$　……答

＊　＊　＊

◆ 三角関数の極限には見かけによらずめんどうなものもあります。次に，若干めんどうなものをやってみましょう。

■練習 6. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^2(1+\tan^2x)$ を求めよ。

（長崎大）

（解） $2x-\pi=\theta$ とおくと

$$与式=\lim_{\theta\to 0}\theta^2\sec^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}4\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2=4$$

答 4

■練習 7. $\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}$ を求めよ。

（山梨大）

（ヒント） 微分係数の定義の形（☞ p. 43）に似ていますね。さては，同じ流儀にちがいない。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\sin a-a^2\sin x}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)\sin a-a^2(\sin x-\sin a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{(x+a)\sin a-a^2\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right\}$$

$$=2a\sin a-a^2\cos a$$

答 $2a\sin a-a^2\cos a$

D練習 8. 2数 x，y の間に

$$xy-x^3\tan\frac{1}{x}+y^2=0$$

なる関係があるとき，$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ を求めよ。

（名古屋工大）

（ヒント） $xy-x^3\tan\frac{1}{x}+y^2=0$

の両辺を x^2 で割りますと

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)-x\tan\frac{1}{x}=0$$

となります。2次方程式の解の公式を使って解いてみますと

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4x\tan\frac{1}{x}}\right)$$

ところが，

$$\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=1$$

なんですから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$$

となりましょう。

答 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$

* * *

◆ なお，こんなのもありますよ。

D練習 9. 平均値の定理を利用して

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$$

を求めよ。

（福島県医大）

（ヒント） **平均値の定理** によれば（☞ p. 152）

$$\boldsymbol{f(a)-f(b)=(a-b)f'(c),\ a<c<b}$$

なる c があるのでした。

$f(t)=\sin t$ として，

$$\sin x-\sin(\sin x)=(x-\sin x)\cos c$$

なる関係があります。ここに，

$$x<c<\sin x$$

または

$$\sin x<c<x$$

です。

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos c=1$$

答 1

* * *

◆ 高校でやることにはなっていませんが，**ロピタルの定理**（☞ p. 166）はスゴク便利なことが多いのです。使い方をオボエテおきたいものだ。

◑対数関数の極限の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆対数関数の関係した極限の問題には，意外とめんどうなものが多いのです。しかし，幸いいい武器があるのデス!!

◆ このセクションでは対数関数の関係した極限の扱い方を練習しましょう。

■練習 1. $\lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)-\log x\}$ を求めよ。

(解) $\lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)-\log x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log 1=0$$

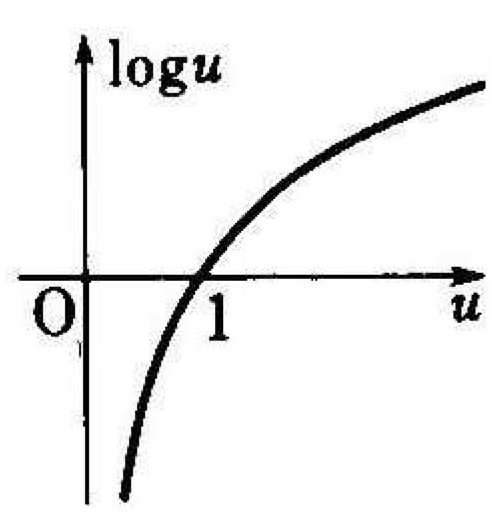
答　0

■練習 2. $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}$ を求めよ。

(ヒント) $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}$

$$=\lim_{u\to+0}\log u=-\infty$$

となることはすぐわかるでしょう。(右図参照)



■練習 3. $\lim_{x\to1}\{\log|x^2-1|-\log|x^2+x-2|\}$ を求めよ。

(ヒント) $\lim_{x\to1}\{\log|x^2-1|-\log|x^2+x-2|\}$

$$=\lim_{x\to1}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right|$$

$$=\lim_{x\to1}\log\left|\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}\right|$$

$$=\lim_{x\to1}\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|=\log\frac{2}{3}$$

(注) 絶対値がなかったらどうなるだろうか。このときには

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

なのですから

$x\longrightarrow 1+0$ のときは $\log\frac{2}{3}$

$x\longrightarrow 1-0$ のときは真数が負になってしまうので，もちろん極限はありません。

＊　＊　＊

◆ 次は，これです。

■練習 4. $\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}$ を求めよ。

(ヒント) $\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}$

ところが

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

です。(☞p. 170 参照)

$$\therefore\quad \lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=\log e=1\quad\cdots\cdots 答$$

■練習 5. $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+ax)}{x}$ を求めよ。

(ヒント) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+ax)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+ax)}{ax}\cdot a=a\cdot 1=a$$

答　a

■練習 6. 関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{(\log_a x)^h-1}{h}\quad(a>1,\ x>1)$$

で定義されている。このとき，

$f(x^2)-f(x)$ の値を求めよ。　(早大)

(ヒント) $(\log_a x)^t$ を $g(t)$ とおいてみますと，

$$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)$$

ところが，

$$g(t)=(\log_a x)^t$$

$$\therefore\quad g'(t)=\log(\log_a x)\cdot g(t)$$

$$\therefore\quad g'(0)=\log(\log_a x)$$

だから，……

答　$\log_e 2$

＊　＊　＊

◆ では，やや難問や総合的な問題をやってみませんか。

練習 7. $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{1}{a-b}\log\frac{a}{b}$ を求めよ。ただし，対数は自然対数である。（青山学院大）

（ヒント） b を変数として x と書きなおしてみようか。

$$与式=\lim_{x\to a}\frac{1}{a-x}\log\frac{a}{x}=\lim_{x\to a}\frac{\log a-\log x}{a-x}=\lim_{x\to a}\frac{\log x-\log a}{x-a}$$

これなら $\log x$ の $x=a$ における微分係数です（☞「基礎解析」p. 186）。だから，

$$与式=[(\log x)']_{x=a}=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=a}=\frac{1}{a}$$

（注） $a=0$ のときどうするか，などといってはいけません。$\log\frac{a}{b}$ から $a\neq 0$ はすでに約束されていると思うべきです。

練習 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\log x$ を求めよ。

（ヒント） $x\longrightarrow 0$ のとき $\log x\longrightarrow -\infty$ ですからこれは $0\times(-\infty)$ の形です。だから 0 だといってはいけません。

$$\lim_{x\to 0}x\times\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}x^2\times\frac{1}{x}$$

などを考えてみればわかるハズ。

さて，これは **ロピタルの定理**（☞ p.166）を使えばスゴク簡単です。つまり

$$\lim_{x\to 0}x\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

これは $\frac{\infty}{\infty}$ の形ですから，ロピタルの定理を使って，分母，分子を別々に x で微分します。すなわち，

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

答　0

練習 9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\log(1+x)}$ を求めよ。

（宮崎大）

（解）
$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}\cdot\frac{1}{\frac{\log(1+x)}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}\times$$
$$\times\frac{1}{\frac{\log(1+x)-\log 1}{x}}$$
$$=1\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=2$$

答　2

（注） ロピタルの定理を使えば次のようです。

与式において $x\longrightarrow 0$ のとき分母 $\longrightarrow 0$，分子 $\longrightarrow 0$ ですから

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{x\cdot\frac{1}{1+x}+1\cdot\log(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{\frac{x}{1+x}+\log(1+x)}$$

これも $\frac{0}{0}$ の形ですから，またもやロピタルの定理を使って，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}}$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

となります。では，もう 1 つ：——

練習 10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\sin x}{\log x}$ を求めよ。

（解） $x\longrightarrow 0$ のとき $\frac{-\infty}{-\infty}$ であるから，ロピタルの定理により

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1$$

答　1

＊　＊　＊

◐ 指数関数の極限の扱い方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆指数の入った極限の問題にはめんどうなものが少なくありません。しかし，ロピタルの定理を使えば著しく簡単になることが多い。

◆ 指数関数 e^x の極限について大切なことは3つ。それは：——

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to 0} e^x=1$$

あとは e^x と組合せる相手の関数によってめんどうになるだけです。ともあれ，これからはじめよう。

■練習 1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ を求めよ。

（解）
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$$
$$=\frac{1+0}{1-0}=1$$

答　1

■練習 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ を求めよ。

（ヒント）　xが0に近づくとき正のほうから近づくときは $x\longrightarrow+0$ で表し，負のほうから近づくときは $x\longrightarrow-0$ で表すのでした。

そして

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{2y}}{1+e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^y}{\frac{1}{e^y}+1}$$
$$=+\infty$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{y\to-\infty}\frac{e^{2y}}{1+e^y}$$
$$=\frac{0}{1+0}=0$$

このように近づき方によって値がちがうばかりでなく，一方は $+\infty$ に発散するのですから，極値なし，ということになります。

答　極値なし

＊　＊　＊

◆ 微分係数の定義

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は，極限を求めるのにしばしば有効です。例えば：——

■練習 3. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ を求めよ。

（ヒント）　$1=e^0$ に着目して

（解）
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h}$$
$$=(e^x)'_{x=0}=(e^x)_{x=0}=e^0=1$$

答　1

■練習 4. $f'(a)$ が存在するとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{e^{f(a+h)}-e^{f(a)}\}$$

を計算せよ。　（小樽商大）

（解）　$g(x)=e^{f(x)}$ とおくと

$$与式=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)$$

ところが

$$g'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$
$$\therefore\quad g'(a)=e^{f(a)}\cdot f'(a)$$

答　$f'(a)e^{f(a)}$

■練習 5. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}$ を求めよ。

（大阪教育大）

（解）　微分係数の定義により

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^{0+t}-a^0}{t}=(a^t)'_{t=0}$$

ところが $a^t=e^{t\log a}$ であるから

$$(a^t)'=(\log a)e^{t\log a}=(\log a)a^t$$
$$\therefore\quad (a^t)'_{t=0}=\log a$$

答　$\log a$

＊　＊　＊

◆ 次にめんどうな問題をいくつか扱ってみましょう。実は，このようなものは必ずしもできなくてよいのですが，わかっていればスゴク便利でもあるし，それに，**ロピタルの定理**（☞ p. 166）を使うなら簡単にできることが多いのです。では，まずこれから：——

練習 6. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$ を求めよ。ただし，n は自然数である。

（解） $e=2.718\cdots\cdots$ であるから

$$e=1+a \quad (a>0)$$

とおくことができる。そして

$$\frac{n^2}{e^n}=\frac{n^2}{(1+a)^n}$$

$$=\frac{n^2}{1+na+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3+\cdots}$$

$$<\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3}=\frac{\frac{6}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)a^3}$$

であるから

$$0\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)a^3}$$

$$\therefore\quad 0\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}\leqq0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=0 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注） 上の極限は $|x|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}nx^n=0$ などと同じくできるようにしておかなければなりません。しかし，次は，めんどうです。

練習 7. x が実数のとき，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$ を求めよ。

（ヒント） これは x が連続的に変わるのですから，上のように二項定理を使うわけにはいきません。しかし，前問の結果を使うことはできます。つまり：——

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x}=x^2e^{-x}$$

とおきますと，

$$f'(x)=x^2\cdot(-e^{-x})+2xe^{-x}$$

$$=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

したがって $x>2$ のとき $f(x)$ は単調に減少します。したがって

$$n<x<n+1$$

において

$$\frac{n^2}{e^n}>\frac{x^2}{e^x}>\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}$$

ゆえに

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^n}=0$$

となります。

ロピタルの定理を使うならごく簡単です。すなわち

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

となるからです。

では，もう1つやってみませんか。決して難しくはありませんよ。

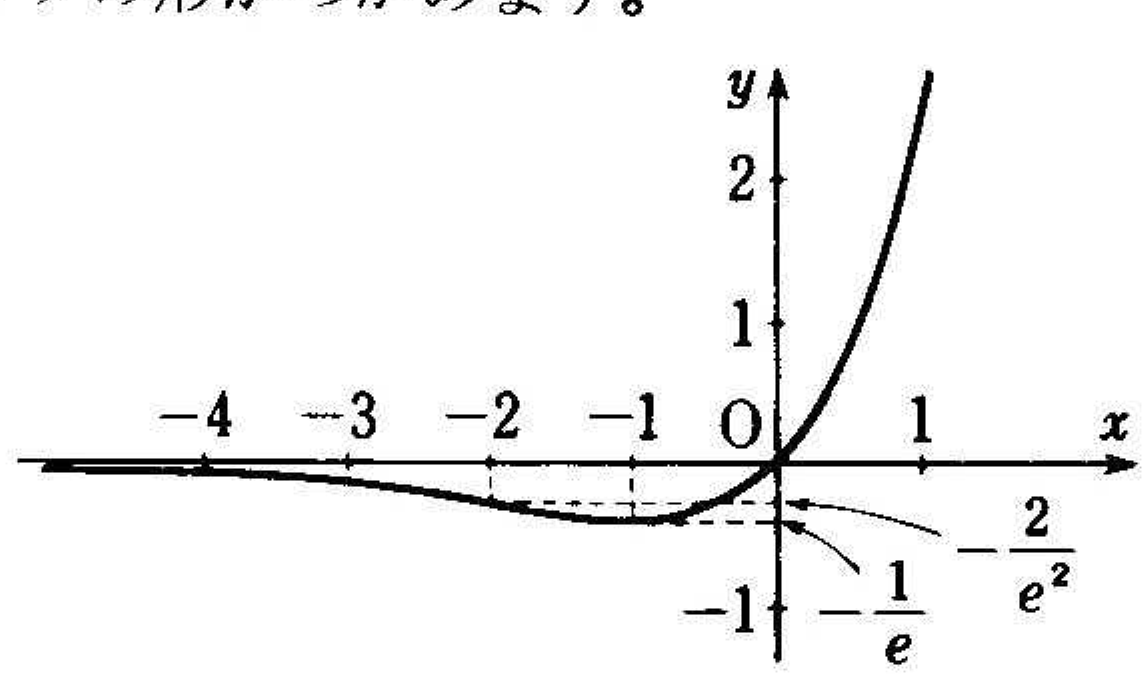
練習 8. $y=xe^x$ のグラフをかけ。

（ヒント） $\frac{dy}{dx}=xe^x+e^x=(x+1)e^x$

ですから $x=-1$ で極小値 $-\frac{1}{e}$ をとることとがわかります。次に，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(x+1)e^x+e^x=(x+2)e^x$$

ですから，$x=-2$ で変曲点 $\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)$ をとります。また，$\lim_{x\to\infty}xe^x=+\infty$，ここまでは順調!! 最後に，$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}$ としてロピタルの定理を使えば漸近線もわかり，グラフの形がつかめます。



●三角級数の和の求め方

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

◆三角級数の和は，あまりにテクニカルなものが多いから困る。しかし，多くは，やり方を指示してあるから気にすることもあるまい。

◆ 三角級数とは三角関数を項とする数列の和です。ここでは，その中から重要な二三を選んで練習しておくことにしましょう。

練習 1. $S=\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots\cdots$ $\cdots+\sin n\theta$ の両辺に $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ を掛けて，右辺の積を差で表すことにより和を求めよ。ただし，$\theta\fallingdotseq 2n\pi$。

ヒント 積を和になおす公式

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

を使うのです。

さて：——

$$S=\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta$$

両辺に $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ を掛けますと

$$\begin{aligned}&2\sin\frac{\theta}{2}S\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta+\cdots\\&\qquad\cdots+2\sin\frac{\theta}{2}\sin n\theta\\&=\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta\right)\\&\quad+\left(\cos\frac{3}{2}\theta-\cos\frac{5}{2}\theta\right)\\&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad+\left(\cos\frac{2n-1}{2}\theta-\cos\frac{2n+1}{2}\theta\right)\\&=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\theta=2\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

注 $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ をどうして掛けるのか，とはよく質問されることですが，これはいわば暗記もの。覚えておくより仕方がありません。

練習 2. $S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots$ $\cdots+\cos n\theta$ の和を求めよ。ただし，$\theta\fallingdotseq 2n\pi$

（両辺に $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ を掛けて変形せよ）

ヒント カッコの中の注意書きも，やったことのない人にはあまり役に立たないでしょう。ともあれやってみましょうか。

$$S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta$$

の両辺に $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ を掛けて

$$2\sin\frac{\theta}{2}S=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\cos 2\theta+\cdots$$
$$\cdots+2\sin\frac{\theta}{2}\cos n\theta$$

ところが，

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)$$

ですから，上の式の右辺は変形されて

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\theta}{2}S=&\left(\sin\frac{3\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\\&+\left(\sin\frac{5\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\&+\left(\sin\frac{7\theta}{2}-\sin\frac{5\theta}{2}\right)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\left(\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)\\=&\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\\=&2\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\end{aligned}$$

ハナレテイル項ガ消エルヨウナトキニハ、コノヨウニタテニ並ベルトヨイ

$$\therefore\quad S=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

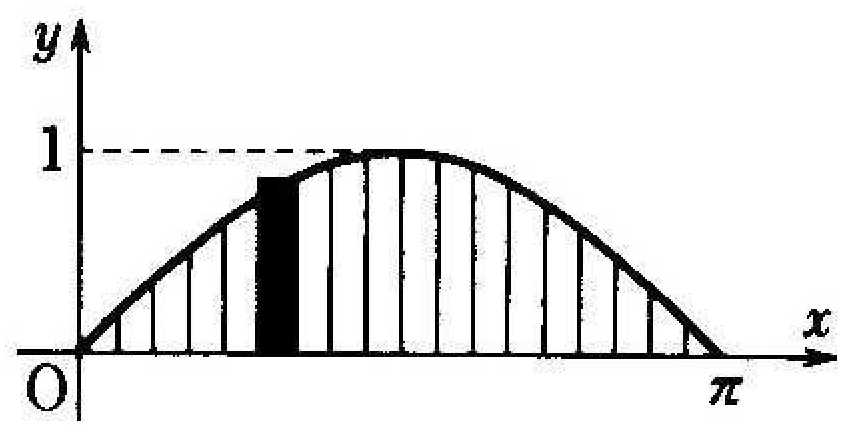
注 練習1. も練習2. も同じ $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ を掛けたことに注意してくださいよ。

＊　＊　＊

◆ では，三角級数の和の応用をやってみませんか。

練習 3. $\int_0^\pi \sin x\,dx$ を定義にしたがって積分せよ。

ヒント　$0\sim\pi$ の間を n 等分しますと，各分点の座標は $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, ……, $\frac{(n-1)\pi}{n}$ となりますから，定義から



$$\int_0^\pi \sin x\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right\}$$

ところで，右辺のカッコ｛　｝の中にあるものを S としますと，$\theta=\frac{\pi}{n}$ とおいて

$$S=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta$$

これは左のページですでにやったことでしたね。つまり

$$S=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

ここで $\theta=\frac{\pi}{n}$ を代入しますと

$$S=\frac{\sin\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\sin\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

となりますから，

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\pi=2$$

答　2

注　慶大には $\int_a^b \sin x\,dx$ が出ていますよ。

◆ ついでに，三角関数の入った連乗積（れんじょうせき）について1つやっておきましょう。

練習 4. 次の□の中を適当にうめよ。

$$P_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\log\cos\frac{\theta}{2^k}\right)+\log\sin\frac{\theta}{2^n}$$

の右辺を簡単にし，θ を含む項と含まない項の和に表せば

$$P_n=\log\square+\log\square$$

という形に変形できる。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}=\square$$

となる。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

（慶大）

ヒント　$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$

を Π_n とおきますと

$$\Pi_n\times\sin\frac{\theta}{2^n}$$
$$=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\right)$$
$$=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\left(\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots$$
$$\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-3}}\left(\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\theta$$
$$\therefore\quad P_n=\log\sin\theta+\log\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log\sin\theta}{n}-\log 2\right)$$
$$=-\log 2$$

といったぐあい！

答　（順に）　$\sin\theta$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $-\log 2$

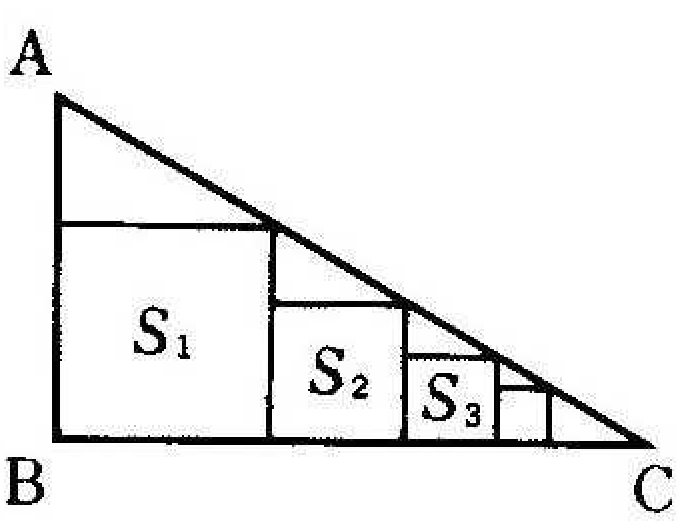
⑩ 極限の応用問題

1回目　年　月　日
2回目　年　月　日
3回目　年　月　日

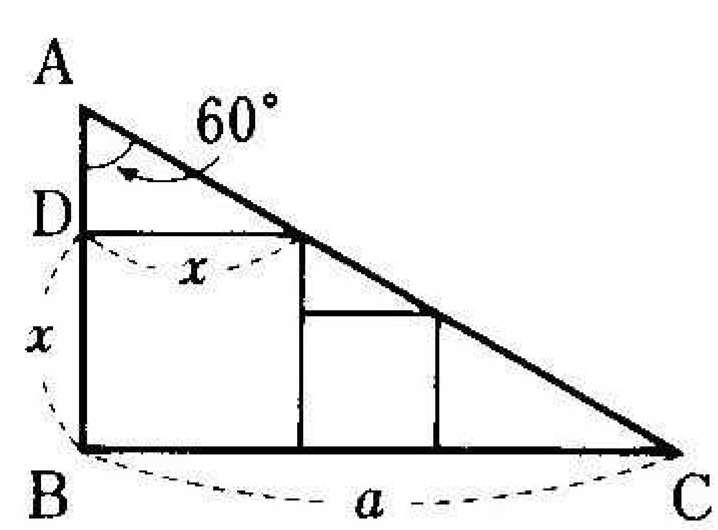
◈極限のいわゆる応用問題は微積には割合と多いものなんデス。やればできる，などとうそぶいていては困る。まず，これをやるべし。

◆ ここでは図形その他に対する極限の応用問題をやっておくのが目的です。では，さっそくはじめようではないか。

■練習 1. 右図のように直角三角形 ABC の中に正方形 S_1, S_2, S_3, ……を BC 上に1辺がくるように並べる。BC$=a$，$\angle$A$=60°$，$\angle$B$=90°$ とするとき，これらの正方形の面積の総和を求めよ。（静岡薬大）



（解） S_1 の1辺の長さを x とすると，右の図において



$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}-\mathrm{BD}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}a-x$$

また，

$$\mathrm{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}}a-x=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$$

$$\therefore \ \mathrm{AB}:x=\frac{a}{\sqrt{3}}:\frac{\sqrt{3}-1}{2}a=2:(3-\sqrt{3})$$

したがって S_2 の1辺は $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}x$ となる。

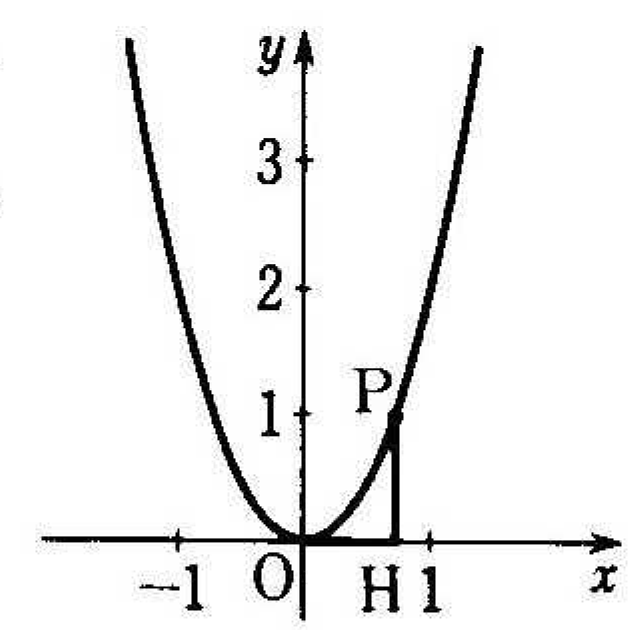
ゆえに S_1, S_2, ……は初項$\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2a^2$，公比 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ の無限等比数列をなす。したがって，その面積の総和は次のようになる。

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2a^2}{1-\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4-(3-\sqrt{3})^2}a^2$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-1}{11}a^2 \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

■練習 2. 放物線 $y=2x^2$ 上に動点 P をとり，P から x 軸に下した垂線の足を H とするとき，$\displaystyle\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{O}}\frac{\mathrm{OH}^2}{\mathrm{PH}}$ を求めよ。

（解） $\mathrm{P}(t,\ 2t^2)$ とすると，$\mathrm{H}(t,\ 0)$ であるから，

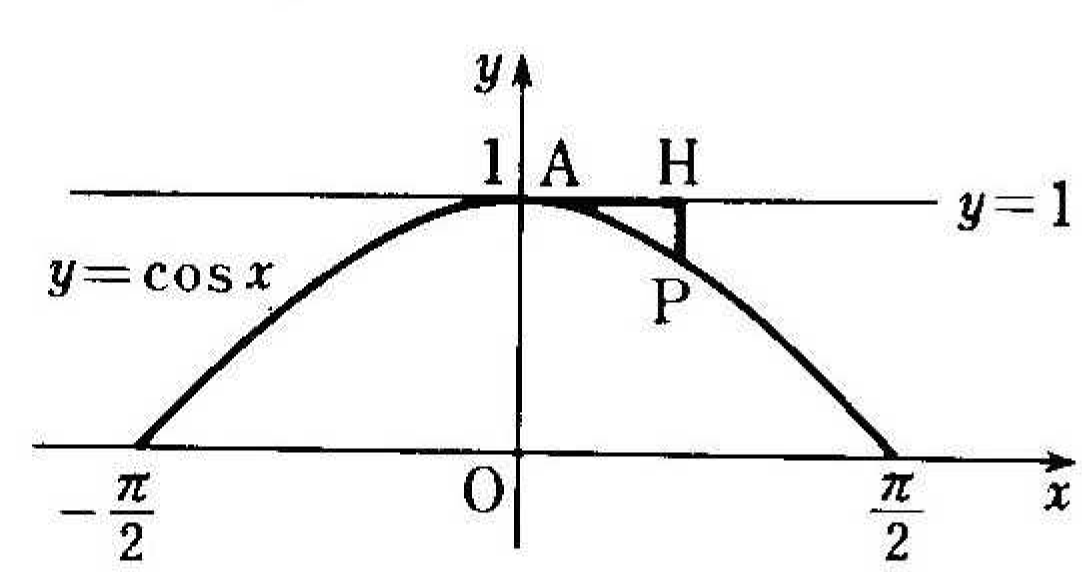


$$与式=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots \boxed{答}$$

（注） このようなものは簡単すぎてできない人が多いものだ。

■練習 3. 曲線 $y=\cos x$ 上の動点 P から，直線 $y=1$ に下した垂線の足を H とし，点 A(0, 1) をとるとき，$\displaystyle\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}$ を求めよ。

（ヒント） $\mathrm{P}(t,\ \cos t)$ とすると $\mathrm{PH}=1-\cos t$，$\mathrm{AH}=t$ ですから



$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{1-\cos t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t^2(1+\cos t)}{\sin^2 t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2(1+\cos t)=2$$

■練習 4. サイコロを n 回投げて出た目の最大値を X とする。変量 X の期待値を E_n とするとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n$ を求めよ。（秋田大）

(ヒント) E_n

$=\sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n-\left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$

$=6-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

ですから $\lim_{n\to\infty} E_n=6$ となります。 答 6

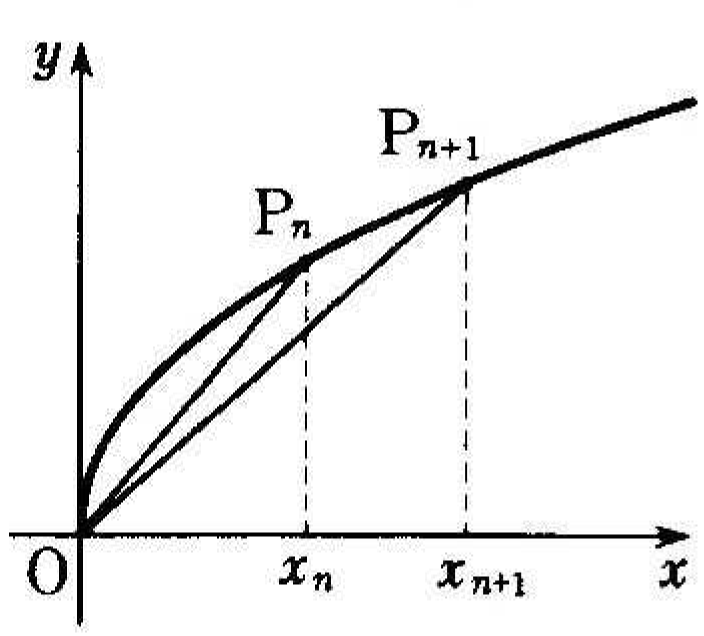
(注) 確率・統計をやらぬ人はモチロン不要!

*　*　*

◆ では，やや総合的な問題をやってみませんか。

練習 5. $x_1=1$, $x_2=4$, x_3, ……, x_n, ……を増加する数列とし，曲線 $y=\sqrt{x}$ 上に対応する点列 $P_1(1,\ 1)$, $P_2(4,\ 2)$, $P_3(x_3,\ \sqrt{x_3})$, ……, $P_n(x_n,\ \sqrt{x_n})$, …… をとる。原点をOとして線分 OP_n, OP_{n+1} と曲線の弧 P_nP_{n+1} とで囲まれた部分の面積を S_n とする。数列 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n, \cdots$ が公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列をなすとき，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ と $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

（奈良女大）



(ヒント) 直線 OP_n と弧 OP_n で囲まれた部分の面積を T_n としますと

$$T_n=\int_0^{x_n}\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}x_n\sqrt{x_n}$$

$$=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x_n}-\frac{1}{2}(\sqrt{x_n})^3=\frac{1}{6}(\sqrt{x_n})^3$$

ゆえに

$$S_n=T_{n+1}-T_n=\frac{1}{6}\{(\sqrt{x_{n+1}})^3-(\sqrt{x_n})^3\}$$

$$S_1=\frac{1}{6}\{(\sqrt{4})^3-(\sqrt{1})^3\}=\frac{7}{6}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{7}{6}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{35}{6} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

次に，$S_n=\frac{7}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ ですから

$$\frac{1}{6}(\sqrt{x_{n+1}^3}-\sqrt{x_n^3})=\frac{7}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \sqrt{x_{n+1}^3}-\sqrt{x_n^3}=7\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

つまり $\sqrt{x_1^3}$, $\sqrt{x_2^3}$, $\sqrt{x_3^3}$, …… の階差数列は等比数列 $\left\{7\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$ をなすから

$$\sqrt{x_n^3}=\sqrt{1^3}+\sum_{k=1}^{n-1}7\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

$$=1+\frac{7\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{4}{5}}$$

$$=1+35\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n^3}=1+35=36$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=6\sqrt[3]{6} \qquad \cdots\cdots \text{答}$$

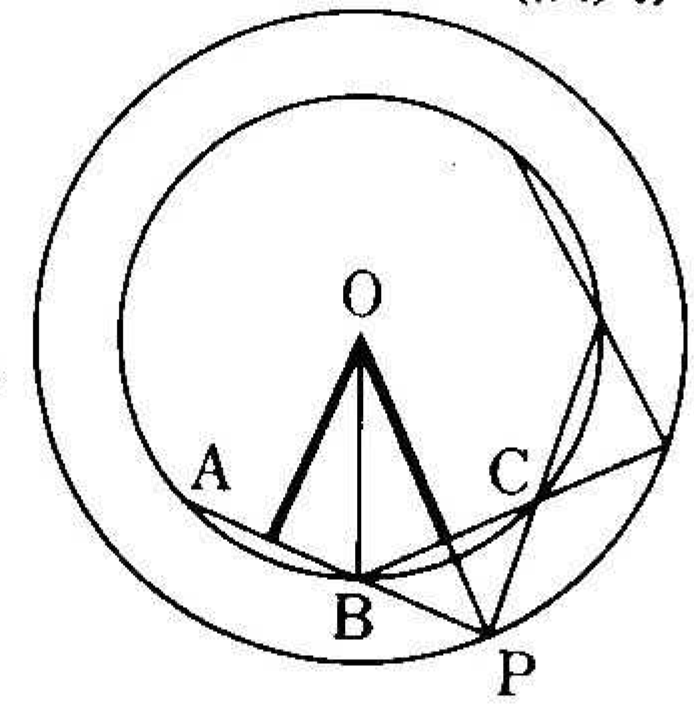
練習 6. 半径 r_n の円 $S_n(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ があり，各 n に対して，円 S_n に内接する正 2^{n+2} 角形の1つおいて隣りあう2辺の延長の交点を頂点とする正 2^{n+2} 角形は，円 S_{n+1} に内接している。次の問に答えよ。

(1) $r_{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=r_n\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ を示せ。

(2) $r_1=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ。

（阪大）

(ヒント) 右の図でOから AB, BC に下した垂線の長さはもちろん等しいでしょう。そして：――



AB に下した垂線の長さは

$$r_{n+1}\sin\angle OPA=r_{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle CBP\right)$$

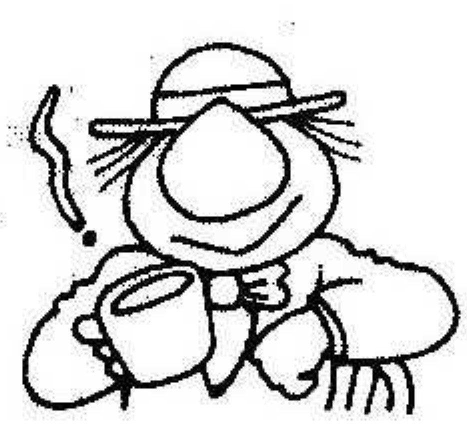
$$=r_{n+1}\cos\angle CBP=r_{n+1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

また，BC に下した垂線の長さは

$$r_n\cos\angle BOP=r_n\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

かくて，(1)は証明された。また

$$r_n=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\longrightarrow\sqrt{2}\quad(n\longrightarrow\infty)$$



図形の極限と蛇足

◈これは図形に関する極限ではありません。図形そのものの極限なのです。実は，暗々裡に使っていたことなのですが。

◆ 円 $(x-a)^2+y^2=a^2$ はいうまでもなく，中心 $(a,\ 0)$，半径 $|a|$ の円です。

さて，これをバラバラにして

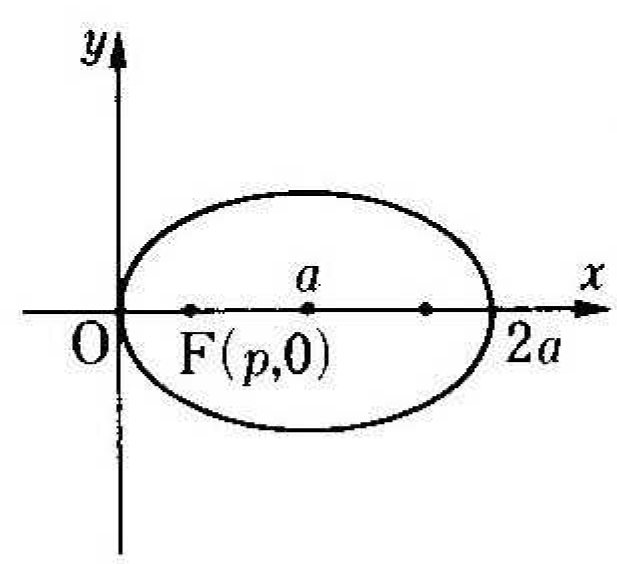
$$x^2-2ax+y^2=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{x^2+y^2}{2a}$$

ここで $a\to\infty$ としますと，$x\to0$

つまり，この円は $x=0$ に限りなく近づきます。すなわち，y 軸に近づくわけです。このことは中心が x 軸上にあって中心がはるかかなたにあれば，原点の付近では y 軸にほとんど重なることからわかるハズ。さて，次はどうでしょう。

◆ 点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点とし，原点を長軸の一端とする右のようなだ円の方程式は



$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{2ap-p^2}=1\quad\cdots\cdots(*)$$

のようにかけます。

なぜか？　だって！　それは代幾の範囲ですから，ここでは省略しましょう。ただし，a は長軸の半分です。ここで a を無限に大きくしていけばどうなるでしょうか。

(*)の分母を払って整理しますと

$$2apx^2-p^2x^2-4a^2px+2ap^2x+a^2y^2=0$$

となります。これはもちろん (*) と同じだ円ですよ。両辺を a^2 で割ると

$$\frac{2px^2}{a}-\frac{p^2x^2}{a^2}-4px+\frac{2p^2x}{a}+y^2=0$$

そこで，$a\to\infty$ としますと

$$-4px+y^2=0$$

つまり　$y^2=4px$

これは他でもない。点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点とし，$x=-p$ を準線とする放物線なのです。つまり，放物線はだ円の極限の形とみることができます。

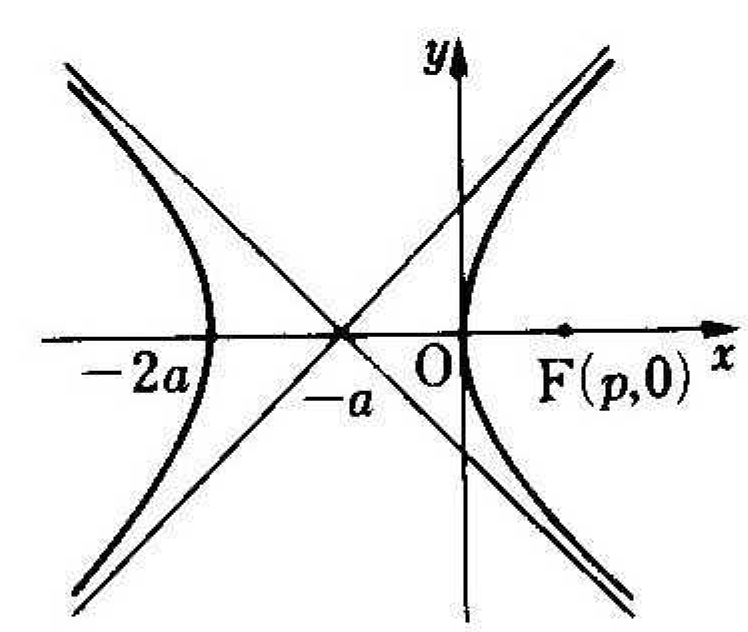
このことは，彗星の軌道にも現れます。確かにだ円軌道です。たとえば。ハレー彗星は大きなだ円軌道を描いて76.03年の周期で地球に近づきます。そして，目に見えるそれはほとんど放物線の軌道を描くのです。

◆ では，ついでに，もう1つ：——

点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点とし，原点が主軸の一端である双曲線の方程式は

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{p^2+2ap}=1$$

とかけます。



そこで，分母を払って変形しますと，次のようになります。

$$p^2x^2+2apx^2+2ap^2x+4a^2px-a^2y^2=0$$

両辺を a^2 で割って

$$\frac{p^2x^2}{a^2}+\frac{2px^2}{a}+\frac{2p^2x}{a}+4px-y^2=0$$

$a\to\infty$ としますと

$$4px-y^2=0$$

$$\therefore\quad y^2=4px$$

またもやおなじ結果になりました。

さあこのことがどんな意味をもつかということはやがて大学の数学科に行けばならうハズ。

こうして，おもしろいことは，いろいろとあるのです。